DILUCIDATIONES
SUPER
PROBLEMATE GEOMETRICO
DE QUADRISECTIONE TRIANGULI
A JACOBO BERNOULLI
OLIM TRACTATO

AUCTORE

L. EULERO.

Conventui exhib. die 3. Maii 1779.

§. 1. Problema hoc postulat ut, proposito triangulo quocunque ABC, ejus area in quatuor partes aequales dividatur, per duas rectas XQ et YP se mutuo in O normaliter secantes. Pro ejus solutione vocemus trianguli latera $AB = c$, $AC = b$ et $BC = a$, angulos vero $A = \alpha$, $B = \beta$, $C = \gamma$. Praeterea vero statuatur tota area hujus trianguli $= kk$, eritque, uti ex elementis constat,

Tab. I. Fig. 1.

$$kk = \tfrac{1}{2} ab \sin. \gamma = \tfrac{1}{2} ac \sin. \beta = \tfrac{1}{2} bc \sin. \alpha.$$

§. 2. Ut nunc multitudinem harum quantitatum datarum ad pauciores reducamus, quia latera sunt sinibus angulorum oppositorum proportionalia, statuere licebit $a = nk \sin. \alpha$, $b = nk \sin. \beta$, $c = nk \sin. \gamma$; quibus valoribus in superioribus formulis substitutis, omnes reducentur ad hanc aequationem: $kk = \frac{1}{2} nnkk \sin.\alpha \sin.\beta \sin.\gamma$; unde colligimus $nn = \frac{2}{\sin.\alpha \sin.\beta \sin.\gamma}$, sicque latera trianguli sequenti modo exprimentur:

$$a = k\sqrt{\frac{2\sin.\alpha}{\sin.\beta \sin.\gamma}};\quad b = k\sqrt{\frac{2\sin.\beta}{\sin.\alpha \sin.\gamma}};\quad c = k\sqrt{\frac{2\sin.\gamma}{\sin.\alpha \sin.\beta}}.$$

Hoc ergo modo omnia elementa cognita reducta sunt ad quantitatem k, cum ternis angulis α, β, γ, quorum autem si duo fuerint cogniti, tertius per se innotescit.

§. 3. His praenotatis ipsum problema aggrediamur; ac primo quidem incipiamus ab eo latere AB, intra quod bini termini x et y rectarum dividentium incidunt, ubi has faciamus denominationes: $AX = x$, $BY = y$ et $XY = z$; unde cum sit $AB = c$, erit $c = x + y - z$, ideoque $z = x + y - c$. Cum jam triangulum XOY sit ad O rectangulum, posito angulo $YXO = \phi$, erit angulus $XYO = 90° - \phi$, et latera: $XO = z\cos.\phi$ et $YO = z\sin.\phi$; unde area istius trianguli XOY erit $\frac{1}{2} zz \sin.\phi.\cos.\phi$, quae cum esse debeat pars quarta totius areae kk, praebet hanc aequationem; $kk = 2zz\sin.\phi \cos.\phi = zz\sin.2\phi$, unde fit $z = \frac{k}{\sqrt{\sin.2\phi}}$.

§. 4. Contemplemur nunc triangulum AXQ, cujus area aequari debet ipsi $\frac{1}{2}kk$. Fiat igitur haec proportio:

$\sin.AQX : AX = \sin.A : QX$, sive

$\sin.(\alpha + \phi) : x = \sin.\alpha : XQ = \frac{x\sin.\alpha}{\sin.(\alpha+\phi)}$. Ex his jam colligitur area trianguli AXQ, quippe quae erit $\frac{xx\,\sin.\alpha\,\sin.\Phi}{2\,\sin.(\alpha+\Phi)}$, quae ipsi $\frac{1}{2}kk$ aequalis posita dat $xx = \frac{kk\,\sin.(\alpha+\Phi)}{\sin.\alpha\,\sin\Phi}$. Haec expressio reducitur ad hanc: $xx = kk\,(\cot.\alpha + \cot.\Phi)$, consequenter erit $x = k\sqrt{\cot.\alpha + \cot.\Phi}$.

