GEOMETRICA ET SPHAERICA QUAEDAM.

AUCTORE

L. EULERO.

Conventui exhibuit die 1 Maii 1780.

Tab. I. Fig. 1. §. 1. Contemplanti mihi nuper casum, quo in triangulo quocunque ABC ex angulis ad latera opposita utcunque ducuntur rectae Aa, Bb, Cc, se invicem in eodem puncto O secantes, subcurrit ista quaestio: quomodo ex harum rectarum binis partibus datis triangulum ipsum construi queat? Mox autem perspexi, hanc quaestionem in genere solutionem non admittere, nisi certa quaedam conditio inter sex illas partes locum habeat. Incidi ergo in sequens theorema satis memorabile.

Theorema.

Si in triangulo quocunque ABC *ex angulis ad latera opposita educantur, utcunque, rectae* Aa, Bb, Cc, *se mutuo in eodem puncto* O *secantes, tum semper ista proprietas locum habebit, ut sit:*

$$\frac{AO}{Oa} \cdot \frac{BO}{Ob} \cdot \frac{CO}{Oc} = \frac{AO}{Oa} + \frac{BO}{Ob} + \frac{CO}{Oc} + 2.$$

Demonstratio.

§. 2. Ad hoc demonstrandum vocemus partes descriptas:

$$AO = A;\ BO = B;\ CO = C,$$

$$Oa = a;\ Ob = b;\ Oc = c,$$

tum vero omnes sex angulos, circa punctum O formatos, notemus, uti in figura sunt signati, ubi statim evidens est fore $p + q + r = 180^\circ$. Jam ex formula, qua ex duobus lateribus trianguli, cum angulo intercepto, ejus area definiri solet, habebimus aream

$$AOc = \tfrac{1}{2} A c \sin. q,$$

atque aream $BOc = \frac{1}{2} Bc \sin. p$,

tum vero erit area $AOB = \frac{1}{2} AB \sin. (p + q)$.

Est autem $\sin. (p+q) = \sin. r$, unde, quia hoc triangulum aequatur summae duorum praecedentium, hinc deducitur ista aequatio:

$$AB \sin. r = Ac \sin. q + Bc \sin. p.$$

Similique modo reliquae partes dabunt has aequationes:

$$BC \sin. p = Ba \sin. r + Ca \sin. q,$$

$$CA \sin. q = Cb \sin. p + Ab \sin. r.$$

§. 3. Quo has aequationes ad usum nostrum propius accomodemus, eas in sequentes transformemus:

$$\frac{\sin. r}{c} = \frac{\sin. q}{B} + \frac{\sin. p}{A},$$
$$\frac{\sin. p}{a} = \frac{\sin. r}{C} + \frac{\sin. q}{B},$$
$$\frac{\sin. q}{b} = \frac{\sin. p}{A} + \frac{\sin. r}{C}.$$

Ubi evidens est, ternos angulos p, q, r, simili modo ad ternas literas A, B, C, vel etiam ad a, b, c referri.

§. 4. Ponamus porro $A = \alpha a$; $B = \beta b$; $C = \gamma c$; praeterea vero sit

$$\frac{\sin. p}{A} = \frac{\sin. p}{\alpha a} = P;$$
$$\frac{\sin. q}{B} = \frac{\sin. q}{\beta b} = Q;$$
$$\frac{\sin. r}{C} = \frac{\sin. r}{\gamma c} = R.$$

Hoc enim modo tres sequentes formulas simplicissimas adipiscemur:

$$\gamma R = P + Q; \quad \alpha P = Q + R; \quad \beta Q = R + P.$$

Harum autem aequationum differentiae statim suppeditant rationem inter binas literarum P, Q, R; inde enim concluduntur istae proportiones:

$$P : R = \gamma + 1 : \alpha + 1,$$
$$Q : P = \alpha + 1 : \beta + 1,$$
$$R : Q = \beta + 1 : \gamma + 1,$$

unde manifesto deducitur ista proportio geminata:

$$P : Q : R = \frac{1}{\alpha + 1} : \frac{1}{\beta + 1} : \frac{1}{\gamma + 1}.$$

Eodem scilicet modo ternae literae P, Q, R ad α, β, γ, ordine referuntur.

§. 5. Cum autem trium nostrarum aequationum prima praebeat $R = \frac{P+Q}{\gamma}$, ex secunda vero fiat $R = \alpha P - Q$, hi duo valores inter se aequati istam rationem inter P et Q producent: $\frac{P}{Q} = \frac{\gamma+1}{\alpha\gamma-1}$. Quare cum sit $\frac{P}{Q} = \frac{\beta+1}{\alpha+1}$, hoc modo ad aequationem perveniemus liberam a literis P, Q, R, quae erit: $\alpha\beta\gamma = \alpha + \beta + \gamma + 2$, quae manifesto est ipsa proprietas in theoremate enunciata, cum sit

$$\alpha = \frac{AO}{Oa};\ \beta = \frac{BO}{Ob};\ \gamma = \frac{CO}{Oc}.$$

Hoc igitur theoremate praemisso ipsam quaestionem initio memoratam aggrediamur.

