SOLUTIO COMPLETA PROBLEMATIS DE QUADRISECTIONE TRIANGULI PER DUAS RECTAS INTER SE NORMALES.

AUCTORE

L. EULERO.

Conventui exhibita die 3 Maii 1779.

§. 1. In dilucidationibus super hoc insigni problemate, quas non ita pridem proposui, regulam exhibui certam, cujus ope ista quadripartitio semper peragi potest, cujuscunque speciei fuerit triangulum propositum, id quod, si ad usum practicum respiciamus, utique sufficere potest. Num autem illa regula omnes plane quadrisectiones in se complectatur, quaestio non parum ardua est censenda, atque adeo non dubitavi affirmare, nullas alias dari quadrisectiones, praeter eas, quas mea regula ostendisset.

§. 2. Postea vero se mihi obtulit casus huic assertioni penitus adversans. Incidi enim in triangulum isosceles ACB, ubi angulorum aequalium A et B tangens erat $\frac{16}{9}$, ideoque uterque horum angulorum $60^\circ, 38', 32''$; ita ut Tab. II. Fig. I.

parum a triangulo aequilatero differat. Secundum regulam igitur ante datam alterutrum huius trianguli crus, sive AC, sive BC, pro eo latere assumi deberet, cui ambae rectae secantes insisterent; at vero inveni hoc casu etiam ipsam basin AB pro isto latere assumi posse. Ea enim in sex partes aequales divisa, si capiantur intervalla $AX = 5$, $BY = 5$, et super XY construatur triangulum isosceles XOY, non solum ejus area erit pars quarta totius trianguli, sed etiam, productis lateribus XO et YO in x et y, triangula XAx et YBy aequabuntur semissi totius trianguli, ita ut hoc modo totum triangulum in quatuor partes aequales dividatur, quemadmodum, qui calculum tentare voluerit, facile videbit.

§. 3. Cum igitur ista quadripartitio regulae a me ante datae refragetur, nullum est dubium, quin etiam innumerabiles alii casus existant ab ista regula deficientes. Interim tamen deinceps observavi, omnes has exceptiones inter arctissimos cancellos includi, ita ut affirmare queamus, plerumque nullas alias quadrisectiones locum habere posse, nisi quas regula memorata suppeditat. Plurimum ergo operae erit pretium solutionem istius problematis accuratius evolvere, cum in ea plures circumstantiae occurrant, quae prorsus singularem explanationem requirunt, cujusmodi in aliis problematibus geometricis non deprehendi solent.

§. 4. Sequenti igitur modo hoc problema sum aggressurus, et quia binae rectae secantes necessario uni lateri trianguli insistere debent, sit AB istud latus, et X et Y loca, ubi rectae se secantes insistunt. Vocemus ergo totum latus $AB = c$, intervalla $AX = x$ et $BY = y$, interstitium autem $XY = z$, ita ut sit $x + y = c + z$. Praeterea vero sit angulus $A = \alpha$ et $B = \beta$, atque pro triangulo rectangulo XOY sit angulus $YXO = \phi$; ubi ergo necesse est, ut iste angulus ϕ minor sit recto, summa vero $\alpha + \beta$ minor duobus rectis. Tandem totam trianguli ACB aream statuamus $= kk$.

§. 5. His positis cum in triangulo rectangulo XOY sint latera $XO = z \cos.\phi$ et $YO = z \sin.\phi$, erit ejus area $\frac{1}{2} zz \sin.\phi \cos.\phi$, quae ergo ipsi $\frac{1}{4}kk$ aequari debet; unde fit $zz = \frac{kk}{2 \sin.\phi \cos.\phi} = \frac{kk}{\sin. 2\phi}$. Hinc ergo si pro sequenti calculo statuamus $\tang.\phi = t$, ob $\sin.\phi = \frac{t}{\sqrt{1+tt}}$ et $\cos.\phi = \frac{1}{\sqrt{1+tt}}$, erit $zz = \frac{kk(1+tt)}{2t}$, ideoque $z = k\sqrt{\frac{1+tt}{2t}}$.

§. 6. Consideremus nunc triangulum AXx, cujus area debet esse $= \frac{1}{2}kk$, atque ob angulum $AxX = 180° - \alpha - \phi$ colliguntur latera $Ax = \frac{x \sin.\phi}{\sin.(\alpha+\phi)}$, et $Xx = \frac{x \sin\alpha}{\sin.(\alpha+\phi)}$; unde colligitur area hujus trianguli $= \frac{xx \sin.\alpha \sin\phi}{2 \sin.(\alpha+\phi)}$, quae ipsi $\frac{1}{2}kk$ aequata dat $xx = \frac{kk \sin.(\alpha+\phi)}{\sin.\alpha \sin.\phi}$, ideoque $x = k\sqrt{\frac{\sin.(\alpha+\phi)}{\sin.\alpha \sin\phi}}$. Quod si jam hic statuamus $\cot.\alpha = a$, facta evolutione

*

prodibit $x = k\sqrt{a + \frac{1}{t}}$. Hinc igitur habebimus

$$Ax = \frac{k \sin.\Phi \sqrt{a + \frac{1}{t}}}{\sin.(\alpha + \Phi)}, \text{ ideoque } Ax \sin.\alpha = \frac{k}{\sqrt{a + \frac{1}{t}}},$$

quam formulam ideo apposui, quia Ax necessario minor esse debet quam AC. Deinde est $Xx = \frac{k \sin.\alpha \sqrt{a + \frac{1}{t}}}{\sin.(\alpha + \Phi)}$, hincque $Xx \sin.\Phi = \frac{k}{\sqrt{a + \frac{1}{t}}}$. Notetur autem hic esse debere $Xx > XO$.

§. 7. Evolvamus simili modo triangulum BYy, unde ob $BY = y$ et angulum $ByY = 180^\circ - \beta - 90^\circ + \Phi = 90 - \beta + \Phi$, elicitur latus $By = \frac{y \cos.\Phi}{\cos.(\beta - \Phi)}$ et $Yy = \frac{y \sin.\beta}{\cos(\beta - \Phi)}$. Hinc igitur istius trianguli area ipsi $\frac{1}{2}kk$ aequanda $= \frac{yy \sin.\beta \cos.\Phi}{2 \cos.(\beta - \Phi)}$, ideoque erit $yy = \frac{kk \cos.(\beta - \Phi)}{\sin.\beta \cos.\Phi}$. Hinc igitur si statuamus $\cos.\beta = b$, facta evolutione orietur $y = k\sqrt{b + t}$, hincque porro erit $By = \frac{k \cos.\Phi \sqrt{b + t}}{\cos.(\beta - \Phi)}$, consequenter $By \sin.\beta = \frac{k}{\sqrt{b + t}}$. Oportet autem esse $By < \beta C$. Denique erit $Yy = \frac{k \sin.\beta \sqrt{b + t}}{\cos.(\beta - \Phi)}$, quod superare debet intervallum YO; at vero erit $Yy \cos.\Phi = \frac{k}{\sqrt{b + t}}$.

§. 8. Tandem eodem modo tractemus totum triangulum ABC, et ob $AB = c$ et angulum $C = 180^\circ - \alpha - \beta$, reperiemus latera $AC = \frac{c \sin.\beta}{\sin.(\alpha + \beta)}$ et $BC = \frac{c \sin.\alpha}{\sin.(\alpha + \beta)}$;

hinc igitur area trianguli erit $kk = \frac{cc \sin. \alpha \sin. \beta}{2 \sin. (\alpha + \beta)}$, unde fit $cc = \frac{2kk \sin. (\alpha + \beta)}{\sin. \alpha \sin. \beta}$, ideoque $c = k\sqrt{\frac{2 \sin. (\alpha + \beta)}{\sin. \alpha \sin \beta}}$. Cum autem posuerimus cot.. $\alpha = a$ et cot. $\beta = b$, erit $c = k\sqrt{2(a+b)}$, hincque $\left\{\begin{array}{l} AC \sin. \alpha = \frac{k\sqrt{2(a+b)}}{a+b} \\ BC \sin. \beta = \frac{k\sqrt{2(a+b)}}{a+b} \end{array}\right\}$

§. 9. Inventis igitur quatuor intervallis:

1°) $AB = c = k\sqrt{2(a+b)}$

2°) $AX = x = k\sqrt{a + \frac{1}{t}}$

3°) $BY = y = k\sqrt{b + t}$

4°) $XY = z = k\sqrt{\frac{1+tt}{2t}}$

quia esse debet $x + y = c + z$, nanciscimur, per k dividendo, sequentem aequationem:

$$\sqrt{a + \frac{1}{t}} + \sqrt{b + t} = \sqrt{2(a+b)} + \sqrt{\frac{1+tt}{2t}}$$

ubi sequentia sunt observanda:

1°) Etsi vulgo signa radicalia in calculo duplicem habere solent significatum, hic tamen cuique membro suum signum necessario est tribuendum.

2°) Inspectio ipsius figurae statim declarat, esse debere tam x quam y minor quam c; unde hae duae fluunt conditiones: $\sqrt{a + \frac{1}{t}} < \sqrt{2(a+b)}$ et $\sqrt{b+t} < \sqrt{2(a+b)}$.

