SOLUTIO QUAESTIONIS CURIOSAE EX DOCTRINA COMBINATIONUM,

AUCTORE

L. EULERO.

Conventui exhibita die 18 Octobris 1779.

I. Quaestio, quam hic evoluendam suscipio, ita enunciatur: *Data serie quotcunque litterarum* a, b, c, d, e *etc., quarum numerus sit* n, *invenire quot modis earum ordo immutari possit, ut nulla in eo loco reperiatur, quem initio occupaverat.* Hic statim manifestum est, si postrema conditio praetermittatur, atque adeo numerus omnium plane permutationum quaeratur, eum fore productum omnium numerorum ab unitate usque ad n. Hic autem omnes eos ordines excludi oportet, ubi quaepiam littera locum initialem esset habitura, unde numerus permutationum, quem quaerimus, minor erit quam $1.2.3 \ldots n$.

II. Ut in solutionem hujus quaestionis inquiramus, consideremus primo casus simplicissimos, ex quibus deinceps methodum colligamus, solutionem pro litterarum numero quantumvis magno derivandi. Ac primo quidem, si unica proponatur littera a, evidens est nullam variationem locum habere. Propositis duabus litteris ab, unica variatio locum habet, scilicet ba. Pro tribus autem litteris abc duae tantum variationes dari possunt, quae sunt bca, cab. At si quatuor litterae $abcd$ dentur, tres casus hic occurrunt, quibus vel b, vel c, vel d primum obtineat locum; casu igitur, quo b in primo loco locatur, ternae reliquae tres variationes admittunt, quae sunt adc, dac, cda; totidem igitur etiam variationes habebuntur, si tam litterae c, quam d primus locus tribuatur, sicque omnino novem variationes locum habere possunt, quae sunt:

$badc$	$cadb$	$dabc$
$bdac$	$cdab$	$dcab$
$bcda$	$cdba$	$dcba$

III. Evolvamus simili modo casum quinque litterarum $abcde$, ubi primum locum tenere potest vel b, vel c, vel d, vel e. Occupet ergo b primum locum, secundum autem locum demus litterae a, ac tres reliquae c, d et e duas variationes, quae sunt $badec$, $baecd$, admittent. Quando autem ipsi a sedes tertia tribuitur, ternae reliquae tres variationes admittunt, quas ita repraesentemus: $bcaed$, $bdaec$, $beacd$. Simili modo si litterae a quarta sedes tribuatur, etiam tres variationes locum habent, quae sunt $bedac$, $bcead$, $bdeac$. Denique si litterae a quintum locum assignemus, tres variationes erunt sequentes: $bcdea$, *bdeca; bedca.* Dum igitur litterae *b* primus locus datur, omnino undecim variationes dabuntur; totidem vero etiam occurrent, si vel *c*, vel *d*, vel *e* in primo loco collocetur. Unde concludimus omnino quater undecim sive 44 variationes locum habere pro quinque litteris *abcde*.

IV. Sin autem simili modo ad plures litteras progredi vellemus, enumeratio omnium casuum nimis fieret difficilis et operosa, quin etiam lubrica; unde in methodum certam nobis erit inquirendum, cujus ope numerus variationum semper accurate assignari queat, quantumvis magnus fuerit litterarum numerus. Hunc in finem plurimum juvabit idoneum characterem in subsidium vocare, quo pro quocunque litterarum propositarum numero multitudo omnium variationum indicetur. Denotet igitur iste character $\Pi : n$ numerum omnium variationum, quas n litterae admittunt, et quoniam casus, quibus n est vel 1, vel 2, vel 3, vel 4, vel 5, jam expedivimus, nunc jam novimus fore $\Pi : 1 = 0$; $\Pi : 2 = 1$; $\Pi : 3 = 2$; $\Pi : 4 = 9$ et $\Pi : 5 = 44$; unde patet, ulterius progrediendo, numeros variationum mox in immensum crescere.

V. Hoc jam charactere constituto quaeramus statim in genere numerum omnium variationum pro litterarum numero $= n$, qui ergo erit $\Pi : n$; ubi totum negotium eo redit, ut investigetur quemadmodum iste numerus quaesitus ex praecedentibus, qui sunt $\Pi:(n-1)$; $\Pi:(n-2)$; $\Pi:(n-3)$ etc. componatur. Ratiocinium vero simili modo instituamus, quo ante sumus usi. Primo scilicet considerabimus casum, quo littera b in primo loco locatur: facile enim intelligitur, quot variationes pro hoc casu prodierint, totidem quoque esse prodituras, si quaecunque alia littera in primo loco constituatur; unde intelligitur, quicunque numerus variationum fuerit inventus, dum littera b primum locum obtinet, eum per $n-1$ multiplicatum praebiturum esse numerum omnium variationum possibilium, ideoque valorem characteris $\Pi:n$.

VI. Hic autem duos casus evolvi convenit, prouti littera a vel secundum locum tenet, vel alium quemcunque. Constituamus igitur a in secundo loco, et investigandum erit, quot variationes reliquae litterae c, d, e, f etc. sint admissurae, quarum numerus cum sit $n-2$, numerus variationum per hypothesin erit $\Pi:(n-2)$. Collocemus porro a in tertium vel alium quemcunque locum, et jam quaestio oritur, quot variationes litterae b, c, d, e, f etc. admittant; ubi notandum est in earum variationibus litteram b non amplius occurrere posse, quia jam primum locum obtinet, sed ejus loco in variationibus ingredi litteram a; sicque perinde erit, ac si, rejecto primo loco, variationes litterarum a, c, d, e, f etc. quaererentur, quarum numerus cum sit $n-1$, multitudo omnium variationum per hypothesin erit $\Pi : (n-1)$, Consequenter, dum littera b in primo loco constituitur, numerus omnium variationum erit $\Pi : (n-2) + \Pi : (n-1)$.