§. 5. Simili modo tractemus triangulum BPY, pro quo habebimus hanc proportionem: sin. BPY : BY = sin. B : PY, sive $\cos.(\Phi - \beta) : y = \sin.\beta : PY$; unde fit $PY = \frac{y\,\sin.\beta}{\cos.(\Phi-\beta)}$, hincque area trianguli $PBY = \frac{1}{2}yy\frac{\sin.\beta\,\cos.\Phi}{\cos.(\Phi-\beta)}$, sive erit $\frac{1}{2}kk = \frac{1}{2}yy\frac{\sin.\beta\,\cos.\Phi}{\cos.(\Phi-\beta)}$, ideoque $yy = kk\frac{\cos.(\Phi-\beta)}{\cos.\Phi\,\sin.\beta}$, quae expressio reducitur ad hanc: $yy = kk\,(\cot.\beta + \text{tag}.\Phi)$, ex qua fit $y = k\sqrt{\cot.\beta + \text{tag}.\Phi}$.

§. 6. Hoc igitur modo ternas litteras incognitas x, y, z ad solam quantitatem k, cum angulo incognito Φ, reduximus; et quia est $c = k\sqrt{\frac{2\,\sin.\gamma}{\sin.\alpha\,\sin.\beta}}$, aequalitas $z = x + y - c$ nos perducit ad hanc aequationem finalem, facta scil. divisione per k:

$$\sqrt{\cot.\alpha + \cot.\Phi} + \sqrt{\cot.\beta + \text{tag}.\Phi} - \sqrt{\frac{2\,\sin.\gamma}{\sin.\alpha\,\sin.\beta}} = \frac{1}{\sqrt{\sin.2\Phi}}$$

quae ad simpliciorem formam reduci potest. Cum enim sit $\gamma = 180^\circ - \alpha - \beta$, ideoque $\sin.\gamma = \sin.(\alpha+\beta)$, haec aequatio nunc abibit in hanc:

$$\sqrt{\cot.\alpha + \cot.\Phi} + \sqrt{\cot.\beta + \text{tag}.\Phi} - \sqrt{2(\cot.\alpha + \cot.\beta)} = \frac{1}{\sqrt{\sin.2\Phi}}.$$

§. 7. Ut nunc hanc formam ab angulis ad quantitates solitas revocemus, ponamus $\cot.\alpha = f$ et $\cot.\beta = g$;

tum vero tag. $\Phi = t$. Unde cum sit sin. $\Phi = \frac{t}{\sqrt{1+tt}}$ et cos. $\Phi = \frac{1}{\sqrt{1+tt}}$, fiet sin. $2\Phi = \frac{2t}{1+tt}$; quibus valoribus introductis, nostra aequatio hanc induet formam:
$\sqrt{f+\frac{1}{t}} + \sqrt{g+t} - \sqrt{2(f+g)} = \sqrt{\frac{1+tt}{2t}}$; ex qua igitur valorem ipsius t elici oportet, quem idcirco per duas tantum quantitates constantes f et g determinari manifestum est.

§. 8. Postquam autem valor ipsius t fuerit inventus, videamus quomodo omnia elementa, quibus solutio absolvitur, definiantur. Ac primo quidem habebitur angulus Φ, ob tag. $\Phi = t$. Deinde, introducta area trianguli, sive quantitate k, habebimus intervalla $AX = x = k\sqrt{\cot.\alpha + \cot.\Phi}$ et $BY = y = k\sqrt{\cot.\beta + \text{tag.}\Phi}$; tum vero hinc colliguntur intervalla $AQ = \frac{x \sin.\Phi}{\sin.(\alpha+\Phi)}$ et $BP = \frac{y\cos.\Phi}{\cos.(\Phi-\beta)}$. Inventis autem punctis X, Y, P et Q, ductae rectae XQ et YP problema perfecte resolvunt.

