DE DIVISORIBUS NUMERORUM IN FORMA $mxx+nyy$ CONTENTORUM.

AUCTORE

L. EULERO.

Conventui exhibit die 21 Maii 1778.

§. 1.

Hic perpetuo assumimus binos numeros x et y inter se esse primos, atque notum est, numeros in tali forma contentos nunquam per omnes numeros primos dividi posse, sed semper pro qualibet forma certos numeros primos excludi, quorum multitudo quasi est semissis omnium plane numerorum primorum. Ita demonstratum est numeros in hac forma contentos $xx+yy$ per alios numeros primos dividi non posse, nisi qui sint formae $4N+1$, ideoque omnes numeros primos formae $4N-1$ penitus excludi.

§. 2. Eodem modo demonstratum est numeros in hac forma contentos $2xx+yy$ alios divisores primos non admittere, nisi qui contineantur in alterutra harum formarum: $8N+1$ vel $8N+3$, ita ut reliqui numeri primi in formis $8N+5$ et $8N+7$ contineantur. Simili modo omnes divisores primi numerorum formae $3xx+yy$ sunt vel formae $12N+1$ vel $12N+7$; reliqui vero, qui sunt vel formae $12N+5$ vel $12N+11$, nunquam divisores existere possunt; unde patet omnes divisores comprehendi in forma $6N+1$, exclusos vero in forma $6N+5$.

§. 3. Haud absimili modo res comparata est pro generali forma $mxx\pm nyy$, cujus omnes divisores primi continentur in certis hujusmodi formulis: $4mnN+\alpha$; $4mnN+\beta$; $4mnN+\gamma$ etc., ubi α, β, γ, etc. sunt certi numeri quovis casu facile determinandi, exclusi autem numeri continentur in totidem aliis formulis $4mnN-\alpha$; $4mnN-\beta$; $4mnN-\gamma$ etc. id quod sequenti modo commode exprimi potest, ut pro forma generali $mxx+nyy$ forma divisorum statuatur $4mnN+\alpha$, β, γ, δ, ε, etc., forma autem numerorum exclusorum $4mnN-\alpha$, $-\beta$, $-\gamma$, $-\delta$, $-\varepsilon$, etc.

§. 4. Hic primo pro quolibet casu numerorum m et n evidens est numeros α, β, γ, δ etc. primos esse debere respectu numeri $4mn$, quia aliter numeri primi prodire non possent. Deinde etiam facile intelligere licet inter numeros α, β, γ, semper contineri unitatem, atque etiam omnes numeros quadratos ad $4mn$ primos. Praeterea vero in ordine horum numerorum α, β, γ, δ, etc. semper etiam occurrunt omnes potestates singulorum, tum vero etiam omnia producta ex binis vel ternis, veluti $\alpha\beta$, $\alpha\beta\gamma$, quatenus scilicet numerum $4mn$ non superant. Denique etiam notasse juvabit, quovis casu istos numeros α, β, γ, δ, etc. tantum a producto mn pendere, ita ut hae duae formae generales $mxx + nyy$ et $m'xx + n'yy$, easdem divisorum formas habeant, si modo fuerit $m'n' = mn$.

§. 5. Haud abs re fore arbitror sequentem tabulam subjunxisse, quae pro simplicioribus numeris mn ostendat formas divisorum primorum:

Valores producti mn	Forma divisorum
1	4N+1,
2	8N+1, 3.
3	12N+1, 7.
5	20N+1, 3, 7, 9.
6	24N+1, 5, 7, 11.
7	28N+1, 9, 11, 15, 23, 25.
10	40N+1, 7, 9, 11, 13, 19, 23, 37.
11	44N+1, 3, 5, 9, 15, 23, 25, 27, 31, 37.
13	52N+1, 7, 9, 11, 15, 17, 19, 25, 29, 31, 47, 49.
14	56N+1, 3, 5, 9, 13, 15, 19, 23, 25, 27, 39, 45.
15	60N+1, 17, 19, 23, 31, 47, 49, 53.