Problema.

Ductis in triangulo quocunque ABC ex singulis angulis ad latera opposita ternis rectis Aa, Bb, Cc se mutuo in eodem puncto O secantibus, si cognitae fuerint harum rectarum binae partes scilicet:

$$AO = A;\ BO = B;\ CO = C,$$
$$Oa = a;\ Ob = b;\ Oc = c,$$

ex his sex quantitatibus ita datis, ut proprietas ante demonstrata locum habeat, constructionem ipsius trianguli investigare.

Solutio:

§. 6. Maneant omnes denominationes uti in demonstratione theorematis sunt constitutae, scilicet: $A = \alpha a$;

$B = \beta b$; $C = \gamma c$; tum vero $\sin. p = \alpha a P$; $\sin. q = \beta b Q$; $\sin. r = \gamma c R$; primo quidem inter literas α, β, γ ista relatio locum habere debet: $\alpha\beta\gamma = \alpha + \beta + \gamma + 2$.

§. 7. Cum jam literae P, Q, R inter se eandem teneant rationem, quam fractiones $\frac{1}{\alpha+1}$, $\frac{1}{\beta+1}$, $\frac{1}{\gamma+1}$, statuamus

$$P = \frac{\Delta}{\alpha+1}; \quad Q = \frac{\Delta}{\beta+1}, \quad R = \frac{\Delta}{\gamma+1},$$

ita ut hoc modo ipsae literae P, Q, R, ideoque etiam sinus angulorum p, q, r penitus ex calculo abigantur, earumque loco sola nova incognita Δ ingrediatur, cujus valore invento omnia innotescent, quae ad trianguli constructionem requiruntur.

§. 8. Hanc autem incognitam Δ ex ea conditione investigari oportet, quod ternorum angulorum summa $p+q+r$ duos rectos efficere debeat, sive ut sit $\sin. r = \sin. (p+q)$. Quia autem horum angulorum tantum sinus expressos invenimus, istam aequationem ad solos sinus redigi conveniet, quod quo facilius fieri queat, statuamus $\sin. p = f$, $\sin. q = g$; $\sin. r = h$ et jam fieri necesse est:

$$h = f\sqrt{1-gg} + g\sqrt{1-ff},$$

unde irrationalitates expellere debemus.

Sumantur ergo quadrata, eritque

$$hh = ff + gg - 2ffgg + 2fg\sqrt{(1-ff)(1-gg)}.$$

Partes jam rationales ad sinistram transferantur, sumtisque denuo quadratis pervenietur ad istam aequationem:

$$f^4 + g^4 + h^4 - 2ffgg - 2ffhh - 2gghh + 4ffgghh = 0.$$

§. 9. Cum igitur sit $f = \sin. p$, per denominationes ante stabilitas erit

$$f = \alpha a P = \frac{\alpha a \Delta}{\alpha + 1}; \quad g = \frac{\beta b \Delta}{\beta + 1}; \quad h = \frac{\gamma c \Delta}{\gamma + 1}.$$

Quamobrem ponamus brevitatis gratia $\frac{\alpha a}{\alpha + 1} = F$; $\frac{\beta b}{\beta + 1} = G$; $\frac{\gamma c}{\gamma + 1} = H$, ut sit $f = F\Delta$; $g = G\Delta$; $h = H\Delta$, hique valores in aequatione modo inventa substituti producent aequationem per Δ^4 divisibilem, quae erit

$$F^4 + G^4 + H^4 - 2F^2G^2 - 2F^2H^2 - 2G^2H^2 + 4F^2G^2H^2\Delta^2$$

unde concluditur

$$\Delta^2 = \frac{2F^2G^2 + 2F^2H^2 + 2G^2H^2 - F^4 - G^4 - H^4}{4F^2G^2H^2},$$

ita ut nostra incognita Δ jam perfecte sit determinata, cum sit

$$\Delta = \frac{\sqrt{(2F^2G^2 + 2F^2H^2 + 2G^2H^2 - F^4 - G^4 - H^4)}}{2FGH}$$

quod etiam hoc modo exprimitur per factores:

$$\Delta = \frac{\sqrt{(F+G+H)(F+G-H)(F+H-G)(G+H-F)}}{2FGH}.$$

§. 10. Cum igitur hae literae F, G, H dentur immediate ex quantitatibus cognitis A, B, C, et a, b, c, expressio inventa, quae non parum implicata videri queat, tamen per aream trianguli facillime construi potest. Construatur enim triangulum, cujus latera sint F, G, H, ejusque quaeratur area, quam vocemus M^2, atque notum est fore

$$M^2 = \frac{1}{4}\sqrt{(F+G+H)(F+G-H)(F+H-G)(G+H-F)}$$

qua denominatione introducta erit $\Delta = \frac{2M^2}{FGH}$; hocque valore cognito totum negotium est confectum; inde enim statim inveniuntur angulorum p, q, r sinus; scilicet:

$$\sin. p = \frac{\alpha a}{\alpha+1}\Delta;\quad \sin. q = \frac{\beta b}{\beta+1}\Delta;\quad \sin. r = \frac{\gamma c}{\gamma+1}\Delta;$$

Invento autem unico horum angulorum ipsum triangulum statim construi potest, quod per se facile intelligitur.