§. 9. Restaret igitur, ut aequatio nostra finalis: $\sqrt{f+\frac{1}{t}} = \sqrt{g+t} - \sqrt{2(f+g)} = \sqrt{\frac{1+tt}{2t}}$ ab irrationalite liberaretur, id quod, aliquoties quadratis sumendo praestari posset, quo pacto utique ad aequationem plurium dimensionum perveniretur, quae autem in praxi nullum plane usum esset praestatura. Quod si enim triangulum quodpiam determinatum proponatur, ex cujus binis angulis α et β quantitates f et g per fractiones decimales innotescunt, nihil impedit, quo minus valor pro t vero proximus ex ipsa aequatione irrationali eliciatur. Figurâ enim crasso saltem modo delineata, valor ipsius t, non multum a vero abhorrens, divinari poterit. Inde igitur ipsi t successive bini valores tribuantur, alter major, alter minor, atque ex utroque errore ejus valor multo propior innotescet; ex quo, simili operatione aliquoties repetita, mox verus valor ipsius t tam exacte exhibebitur, ut error quovis dato minor certe sit futurus.

§. 10. Circa solutionem hujus problematis autem imprimis notandum est, ipsam quaestionem quasdam conditiones involvere, ad quas in calculo non respicitur, unde eas cum formulis inventis conjungi oportet, antequam evolutio cujuspiam casus determinati suscipiatur. In quaestione scilicet absolute postulatur, ut bina puncta X et Y intra basin AB incidant, vel saltem non extra eam cadant. Hinc igitur necesse est ut ambo intervalla $AX = x$ et $BY = y$, quibus respondent formulae $\sqrt{f + \frac{1}{t}}$ et $\sqrt{g + t}$, minora sint quam tota basis $AB = c$, cui respondet formula $\sqrt{2(f+g)}$; sicque his duabus conditionibus erit satisfaciendum: $\sqrt{f + \frac{1}{t}} < \sqrt{2(f+g)}$ et $\sqrt{g+t} < \sqrt{2(f+g)}$. Insuper vero, ut solutio succedat, requiritur ut talis detur

valor pro t, intra istos limites contentus, qui satisfaciat aequationi inventae:
$\sqrt{f+\frac{1}{t}}+\sqrt{g+t}=\sqrt{2(f+g)}+\sqrt{\frac{1+tt}{2t}}$, ubi quatuor signa radicalia, quae in analysi aliâs ambigua esse solent, hic nullam ambiguitatem admittunt, propterea quod quantitates x, y et z necessario debent esse positivae.

§. 11. Cum igitur primo esse debeat $\sqrt{f+\frac{1}{t}}<\sqrt{2(f+g)}$; erit $f+\frac{1}{t}<2f+2g$, ideoque $\frac{1}{t}<f+2g$, consequenter invertendo $t>\frac{1}{f+2g}$. Simili modo, cum sit $\sqrt{g+t}<\sqrt{2(f+g)}$, erit $t<2f+g$; unde patet pro t alium valorem admitti non posse, nisi qui intra hos limites contineatur. Utrum autem pro t talis detur valor intra hos limites contentus, qui nostrae aequationi satisfaciat nec ne, quaestio est, quam peculiari problemate evolvi operae erit pretium. Hic autem duos casus distingui conveniet, prouti ambae litterae f et g fuerint positivae, vel altera earum negativa; quia enim litterae f et g sunt cotangentes angulorum $A=\alpha$ et $B=\beta$, eae erunt positivae, quamdiu hi duo anguli fuerint acuti, et quia horum angulorum nonnisi unus potest esse obtusus, alterutra litterarum f et g evadere potest negativa: ambos autem conjunctim in sequente problemate expedire licet.

Problema I.

Si ambae cotangentes f *et* g *fuerint utcunque datae, investigare conditiones, sub quibus problemati proposito ita satisfieri queat, ut bina puncta* X *et* Y *intra basin* AB *cadant.*

Solutio

§. 12. Quia modo vidimus, valorem litterae t, quo tangens anguli AXO designatur, intra hos limites cadere debere: $\frac{1}{f+2g}$ et $2f+g$, ipsi t tribuamus successive hos ambos valores, et videamus, quantum pro utroque a veritate nostrae aequationis aberretur. Si enim eveniat ut alter horum errorum sit positivus, alter vero negativus, tuto concludere poterimus, dari inter binos illos limites ejusmodi valorem ipsius t, qui nullum errorem pariat, ideoque problema nostrum perfecte resolvat.