§. 6. In his scilicet formis omnes numeri, qui divisores esse possunt cujuslibet numeri in forma $mxx+nyy$ contenti, divisione per $4mn$ facta, infra limitem $4mn$ reducuntur. Quodsi autem velimus numeros negativos admittere, tum omnes isti numeri adeo infra $2mn$ redigi poterunt; hocque modo omnes plane numeri ad $4mn$ primi et minores quam $2mn$ occurrent, vel signo $+$ vel signo $-$ affecti; et quoniam complementa horum numerorum ad $4mn$ praebent numeros exclusos, tantum opus est in illis formis signa permutare, ut obtineantur omnes numeri exclusi, qui nunquam esse possunt divisores cujusquam numeri formae $mxx+nyy$.

§. 7. Quodsi hoc modo divisores istius formae $mxx+nyy$ disponamus, ut omnes plane numeri ad $2mn$ primi, eoque minores, occurrant, egregiae proprietates in iis deprehendentur, si cuique horum numerorum suum complementum ad $2mn$ subscribamus; hocque modo superior ordo tantum usque ad mn procedet, dum majores ab mn usque ad $2mn$ illis subscribentur. Pro varia autem numeri mn indole patebit bina complementa sibi subscripta sive paribus affici signis, sive contrariis; paribus scilicet gaudebunt signis casibus, quibus est vel $mn = 4i+1$, vel $mn = 4i+2$, reliquis vero binis casibus, quibus vel

$mn = 4i + 3$, vel $mn = 4i + 4$, bina illa complementa contrariis signis afficientur.

§. 7. Hoc igitur modo superiores formulas pro divisoribus numerorum in forma $mxx + nyy$ contentorum repraesentemus, atque adeo ulterius continuemus:

mn	Forma divisorum
1	$4N + 1$
2	$8N + 1$,
	$+ 3$
3	$12N + 1$,
	$- 5$
4	$16N + 1, - 3$,
	$- 7, + 5$
5	$20N + 1, + 3$,
	$+ 9, + 7$
6	$24N + 1, + 5$,
	$+ 11, + 7$
7	$28N + 1, - 3, - 5$,
	$- 13, + 11, + 9$
8	$32N + 1, + 3, - 5, - 7$,
	$- 15, - 13, + 11, + 9$

mn	Forma divisorum
9	$36N+1, +5, -7$ $+17, +13, -11$
10	$40N+1, -3, +7, +9$ $+19, -17, +13, +11$
11	$44N+1, +3, +5, -7, +9$ $-21, -19, -17, +15, -13$
12	$48N+1, -5, +7, -11$ $-23, +19, -17, +13$
13	$52N+1, -3, -5, +7, +9, +11$ $+25, -23, -21, +19, +17, +15$
14	$56N+1, +3, +5, +9, -11, +13$ $+27, +25, +23, +19, -17, +15$
15	$60N+1, -7, -11, -13$ $-29, +23, +19, +17$
16	$64N+1, -3, +5, -7, +9, -11, +13, -15$ $-31, +29, -27, +25, -23, +21, -19, +17$
17	$68N+1, +3, -5, +7, +9, +11, +13, -15$ $+33, +31, -29, +27, +25, +23, +21, -19$
18	$72N+1, -5, +7, +11, -13, +17$ $+35, -31, -29, +25, -23, +19$

$m\,n$	Forma divisorum
19	76N+1, −3, +5, +7, +9, +11, −13, −15, +17 −37, +35, −33, −31, −28, −27, +25, +23, −21
20	80N+1, +3, +7, +9, −11, −13, −17, −19 −39, −37, −33, −31, +29, +27, +23, +21
21	84N+1, +5, +11, −13, +17, +19 +41, +37, +31, −29, +25, +23
22	88N+1, −3, −5, −7, +9, +13, +15, −17, +19, +21 +43, −41, −39, −37, +35, +31, +29, −27, +25, +23
23	92N+1, +3, −5, −7, +9, −11, +13, −15, −17, −19, −21 −45, −43, +41, +39, −37, +35, −33, +31, +29, +27, +25
24	96N+1, +5, +7, +11, −13, −17, −19, −23 −47, −43, −41, −37, +35, +31, +29, +25
25	100N+1, −3, −7, +9, −11, +13, +17, −19, +21, −23 +49, −47, −43, +41, −39, +37, +33, −31, +29, −27.