§. 11. His autem expeditis, nunc demum perspexi, theorema supra datum multo commodius et elegantius sequenti modo enunciari posse:

Theorema.

Ductis in triangulo quocunque ABC *ex angulis* A, B, C, *ad latera opposita rectis* Aa, Bb, Cc, *quae se invicem in eodem puncto* O *intersecent, semper ista proprietas locum habebit, ut sit* $\frac{Oa}{Aa} + \frac{Ob}{Bb} + \frac{Oc}{Cc} = 1$, *sive si earum rectarum partes,* Oa, Ob, Oc *per totas singulatim dividantur, tres fractiones inde ortae junctim sumtae semper unitati aequabuntur.*

Demonstratio, ex superiori derivata.

§. 12. Positis, ut supra fecimus, $AO = \alpha . Oa$; $BO = \beta . Ob$; $CO = \gamma . Oc$, ante demonstravimus, semper esse $\alpha\beta\gamma = \alpha + \beta + \gamma + 2$. Addatur jam utrinque haec expressio: $\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma + \alpha + \beta + \gamma + 1$, atque ex parte sinista prodibit $(\alpha+1)(\beta+1)(\gamma+1)$, at vero ex parte dextra $\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma+2(\alpha+\beta+\gamma)+3$, quae formula manifesto resolvitur in has partes:

$$(\alpha+1)(\beta+1)+(\alpha+1)(\gamma+1)+(\beta+1)(\gamma+1).$$

Hac igitur forma substituta, dividatur utrinque per productum $(\alpha+1)(\beta+1)(\gamma+1)$, ac prodibit

$$1=\frac{1}{\gamma+1}+\frac{1}{\beta+1}+\frac{1}{\alpha+1}\text{ . Q . E . D.}$$

§. 13. Hinc quoque derivari potest ista memorabilis proprietas: $\frac{\alpha}{\alpha+1}+\frac{\beta}{\beta+1}+\frac{\gamma}{\gamma+1}=2$. Si enim huic addatur praecedens aequatio, orietur ista aequatio identica: $1+1+1=3$.

Demonstratio simplicissima.

Elementis vulgaribus innixa.

§. 14. Per punctum O singulis trianguli lateribus parallelae ducantur $f\zeta$ ipsi BC, $g\eta$ ipsi AC et $h\theta$ ipsi AB, et statim evidens est fore $\frac{Bf}{AB}+\frac{A\eta}{AB}+\frac{f\eta}{AB}=1$. Nunc vero ob triangula ABa et AfO similia erit Tab. I. Fig. 2.

$$Bf : BA = Oa : Aa,$$

sicque prima fractio evadit $\frac{Oa}{Aa}=\frac{Bf}{BA}$. Deinde, quia $\Delta BAb \sim \Delta B\eta O$, erit $A\eta : AB = Ob : Bb$, unde ergo fit $\frac{A\eta}{AB}=\frac{Ob}{Bb}$. Denique $\Delta fO\eta \sim \Delta BCA$, hinc $f\eta : BA = fO : BC$, unde ergo fit $\frac{f\eta}{AB}=\frac{fO}{BC}$. Est vero $fO = BA$, hincque, quia triangulum $BCc \sim \Delta\theta CO$, erit $\frac{B\theta}{Bc}=\frac{Oc}{Cc}$, unde fit $\frac{f\eta}{BA}=\frac{Oc}{Cc}$, quibus valoribus substitutis aequalitas identica $\frac{Bf+A\eta+f\eta}{AB}=1$ induet hanc formam: $\frac{Oa}{Aa}+\frac{Ob}{Bb}+\frac{Oc}{Cc}=1$, quae est ipsa aequalitas demonstranda.

Tab. I. Fig. 3. §. 15. Haec insignis proprietas etiam semper locum habet, ubicunque punctum O extra triangulum accipiatur, veluti in figuri 3, dummodo denominationes per literas Aa, Bb, Cc rite statuantur. Ita in hac figura pro recta Aa erit $AO=A$, $Oa=a$, at pro recta Bb, posito $BO=B$, erit $Ob=-b$, atque pro recta Cc poni debet $CO=C$ et $Oc=-c$. Hinc ergo erit $Aa=A+a$; $Bb=B+b$; $Cc=-(C+c)$. Cum igitur semper sit $\frac{a}{a+A}+\frac{b}{b+B}+\frac{c}{c+C}=1$, erit pro lineis in figura ductis $\frac{Oa}{Aa}-\frac{Ob}{Bb}+\frac{Oc}{Cc}=1$.

§. 16. Hac autem proprietate stabilita satis commode area totius trianguli ABC inveniri poterit. Cum enim sit area trianguli $AOB=\frac{1}{2}AB\sin.r$, ob $\sin.r=CR$ ista area erit $AOB=\frac{1}{2}ABC.R$. Simili modo area AOC reperietur $=\frac{1}{2}ABC.Q$, et area $BOC=\frac{1}{2}ABC.P$, sicque tota trianguli area erit $=\frac{1}{2}ABC(P+Q+R)$.