§. 13. Incipiamus a limite majore, ponendo $t=2f+g$, quo fit $\sqrt{g+t}=\sqrt{2(f+g)}$, ita ut insuper esse debeat $\sqrt{f+\frac{1}{2f+g}}=\sqrt{\frac{1+(2f+g)^2}{2(2f+g)}}$. Hic autem erit radicibus rejectis $\frac{2ff+fg+1}{2f+g}=\frac{1+4ff+4fg+gg}{4f+2g}$, qui valores ut inter se aequales evadant, requirunt ut sit $1-2fg-gg=0$, unde fit $f=\frac{1-gg}{2g}$.

§. 14. Examinemus eodem modo alterum valorem $t=\frac{1}{f+2g}$, quo casu primus terminus aequationis tertium tollit, ita ut secundus quarto aequari debeat, sive ut fiat $g + t = \frac{1+tt}{2t}$. Facta autem substitutione prodit haec aequatio: $g + \frac{1}{f+2g} = \frac{fg+2gg+1}{f+2g} = \frac{1+ff+4fg+4gg}{2(f+2g)}$, sive esse debet $1 - 2fg - ff = 0$, ideoque $f = -g + \sqrt{gg+1}$, ubi tantum signum $+$ valet, quia f negativum fieri non potest.

§. 15. Cum igitur, si littera f priorem habeat valorem, prior limes ipsius t satisfaciat; si posteriorem, alter negotium conficiat limes, hinc sequitur, si f habeat quempiam valorem medium, tum etiam valorem quendam medium pro t dari, qui ad solutionem perducat. Hi autem duo limites pro f inventi inter se aequales evadunt, sumto $g = \frac{1}{\sqrt{3}}$, quo casu angulus β fit 60 graduum.

§. 16. Cum autem sit $g = \cot.\beta$, sumto $g = \frac{1}{\sqrt{3}}$, ideoque $\beta = 60°$, quia ambo limites pro littera f etiam evadunt $\frac{1}{\sqrt{3}}$, manifestum est alium casum hic locum habere non posse, nisi quo sit etiam $\alpha = 60°$, ita ut, si iste angulus fuerit sive major sive minor, latus hoc AB neutiquam pro basi accipi queat, in quam ambo puncta X et Y incidere possint. Sin autem ambo anguli α et β fuerint 60°, quo casu totum triangulum fit aequilaterum, pro angulo Φ, seu ejus tangente t, uterque valor ante assignatus satisfaciet, scil. tam $t = \frac{1}{\sqrt{3}}$ quam $t = \sqrt{3}$. Priore enim casu nostra aequatio erit $\sqrt{\frac{4}{\sqrt{3}}} + \sqrt{\frac{2}{\sqrt{3}}} = \sqrt{\frac{4}{\sqrt{3}}} + \sqrt{\frac{2}{\sqrt{3}}}$, quae manifesto est identica. Altero vero casu, quo $t = \sqrt{3}$, aequatio nostra hanc habebit formam: $\sqrt{\frac{2}{\sqrt{3}}} + \sqrt{\frac{4}{\sqrt{3}}} = \sqrt{\frac{4}{\sqrt{3}}} + \sqrt{\frac{2}{\sqrt{3}}}$, quae etiam est identica. Duplex igitur quadrisectio hic locum habet, quarum prior, ob $x = c$, $y = \frac{c}{\sqrt{2}}$ et $\phi = 30^\circ$, fit per rectam Bb angulum B bisecantem et rectam Yy ipsi AC parallelam. Altera vero, ob $x = \frac{c}{\sqrt{2}}$ et $y = c$ et $\phi = 60^\circ$, fit per rectam Aa angulum A bisecantem, et $X'x'$ lateri BC parallelam; quae duplex partitio quia etiam pro reliquis lateribus valet, triangulum aequilaterum triplici modo in quatuor partes aequales dividi potest.

Tab. I. Fig. 2.