§. 9. Quodsi haec exempla rite contemplemur, insignia theoremata ex iis colligere poterimus, quae eo magis omnem attentionem merebuntur, quod principia, unde demonstratio petenda videtur, plerumque prorsus sunt etiamnunc incognita, ita ut ista consideratio amplissimum campum nobis aperiat naturam numerorum profundius perscrutandi.

Theorema I.

§. 10. Denotante p numerum quemcunque ad $2mn$ primum, si fuerit $4mna+p$ divisor cujuspiam numeri in forma $mxx+nyy$ contenti, tum omnes numeri primi, in formula $4mnz+p$ contenti, certè erunt divisores formae nostrae propositae; contra vero omnes plane numeri hujus formae $4mnz-p$ ex classe divisorum penitus excludentur.

Theorema II.

§. 11. Denotante p numerum ad $2mn$ primum, si fuerit $4mna+p$ numerus primus, neque ullius numeri in forma $mxx+nyy$ contenti divisor, tum omnes plane numeri in forma $4mnz+p$ contenti, sive sint primi sive compositi, ex classe divisorum excludentur; contra vero omnes numeri primi formae $4mnz-p$ certe erunt divisores cujuspiam numeri in forma $mxx+nyy$ contenti.

Theorema III.

§. 12. Denotante p numerum ad $2mn$ primum, si fuerit numerus $2mna-p$ divisor formae propositae $mxx+nyy$, tum omnes numeri primi, in forma $4mnz-p$ contenti, certe erunt divisores formae propositae; contra vero omnes plane numeri in forma $4mnz+p$ contenti ex classe divisorum excludentur.

Theorema IV.

§. 13. Denotante p numerum ad $2mn$ primum, si fuerit $4mna-p$ numerus primus, neque ullius numeri in forma $mxx+nyy$ contenti divisor, tum omnes plane numeri in forma $4mnz-p$ contenti, sive sint primi sive compositi, ex classe divisorum excludentur; contra vero omnes numeri primi formae $4mnz+p$ certe erunt divisores cujuspiam numeri in forma $mxx+nyy$ contenti.

Theorema V.

§. 14. Si fuerit mn numerus formae vel $4i+1$ vel $4i+2$, atque $4mna+p$ divisor formae $mxx+nyy$, ita ut omnes numeri primi in hac forma $4mnz+p$ contenti sint divisores formae propositae; tum omnes numeri primi in hac forma contenti $4mnz+2mn-p$ etiam erunt divisores formae propositae; contra vero omnes numeri formae $4mnz-2mn+p$, vel etiam $4mnz+2mn+p$, ex classe divisorum excludentur.

Theorema VI.

§. 15. Si fuerit mn numerus formae vel $4i+1$ vel $4i+2$, atque $4mna-p$ divisor formae $mxx+nyy$, ita ut omnes numeri primi in hac forma $4mnz-p$ contenti sint divisores formae propositae; tum omnes numeri primi in hac formula contenti: $4mnz-2mn+p$, etiam erunt divisores formae propositae; contra vero omnes numeri formae $4mnz-2mn-p$, vel etiam $4mnz+2mn-p$, ex classe divisorum excludentur.

Theorema VII.