§. 17. Postmodum vero porro posuimus $P=\frac{F\Delta}{A}$; $Q=\frac{G\Delta}{B}$; $R=\frac{H\Delta}{C}$. Erat autem $F=\frac{A}{\alpha+1}$; $G=\frac{B}{\beta+1}$; $H=\frac{C}{\gamma+1}$ (§. 9.); unde fiet area trianguli $=\frac{1}{2}ABC\Delta(\frac{1}{\alpha+1}+\frac{1}{\beta+1}+\frac{1}{\gamma+1})$. Demonstravimus autem esse $\frac{1}{\alpha+1}+\frac{1}{\beta+1}+\frac{1}{\gamma+1}=1$, quamobrem area nostri trianguli erit $=\frac{1}{2}ABC\Delta$. Praeterea vero consideravimus triangulum formatum a tribus lateribus F, G, H, ejusque aream posuimus $= M^2$, qua inventa nacti sumus valorem $\Delta = \frac{2M^2}{FGH}$, quo valore substituto area nostri trianguli ita exprimetur: $\frac{ABCM^2}{FGH}$. Cum ergo sit $F = \frac{A}{\alpha+1}$, $G = \frac{B}{\beta+1}$, $H = \frac{C}{\gamma+1}$, area erit

$$(\alpha+1)(\beta+1)(\gamma+1)M^2,$$

sicque area trianguli propositi ABC ad aream trianguli in subsidium vocati M^2 satis simplicem tenet rationem, scilicet ut $(\alpha+1)(\beta+1)(\gamma+1):1$, sive per lineas erit area $ABC : M^2 = Aa.Bb.Cc : Oa.Ob.Oc$.

SPHAERICA.

§. 18. Quae hactenus de triangulis planis sunt inventa, eadem quoque ad triangula sphaerica accommodari possunt. Proponatur scilicet triangulum sphaericum ABC, in quo ex angulis ad latera opposita ducti sint arcus se mutuo in eodem puncto O intersecantes, ac primo quidem inquirendum erit, quaenam conditio inter horum arcuum partes intercedere debeat, ut ex iis datis ipsum triangulum construi queat. Hunc in finem sequens theorema erit praemittendum: Tab. I. Fig. 4.

Theorema.

Si in triangulo sphaerico quocunque ABC, *ex singulis angulis in latera opposita ducantur arcus* Aa, Bb, Cc, *se mutuo in eodem puncto* O *intersecantes, tum positis brevitatis gratia* $\frac{tag.\,AO}{tag.\,Oa}=\alpha$, $\frac{tag.\,BO}{tag.\,Ob}=\beta$, $\frac{tag.\,CO}{tag.\,Oc}=\gamma$, *semper erit* $\alpha\beta\gamma=\alpha+\beta+\gamma+2$, *quae proprietas etiam ita referri potest, ut sit* $\frac{1}{\alpha+1}+\frac{1}{\beta+1}+\frac{1}{\gamma+1}=1$.

Demonstratio:

§. 19. Vocentur anguli circa punctum intersectionis, uti in figura sunt signati, arcus vero $AO=A$, $BO=B$, $CO=C$ et $Oa=a$, $Ob=b$, $Oc=c$,

In triangulo AOc erit $tag.\,AcO=\frac{sin.\,A\;sin.\,q}{cos.\,A\;sin.\,c-sin.\,A\;cos.\,c\;cos.\,q}$,

In triangulo BOc erit $tag.\,BcO=\frac{sin.\,B\;sin.\,p}{cos.\,B\;sin.\,c-sin.\,B\;cos.\,c\;cos.\,p}$.

§. 20. Quia nunc hi duo anguli simul sumti faciunt duos rectos, summa tangentium nihilo debet aequari, unde oritur haec aequatio:

$$\left.\begin{array}{l} sin.\,A\;cos.\,B\;sin.\,c\;sin.\,q-sin.\,A\;sin.\,B\;cos.\,c\;cos.\,p\;sin.\,q \\ +sin.\,B\;cos.\,A\;sin.\,c\;sin.\,p-sin.\,A\;sin.\,B\;cos.\,c\;cos.\,q\;sin.\,p \end{array}\right\}=0,$$

quae reducitur ad hanc simpliciorem:

$$\left.\begin{array}{l} +sin.\,A\;cos.\,B\;sin.\,c\;sin.\,q \\ +sin.\,B\;cos.\,A\;sin.\,c\;sin.\,p \end{array}\right\}=sin.\,A\;sin.\,B\;cos.\,c\;sin.\,r$$

ex qua colligitur

$$sin.\,r=\frac{sin.\,A\;cos.\,B\;sin.\,c\;sin.\,q+sin.\,B\;cos.\,A\;sin.\,c\;sin.\,p}{sin.\,A\;sin.\,B\;cos.\,c},$$

quae expressio porro hanc producit aequationem:

$$\frac{sin.\,r}{tag.\,c} = \frac{sin.\,p}{tag.\,A} + \frac{sin.\,q}{tag.\,B}.$$ Eodem modo erit

$$\frac{sin.\,p}{tag.\,a} = \frac{sin.\,q}{tag.\,B} + \frac{sin.\,r}{tag.\,C},$$

$$\frac{sin.\,q}{tag.\,b} = \frac{sin.\,r}{tag.\,C} + \frac{sin.\,p}{tag.\,A}.$$

§. 21. Cum autem posuerimus in theoremate $\frac{tag.\,A}{tag.\,a} = \alpha$; $\frac{tag.\,B}{tag.\,b} = \beta$; $\frac{tag.\,C}{tag.\,c} = \gamma$, his valoribus substitutis tres illae aequationes hanc formam induent:

$$\frac{sin.\,r}{tag.\,c} = \frac{sin.\,p}{\alpha\,tag.\,a} + \frac{sin.\,q}{\beta\,tag.\,b},$$

$$\frac{sin.\,p}{tag.\,a} = \frac{sin.\,q}{\beta\,tag.\,b} + \frac{sin.\,r}{\gamma\,tag.\,c},$$

$$\frac{sin.\,q}{tag.\,b} = \frac{sin.\,r}{\gamma\,tag.\,c} + \frac{sin.\,p}{\alpha\,tag.\,a}.$$

§. 22. Statuatur nunc porro $\frac{sin.\,p}{\alpha\,tag.\,a} = P$; $\frac{sin.\,q}{\beta\,tag.\,b} = Q$; $\frac{sin.\,r}{\gamma\,tag.\,c} = R$, quo facto ternae nostrae aequationes erunt

$$\gamma R = P + Q;\ \alpha P = Q + R;\ \beta Q = R + P,$$

ex quarum prima fit $R = \frac{P+Q}{\gamma}$, ex secunda vero $R = \alpha P - Q$, qui valores inter se aequati dant $\frac{P}{Q} = \frac{\gamma+1}{\alpha\gamma-1}$. Tum vero secunda aequatio, dempta tertia, praebet $\alpha P - \beta Q = Q - P$, unde deducitur $\frac{P}{Q} = \frac{\beta+1}{\alpha+1}$, ita ut habeamus hanc aequationem: $\frac{\gamma+1}{\alpha\gamma-1} = \frac{\beta+1}{\alpha+1}$, qua evoluta et in ordinem redacta colligitur:

$$\alpha\beta\gamma = \alpha + \beta + \gamma + 2.$$ Q. E. D.

Alia demonstratio ex primis Geometriae elementis petita.

§. 23. Concipiatur planum, quod sphaeram in puncto O tangat (quod quidem in figura non repraesentamus, quia facile intelligi poterit), ad quod ex centro sphaerae per puncta A, B, C et a, b, c educantur rectae, plano occurrentes in punctis A', B', C', a', b', c', ad quae puncta si ex O in plano ducantur rectae OA', OB', OC'; Oa', Ob', Oc', evidens est fore $OA' = \text{tag.} A$; similique modo $OB' = \text{tag.} B$; $OC' = \text{tag.} C$; tum vero $Oa' = \text{tag.} a$; $Ob' = \text{tag.} b$; $Oc' = \text{tag.} c$, anguli vero literis p, q, r, notati, iidem quoque in hoc plano manebunt.

§. 24. Hoc modo nunc adepti sumus triangulum planum $A'B'C'$ ex cujus angulis ad latera opposita ductae sunt rectae $A'a'$, $B'b'$, $C'c'$, quae se invicem in puncto O intersecant, sicque totum negotium reductum est ad casum trianguli plani, quocirca, si ponamus $\frac{OA'}{Oa'} = \frac{tag. A}{tag. a} = \alpha$; $\frac{OB'}{Ob'} = \frac{tag. B}{tag. b} = \beta$; $\frac{OC'}{Oc'} = \frac{tag. C}{tag. c} = \gamma$; certo erit, ut ante est demonstratum, tam $\alpha\beta\gamma = \alpha + \beta + \gamma + 2$, quam $\frac{1}{\alpha+1} + \frac{1}{\beta+1} + \frac{1}{\gamma+1} = 1$.

Problema.

Ductis in triangulo sphaerico quocunque ABC *ex singulis angulis in latera opposita arcubus* Aa, Bb, Cc, *se mutuo in eodem puncto* O *intersecantibus, si cognitae fuerint horum arcuum binae partes;*

$$AO = A,\ BO = B,\ CO = C,$$
$$Oa = a,\ Ob = b,\ Oc = c,$$

ex his sex quantitatibus ita datis, ut proprietas ante demonstrata locum habeat, ipsum triangulum investigare.

Solutio.

§. 25. Statuamus, ut in theoremate jam factum est, $\frac{\sin. p}{\alpha \, \text{tag.}\, a} = P$; $\frac{\sin. q}{\beta \, \text{tag.}\, b} = Q$; $\frac{\sin. r}{\gamma \, \text{tag.}\, c} = R$, atque has tres nanciscimur aequationes: $\gamma R = P + Q$; $\alpha P = Q + R$; $\beta Q = R + P$, ex quarum differentiis statim deducimus has formulas:

$\gamma R - \alpha P = P - R$, unde sequitur $\frac{P}{R} = \frac{\gamma + 1}{\alpha + 1}$.