§. 17. Hoc casu expedito etiam reliquos casus perpendamus, quibus angulus β non est 60°, neque idcirco $g = \frac{1}{\sqrt{3}}$, quibus ergo bini limites pro f inventi continuo magis a se invicem recedunt, quos quo clarius ob oculos ponamus, cum sit $g = \cot.\beta$ et $f = \cot.\alpha$, notetur esse $\sqrt{1+gg} - g = \text{tag.}\frac{1}{2}\beta$, ita ut esse debeat $f = \cot.\alpha = \text{tag.}\frac{1}{2}\beta$, sive $\text{tag.}(90^\circ - \alpha) = \text{tag.}\frac{1}{2}\beta$, unde sequitur fore $90^\circ - \alpha = \frac{1}{2}\beta$, sive $\alpha = 90^\circ - \frac{1}{2}\beta$. Pro altero limite $f = \frac{1-gg}{2g}$ notetur esse $\cot.2\beta = \frac{gg-1}{2g}$, ideoque $\cot.(180^\circ - 2\beta) = \frac{1-gg}{2g} = \cot.\alpha$, sicque erit $\alpha = 180^\circ - 2\beta$.

§. 18. Cognito igitur angulo β, nisi alter angulus α cadat intra hos limites $90^\circ - \frac{1}{2}\beta$ et $190^\circ - 2\beta$, latus trianguli AB pro basi accipi non poterit. Sin autem angulus α ut datus spectetur, necesse est ut angulus β intra istos limites cadat: $90^\circ - \frac{1}{2}\alpha$ et $180^\circ - 2\alpha$. Quare quo hae conditiones pro quovis casu clarius ob oculos ponantur, sequentem tabellam adjungimus, quae binos limites anguli β offert, pro singulis angulis α per 10° ascendendo.

Ang.	Limites pro angulo β	
α	$90^\circ - \frac{1}{2}\alpha$	$180^\circ - 2\alpha$
0	90	180
10	85	160
20	80	140
30	75	120
40	70	100
50	65	80
60	60	60
70	55	40
80	50	20
90	45	0

Alia solutio ejusdem problematis.

§. 19. Alia solutio peti potest ex his conditionibus: quod ambo intervalla x et y majora esse debeant quam intervallum $XY = z$, cui respondet postremum membrum nostrae aequationis. Ut igitur hinc limites eliciamus, consideremus primo casum quo $x=z$, sive primus nostrae aequationis terminus ultimo aequalis, hoc est $f+\frac{1}{t}=\frac{1+tt}{2t}$, unde fit $f=\frac{tt-1}{2t}$. Est vero $\frac{tt-1}{2t}=\cot.\,(180^{\circ}-2\,\Phi)$. Quare cum sit $f=\cot.\,\alpha$, iste limes dabit $\alpha=180^{\circ}-2\,\Phi$; unde colligitur $\Phi=90^{\circ}-\frac{1}{2}\alpha$. Pro altero limite faciamus $g+t=\frac{1+tt}{2t}$, ideoque $g=\frac{1-tt}{2t}=\cot.\,2\,\Phi$, consequenter, ob $g=\cot.\,\beta$, erit $\beta=2\,\Phi$, ideoque alter limes $\Phi=\frac{1}{2}\beta$. Unde discimus, ut solutio nostra locum habere possit, requiri, ut angulus Φ intra hos duos limites cadat: $\frac{1}{2}\beta$ et $90^{\circ}-\frac{1}{2}\alpha$.

§. 20. Quod si jam ponamus hos ipsos limites aequationi nostrae satisfacere, reperiemus limites pro angulis α et β, sive litteris f et g, qui cum ante inventis egregie convenient. Prior autem limes erat $f=\frac{tt-1}{2t}$, unde fit $t=f+\sqrt{ff+1}$, et quia primus terminus quarto erat aequalis, requiritur ut secundus aequalis fiat tertio, sive $g+t=2f+2g$, ideoque $t=2f+g$, qui valor illi aequatus dat $g=-f+\sqrt{ff+1}$, hincque vicissim colligitur $f=\frac{1-gg}{2g}$, qui erat limes posterior ante inventus. Alter vero limes hic occurrens est $g=\frac{1-tt}{2t}$, quo secundus terminus quarto factus est aequalis; ut igitur primus tertio aequalis fiat, debet esse $\frac{1}{t}=f+2g$.

ideoque $t=\frac{1}{f+2g}$. Quare cum sit $2g=\frac{1}{t}-t$, illis valoribus substitutis fiet $2g=f+2g-\frac{1}{f+2g}$, sive $f-\frac{1}{f+2g}=0$, unde colligitur $f=-g+\sqrt{gg+1}$, qui erat alter limes pro f supra inventus.