§. 16. Si fuerit mn numerus vel formae $4i$ vel $4i-1$, atque $4mna+p$ divisor formae $mxx+nyy$, ita ut omnes numeri primi in hac forma $4mnz+p$ contenti sint divisores formae propositae; tum omnes numeri primi in hac formula contenti: $4mnz-2mn+p$, etiam erunt divisores formae propositae; contra autem omnes numeri formae $4mnz-2mn-p$ ex classe divisorum excludentur.

Theorema VIII.

§. 17. Si fuerit mn numerus formae vel $4i$ vel $4i-1$, atque $4mna-p$ divisor formae $mxx+nyy$, ita ut omnes numeri primi in hac forma $4mnz-p$ contenti sint divisores formae propositae, tum omnes numeri primi in hac forma contenti: $4mnz+2mn-p$, etiam erunt divisores formae propositae; contra vero omnes numeri formae $4mnz-2mn-p$ ex classe divisorum excludentur.

Corollarium.

§. 18. Denotante igitur p numerum quemcunque ad

$2mn$ primum, omnes numeri primi, vel in forma $4mnz+p$, vel in forma $4mnz-p$ contenti, certe erunt divisores formae propositae.

Theorema IX.

§. 19. Si in formula generali pro divisoribus formae propositae, prouti supra exhibuimus, occurrant partes f et g sive positivae, sive negativae, tum etiam ibidem earum productum fg occurret, atque adeo in genere non solum earum potestates quaecunque f^{μ} et g^{ν}, sed etiam omnia producta ex binis $f^{\mu} g^{\nu}$, ratione signorum rite habita, postquam scilicet hi numeri, divisione per $4mn$ facta, infra limitem $2mn$ fuerint reducti.

Corollarium.

§. 20. Hinc patet, si p denotet numerum quemcunque ad $2mn$ primum, tum semper omnes numeros primos in forma $4mnz+pp$ contentos fore divisores formae propositae; contra vero omnes numeros in forma $4mnz-pp$ contentos ex classe divisorum excludi.

Annotatio.

§. 21. Super formula generali, quam hic pro divisoribus formae propositae exhibemus, probe tenendum est non de omnibus numeris, in ista formula contentis, affirmari posse eos esse divisores, verum hoc tantum valere de numeris primis, quandoquidem occurrere possunt casus, quibus numeri compositi in hac formula contenti constant factoribus ex classe divisorum exclusis; contra vero omnes plane numeri in formula pro exclusis data, sive sint primi sive compositi, perpetuo excluduntur. Caeterum nunc multo certiorem methodum tradere licebit formulas pro divisoribus omnium formularum propositarum facile condendi, id quod in sequenti problemate ostendemus.

Problema.

Proposita numerorum forma quaecunque $mxx + nyy$ *investigare formulam generalem, quae omnium numerorum in ea contentorum divisores complectatur.*

Solutio:

§. 22. Hic ante omnia tenendum est pro litteris x et y perpetuo numeros inter se primos accipi debere, quia alioquin omnes plane numeri divisores existere possent. Deinde etiam statim patet semper inter divisores ipsos numeros m et n eorumque factores occurrere posse, unde nostrum problema tantum ad divisores, qui ad numeros m et n sint primi, restringitur, atque ut etiam binarius excludatur, quaeri oportebit divisores, qui sint primi ad $2mn$.

§. 23. Supra autem praecepimus formulae principali $4mnN$ adjungere omnes numeros ad $2mn$ primos atque minores quam mn, quippe quibus numeris constabat series superior, atque hic totum negotium eo erat reductum, ut cuilibet horum numerorum signum debitum praefigatur; hic quidem sponte patet primo horum numerorum, scilicet unitati, perpetuo signum $+$ esse tribuendum, et quia signa numerorum compositorum rationem multiplicationis sequuntur, hanc investigationem tantum ad numeros primos retulisse sufficiet.