VII. Jam per se manifestum est, totidem quoque variationes esse prodituras, si quaelibet reliquarum litterarum in primo loco scribatur; quare cum omnium harum litterarum, prima a exclusa, numerus sit $n-1$, numerus omnium plane variationum erit $(n-1)\,\Pi : (n-2) + (n-1)\,\Pi : (n-1)$, qui ergo est valor formulae quaesitae $\Pi : n$, ita ut sit:

$$\Pi : n = (n-1)\;\Pi : (n-1) + (n-1)\,\Pi : (n-2), \text{ sive}$$
$$\Pi : n = (n-1)\,[\Pi : (n-1) + \Pi\,(n-2)].$$

Sicque duorum characterum immediate praecedentium summa, scilicet $\Pi : (n-1) + \Pi : (n-2)$, multiplicata per $n-1$, semper dabit characterem sequentem $\Pi : n$, cujus regulae ope progressio, quam numeri variationum pro singulis litterarum numeris constituunt, quousque lubuerit, facile continuari poterit.

VIII. Quod quo facilius appareat, incipiamus a casibus simplicissimis, atque valores characteris $\Pi : n$ in sequente tabula exhibeamus:

$$\Pi:3=2(\Pi:2+\Pi:1)=2.(1+0)\;=2$$
$$\Pi:4=3(\Pi:3+\Pi:2)=3.(2+1)\;=9$$
$$\Pi:5=4(\Pi:4+\Pi:3)=4.(9+2)\;=44$$
$$\Pi:6=5(\Pi:5+\Pi:4)=5.(44+9)\;=265$$
$$\Pi:7=6(\Pi:6+\Pi:5)=6.(265+44)\;=1854$$
$$\Pi:8=7(\Pi:7+\Pi:6)=7.(1854+265)\;=14833$$
$$\Pi:9=8(\Pi:8+\Pi:7)=8.(14833+1854)\;=133496$$
$$\Pi:10=9(\Pi:9+\Pi:8)=9.(133496+14833)=1334961.$$

IX. Ordinemus hos numeros $\Pi:n$, ad suos indices n relatos, in sequentem seriem:

n	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9,
$\Pi:n$	0,	1,	2,	9,	44,	265,	1854,	14833,	133496.

Quodsi jam hanc seriem attentius consideremus, egregiam relationem deprehendemus, qua quilibet numerus ad praecedentem refertur, quemadmodum sequens tabella declarat:

$$2=3\,.\,1-1$$
$$9=4\,.\,2+1$$
$$44=5\,.\,9-1$$
$$265=6\,.\,44+1$$
$$1854=7\,.\,265-1$$
$$14833=8\,.\,1854+1$$
$$133496=9\,.\,14833-1$$

etc.

Cujus ergo observationis beneficio nostram progressionem multo facilius continuare licet, dum quilibet terminus semper est certum multiplum praecedentis, unitate vel auctum vel minutum, sicque in genere erit $\Pi : n = n\Pi : (n-1) \pm 1$. Ubi notetur signum $+$ valere, si n fuerit numerus par, signum vero $-$, quando n fuerit numerus impar.

X. Mirum videbitur, quomodo binae istae leges progressionis inter se cohaereant: facile autem ex lege posteriori prior derivatur. Posito enim $\Pi : n = n\Pi : (n-1) \pm 1$, erit etiam simili modo $\Pi : (n-1) = (n-1)\Pi : (n-2) \mp 1$. Hae duae formulae addantur, ut signa ambigua, $+$ vel $-$, se multo destruant, et summa erit:

$$\Pi : n + \Pi : (n-1) = n\Pi : (n-1) + (n-1)\Pi : (n-2)$$

unde sequitur fore;

$$\Pi : n = (n-1)\Pi : (n-1) + (n-1)\Pi : (n-2),$$

quae est ipsa lex progressionis prior. Verum non tam facile est posteriorem legem ex priore derivare; interim tamen res succedet, si nempe a casibus simplicissimis incipiamus, observando quod $\Pi : 1 = 0$ et $\Pi : 2 = 1$. Hinc enim erit $\Pi : 3 = 2 . \Pi : 2 = 3 . \Pi : 2 - 1$, unde fit $3\,\Pi : 2 = \Pi : 3 + 1$. Cum jam sit ex priore lege: $\Pi : 4 = 3 . \Pi : 3 + 3 . \Pi : 2$, si hic loco $3\,\Pi : 2$ substituatur valor modo inventus, prodibit $\Pi : 4 = 4 . \Pi : 3 + 1$, unde fit $4 . \Pi : 3 = \Pi : 4 - 1$. Jam sequens relatio erat: $\Pi : 5 = 4 \Pi : 4 + 4 \Pi : 3$, ubi si loco $4 \Pi : 3$ valor modo inventus scribatur, prodibit: $\Pi : 5 = 5 \Pi : 4 - 1$, ideoque $5 \Pi : 4 = \Pi : 5 + 1$. At sequens relatio est: $\Pi : 6 = 5 . \Pi : 5 + 5 \Pi : 4$, in qua si loco partis postremae valor ante inventus substituatur, erit $\Pi : 6 = 6 \Pi : 5 + 1$, ideoque $6 . \Pi : 5 = \Pi : 6 - 1$, qui valor, in relatione sequente $\Pi : 7 = 6 \Pi : 6 + 6 \Pi : 5$ substitutus, praebet: $\Pi : 7 = 7 \Pi : 6 - 1$, et ita porro; unde satis patet, quomodo lex posterior ex priore derivetur.