§. 21. Hactenus assumsimus ipsos limites aequationi satisfacere. Nunc autem investigemus errores, qui ex utroque limite in priore solutione pro t invento nascantur. Prior autem limes pro t erat $\frac{1}{t}=f+2g$, ideoque $t=\frac{1}{f+2g}$, qui valor si aequationi non satisfaciat, hoc est, si secundus terminus quarto non fuerit aequalis, error ita repraesentari poterit: $g+t-(\frac{1+tt}{2t})$, sive duplicando $2g+t-\frac{1}{t}$, qui ergo, loco t et $\frac{1}{t}$ substitutis valoribus, erit $\frac{1-2fg-ff}{f+2g}$.

§. 22. Simili modo pro altero limite $t=2f+g$, quo secundus terminus tertium tollebat, error eadem lege sumtus erit $2f+\frac{2}{t}-\frac{(tt+1)}{t}$ sive $2f+\frac{1}{t}-t$, qui loco t valore illo substituto fiet $\frac{1-2fg-gg}{2f+g}$; ubi notandum, limites inter f et g supra ita esse constitutos, ut si alter fuerit positivus, alter evadat negativus.

§. 23. Dabitur igitur inter hos limites pro t inventos, qui sunt $t=\frac{1}{f+2g}$ et $t=2f+g$, valor quidam medius, cui error respondeat nullus. Quare si assumamus ab errore positivo ad negativum progressum esse uniformem (quae hypothesis plerumque parum a veritate discrepabit) hinc verus valor ipsius t satis exacte colligi poterit, si instituatur haec proportio: Uti error $1^{us} - 2^{do}$ se habet ad valorem primum ipsius $t - 2^{do}$, ita error 1^{us} ad quantitatem, qua prior valor ipsius t debet diminui, hoc est evolvendo $\frac{f-g}{(2f+g)(f+2g)} - f + g : \frac{1-2ff-5fg-2gg}{f+2g} = \frac{1-2fg-ff}{f+2g} :$ quaes. Jam primus terminus reducitur ad hanc formam $\frac{(f-g)(1-2ff-5fg-2gg)}{(2f+g)(f+2g)}$, unde prior ratio ad hanc redit $f-g : 2f+g = \frac{1-2fg-ff}{f+2g}$, hinc quartus terminus erit $\frac{(2f+g)(1-2fg-ff)}{(f-g)(f+2g)}$, qui a priore valore ipsius t, puta $\frac{1}{f+2g}$, subtractus relinquit $\frac{f-g+(2f+g)(ff+2fg-1)}{(f-g)(f+2g)}$, quae expressio reducitur ad hanc formam: $\frac{f(2f+g)(f+2g)-(f+2g)}{(f-g)(f+2g)} = \frac{f(2f+g)-1}{f-g}$.

§. 24. Proposito igitur casu quocunque in quo conditiones inter f et g assignatae locum habeant, pro illo resolvendo litterae t statim tribui poterit valor modo inventus $t = \frac{f(2f+g)-1}{f-g}$, qui a veritate parum aberrabit; tum igitur si ipsi t alius valor minime ab hoc discrepans assignetur, atque error inde oriundus definiatur, ex binis his erroribus facile valor ipsius t veritati multo magis consentaneus elicietur, quem si adhuc accuratiorem desideremus, simili operatione repetita negotium confici poterit.

§. 25. Tabulam supra datam non ultra angulum $\alpha = 90°$ continuavimus, quoniam posteriores limites prodiissent negativi. Omnes autem anguli nostri trianguli necessario sunt positivi. Dummodo ergo angulus β fuerit minor quam prior limes, scopo satisfiet, hanc ob rem supplementum superioris tabulae hic subjungamus, scribendo citram loco limitis posterioris.

Angl. α	Limites pro angulo β Prior	Posterior
90	45	0
100	40	0
110	35	0
120	30	0
130	25	0
140	20	0
150	15	0
160	10	0
170	5	0
180	0	0

Problema II.

Investigare conditiones sub quibus ejusdem trianguli duo latera pro nostra basi A B *accipi queant, intra quam ambo puncta* X *et* Y *cadant.*

Solutio.

§. 26. Ponamus igitur praeter latus $AB = c$ etiam latus $AC = b$ pro basi assumi posse, et cum sit angulus Fig. 1.