§. 24. Sit igitur p numerus quicunque primus, minor quam mn, simulque diversus ab m et n, atque huic numero signum $+$ erit praefigendum. Quando dabitur numerus formae $mxx+nyy$ per p divisibilis, tum semper etiam dari poterit talis numerus $mn+yy$ pariter per p divisibilis, atque adeo ut y sit minus quam $\frac{1}{2}p$. Hinc igitur cum sit $p>mn$, nihil aliud requiritur, nisi ut litterae y ordine omnes valores ab 1 usque ad $\frac{1}{2}mn$ tribuantur, numerorumque resultantium omnes divisores primi minores quam mn et ab m et n diversi notentur, quandoquidem his signum $+$ erit praefigendum.

§. 25. His igitur numeris signatis reliquis numeris primis usque ad mn alterum signum $-$ dari oportebit, quo facto numeris compositis in eadem serie superiori occurrentibus sua debita signa, ex ratione multiplicationis, praefigantur.

§. 26. Postquam autem hoc modo superior numerorum series fuerit expedita, pro serie inferiori, quae continet complementa superiorum numerorum ad $2mn$, vel eadem signa, vel diversa, sunt praefigenda; prius scilicet quando numerus mn fuerit vel formae $4i+1$ vel $4i+2$, posterius vero quando ejus forma fuerit vel $4i$ vel $4i-1$, hocque modo tota formula pro divisoribus erit completa.

Exemplum I.

§. 27. Sumatur $mn = 24$, qui cum sit numerus formae $4i$, inferiori seriei signa contraria sunt danda. Jam numeri ad $2mn$ primi, minoresque quam 24, sunt 1. 5. 7. 11. 13. 17. 19. 23, qui omnes sunt etiam primi, unde in formula $24+yy$ ipsi y ordine tribuantur valores 1. 2. 3. etc. usque ad 12, sicque orietur progressio numerorum secundum numeros impares 1. 3. 5. 7. etc. crescentium, quorum singulorum notentur divisores primi minores quam 24, ternario excluso, quod commodissime sequenti modo fiet:

24		Divisores
1.	25	5
3.	28	7
5.	33	11
7.	40	5
9.	49	7
11.	60	5
13.	73	—
15.	88	11
17.	105	7
19.	124	—
21.	145	—
23.	168	7.

Hinc igitur patet solos numeros primos 1, 5, 7, 11, signo $+$ esse afficiendos, reliquos vero signo $-$; unde, seriem complementorum subscribendo, formula pro divisoribus erit:

$$96N \pm \begin{array}{l} +1, +5, +7, +11, -13, -17, -19, -23 \\ -47, -43, -41, -37, +35, +31, +29, +25 \end{array}$$

Exemplum II.

§. 28. Sit $mn = 26$, qui numerus cum sit formae $4i + 2$, series inferior eadem habere debet signa quae superior. Jam formula $26 + yy$, tribuendo ipsi y valores 1, 2, 3, usque ad 13, nobis praebebit divisores primos minores quam 26, excluso 13, uti sequens calculus ostendit:

26		Divisores	
1.	27	3.	
3.	30	3.	5
5.	35	5.	7
7.	42	3.	7
9.	51	3.	17
11.	62	—	
13.	75	5.	3
15.	90	3.	5
17.	107	—	
19.	126	3.	7
21.	147	3.	7
23.	170	5.	17
25.	195	3.	5

Numeri primi, qui hic signum + recipiunt, sunt 1, 3, 5, 7, 17, reliquis vero 11, 19, 23, signum — est praefigendum; compositis autem numeris dentur signa ex ratione multiplicationis orta, unde formula pro divisoribus sequenti modo formabitur:

$$\begin{array}{l} 104N + 1, + 3, + 5, + 7, + 9, - 11, + 15, + 17, - 19, + 21, - 23, + 25 \\ + 51, + 49, + 47, + 45, + 43, - 41, + 37, + 35, - 33, + 31, - 29, + 27. \end{array}$$

Exemplum III.