3°) Aeque manifestum est, tam intervallum x quam y majus esse debere intervallo XY, unde sequitur

$$\sqrt{a + \frac{1}{t}} > \sqrt{\frac{1+tt}{2t}} \text{ et } \sqrt{b+t} > \sqrt{\frac{1+tt}{2t}}$$

§. 10. Quae hactenus sunt proposita perfecte conveniunt cum iis, quae non ita pridem in dilucidationibus exhibui. Nunc vero resolutionem aequationis inventae alio modo instituamus, quandoquidem etiam hoc modo priores conditiones adimplentur, quibus duo membra priora tertio debent esse minora; ubi notetur, primum et secundum saltem non major esse debere. Hunc in finem statuamus membrum quartum $\sqrt{\frac{1+tt}{2t}} = s$, ut sit $2ss = \frac{1}{t} + t$, ac ponamus primum membrum $\sqrt{a + \frac{1}{t}} = ms$, et secundum $\sqrt{b+t} = ns$; ubi ergo litterae m et n erunt numeri unitate majores, vel potius ea saltem non minores. Hinc igitur erit $a = mmss - \frac{1}{t}$ et $b = nnss - t$, unde fit $a + b = (mm + nn - 2)\, ss$. Sicque membrum tertium erit $\sqrt{2\,(a+b)} = s\sqrt{2\,(mm+nn-2)}$.

§. 11. Introductis igitur his litteris m et n, una cum littera s, nostra aequatio hanc induet formam:

$$m + n = \sqrt{2\,(mm + nn - 2)} + 1,$$

qua igitur relatio inter binos numeros m et n ita determinatur, ut, altero cognito, simul alter innotescat. Facta autem evolutione erit $(m-n)^2 + 2\,(m-n) = 5$. Auferatur utrinque $4n$, additaque porro unitata fiet

$$(m-n)^2 + 2\,(m-n) + 1 = 6 - 4n,$$

quae aequatio, extracta radice, praebet $m - n + 1 = \sqrt{6 - 4n}$, consequenter $m = n - 1 + \sqrt{6 - 4n}$.

§. 12. Hic statim patet, ne in imaginaria procidamus, necessario esse debere $n < \frac{3}{2}$; ex quo simul intelligitur, signum radicale negativum accipi non posse, quia aliter prodiret $m < 1$. Cum igitur semper sit $n < \frac{3}{2}$, ut prodeat $m > 1$, sive $\sqrt{6 - 4n} > 2 - n$, sive $n < \sqrt{2}$, manifestum est, ambas litteras m et n intra limites 1 et $\sqrt{2}$ cadere debere; ambae autem intra se fient aequales casu $m = n = \frac{5}{4}$; ita ut si altera hoc medio fuerit major, altera necessario futura sit minor. Tum vero manifestum etiam est, cum sit limes major $= \sqrt{2} = 1,4142136$, minore existente $= 1$, valor inventus $\frac{5}{4} = 1,2500$ propemodum medium interjacere hos limites.

§. 13. Quo autem clarius appareat, quomodo hi duo numeri m et n inter se referantur, sequentem tabulam subjungamus, quae pro ambobus numeris m et n valores rationales, atque adeo exacte veros in fractionibus decimalibus usque ad quartam figuram exhibeat; ubi, quia numeri m et n sunt permutabiles, prior columna majores, posterior vero minores ostendit.

Tabula

exhibens valores rationales exacte veros numerorum m et n.

Majores.	Minores.	Majores.	Minores.
1,2500	1,2500	1,3479	1,1279
1,2599	1,2399	1,3556	1,1156
1,2696	1,2296	1,3631	1,1031
1,2791	1,2191	1,3704	1,0904
1,2884	1,2084	1,3775	1,0775
1,2975	1,1975	1,3844	1,0644
1,3064	1,1864	1,3911	1,0511
1,3151	1,1751	1,3976	1,0376
1,3236	1,1636	1,4039	1,0239
1,3319	1,1519	1,4100	1,0100
1,3400	1,1400		

§. 14. Quoniam igitur posuimus, ut sequitur:

$\sqrt{\frac{1+tt}{2t}} = s$, tum vero

$\sqrt{a+\frac{1}{t}} = ms$, atque

$\sqrt{b+t} = ns$, unde fit

$\sqrt{2(a+b)} = (m+n-1)s$

pro baseos trianguli propositi sectionibus inde deducimuss sequentes determinationes:

Ipsam basin $AB = ks(m + n - 1)$
Ejus portionem $AX = mks$
— — — $BY = nks$
— — — $XY = ks$

unde patet, has quatuor lineas esse AB, AX, BY, XY ut $m + n - 1$, m, n, 1, ideoque a solo numero n pendere, quippe quo alter determinatur.

§. 15. Pro reliquis lateribus erit per easdem, quas modo attulimus, determinationes: $AC \sin. \alpha = \frac{2k}{(m+n-1)s}$ et $Ax \sin. \alpha = \frac{k}{ms}$, sicque erit $AC : AX = 2m : m + n - 1$; unde patet punctum x semper intra AC cadere. Est enim $2m > m + n - 1$. Eodem modo erit $BC \sin. \beta = \frac{2k}{(m+n-1)s}$ et $By \sin. \beta = \frac{k}{ns}$, ideoque $BC : By = 2n : m + n - 1$, quae pariter est ratio majoris inaequalitatis, ideoque punctum y etiam semper intra BC cadet. Ceterum hic observasse juvabit esse: $\left\{\begin{array}{l} AC : Ax : = 2\,AX : AB \\ BC : By : = 2\,BY : AB \end{array}\right\}$ quod quidem immediate inde sequitur, quod utrumque triangulum XAx et YBy aequetur semissi trianguli propositi ABC.

§. 16. Praeterea vero erit $Xx \sin. \Phi = \frac{k}{ms}$ et $Yy \cos. \Phi = \frac{k}{ns}$. At vero cum sit $\sin. \Phi \cos. \Phi = \frac{t}{1+tt} = \frac{1}{2ss}$, erit XO sin. $\Phi = \frac{k}{2s}$ et YO cos. $\Phi = \frac{k}{2s}$, sicque patet fore $Xx : XO = 2 : m$, similique modo $Yy : YO = 2 : n$, quae utraque ratio pariter est majoris inaequalitatis, cum semper sit $m < 2$ et $n < 2$. Quocirca certum est, in nostra solutione punctum O necessario intra triangulum cadere; consequenter formulae hic datae omnes plane quadrisectiones possibiles complectuntur.

§. 17. Cum igitur solutio nostri problematis potissimum relationi inter numeros m et n innitatur, ex tabula quidem supra data pro quolibet numero n respondentem m excerpere licet. Quoniam autem hi valores plerumque sunt irrationales et tantum vero proxime hic sunt exhibiti, si tales valores rationales desideremus, sequentes formulae negotium conficient: $m = \frac{5}{4} + \delta - \delta\delta$ et $n = \frac{5}{4} - \delta - \delta\delta$, ubi δ quamlibet fractionem valde parvam et minorem quam $\frac{\sqrt{2}-1}{2} = 3{,}2071$ denotari potest. Sic enim erit $m - n = 2\delta$ et $m + n = \frac{5}{2} - 2\delta\delta$. Quoniam igitur requiritur ut sit $(m-n)^2 + 2(m+n) = 5$, istae formulae huic conditioni manifesto satisfaciunt. Deinde vero, quoniam debet esse $n > 1$, oportet fieri $\frac{1}{4} > \delta + \delta\delta$, ideoque $\delta + \frac{1}{2} < \frac{1}{\sqrt{2}}$ hoc est $\delta < \frac{\sqrt{2}-1}{2}$. Cum igitur sit $m + n = \frac{5}{2} - 2\delta\delta$, ejus maximus valor manifesto est $\frac{5}{2}$, minimus vero $1 + \sqrt{2} = 2{,}4142$; sicque formula $m + n - 1$

semper intra hos arctissimos cancellos continetur: 1,500 et 1,414, quorum differentia est 0,086.

§. 18. Nunc investigemus quemadmodum litterae a et b, quae sunt cotangentes angulorum A et B, per hos numeros m et n, una cum angulo Φ, cujus tangens posita est $= t$, definiantur. Ac primo quidem, quia posuimus $\sqrt{a + \frac{1}{t}} = ms$, erit $a = mmss - \frac{1}{t}$, unde cum sit $ss = \frac{1+tt}{2t}$, ideoque $2\,ss = \frac{1}{t} + t$, erit $2a = (mm - 2)\frac{1}{t} + mmt$, sive, quia $mm < 2$, erit $2\,a = mmt - (2 - mm)\frac{1}{t}$. Simili modo cum sit $\sqrt{b + t} = ns$, erit $b = nn\,ss - t$, hincque $2\,b = t\,(nn - 2) + \frac{nn}{t} = \frac{nn}{t} - (2 - nn)\,t$. Quam ob rem si praeter numeros m et n etiam t sive angulum Φ pro lubitu assumamus, omnes valores possibiles pro angulis α et β obtinebimus, consequenter omnia plane triangula, in quae haec quadrisectio competit. Scilicet hoc modo problema nostrum inversum jam perfecte est resolutum, quo data quadrisectione triangulum desideratur.

§. 19. Verum si ipsum triangulum detur, ideoque litterae a et b ut datae spectari queant, inter eas tamen dabitur certa relatio, quam solutio absolute postulat, ad quam explorandam ex binis aequationibus inventis

$$2\,a = mmt - (2 - mm)\frac{1}{t} \text{ et}$$
$$2\,b = nn\frac{1}{t} - (2 - nn)\,t$$

litteram t eliminemus; ac primo quidem eliminando $\frac{1}{t}$ ha-

*

bebimus: $2nna + 2(2 - mm)b = 2(mm + nn - 2)t$, ideoque $t = \frac{nna + (2 - mm)b}{mm + nn - 2}$. Simili modo eliminando t erit

$$2(2 - nn)a + 2mmb = 2(mm + nn - 2)\tfrac{1}{t}$$

hincque $\frac{1}{t} = \frac{(2 - nn)a + mmb}{mm + nn - 2}$. Nunc igitur hae aequationes in se invicem ductae monstrabunt relationem inter a et b, quae erit:

$$nn(2 - nn)aa + mm(2 - mm)bb + 2ab(2 - mm - nn + mmnn$$
$$= (mm + nn - 2)^2.$$

§. 20. Quo hanc aequationem contrahamus, ponamus brevitatis gratia $nn(2 - nn) = \mathrm{A}$; $mm(2 - mm) = \mathrm{B}$; $mm + nn - 2 = \mathrm{C}$ et $2 - mm - nn + mmnn = \mathrm{D}$, ut aequatio nostra sit $\mathrm{A}aa + \mathrm{B}bb + 2\mathrm{D}ab = \mathrm{CC}$; ubi notasse juvabit esse $\mathrm{A} = 1 - (nn - 1)^2$; $\mathrm{B} = 1 - (mm - 1)^2$; $\mathrm{C} = (mm - 1) + (nn - 1)$ et $\mathrm{D} = 1 + (mm - 1)(nn - 1)$; unde porro colligitur $\mathrm{AB} = \mathrm{D}^2 - \mathrm{C}^2$; tum vero $\mathrm{A} + \mathrm{B} = 2\mathrm{D} - \mathrm{CC}$.