$A = \alpha$, necesse est ut ambo anguli $B = \beta$ et $C = \gamma$ inter limites inventos $90° - \frac{1}{2}\alpha$ et $180° - 2\alpha$ cadant. Cum autem sit $\beta + \gamma = 180° - \alpha$, cujus semissis est $90° - \frac{1}{2}\alpha$, qua alter angulus tanto erit major, quanto alter fuerit minor; ex quo manifestum est, si alter cadat intra hos limites, alterum certo extra cadere, sicque hinc sequitur nunquam evenire posse ut duo latera diversa vicem baseos AB gerere possint, praeter unicum casum, quo triangulum est isosceles, ubi uterque angulus limiti $90° - \frac{1}{2}\alpha$ aequalis.

§. 27. Sola igitur triangula isoscelia hac gaudent proprietate, ut ambo ejus crura pro basi nostra AB accipi queant, atque adeo his casibus solutio problematis nulla laborat difficultate. Cum enim sit angulus $\beta = 90° - \frac{1}{2}\alpha$, ob $g = \cot.\beta$ erit $\tan g.\frac{1}{2}\alpha = g$, hincque $\tan g.\alpha = \frac{2g}{1-gg}$, hincque ejus cotangens $f = \frac{1-gg}{2g}$; quocirca aequatio nostra adimplenda erit $\sqrt{\frac{1-gg}{2g} + \frac{1}{t}} + \sqrt{g+t} = \sqrt{\frac{1+gg}{g}} + \sqrt{\frac{1+tt}{2t}}$. Quod si jam hic secundum membrum tertio aequale statuamus, prodit $t = \frac{1}{g}$, ideoque $\frac{1}{t} = g$, hocque modo primum membrum sponte quarto fit aequale. Neque vero praeter hanc solutionem aliam expectare licet, quia in nullo membro ambiguitas signi radicalis admitti potest.

§. 28. Quoniam igitur pro hac solutione invenimus $t = \frac{1}{g}$, erit tag. $\Phi = \frac{1}{g} =$ tag. β, consequenter angulus AXO = angulo ABC, sicque recta secans Xx parallela erit lateri BC, quae est basis naturalis trianguli isoscelis, dum ejus crura AB et AC sunt aequalia. Pro loco autem punctorum X et Y jam observavimus, aequationis nostrae primum membrum, quod ob $\frac{1}{t} = g$ est $\sqrt{\frac{1+gg}{2g}}$, referre intervallum AX, secundum vero membrum $\sqrt{\frac{1+gg}{g}}$ referre intervallum BY, tertium, $\sqrt{\frac{1+gg}{g}}$, ipsum latus $AB = c$ referre, quartum denique $\sqrt{\frac{1+gg}{2g}}$ ipsum intervallum XY; unde posito latere $AB = c$, erunt intervalla $AX = \frac{c}{\sqrt{2}}$, $BY = c$, $XY = \frac{c}{\sqrt{2}}$. Quocirca punctum Y in ipsum punctum A cadit, punctum X vero ita, ut sit $AX : AB = 1 : \sqrt{2}$; unde rectarum secantium altera erit Xx, parallela rectae BC, altera vero, quae ad hanc est normalis, Yy, tam angulum A quam latus oppositum BC bifariam secat; haecque solutio, quia pariter ad alterum triangulum refertur, unica est, quae locum habere potest. Tab. I. Fig. 3.

§. 29. In omnibus igitur reliquis triangulis scalenis plus uno latere existere nequit, quod pro basi nostra AB accipi queat. Dubium igitur tantum esse posset, num semper in omni triangulo tale latus existat, id quod in sequente theoremate demonstrabimus.

Theorema.

In omni triangulo, utcunque scaleno, semper datur unum latus, quod pro nostra basi AB *assumi poterit, hocque semper est medium inter tria latera, ita ut neque maximum neque minimum unquam in hunc finem adhiberi queant.*

Demonstratio.

§. 30. Quia in omni triangulo latus medium oppositum est angulo medio, ei angulus tam maximus quam minimus insistet. Ponamus igitur angulum $A = \alpha$ esse minimum, alterum vero $B = \beta$ maximum, ita ut medius $\gamma < \beta > \alpha$, quibus observatis demonstrandum est, ad hoc latus AB semper solutionem nostri problematis accommodari posse.