Porro $\alpha P - \beta Q = Q - P$, unde fit $\frac{Q}{P} = \frac{\alpha + 1}{\beta + 1}$,

Denique $\gamma R - \beta Q = Q - R$, unde fit $\frac{R}{Q} = \frac{\beta + 1}{\gamma + 1}$;

unde patet, has literas P, Q, R eandem inter se tenere rationem, quam tenent hae fractiones: $\frac{1}{\alpha + 1}$, $\frac{1}{\beta + 1}$, $\frac{1}{\gamma + 1}$, quamobrem in usum sequentem statuamus:

$$P = \frac{\Delta}{\alpha + 1}; \quad Q = \frac{\Delta}{\beta + 1}; \quad R = \frac{\Delta}{\gamma + 1}.$$

§. 26. Nunc vero ex aequatione prima deducimus $R = \frac{P + Q}{\gamma}$, ex secunda vero $R = \alpha P - Q$, quibus coaequatis prodibit $\frac{P}{Q} = \frac{\gamma + 1}{\alpha\gamma - 1}$. Modo ante autem invenimus $\frac{P}{Q} = \frac{\beta + 1}{\alpha + 1}$, qui duo valores, si inter se coaequentur, praebent ipsam conditionem jam in theoremate demonstratam.

§. 27. Valoribus autem pro literis P, Q, R constitutis, inde elicimus pro sinubus angulorum p, q, r, hos valores: $\sin. p = \text{tag.}\, A \cdot \frac{\Delta}{\alpha + 1}$; $\sin. q = \text{tag.}\, B \cdot \frac{\Delta}{\beta + 1}$;

$\sin. r = \text{tag.}\, C \,.\, \frac{\Delta}{\gamma + 1}$. Quod si jam porro br. gr. statuamus $\frac{tag.\, A}{\alpha + 1} = F$; $\frac{tag.\, B}{\beta + 1} = G$; $\frac{tag.\, C}{\gamma + 1} = H$, conditio, quod summa angulorum debeat esse $p + q + r = 180°$, nobis suppeditat, prorsus ut in Problemate praecedente, hunc pro Δ valorem:

$$\Delta = \frac{\sqrt{(F+G+H)(F+G-H)(F+H-G)(G+H-F)}}{2\, F\, G\, H}.$$

Unde si iterum triangulum concipiamus, cujus latera sint F, G, H, ejusque aream vocemus M^2, erit prorsus ut ante $\Delta = \frac{2\, M^2}{F G H}$, sicque litera Δ per solas quantitates cognitas determinatur.

§. 28. Quia igitur valor ipsius Δ est cognitus, habebimus $\sin. p = \frac{2\, M^2}{GH}$; $\sin. q = \frac{2\, M^2}{FH}$; $\sin. r = \frac{2\, M^2}{FG}$; unde singulos angulos p, q, r definire licet; sufficiet autem unicum eorum nosse ad triangulum construendum. Hic autem notasse juvabit, formulam inventam geminos valores pro angulo p praebere, quorum alter alterius est complementum ad duos rectos, ita ut duae solutiones locum habeant; et quia angulorum obtusorum cosinus sunt negativi, ista negatio semper ita statui debet, ut fiat $\cos. r = -\cos. (p + q)$. Hoc igitur modo etiam hoc problema sphaericum plenissime est solutum.

SUPPLEMENTUM,

Continens analysin simplicissimam tam pro demonstratione theorematis quam pro solutione problematis ante propositi.

§. 29. Sit ABC triangulum quodcunque, ex cujus angulis ad latera opposita, utcunque sint ductae rectae Aa, Bb, Cc, se invicem in eodem puncto O secantes, ac vocemus ut ante $AO = A$, $Oa = a$, $BO = B$, $Ob = b$, $CO = C$, $Oc = c$, tum vero ex puncto O ducantur lateribus AB et AC parallelae $O\beta$ et $O\gamma$, atque his solis lineis opus erit ad totum negotium peragendum. Tab. I. Fig. 5.

§. 30. His constitutis similitudo triangulorum BCb et $B\gamma O$ dabit $\frac{C\gamma}{BC} = \frac{Ob}{Bb}$. Deinde similitudo triangulorum CBc et $C\beta O$ dabit $\frac{B\beta}{BC} = \frac{Oc}{Cc}$. Denique triangulum $\beta O\gamma$ simile est triangulo BAC et in utroque rectae Oa et Aa similiter sunt ductae, unde $\frac{\beta\gamma}{BC} = \frac{Oa}{Aa}$, sicque habemus has tres aequationes:

$$\frac{Oa}{Aa} = \frac{a}{A+a} = \frac{\beta\gamma}{BC},$$
$$\frac{Ob}{Bb} = \frac{b}{B+b} = \frac{C\gamma}{BC},$$
$$\frac{Oc}{Cc} = \frac{c}{C+c} = \frac{B\beta}{AC}.$$

Harum ergo trium fractionum summa erit:

$$\frac{\beta\gamma + C\gamma + B\beta}{BC} = 1,$$

quae est sine dubio demonstratio brevissima theorematis supra per longas ambages eruta.