§. 21. Haec igitur aequatio satis concinna evadet, si statuamus $mm - 1 = \mu$ et $nn - 1 = \nu$; ubi notetur, litteras μ et ν semper intra limites 0 et 1 cadere. Per has autem litteras nostra aequatio erit

$$(1 - \nu\nu)aa + (1 - \mu\mu)bb + 2(1 + \mu\nu)ab = (\mu + \nu)^2.$$

Hic autem probe notetur, quia istae litterae μ et ν ex numeris m et n sunt formatae, eas certo modo a se invicem pendere, ita ut assumta altera simul altera innotescat.

§. 22. Hinc igitur patet, ambos angulos α et β neutiquam pro lubitu accipi posse; quod si enim illi ut dati spectentur, resolutio hujus aequationis certum valorem praebebit pro μ vel ν, qui nisi intra limites 0 et 1 cadat, quadrisectio impossibilis erit. Verum in dilucidationibus supra datis satis luculenter demonstravi, in omni triangulo proposito semper duos angulos ita eligi posse, ut ista aequatio adimpleri queat. Quod argumentum quo accuratius evolvamus, sequentia problemata subjungamus.

Problema I.

Invenire omnia triangula isoscelia ABC, *ad quorum basin* AB *nostra aequatio applicari possit, ita ut intra ejus terminos* A *et* B *puncta* X *et* Y *cadant.*

§. 23. Cum igitur anguli A et B sint inter se aequales, posito $b = a$ aequatio nostra erit:

$$(4 - (\mu - \nu)^2)\, aa = (\mu + \nu)^2$$

ideoque $aa = \frac{(\mu + \nu)^2}{4 - (\mu - \nu)^2}$; unde introductis numeris m et n erit $aa = \frac{(mm + nn - 2)^2}{4 - (mm - nn)^2}$. Quia igitur numerus m semper intra limites 1 et $\sqrt{2}$ continetur, pro his limitibus, quibus est vel $m = 1$ et $n = \sqrt{2}$, vel $m = \sqrt{2}$ et $n = 1$, reperietur $aa = \frac{1}{3}$, ideoque $a = \frac{1}{\sqrt{3}} = \cot.\, \alpha$; unde patet hunc angulum α esse $= 60°$, ita ut hoc casu triangulum sit aequilaterum.

§. 24. Cum igitur sit $m = 1$, $n = \sqrt{2}$ et $a = b = \frac{1}{\sqrt{3}}$, hinc angulus Φ, ejusve tangens t, ex formulis supra §. 19. datis, colligitur: erit enim $t = \sqrt{3}$, sicque angulus $\Phi = 60°$. Deinde ob $ss = \frac{1+tt}{2t} = \frac{2}{\sqrt{3}}$, pro data totius trianguli area $= kk$ fiet trianguli basis $= ks\sqrt{2}$, atque intervalla $AX = ks$, $BY = ks\sqrt{3}$ et $XY = ks$. Hinc ergo si basis AB vocetur $= c$, erit $AX = \frac{c}{\sqrt{2}}$, $BY = c$.

§. 25. Quoniam igitur ambo casus extremi pro numeris m et n assumti ad idem triangulum aequilaterum perducunt, deceptus sum antehac per praecipitantiam, ut putarem, etiam casus intermedios eodem collineare. Nunc autem rem longe aliter se habere deprehendi, cum omnes valores intermedii alia praebeant triangula. Primo igitur litteris m et n tribuamus valores medios inter se aequales, qui sunt $\frac{5}{4}$, hincque derivatur $aa = \frac{9^2}{16^2}$, ideoque $a = b = \frac{9}{16} = \cot.\,\alpha$, ideoque

$$\text{tang.}\ \alpha = \frac{16}{9} = 1,7777777,$$

hinc anguli ad basin erunt $\alpha = \beta = 60°.\ 38'.\ 33''$. Tum vero pro angulo Φ erit $t = 1$, ideoque angulus $\Phi = 45°$. At vero pro divisione basis in punctis X et Y, posito $AB = c$ erit $AX = BY = \frac{5}{6}c$ et $XY = \frac{4}{6}c$.

§. 26. Hinc jam tuto concludi potest, alios casus intermedios eo propius ad triangulum aequilaterum esse accessuros, quo magis ab intermedio distent. Quod quo clarius appareat, pro m et n assumamus valores supra assignatos $m = \frac{5}{4} + \delta - \delta\delta$ et $n = \frac{5}{4} - \delta - \delta\delta$, unde fit $m + n = \frac{5}{2} - 2\delta\delta$, et $m - n = 2\delta$, hincque $mm - nn = 5\delta - 4\delta^3$, porro vero

$$mm + nn - 2 = \tfrac{18}{16} - 3\delta^2 + 2\delta^4 = 2\left(\tfrac{3}{4} - \delta\delta\right)^2.$$

Quare cum invenerimus $a = \frac{mm + nn - 2}{\sqrt{(4 - (mm - nn)^2)}}$, erit nunc $a = \frac{2(\frac{3}{4} - \delta\delta)^2}{\sqrt{(4 - (5\delta - 4\delta^3)^2)}}$, unde patet eundem prodire valorem pro a, sive δ capiatur positive sive negative.

§. 27. Quia limites hujus solutionis tam sunt angusti, ut valor ipsius δ sit valde parvus, ejus potestates quarta altiores tuto negligere licebit, sicque numeratorem et denominatorem per 2 dividendo, numerator erit

$$\tfrac{9}{16} - \tfrac{3}{2}\delta\delta + \delta^4 = \tfrac{9}{16}\left(1 - \tfrac{8}{3}\delta\delta + \tfrac{16}{9}\delta^4\right),$$

denominator vero erit $\sqrt{1 - \frac{25}{4}\delta\delta + 10\delta^4}$, qui pro numeratore praebet hunc factorem $1 + \frac{25}{8}\delta\delta + \frac{1235}{128}\delta^4$. Facta igitur multiplicatione reperimus $a = \frac{9}{16}\left(1 + \frac{11}{24}\delta\delta + \frac{3563}{9128}\delta^4\right)$; unde patet valorem ipsius a semper majorem esse fractione $\frac{9}{16}$, eo quo major capiatur fractio δ. Notetur autem fractionem δ non ultra limitem $\frac{\sqrt{2} - 1}{2} = 0{,}2371$ augeri posse.

§. 28 Postquam autem invenerimus cotangentem a, quaeramus angulum Φ, cujus tangentem vidimus esse

$\frac{(2+nn-mm)a}{mm+nn-2}$. Cum igitur sit $m = \frac{5}{4} + \delta - \delta\delta$ et $n = \frac{5}{4} - \delta - \delta\delta$, modo ante vidimus esse

$$mm + nn - 2 = 2\left(\tfrac{3}{4} - \delta\delta\right)^2 = 2\left(\tfrac{9}{16}\left(1 - \tfrac{8}{3}\delta\delta + \tfrac{16}{8}\delta^4\right)\right);$$

porro erat $mm - nn = 5\delta - 4\delta^3$, unde numerator erit

$$2 - 5\delta + 4\delta^3 = 2\left(1 - \tfrac{5}{2}\delta + 2\delta^3\right)$$

sicque erit $t = \dfrac{\left(1 - \frac{5}{2}\delta + 2\delta^3\right)a}{\frac{9}{16}\left(1 - \frac{8}{3}\delta\delta + \frac{16}{9}\delta^4\right)}$, ita ut sit

$$t = \frac{\left(1 - \frac{5}{2}\delta + 2\delta^3\right)\left(1 + \frac{11}{24}\delta\delta + \frac{3563}{9 \cdot 128}\delta^4\right)}{1 - \frac{3}{2}\delta\delta + \frac{16}{9}\delta^4}.$$

Ex denominatore autem oritur hic novus factor: $1 + \frac{8}{3}\delta\delta + \frac{16}{3}\delta^4$, qui postremo junctus praebet $1 + \frac{25}{8}\delta\delta + \frac{695}{72}\delta^4$, consequenter verus valor erit $t = 1 - \frac{5}{2}\delta + \frac{25}{8}\delta\delta - \frac{93}{16}\delta^3 + \frac{695}{72}\delta^4$. Unde patet, quoniam δ hic tam positive quam negative accipi potest (propterea quod in valore pro a invento nullae impares potestates ipsius δ occurrunt, ita ut pro angulo Φ duo valores prodeant, alter semirecto minor, alter vero major) duplicem pro t valorem prodire; at vero hoc casu, quo triangulum est isosceles, per se evidens est duas solutiones locum habere.