§. 29. Sumatur $mn = 27$, et cum hic numerus sit formae $4i - 1$, complementa infra scribenda signis contrariis affici debebunt. Quodsi jam formulam $27 + yy$ evolvamus, divisores primi minores quam 27, ternario excluso, signo + afficiendi reperientur 1, 7, 13, 19, unde reliqui primi, signum − sumendi, erunt 5, 11, 17, 23; quam obrem formula generalis pro divisoribus erit:

$$\begin{array}{l} 108\,N + 1, - 5, + 7, - 11, + 13, - 17, + 19, - 23, + 25 \\ \quad - 53, + 49, - 47, + 43, - 41, + 37, - 35, + 31, - 29. \end{array}$$

Exemplum IV.

§. 30. Sumatur $mn = 28$, et cum hic numerus sit formae $4i$, complementa infra scribenda signis contrariis affici debebunt. Quodsi nunc formulam $28 + yy$ evolvamus, divisores primi, minores quam 28, septenario excluso, signo + afficiendi erunt 1, 11, 23, reliqui vero primi, signo − afficiendi, erunt 3, 5, 13, 17, 19; quare formula generalis pro divisoribus erit:

$$\begin{array}{l} 112\,N + 1, - 3, - 5, + 9, + 11, - 13, + 15, - 17, - 19, + 23, + 25, - 27 \\ \quad - 55, + 53, + 51, - 47, - 45, + 43, - 41, + 39, + 37, - 33, - 31, + 29. \end{array}$$

Exemplum V.

§. 31. Sumatur $mn = 30$, et cum hic numerus sit formae $4i + 2$, numeri infra scribendi signis iisdem quibus superiores affici debebunt. Jam numeri ad $2mn$ primi minoresque quam 30, signo + afficiendi, sunt 1, 11, 13, 17, 23, 29, reliqui vero numeri primi, signo — affecti, sunt 7, 19; quare formula generalis pro divisoribus erit:

$$\begin{aligned}120N &+ 1, - 7, + 11, + 13, + 17, - 19, + 23, + 29\\ &+ 59, - 53, + 49, + 47, + 43, - 41, + 37, + 31.\end{aligned}$$

Exemplum VI.

§. 32. Sumamus $mn = 50$, et cum hic numerus sit formae $4i + 2$, complementa infra scribenda signis iisdem affici debebunt. Jam formula $50 + yy$ praebet sequentes divisores primos, minores quam 50, excepto 5, qui signo + sunt afficiendi 1, 3, 11, 17, 19, 41, 43; reliqui vero primi, signo — afficiendi, sunt 7, 13, 23, 29, 31, 37, 47, quare formula generalis pro divisoribus erit:

$$\begin{aligned}200N &+ 1, + 3, - 7, + 9, + 11, - 13, + 17, + 19, - 21, - 23, + 27, - 29, - 31, + 33, - 37, - 39, + 41, + 43, - 47, + 49\\ &+ 99, + 97, - 93, + 91, + 89, - 87, + 83, + 81, - 79, - 77, + 73, - 71, - 69, + 67, - 63, - 61, + 59, + 57, - 53, + 51.\end{aligned}$$

Exemplum VII.

§. 33. Sumamus denique $mn = 60$, et cum hic numerus sit formae $4i$, complementa infra scribenda signis contrariis affici debebunt. Quodsi jam formulam $60 + yy$ evolvamus, divisores primi, minores quam 60, exceptis 3 et 5, signo + afficiendi reperientur 1, 17, 19, 23, 31, 47, 53; unde reliqui primi, signum — sumendi, erunt 7, 11, 13, 29, 37, 41, 43, 59; quare forma generalis pro divisoribus erit:

$$\begin{aligned}240N &+ 1, - 7, - 11, - 13, + 17, + 19, + 23, - 29, + 31, - 37, - 41, - 43, + 47, + 49, + 53, - 59\\ &- 119, + 113, + 109, + 107, - 103, - 101, - 97, + 91, - 89, + 83, + 79, + 77, - 73, - 71, - 67, + 61.\end{aligned}$$

ADDITAMENTUM

ad dissertationem de divisoribus numerorum in forma $mxx + nyy$ *contentorum.*

Haud abs re erit singularem observationem hic subjungere circa postremas partes cujusque formulae divisorum, quippe quas in genere assignare licet, si modo sex casus a se invicem distinguantur.