§. 31. Ponamus nunc brevitatis gratia $\frac{Oa}{Aa} = \frac{a}{A+a} = \alpha$; $\frac{Ob}{Bb} = \frac{b}{B+b} = \beta$; $\frac{OC}{Cc} = \frac{c}{C+c} = \gamma$, ubi istas literas α, β, γ, cum supra usurpatis non confundi oportet. Hinc ergo erit $a = \frac{\alpha A}{1-\alpha}$, sive $A = \frac{a(1-\alpha)}{\alpha}$. Eodemque modo

$b = \frac{\beta B}{1-\beta}$, sive $B = \frac{b(1-\beta)}{\beta}$, atque

$c = \frac{\gamma C}{1-\gamma}$, sive $C = \frac{c(1-\gamma)}{\gamma}$.

Atque nunc literae α, β, γ, ita inter se referuntur, ut sit $\alpha + \beta + \gamma = 1$.

§. 32. Statuamus nunc totam trianguli basin $bC = x$, atque ejus tres partes $B\beta$, $\beta\gamma$, γC, ita determinabuntur: $\beta\gamma = \alpha x$; $B\beta = \gamma x$ et $C\gamma = \beta x$. Deinde quia triangulum $O a \beta$ simile est triangulo $A a B$, erit $\frac{Ba}{B\beta} = \frac{Aa}{AO}$, unde deducimus intervallum $Ba = \frac{B\beta \cdot Aa}{AO} = \frac{\gamma x}{A(A+a)} = \frac{\gamma x}{1-\alpha}$. Simili modo erit $Ca = \frac{\beta x}{1-\alpha}$.

Tab. I. Fig. 6. §. 33. His valoribus inventis consideremus tantum hoc triangulum BOC, in quo ducta est recta Oa, sitque, uti posuimus, $OB = B$, $OC = C$, $Oa = a$, qua recta basis BC ita secatur in a, ut sit $Ba : Ca = \gamma : \beta$, sicque nunc reducti sumus ad hoc problema: quomodo ex datis trianguli lateribus OB et OC, et recta Oa basin BC in data ratione secante, ipsum triangulum construi possit.

§. 34. Hunc in finem angulos ad punctum O ita denominemus, uti in figura sunt signati, eorumque summa $p + q + r$ aequetur duobus rectis. Jam ad rationem sinuum horum angulorum investigandam triangulum $\mathrm{OB}a$ dat hanc proportionem:

$$\sin.\mathrm{B} : \sin.r = \mathrm{O}a : \mathrm{B}a = a : \frac{\gamma x}{1-\alpha}.$$

At totum triangulum BOC praebet $\sin.p : \sin.\mathrm{B} = \mathrm{BC} : \mathrm{OC}$, quibus proportionibus inter se multiplicatis fiet

$$\sin.p : \sin.r = a : \frac{c\gamma}{1-\alpha},$$

ita ut sit $\sin.r = \frac{\mathrm{C}\gamma \sin.p}{a(1-\alpha)}$, similique modo reperietur

$\sin.q = \frac{\mathrm{B}\beta \sin.p}{a(1-\alpha)}$. Sicque ratio constat inter sinus angulorum q et r et sinum anguli p, quandoquidem assuminus, quantitates A, B, C, et a, b, c, hincque etiam α, β, γ, esse cognitas.

§. 35. Consideremus jam propius hos tres angulos p, q, r, quorum summa quia duobus rectis aequatur, dabitur aliquod triangulum, cujus anguli illis ipsis sunt aequales. Quare cum hi tres sinus, scil. $\sin.p$, $\sin.q$, $\sin.r$, eandem inter se teneant rationem, quam tenent istae tres quantitates cognitae: $a(1-\alpha)$; $\mathrm{B}\beta$; $\mathrm{C}\gamma$, si construamus triangulum ex his tribus lateribus, anguli illis oppositi erunt ipsi anguli quaesiti p, q, r.

§. 36. Totum ergo negotium conficietur, si construatur triangulum $\mathrm{O}\mathfrak{C}\mathfrak{B}$, cujus basis sit $\mathfrak{B}\mathfrak{C} = a(1-\alpha) = \mathrm{A}\alpha$ et latera $\mathfrak{B}\mathrm{O} = \mathrm{B}\beta$ et $\mathfrak{C}\mathrm{O} = \mathrm{C}\gamma$, hujus enim anguli erunt: ad $\mathrm{O} = p$, ad $\mathfrak{B} = r$ et ad $\mathfrak{C} = q$. Producto igitur la- Tab. I. Fig. 7.

tere $\mathfrak{B}$O in B, ut sit OB = B, si in altero latere O$\mathfrak{C}$ abscindatur portio OC = C, hae duae lineae jam inter se constituunt angulum $q + r$, uti calculus superior postulat; tum vero si ex O ducamus ipsi $\mathfrak{BC}$ parallelam Oa, habebimus simul punctum a in recta BC, erit idcirco ipsa recta Oa = a, hocque modo problema nostrum penitus est solutum. Quod si enim rectae BO ad alteram partem usque in b, CO usque in c et aO usque in A producantur, tota figura initio proposita erit completa, hocque modo ex datis sex quantitatibus A, B, C, una cum a, b, c, ita tamen, ut inventa conditio observetur, hac simplicissima operatione totum triangulum construitur.