§. 29. Quod si jam ipsi δ maximum valorem, quem recipere potest, tribuamus, qui est $\frac{\sqrt{2}-1}{2}$, quo casu fit vel $m = \sqrt{2}$ et $n = 1$, vel $m = 1$ et $n = \sqrt{2}$, pro utroque casu formula nostra principalis dabit $a = \frac{1}{\sqrt{3}}$, hincque

$\alpha = \beta = 60^\circ$, pro triangulo aequilatero. Tum verò casu priore, quo $m = \sqrt{2}$ et $n = 1$, prodit $t = a - \frac{1}{\sqrt{3}}$, ideoque angulus $\Phi = 30^\circ$. Altero vero casu, quo $m = 1$ et $n = \sqrt{2}$, fit $t = 3\,a = \sqrt{3}$, ideoque $\Phi = 60^\circ$, qui casus cum sit alter extremus, hinc discimus alia triangula isoscelia istam quadrisectionem non admittere, nisi quorum anguli ad basin contineantur intra hos limites 60° et $60^\circ.\,38'.\,33''$.

§. 30. Quo autem calculus pro casibus intermediis, quibus litterae δ valor quidam medius inter o et $\frac{\sqrt{2}-1}{2}$ datur, facilius expediri queant, coëfficientes ante inventos per fractiones decimales exprimamus, sicque reperiemus

$$a = 0{,}56250 + 0{,}25781\,\delta\delta + 1{,}73975\,\delta^4 \text{ et}$$

$$t = 1{,}00000 - 2{,}50000\,\delta + 3{,}12500\,\delta\delta - 5{,}81250\,\delta^3 + 9{,}65278\,\delta^4.$$

§. 31. Sumamus $\delta = \pm \frac{1}{10}$, eritque $a = 0{,}56510$, ex quo colligisur angulus $\alpha = \beta = 60^\circ.\,31'.\,44''$; deinde erit $t = 1{,}03221 \mp 0{,}25581$. Quamobrem si fuerit $\delta = + \frac{1}{10}$, hoc casu fit $m = 1{,}34000 = AX$ et $n = 1{,}14000 = BY$, tum vero $AB = m + n - 1 = 1{,}48000$, existente $XY = 1$. Hoc igitur casu erit $t = 0{,}77640$, ideoque angulus $\Phi = 37^\circ.\,49'.\,31''$.

§. 32. Altera solutio oritur ex $\delta = -\frac{1}{10}$, quo casu fit $m = 1{,}14000 = AX$ et $n = 1{,}34000 = BY$ et

$AB = m + n - 1 = 1,48000$, existente $XY = 1$; tum
Tab. II. autem erit $t = 1,28892$, ideoque angulus $\Phi = 52°. 10'. 29''$.
Fig. 2. Hic casus in figura 2 refertur, quae figura inversa etiam alterum casum refert. Praeterea vero, sumto alterutro crure pro basi, quadrisectio vulgaris locum habet.

De quadrisectione triangulorum scalenorum.

§. 33. Cum singuli valores pro litteris m et n assumti statim praebeant sectionem baseos in punctis X et Y, hinc diversas species omnium quadrisectionum constituamus, inter quas potissimum binas extremas cum media hic contemplemur, pro quibus formulae solutionem continentes sequenti modo se habebunt.

I) Species extrema prior, qua $m = \sqrt{2}$ et $n = 1$, et aequatio inter a et b haec: $aa + 2\,ab = 1$ et $t = a$.

II) Species extrema altera, qua $m = 1$ et $n = \sqrt{2}$; aequatio inter a et b est $bb + 2\,a\,b = 1$ et $t = b$.

III) Species intermedia, qua $m = n = \frac{5}{4}$; ubi aequatio inter a et b erit $175\,aa + 175\,bb + 2\,.\,337\,ab = 324$ et denique $t = \frac{25a + 7b}{18}$.

Singulas has species accuratius evolvamus.

Problema II.

Dato angulo $A = \alpha$, cujus tangens $= a$, invenire alterum angulum ad basin $B = \beta$, cujus cotangens $= b$, ut quadrisectio secundum speciem primam locum habere queat.

§. 34. Cum hic sit $m = \sqrt{2}$ et $n = 1$, tota basis $AB = \sqrt{2}$ ita secatur, ut punctum X in B cadat; punctum autem Y ita ut sit $BY = 1$, et quia pro hac specie aequatio inter a et b est $aa + 2ab = 1$, ex ea statim reperitur $b = \frac{1 - aa}{2a}$, sicque erit $\cot.\beta = \frac{1 - \cot.\alpha^2}{2\cot.\alpha}$, hincque $\tang.\beta = \frac{2\cot.\alpha}{1 - \cot.\alpha^2} = \frac{2\tang.\alpha}{\tang.\alpha^2 - 1}$. Tab. II. Fig. 3.

§. 37. Novimus autem hanc formulam $\frac{2\tang.\alpha}{1 - \tang.\alpha^2}$ exprimere tangentem anguli dupli 2α, sicque erit

$$\tang.\beta = -\tang.2\alpha = \tang.(180^\circ - 2\alpha),$$

consequenter angulus β per α ita determinatur, ut sit $\beta = 180^\circ - 2\alpha$. Atque hinc notasse juvabit, si fuerit $\alpha = 60^\circ + \varepsilon$, fore $\beta = 60^\circ - 2\varepsilon$, ac propterea tertium trianguli angulum $C = \gamma = 60^\circ + \varepsilon$, ideoque ipsi A aequalem, ita ut hoc triangulum sit quoque isosceles. Sin autem sumto ε negativo fuerit angulus $A = \alpha = 60^\circ - \varepsilon$, erit $B = \beta = 60^\circ + 2\varepsilon$, angulusque $C = \gamma = 60^\circ - \varepsilon = A$. Denique pro angulo Φ habebitur hic ejus tangens $t = a$, hoc est $\tang.\Phi = \cot.\alpha$, consequenter $\Phi = 90^\circ - \alpha$.

*

Problema III.

Dato angulo A $= \alpha$, *cujus cotangens* $=$ a, *invenire alterum angulum ad basin* B $= \beta$, *ut quadrisectio secundum speciem II locum habere queat.*

Tab. II. Fig. 4. §. 38. Cum igitur hic sit $m = 1$ et $n = \sqrt{2}$, tota basis AB $= \sqrt{2}$ ita secatur, ut fiat AX $= 1$ et BY $= \sqrt{2}$, qui casus a praecedente tantum ordine differt. At vero inter a et b nunc habetur ista aequatio: $bb + 2ab = 1$, hinc colligitur $b = -a + \sqrt{1 + aa} = \cot. \beta$; unde oritur $\text{tag.}\, \beta = a + \sqrt{1 + aa}$. Quare cum sit $a = \cot. \alpha = \frac{\cos. \alpha}{\sin. \alpha}$, fiet $\text{tag.}\, \beta = \frac{1 + \cos. \alpha}{\sin. \alpha}$, ubi cum sit $1 + \cos. \alpha = 2 \cos. \frac{1}{2} \alpha^2$ et $\sin. \alpha = 2 \sin. \frac{1}{2} \alpha \cos. \frac{1}{2} \alpha$, erit $\text{tag.}\, \beta = \cot. \frac{1}{2} \alpha$, consequenter $\beta = 90^\circ - \frac{1}{2} \alpha$. Atque cum hoc casu sit $t = b$, erit $\text{tag.}\, \Phi = \cot. \beta = \text{tag.}\, \frac{1}{2} \alpha$, ideoque $\Phi = \frac{1}{2} \alpha$. Quod si jam ut ante ponamus $\alpha = 60^\circ + \varepsilon$, erit $\beta = 60 - \frac{1}{2} \varepsilon$, unde fit tertius trianguli angulus $\gamma = 60^\circ - \frac{1}{2} \varepsilon = \text{B} = \beta$, ita ut etiam hoc triangulum sit isosceles.

§. 39. Dato igitur angulo α utcunque, quoties angulus β cadet intra limites $90^\circ - \frac{1}{2} \alpha$ et $180^\circ - 2 \alpha$; sive posito $\alpha = 60^\circ + \varepsilon$, quoties alter angulus β cadet intra hos limites $60^\circ - \frac{1}{2} \varepsilon$ et $60^\circ - 2 \varepsilon$, quadrisectio semper locum habebit. Neque vero hinc sequitur, quando iste angulus extra hos limites cadit, tum solutionem semper esse impossibilem, quemadmodum in dilucidationibus putaveram, atque istos casus hic imprimis sum perscrutaturus, cum reliqui ante jam satis clare et fuse sunt tractati.

Problema IV.

Data angulo A $= \alpha$, *cujus cotangens* $= a$, *invenire alterum angulum ad basin* B $= \beta$, *ut quadrisectio secundum speciem III locum habere queat.*

§. 40. Cum sit $m = n = \frac{5}{4}$, tota basis $AB = m + n - 1 = \frac{6}{4}$ ita secabitur in punctis X et Y, ut sit $AX = BY = \frac{5}{4}$, hincque $AY = BX = \frac{1}{4}$, ideoque sextae parti totius basis AB aequales. At inter a et b haec habetur aequatio: $175\,aa + 175\,bb + 2\,.\,337\,ab = 324$; unde radice extracta reperitur $b = \frac{-337a + 18\sqrt{256aa + 175}}{175}$, ubi probe notandum hic signo radicali valorem negativum tribui non licere, etiamsi cot. $\beta = b$ negativa fieri possit, cujus rei ratio in hoc est sita, quod in formulis principalibus occurrat membrum $\sqrt{2(a+b)}$, ideoque summa $a + b$ necessario debeat esse positiva. Hinc enim est
$a + b = \frac{-162a + 18\sqrt{256aa + 175}}{175}$, quae formula manifesto fieret negativa, si signo radicali signum $-$ praefigeretur.

Tab. II. Fig. 5.