Observatio I.

Si fuerit $mn = 4i$, tum in formula pro divisoribus data in serie superiore ultimus terminus semper erit $-(4i-1)$, ejusque complementum ad $8i$, ipsi subscribendum, erit $+(4i+1)$, quandoquidem habere debet signum contrarium. Cum enim sit $mn = 4i$, erit $mn + 1 = 4i + 1$, qui numerus, quia est primus ad mn, certe habere debet signum $+$, ideoque ejus complementum, supra scribendum, signum contrarium $-$.

Observatio II.

Si fuerit $mn = 4i + 2$, quo casu complementa iisdem gaudent signis, erit $mn + 1 = 4i + 3$, qui numerus cum sit primus ad mn, habere debet signum $+$, ejus ergo complementum, supra scribendum, pariter signum habebit $+$.

Observatio III.

Si fuerit $mn = 8i + 1$, quo casu bina complementa aequalibus gaudent signis, in serie superiore ultimus terminus erit $8i - 1$, ejusque complementum $= 8i + 3$, quibus ambobus signum $-$ praefigi debet, sicque hoc casu termini ultimi erunt:

$$-(8i - 1)$$
$$-(8i + 3).$$

Quin etiam hoc casu terminos penultimos assignare licet. Cum enim sit $mn + 4 = 8i + 5$, huic numero signum $+$, ideoque etiam ejus complemento $8i - 3$ idem signum praefigendum erit; unde patet his casibus, quibus $mn = 8i + 1$, binos ultimos terminos esse:

$$+(8i - 3) - (8i - 1)$$
$$+(8i + 5) - (8i + 3).$$

Observatio IV.

Si fuerit $mn = 8i + 3$, ultimus terminus in superiori serie erit $8i + 1$, ejusque complementum, contrario signo notandum, $8i + 5$. Quia autem superior numerus quadratum esse potest, is signum $+$ habere debet, ideoque complementum signum $-$; penultimi vero numeri erunt $8i - 1$, $8i + 7$, quorum inferior, quia est $mn + 4 = 8i + 7$, signum $+$ recipit, ideoque superior contrarium $-$; unde pro casibus, quibus est $mn = 8i + 3$, bini ultimi erunt:

$$-(8i-1)+(8i+1)$$
$$+(8i+7)-(8i+5).$$

Observatio V.

Si fuerit $mn = 8i+5$, ultimae formae divisorum erunt $8i+3$, $8i+7$, atque paribus signis afficientur, quod deprehenditur esse $+$; penultimi autem termini erunt $8i+1$, $8i+9$, quorum inferior quia est $= mn+4$, habebit signum $+$, ideoque etiam supra scriptus. Consequenter casibus, quibus est $mn = 8i+5$, in formula divisorum bini ultimi termini erunt:

$$+(8i+1)+(8i+3)$$
$$+(8i+9)+(8i+7).$$

Observatio VI.

Si fuerit $mn = 8i+7$, in formula divisorum ultimi termini sunt $8i+5$ et $8i+9$, quorum inferior certe signum $+$ habere debet, quia quadrata complecti potest, superior vero signum $-$; penultimi vero termini sunt $8i+3$ et $8i+11$, quorum inferior, utpote $= mn+4$, certe habet signum $+$, ideoque superior signum $-$. Quamobrem casibus, quibus est $mn = 8i+7$, in formula pro divisoribus inventa bini ultimi termini erunt:

$$-(8i+3)-(8i+5)$$
$$+(8i+11)+(8i+9).$$