§. 37. Casus ergo, quem hic tractavimus, eo majore attentione dignus est censendus, quod initio calculos satis abstrusos et molestos requirere videbatur, cum tamen, superatis omnibus difficultatibus, ad solutionem simplicissimam aeque ac elegantissimam sumus perducti.

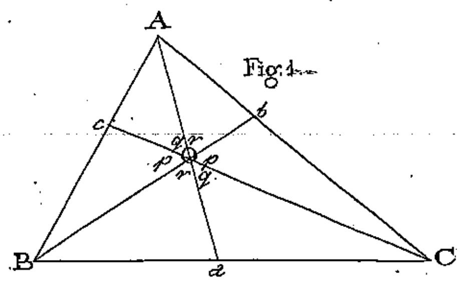
Fig. 1.

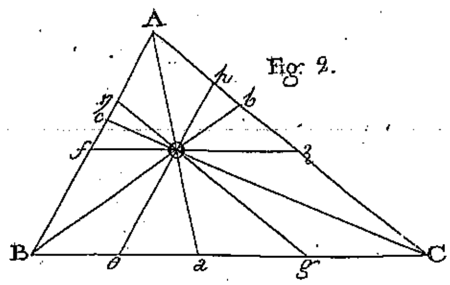
Fig. 2.

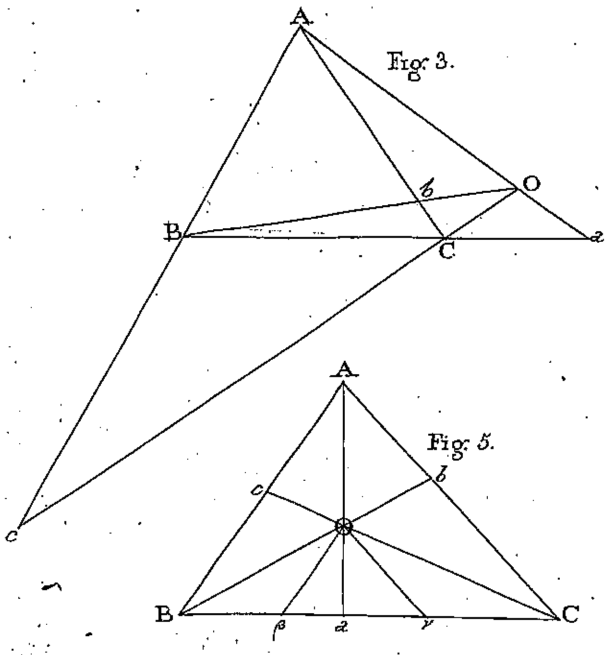
Fig. 3.
Fig. 5.

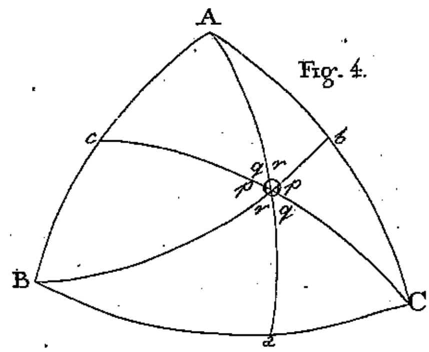
Fig. 4.

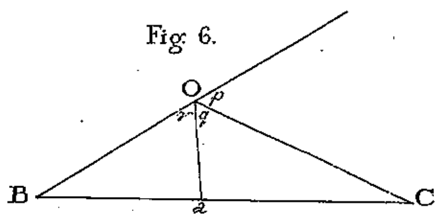
Fig. 6.

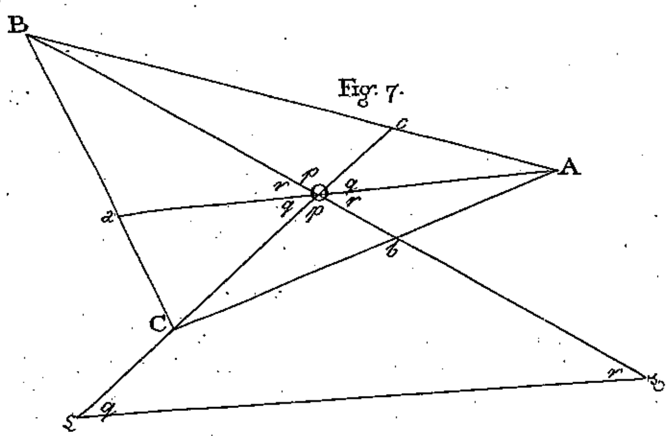
Fig. 7.