§. 41. At vero ex hac expressione satis complexa nihil plane pro ipsis angulis α et β, eorumque ratione, concludere licet; quamobrem tentemus sublatione irrationalitatis formulas simpliciores tam pro a quam pro b elicere. Hunc in finem statuamus $\sqrt{256aa+175}=16a+7v$, unde colligitur $a=\frac{25-7vv}{32v}$, ideoque $\sqrt{256aa+175}=\frac{25+7vv}{2v}$, quibus valoribus substitutis colligitur $b=\frac{25vv-7}{32v}$. Ecce ergo binas formulas pro a et b satis simplices sumus nacti, quae adeo ita inter se cohaerent, ut si in altera loco v scribatur $\frac{1}{v}$, proditura sit altera.

§. 44. Hic primum observo, sumto $v=1$ prodire $a=b=\frac{9}{16}$, qui est casus trianguli isoscelis modo ante tractati. Tum vero, quo majores valores ipsi v tribuantur, eo magis ambo anguli α et β a se invicem recedent. Ita angulus α evadet rectus, ejus cotangens $a=0$, sumto $v=\frac{5}{\sqrt{7}}$, tum vero erit $b=\frac{18}{5\cdot\sqrt{7}}$, cui respondet angulus $\beta=30^{\circ}.\ 18'.\ 48''$. Ceterum hic probe observandum, ipsi v nullos valores negativos tribui posse, quia aliter valor superioris signi radicalis fieret negativus.

§. 45. Quia vero hic imprimis in eos casus inquirere constitui, qui a praecedente dissertatione recedunt, ii autem, ut mox videbimus, circa angulorum α et β aequalitatem subsistunt, hic istos casus accuratius evolvamus, pro quibus v quam minime unitatem superabit. Ponam igitur, quia eadem est ratio ipsius v et $\frac{1}{v}$, hoc modo: $v=\frac{1+\omega}{1-\omega}$, existente ω fractione valde parva, unde per seriem erit $v = 1 + 2\omega + 2\omega^2 + 2\omega^3 + 2\omega^4 +$ etc. et $\frac{1}{v} = 1 - 2\omega + 2\omega^2 - 2\omega^3 + 2\omega^4 -$ etc. Quare cum sit $a = \frac{25}{32}.\frac{1}{v} - \frac{7}{32}v$, reperitur haec series: $a = \frac{9}{16} - 2\omega + \frac{9}{8}\omega^2 - 2\omega^3 + \frac{9}{8}\omega^4 -$ etc. eodemque modo: $b = \frac{9}{16} + 2\omega + \frac{9}{8}\omega^2 + 2\omega^3 + \frac{9}{8}\omega^4 +$ etc. quarum autem serierum terminos paucissimos sumsisse sufficiet.

§. 46. Hinc jam haud difficile erit ipsos angulos α et β definire: Hunc in finem sit θ angulus cujus cotangens $= \frac{9}{16}$, et cum sit $\cot.\alpha = a = \cot.\theta - 2\omega + \frac{9}{8}\omega^2 - 2\omega^3 + \frac{9}{8}\omega^4 -$ etc., ponatur brevitatis gratia $p = 2\omega - \frac{9}{8}\omega^2 + 2\omega^3 - \frac{9}{8}\omega^4 +$ etc., ut sit $p = \frac{2\omega - \frac{9}{8}\omega^2}{1 - \omega^2}$, atque habebimus $\cot.\alpha = \cot.\theta - p$. Jam cum sit $\cot.(\alpha - \theta) = \frac{1 + \cot.\alpha \cot.\theta}{\cot.\theta - \cot.\alpha}$, erit $\cot.(\alpha - \theta) = \frac{1 + \cot.\theta^2 - p\cot.\theta}{p}$, ideoque $\mathrm{tag.}(\alpha - \theta) = \frac{p}{1 - p\cot.\theta + \cot.\theta^2} = \frac{256p}{337 - 144p}$. Jam quia iste angulus $\alpha - \theta$ est valde parvus, erit proxime $\alpha - \theta = P - \frac{1}{3}P$, existente $P = \frac{256p}{337 - 144p}$. Hic autem angulus in partibus radii est expressus, qui ergo in minuta secunda convertetur, si multiplicetur per numerum $206265''$, cujus logarithmus est $5{,}4144251$. Quod si ergo iste numerus minutorum secundorum ponatur $= M$, ut sit $\alpha - \theta = M$, quia est $\theta = 60^\circ.\ 38'.\ 33''$, erit noster angulus $\alpha = 60^\circ.\ 38'.\ 33'' + M$.

§. 47. Simili modo si ponamus brevitatis gratia $q = 2\omega + \frac{9}{8}\omega^2 +$ etc. $= \frac{2\omega + \frac{9}{8}\omega^2}{1 - \omega\omega}$, ut sit $\cot.\beta = b = \frac{9}{16} + q = \cot.\theta + q$, ideoque ob $\cot.(\theta - \beta) = \frac{1 + \cot.\beta\cot.\theta}{\cot.\beta - \cot.\theta}$, erit $\cot.(\theta - \beta) = \frac{1 + \cot.\theta^2 + q\cot.\theta}{q}$ ideoque $\mathrm{tag.}(\theta - \beta) = \frac{q}{1 + \cot.\theta^2 + q\cot.\theta} = \frac{256q}{337 + 144q}$, quae fractio si ponatur $= Q$, erit ipse angulus $\theta - \beta = Q - \frac{1}{3} Q^3$, qui valor multiplicatus per 206265 in minuta secunda convertetur, quorum numerus si ponatur $= N$, erit $\beta = \theta - N = 60^\circ.\ 38'.\ 33'' - N$. Plerumque autem, quando fractio ω est valde parva, quadratum ipsius ω, cum potestatibus superioribus, negligere licebit, ita ut sit $p = 2\omega$ et $q = 2\omega$, hincque $P = \frac{512\omega}{337}$ et $Q = \frac{512\omega}{337}$.

§. 48. Quo jam ternos valores anguli β, qui pro tribus speciebus principalibus eidem angulo α respondent, facilius inter se comparare queamus, introducamus idoneas denotationes sequentes:

I) Denotet igitur b' valorem ipsius b ex prima specie oriundum, et β' ipsum angulum ei convenientem, ita ut sit $b' = \frac{1 - aa}{2a}$ et $\beta' = 180^\circ - 2\alpha$.

II) Sit b'' valor ipsius b pro secunda specie inventus, et β'' angulus ei respondens, vidimusque esse $b'' = \sqrt{1 + aa} - a$ et $\beta'' = 90^\circ - \frac{1}{2}\alpha$.

III) Sit b''' valor ipsius b ex tertia specie ortus, et β''' angulus ei respondens, ita ut sit $b''' = -\frac{337a + 18\sqrt{256aa + 175}}{175}$.

§. 49. Quoniam igitur species prima et secunda referunt extremas quadripartitiones, valor b''' plerumque inter limites b' et b'' incidet; interim tamen dantur casus, quibus ultra divagatur, secus atque dudum eram arbitratus; quocirca maxime erit necessarium, in eos casus inquirere, quibus b''' extra limites b' et b'' cadit, quod commodissime praestabitur, si eos casus exploremus, quibus b''' vel ipsi b' vel ipsi b'' aequatur.

Problema V.

Investigare angulum α, ejusve cotangentem a, cujus respondens valor b''' *aequetur valori* b'.

§. 50. Quod si ergo loco b' et b''' valores ante inventos substituamus, habebimus hanc aequationem: $\frac{1-aa}{2a} = -\frac{337a + 18\sqrt{256aa+175}}{175}$, quae reducitur ad hanc formam: $175 + 499\,aa = 36a\sqrt{256\,aa + 175}$, quae sumtis quadratis abibit in sequentem:
$175^2 + 2 \cdot 175 \cdot 499\,a^2 + 499^2 a^4 = 36^2 \cdot 16^2 \cdot a^4 + 36^2 \cdot 175 \cdot aa$
sive in hanc concinniorem: $77 \cdot 1075\,a^4 + 2 \cdot 149 \cdot 175\,aa = 175^2$, quae aequatio per $175 = 7 \cdot 25$ divisa evadit
$11 \cdot 43 \cdot a^4 + 2 \cdot 149\,aa = 175$, unde extracta radice fit
$aa = \frac{-149 + \sqrt{149^2 + 175 \cdot 473}}{473} = -\frac{149 + 324}{473} = \frac{175}{473}$, consequenter erit $a = \sqrt{\frac{175}{473}}$.

Problema hoc etiam sequenti modo resolvi potest.

§. 51. Utamur ipsis aequationibus pro specie prima et tertia immediate inventis: $aa + 2ab = 1$ et $175\,aa + 175\,bb + 2 \cdot 337\,ab = 324$, unde elisa quantitate b valorem ipsius a quaeri oportet. Hunc in finem dividatur altera per alteram et prodibit

$$175\,aa + 175\,bb + 2\,.\,337\,ab = 324\,aa + 2\,.\,324\,ab$$

quae redit ad sequentem aequationem: $149aa - 175bb - 26ab = 0$, unde colligitur $b = \frac{149}{175}a$, qui valor in prima substitutus praebet $a = \sqrt{\frac{175}{473}}$; prorsus ut ante.

§. 52. Cum igitur sit tag. $\alpha = \frac{1}{a} = \sqrt{\frac{473}{175}}$, hinc colligitur ipse angulus $\alpha = 58^\circ.\,41'.\,22\frac{1}{2}''$. Huic igitur angulo tam pro prima quam pro tertia specie respondet idem angulus β, cujus cotangens est $b = \frac{149}{\sqrt{175\cdot 473}}$, ideoque tag. $\beta = \frac{\sqrt{175\cdot 473}}{149}$, unde ipse angulus erit $\beta' = \beta''' = 62^\circ.\,37'.\,15''$. At vero pro eodem angulo α vidimus esse

$$\beta'' = 90^\circ - \tfrac{1}{2}\alpha = 60^\circ.\,39'.\,19''.$$

Problema VI.

Investigare angulum α, sive ejus cotangentem a, cujus respondens valor b''' aequetur ipsi b''.

§. 53. Ex formulis igitur b'' et b''' supra datis habebimus hanc aequationem: $\sqrt{1+aa} - a = \frac{-337 + 18\sqrt{256aa+175}}{175}$, quae in hanc formam transfunditur:

$$175\sqrt{1+aa} + 162\,a = 18\sqrt{256\,aa + 175};$$

haec, sumtis quadratis, abit in hanc:

$$175\,.\,149\,(1+aa) = 2\,.\,175\,.\,162\,a\sqrt{1+aa}$$

quae reducitur ad sequentem: $149\sqrt{1+aa} = 324\,a$. Sumtis hinc denuo quadratis fiet:

$149^2 = (324^2 - 149^2)\,aa = 175 \cdot 473\,aa$, unde colligitur $a = \frac{149}{\sqrt{175 \cdot 473}}$.

§. 54. Idem valor etiam ex ipsis aequationibus rationalibus reperitur, quae sunt $bb + 2ab = 1$ et $175\,aa + 175\,bb + 2 \cdot 337\,ab = 324$, quarum haec per illam divisa praebet $\frac{175\,aa + 175\,bb + 2 \cdot 337\,ab}{bb + 2ab} = \frac{324}{1}$, quae in hanc formam transmutatur: $149\,bb - 26\,ab - 175\,aa = 0$, unde elicimus $b = \frac{175}{149}\,a$, qui valor in priore aequatione $b(b + 2a) = 1$ substitutus, ob $b + 2a = \frac{473}{149}\,a$, praebet $\frac{175 \cdot 473}{149^2}\,aa = 1$, ideoque $a = \frac{149}{\sqrt{175 \cdot 473}}$, prorsus ut ante.

§. 55. Cum igitur sit $\cot.\alpha = \frac{149}{\sqrt{175 \cdot 473}}$, erit $\tan g.\alpha = \frac{\sqrt{175 \cdot 473}}{149}$, unde ex praecedenti calculo colligimus fore $\alpha = 62^\circ.\,37'.\,15''$, cui ergo respondet tam in secunda quam in tertia specie angulus $\beta'' = \beta''' = 58^\circ.\,41'.\,22''\tfrac{1}{2}$.

§. 56. Hi duo valores, quos pro α sumus adepti, tanquam limites spectari possunt, intra quos si angulus α cadat, ei respondens angulus β''' extra limites β' et β'' extravagetur. Hujusmodi ergo valores medios pro α accuratius prosequi conveniet, quem in finem sequens problema subjungimus.

Problema VII.

Proposito angulo α, intra limites modo inventos contento, assignare ternos valores anguli β, quos pro tribus speciebus principalibus recipiet.

*

§. 57. Hic plurimum observasse juvabit, egregium dari nexum inter binos limites inventos, ita ut cognito uno alter ultro innotescat. Si enim minorem limitem littera f, majorem vero littera g designemus, vidimus esse tag. $f = \sqrt{\frac{473}{175}}$ et tag. $g = \frac{\sqrt{175 \cdot 473}}{149}$, unde colligitur tag. $(f + g) = \frac{\text{tag.} f + \text{tag.} g}{1 - \text{tag.} f \, \text{tag.} g} = -\sqrt{\frac{473}{175}} = -$ tag. f, ita ut sit tag. $(f + g) =$ tag. $(180^\circ - f)$, consequenter erit $f + g = 180^\circ - f$, ideoque $2f + g = 180^\circ$, quae proprietas perfecte congruit cum valoribus inventis.

§. 58. Quod jam primo ad valores β' et β'' attinet, ii sunt $\beta' = 180^\circ - 2\alpha$ et $\beta'' = 90^\circ - \frac{1}{2}\alpha$; unde si ponamus $\alpha = 60^\circ + \varepsilon$, erit $\beta' = 60^\circ - 2\varepsilon$ et $\beta'' = 60^\circ - \frac{1}{2}\varepsilon$. Pro valore autem tertio β''', quoniam limites inventi satis sunt angusti, facile intelligitur, in formulis, quas in praecedente problemate sumus adepti, litterae ω potestates secunda altiores tuto omitti posse; hanc ob rem, introducto angulo θ, cujus tangens est $= \frac{16}{9}$, invenimus tag. $(\alpha - \theta) = \frac{256p}{337 - 144p}$, existente $p = 2\omega - \frac{9}{8}\omega^2$, siquidem potestatem tertiam ω^3 rejiciamus; quo valore substituto erit tag. $(\alpha - \theta) = \frac{512\omega - 288\omega^2}{337 - 288\omega} = \frac{512}{337}\omega + \frac{175 \cdot 288}{337^2}\omega\omega$, cujus loco brevitatis gratia scribamus tag. $(\alpha - \theta) = \mu\omega + \nu\omega\omega$, ita ut sit $\mu = \frac{512}{337}$ et $\nu = \frac{175 \cdot 288}{337^2}$. His autem valoribus non indigebimus. Eodem modo reperietur tag. $(\theta - \beta''') = \mu\omega - \nu\omega\omega$.

§. 59. Nunc igitur quia potestates tertias rejicimus, erunt ipsi hi anguli $\alpha - \theta = \mu\omega + \nu\omega\omega$ et $\theta - \beta''' = \mu\omega - \nu\omega\omega$, quarum hic ab illo subtractus relinquit $\alpha + \beta''' - 2\theta = 2\nu\omega\omega$; hinc ergo si etiam quadratum ipsius ω negligeremus, foret $\alpha + \beta''' = 2\theta$, ideoque $\beta''' = 2\theta - \alpha = 121^\circ.\ 17'.\ 4'' - \alpha$; quare posito, ut fecimus, $\alpha = 60^\circ + \varepsilon$, erit $\beta''' = 61^\circ.\ 17'.\ 4'' - \varepsilon$.

§. 60. Hic autem valor correctione indiget, ex neglectu ipsius ω^2 oriunda, cum revera sit $\beta''' = 61^\circ.\ 17'.\ 4'' - \varepsilon + 2\nu\omega\omega$, ita ut ad valores inde desumtos semper aliquid addi oporteat. Ad hanc correctionem investigandam consideremus summam binarum formularum inventarum, quae dabit $\alpha - \beta''' = 2\mu\omega$; unde intelligitur errorem illum adjiciendum semper proportionalem esse quadrato formulae $\alpha - \beta'''$; ita ut si unico casu errorem noverimus, eum pro omnibus reliquis facile definire liceat.

§. 61. Hunc in finem consideremus limitem ipsum majorem pro α inventum, qui erat $\alpha = 62^\circ.\ 37'.\ 15''$, cui jam novimus respondere $\beta''' = 58^\circ.\ 41'.\ 22''$. At vero per formulam nostram $\beta''' = 2\theta - \alpha$ prodit $\beta''' = 58^\circ.\ 39'.\ 49''$, ita ut hic error sit $1'.\ 33''$, nostro valori addendus. Quamobrem cum hoc casu sit $\alpha - \beta''' = 3^\circ.\ 57'.\ 26''$, ad minuta secunda reducendo novimus differentiae $\alpha - \beta''' = 14246''$ respondere errorem $93''$; unde pro alia quacunque differentia $\alpha - \beta''' = \lambda$ error erit $\frac{93\lambda\lambda}{14246^2} = \frac{\lambda\lambda}{2000000}$.

§. 62. Quoniam igitur pro quavis differentia $\alpha - \beta''' = \lambda''$ errorem ante memoratum facile assignare poterimus (ubi notandum, perinde esse, sive differentia $\alpha - \beta'''$ sit positiva sive negativa) sequentem tabulam subjungamus, cujus prima columna refert differentiam $\alpha - \beta'''$ per quina minuta prima crescentem, altera vero columna exhibet errorem desideratum valori scilicet $\beta''' = 2\theta - \alpha$ addendum. Notetur autem, si differentia $\alpha - \beta'''$ fuerit $5\,i$ min. ob $\lambda = 300\,i$ sec. et $\lambda\lambda = 90000\,ii$, fore errorem $= \frac{9ii}{200}$ sec. vel accuratius $\frac{ii}{24}$.

Tabula Errorum.

$\alpha - \beta'''$	Error.	$\alpha - \beta'''$	Error.	$\alpha - \beta'''$	Error.	$\alpha - \beta'''$	Error.
$5'$	$\frac{1}{24}''$	$1^\circ\ 5'$	$7\frac{1}{24}''$	$2^\circ\ 5'$	$26\frac{1}{24}''$	$3^\circ\ 5'$	$57\frac{1}{24}''$
10	$\frac{1}{6}$	1 10	$8\frac{1}{6}$	2 10	$28\frac{1}{6}$	3 10	$60\frac{1}{6}$
15	$\frac{3}{8}$	1 15	$9\frac{3}{8}$	2 15	$30\frac{3}{8}$	3 15	$63\frac{3}{8}$
20	$\frac{2}{3}$	1 20	$10\frac{2}{3}$	2 20	$32\frac{2}{3}$	3 20	$66\frac{2}{3}$
25	$1\frac{1}{24}$	1 25	$12\frac{1}{24}$	2 25	$35\frac{1}{24}$	3 25	$70\frac{1}{24}$
30	$1\frac{1}{2}$	1 30	$13\frac{1}{2}$	2 30	$37\frac{1}{2}$	3 30	$73\frac{1}{2}$
35	$2\frac{1}{24}$	1 35	$15\frac{1}{24}$	2 35	$40\frac{1}{24}$	3 35	$77\frac{1}{24}$
40	$2\frac{2}{3}$	1 40	$16\frac{2}{3}$	2 40	$42\frac{2}{3}$	3 40	$80\frac{2}{3}$
45	$3\frac{3}{8}$	1 45	$18\frac{3}{8}$	2 45	$45\frac{3}{8}$	3 45	$84\frac{3}{8}$
50	$4\frac{1}{6}$	1 50	$20\frac{1}{6}$	2 50	$48\frac{1}{6}$	3 50	$88\frac{1}{6}$
55	$5\frac{1}{24}$	1 55	$22\frac{1}{24}$	2 55	$51\frac{1}{24}$	3 55	$92\frac{1}{24}$
60	6	1 60	24	2 60	54	3 60	96

§. 63. Nunc ope hujus tabulae construamus tabulam completam, quae pro omnibus angulis α intra nostros limites contentis exhibeat ternos valores alterius anguli β

ex specie prima, secunda et tertia ortos. Prima igitur columna referat angulos α a limite minore $58^\circ.\,41'.\,22''$ ad majorem $62^\circ.\,37'.\,15''$ per dena minuta prima crescentes, praeterquam in ipsis limitibus; secunda columna contineat angulos β', ex prima specie desumtos, ubi est $\beta' = 180^\circ - 2\,\alpha$; tertia columna indicet angulos β'', ex specie secunda, ubi $\beta'' = 90^\circ - \frac{1}{2}\,\alpha$; quarta columna exhibeat valores β''' tertiae speciei ex formula $2\,\theta - \alpha$ desumtos, cui autem in quinta columna assignemus errores addendos.

α	β'	β''	β'''	Error.
58°, 41', 22''	62°, 37', 15	60°, 39', 19''	62°, 37', 15''	—' —''
58, 50 —	62, 20 —	60, 35 —	62, 27, 4	1' 18''
59, 0 —	62, 0 —	60, 30 —	62, 17, 4	1 5
59, 10 —	61, 40 —	60, 25 —	62, 7, 4	— 52
59, 20 —	61, 20 —	60, 20 —	61, 57, 4	— 41
59, 30 —	61, 0 —	60, 15 —	61, 47, 4	— 31
59, 40 —	60, 40 —	60, 10 —	61, 37, 4	— 21
59, 50 —	60, 20 —	60, 5 —	61, 27, 4	— 15
60, 0 —	60, 0 —	60, 0 —	61, 17, 4	— 10
60, 10 —	59, 40 —	59, 55 —	61, 7, 4	— 5
60, 20 —	59, 20 —	59, 50 —	60, 57, 4	— 2
60, 30 —	59, 0 —	59, 45 —	60, 47, 4	— —
60, 40 —	58, 40 —	59, 40 —	60, 37, 4	— —
60, 50 —	58, 20 —	59, 35 —	60, 27, 4	— 1
61, 0 —	58, 0 —	59, 30 —	60, 17, 4	— 3
61, 10 —	57, 40 —	59, 25 —	60, 7, 4	— 7
61, 20 —	57, 20 —	59, 20 —	59, 57, 4	— 11
61, 30 —	57, 0 —	59, 15 —	59, 47, 4	— 17
61, 40 —	56, 40 —	59, 10 —	59, 37, 4	— 25
61, 50 —	56, 20 —	59, 5 —	59, 27, 4	— 34
62, 0 —	56, 0 —	59, 0 —	59, 17, 4	— 44
62, 10 —	55, 40 —	58, 55 —	59, 7, 4	— 56
62, 20 —	55, 20 —	58, 50 —	58, 57, 4	1, 9
62, 30 —	55, 0 —	58, 45 —	58, 47, 4	1, 23
62, 37, 15	54, 45, 30	58, 41, 22	58, 41, 22	— —

§. 64. In hac igitur tabula continentur omnes casus, quibus valor β''' extra limites β' et β'' cadit; unde sequitur, dari etiam ejusmodi casus, sive relationes inter binos angulos ad basin α et β, ubi β non intra limites β' et β'', qui erant $180^{\circ} - 2\alpha$ et $90^{\circ} - \frac{1}{2}\alpha$, subsistunt, quibusque nihilo minus quadrisectio trianguli perfici potest. Hos igitur casus in istis limitibus non contentos in subjuncta tabula repraesentemus, quae pro singulis angulis α novos limites exhibeat, quibus etiam solutio locum habere potest, quod quidem, uti vidimus, evenire nequit, nisi angulus α intra intervallum $58^{\circ}.41'.22''$ et $62^{\circ}.37'.15''$ contineatur. His igitur angulis α per dena minuta prima crescentibus adjungamus limites novos, intra valores β''' et vel β' vel β'', qui illi est propior, siquidem casus intra β' et β'' jam in priori tabula continentur, atque ut haec tabula magis ad usum accommodetur, valores β''' in praecedente tabula datos suis erroribus augeamus.

Tabula

novos limites pro angulo β exhibens, quae instar supplementi spectari potest tabulae olim datae.

α	β'''	β' vel β''
58°, 41′, 22″	62°, 37′, 15″	62°, 37′, 15″
58, 50, —	62, 28, 22	62, 20, —
59, 0, —	62, 18, 9	62, 0, —
59, 10, —	62, 7, 56	61, 40, —
59, 20, —	61, 57, 45	61, 20, —
59, 30, —	61, 47, 35	61, 0, —
59, 40, —	61, 37, 25	60, 40, —
59, 50, —	61, 27, 19	60, 20, —
60, 0, —	61, 17, 14	60, 0, —
60, 10, —	61, 7, 9	59, 55, —
60, 20, —	60, 57, 6	59, 50, —
60, 30, —	60, 47, 4	59, 45, —
60, 40, —	60, 37, 4	59, 40, —
60, 50, —	60, 27, 5	59, 35, —
61, 0, —	60, 17, 7	59, 30, —
61, 10, —	60, 7, 11	59, 25, —
61, 20, —	59, 57, 15	59, 20, —
61, 30, —	59, 47, 21	59, 15, —
61, 40, —	59, 37, 29	59, 10, —
61, 50, —	59, 27, 38	59, 5, —
62, 0, —	59, 17, 48	59, 0, —
62, 10, —	59, 8, 0	58, 55, —
62, 20, —	58, 58, 13	58, 50, —
62, 30, —	58, 48, 27	58, 45, —
62, 37, 15	58, 41, 22	58, 41, 22

§. 65. Quando angulus β intra veteres limites continetur, jam in dilucidationibus methodum facilem exposui, ex datis binis angulis α et β, eorumve cotangentibus a et

b, angulum Φ, cujus tangens erat t, inveniendi; ubi simul manifestum erat, quovis casu tantum unicam solutionem locum habere posse; praeterea quoque ibi ostendi, horum amborum angulorum α et β semper alterum esse maximum, alterum vero minimum in triangulo, sive latus pro basi assumtum AB esse medium inter maximum et minimum.

§. 66. Quando autem angulus β intra limites novos continetur, tum postrema proprietas, quod latus AB sit medium, non amplius locum habet. Consideremus enim casum quo $\alpha = 61°$, et sumamus $\beta = 60°$, eritque tertius trianguli angulus 59°, ideoque hoc casu latus AB est minimum in triangulo. Sin autem sumamus angulum $\alpha = 59°$ et $\beta = 62°. 10'$, erit tertius angulus $58°. 50'$, ideoque tam ipse quam latus oppositum, seu basis, minimum; unde intelligitur, his novis casibus latus AB semper esse minimum in triangulo. Imprimis autem circa hos novos casus notandum est, pro iis semper duas solutiones dari posse, quam ob caussam methodus supra data hic non commode in usum vocare poterit. Hic igitur exponam novam methodum, pro quolibet horum casuum ambas solutiones, quas admittunt, una operatione eliciendi.

Problema VIII.

Quando relatio inter binos angulos α et β in nova tabula continetur, invenire ambas quadrisectiones, quae locum habere possunt.

§. 67. Totum ergo negotium huc redit, ut pro datis duobus hujusmodi angulis debiti valores numerorum m et n investigentur: his enim inventis ope formulae supra datae littera $t = \frac{nna + (2 - mm)b}{mm + nn - 2}$ inveniri potest. Cum porro sit t tangens anguli Φ, triangulum rectangulum XOY determinatur. Sectio autem basis AB in punctis X et Y immediate ex numeris m et n innotescit, cum posito intervallo $XY = 1$ sit $AX = m$, $BY = n$ et tota basis $AB = m + n - 1$. Tab. II. Fig. 1.

§. 68. Inchoëmus nunc a nostris tribus speciebus principalibus, pro quarum prima erat $m = \sqrt{2}$ et $n = 1$; hic autem spectemus numerum $n = 1$, ac ponamus angulum β ipsi α in hac specie respondentem $\beta' = 180° - 2\alpha = f$. Pro specie secunda, sive altera extrema, erat $n = \sqrt{2}$, cujus loco scribamus ϱ, ut sit $\varrho\varrho = 2$; angulus autem $\beta'' = 90° - \frac{1}{2}\alpha$ ponatur $= g$. At pro specie tertia intermedia, pro qua erat $n = \frac{5}{4}$, valor ipsius β''', ex tabula penultima sumendus, designetur littera h. Ex his igitur definiri debet valor litterae n, qui angulo β dato respondeat.

Tab. II. Fig. 6. §. 69. Hunc in finem valores litterae n per abscissas, valores autem anguli β per applicatas repraesentemus, ita ut sumto $AO = 1$ sit $AF = f$, sumto vero $OB = \sqrt{2} = \varrho$, sit $BG = \beta'' = g$, sumto denique $OC = \frac{5}{4}$ sit $CH = \beta''' = h$. Hic facile intelligitur, puncta F, H et G sita fore in certa linea curva tractu satis uniformi procedente, propterea quod intervallum f et g valde est exiguum; ac praeterea singulis abscissis unica tantum respondet applicata; sumta igitur abscissa quacunque $OX = x$, cui respondeat applicata $XY = y$, natura hujus curvae satis exacte tali aequatione exprimi poterit: $y = A + Bx + Cxx$.

§. 70. In hac ergo aequatione coëfficientes A, B, C ita comparati esse debent, ut posito $x = 1$, fiat $y = f$, sumta vero abscissa $x = \frac{5}{4}$, fiat $y = h$, ac tandem sumta abscissa $x = \sqrt{2}$, ut fiat $y = g$. Hinc ergo oriuntur tres sequentes aequationes:

$$\text{I)}\ f = A + B + C,$$
$$\text{II)}\ h = A + \tfrac{5}{4}B + \tfrac{25}{16}C,$$
$$\text{III)}\ g = A + \varrho B + \varrho\varrho C,$$

unde elicimus sequentes valores pro litteris A, B, C:

$$B = \frac{9(g-f) - 16(h-f)}{9\varrho - 13} = \frac{7f + 9g - 16h}{9\varrho - 13},$$
$$C = (g - f) - (\varrho - 1)B,$$
$$A = f - B - C.$$

Praestabit enim in praxi his formulis uti, potius quam iis qui, omnibus ad eundem denominatorem reductis, prodirent. Ubi notasse juvabit esse proxime $9\varrho - 13 = -0,2720776$, hincque $\frac{1}{9\varrho - 13} = -3,6754175$; tum vero erit $\varrho - 1 = 0,4142136$.

§. 71. Calculus autem commodior reddetur, cum valores f, g, h circa $60°$ subsistant et intra sat arctos limites contineantur, si applicatae f, g, h 60 gradibus diminuantur, earumque loco sive excessus supra $60°$, sive defectus infra $60°$ in minutis primis exprimantur, quibus minuta secunda in partibus decimalibus adjungi possunt; tum vero etiam ipsam applicatam y, quae verum valorem anguli $B = \beta$ refert, pariter $60°$ gradibus diminui debebit.

§. 72. Postquam autem valores litterarum A, B, C fuerint inventi, tribuatur applicatae y angulus $B = \beta$ datus, atque ex aequatione secundi gradus $y = A + Bx + Cxx$ quaerantur binae radices pro x, quae dabunt binos valores pro numero n, unde simul alter numerus n innotescet, quibus cognitis statim divisio basis AB in punctis x et y, hincque porro angulus ϕ, cujus tangens t, facile reperientur; ubi meminisse oportet, litteras a et b designare cotangentes angulorum α et β, hocque ergo modo duplex solutio una operatione obtinebitur — Haec exemplo illustrari conveniet.

Exemplum

Propositum sit triangulum, cujus alter angulus $A = \alpha = 59^\circ$, *alter vero* $B = 62^\circ, 10'$, *pro quo duplicem quadrisectionem trianguli quaeri oporteat.*

§. 73. Pro hoc ergo angulo $\alpha = 59^\circ$ habemus $\beta' = 62^\circ$; $\beta'' = 60^\circ, 30'$, $\beta''' = 62^\circ, 18', 9''$; unde rejectis 60 gradibus, erit $f = 120'$; $g = 30'$; $h = 138,150'$; praeterea vero erit $y = 130'$. Hinc igitur primo quaeramus pro littera B numeratorem, qui erit $7f + 9g - 16h = -1100{,}40$, qui ductus in $-3{,}6754175$ praebet $B = +4044{,}430$. Hinc erit porro $C = -1765{,}258$, ideoque $A = -2159{,}172$. His substitutis aequatio quadratica, pro determinatione valorum x §. 69 exhibita, ita se habet:

$$130 = -2159{,}172 + 4044{,}430 \,.\, x - 1765{,}258 \,.\, xx$$

ex qua fit $x = \frac{2022{,}215 \pm \sqrt{(2022{,}215)^2 - (2289{,}172)(1765{,}258)}}{1765{,}258}$, qua forma, pro ratione ambiguitatis signorum evoluta, nanciscimur

$$x = \begin{cases} 1{,}27015 \\ 1{,}02097. \end{cases}$$

§. 74. Invento igitur hoc duplici valore abscissae $OX = x$ nacti sumus simul binos valores pro littera n, quibus cognitis etiam valores alterius litterae m innotescunt, cum sit $m = n - 1 + \sqrt{6 - 4n}$. His autem determinatis vi problematis VIII, quadrisectio ita instituitur, ut fiat pro sectione basis $AX = m$, $BY = n$, tota basis

$AB = m + n - 1$; et pro angulo Φ, tag. $\Phi = \frac{nna + (2 - mm)6}{mm + nn - 2}$.
Duplicem hanc quadripartitionem in sequenti tabula ob oculos ponemus.

Data	Solutio I.	Solutio II.
AB	1,4991	1,4262
AX	1,2290	1,4052
BY	1,2701	1,0210
XY	1,0000	1,0000
Φ	47°, 32′, 14″	32°, 10′, 23″

Utriusque indoles et constructio ex figura 7 et 8 apparet. Tab. II. Fig. 7, 8.

Fig. 1.

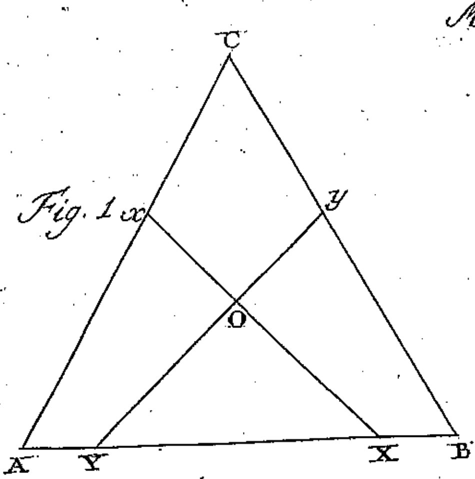

Fig. 2.

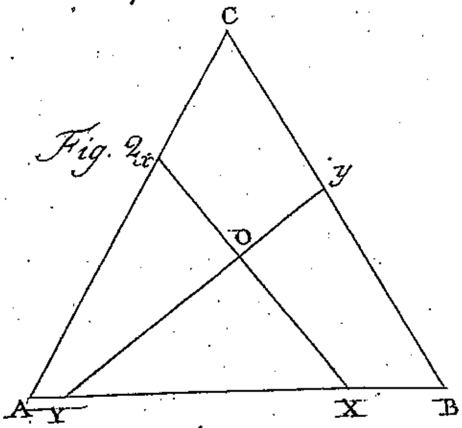

Fig. 3.

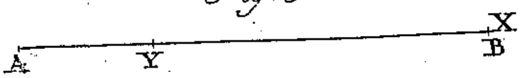

Fig. 4.

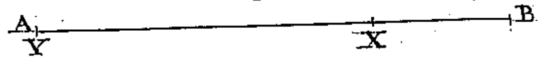

Fig. 6.

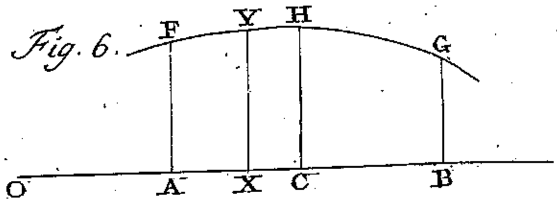

Fig. 5.

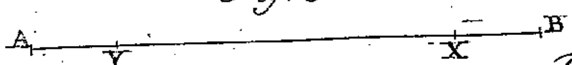

Fig. 9.

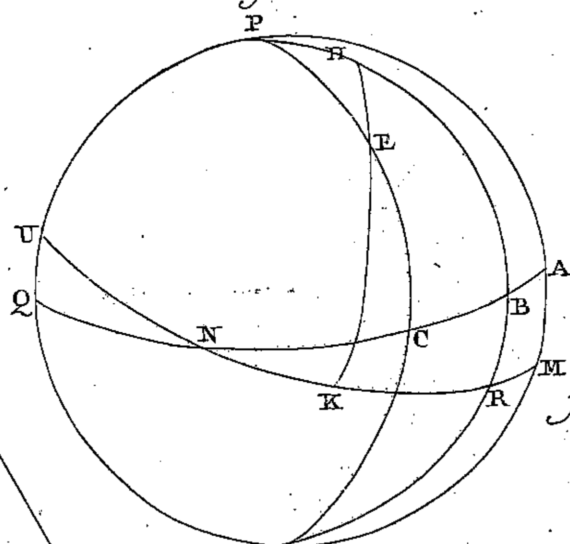

Fig. 7.

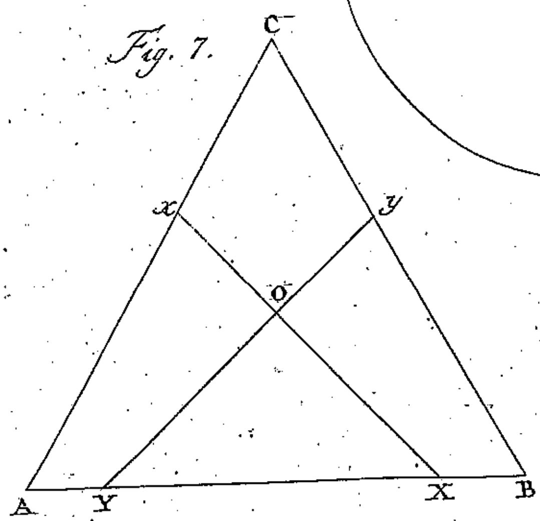

Fig. 8.