§. 31. Cum igitur in omni triangulo angulus minimus semper sit minor quam 60°, ponamus $\alpha = 60° - p$, et quia angulus maximus semper major quam 60°, statuamus $\beta = 60° + q$; tum autem erit medius $\gamma = 60° + p - q$, qui cum esse debeat $\gamma > \alpha$, necesse est fiat $2p > q$, seu $q < 2p$. Deinde quia debet esse $\gamma < \beta$, fieri necesse est $q > \frac{1}{2}p$, ideoque q contineri debet intra limites $\frac{1}{2}p$ et $2p$.

§. 32. Cum igitur sit $\alpha = 60 - p$, ut solutio supra data succedat, necesse est ut angulus β inter hos limites contineatur: $90° - \frac{1}{2}\alpha = 60° + \frac{1}{2}p$ et $180° - 2\alpha = 60° + 2p$.

Cum ergo sit $\beta = 60^\circ + q$, quia angulus q pariter intra limites $\frac{1}{2}p$ et $2p$ continetur, evidens est istum angulum β inter assignatos limites utique contineri, sicque semper solutionem realem inveniri posse, id quod aliquot exemplis doceamus.

Exemplum I.

§. 33. *Propositum sit triangulum rectangulum* ABC, *cujus latera sint* $AB = 2$, $BC = 1$, *ideoque* $AC = \sqrt{5}$, *quod per duas rectas inter se normales in quatuor partes aequales partiri oporteat.*

Cum igitur hic latus AB sit medium, id pro basi nostra accipiatur, et cum littera f denotet cotangentem anguli A, erit $f = 2$; et quia g est cotangens anguli recti B, erit $g = 0$. Hinc igitur aequatio solutionem suppeditans erit $\sqrt{2 + \frac{1}{t}} + \sqrt{t} = 2 + \sqrt{\frac{1+tt}{2t}}$, pro qua idoneum valorem litterae t investigari oportet. Supra autem vidimus, binos limites, intra quos t contineri debet, esse $t = \frac{1}{2}$ et $t = 4$, quorum neuter ipse satisfacit. Quare quo facilius calculum sequentem expedire queamus, quando t aequationi huic non satisfacit, errorem littera E designemus, quem ergo in genere ponamus $E = \sqrt{2 + \frac{1}{t}} + \sqrt{t} - 2 - \sqrt{\frac{1+tt}{2t}}$. Pro priore igitur limite $t = \frac{1}{2}$ erit error $E = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{5}}{2}$, qui ergo est negativus; et per fractiones decimales evolutus Tab. I. Fig. 4.

erit $E = -0,410927$. Alter vero limes $t = 4$ dat $E = 0,042262$.

Supra autem in genere valorem veritati multo propiorem assignavimus, qui erat $t = \frac{2ff + fg - 1}{f - g} = \frac{7}{2}$, ubi ergo error erit $\sqrt{\frac{7}{2}} + \sqrt{\frac{16}{7}} - \sqrt{\frac{53}{28}} - 2$, qui evolutus erit $0,006875$. Quod si jam hunc errorem cum praecedente ex $t = 4$ nato comparemus, inde valorem multo propiorem colligere poterimus. Cum enim $t = 4$ det $E = 0,042262$ et $t = 3,5$ det $0,006875$, evidens est verum valorem ipsius t minorem esse quam $3,5$, ad quem inveniendum instituatur haec proportio:
$35387 : 0,5 = 6875 : 0,098214$, quae particula a valore $t = 3,5$ sublata producet valorem vix a veritate discrepantem $t = 3,401786$.

Cum igitur proxime sit $t = 3,4018$, videamus quantum iste valor adhuc a veritate recedat; et cum hinc sit $\frac{1}{t} = 0,293962$, inde fit $\frac{1 + tt}{2t} = \frac{1}{2}(\frac{1}{t} + t) = 1,8483$. Hinc igitur singulos aequationis terminos seorsim evolvamus, qui erunt $\sqrt{2 + \frac{1}{t}} = 1,51460$, $\sqrt{t} = 3,84440$, quorum summa $3,35900$. Tum vero $2 + \sqrt{\frac{1 + tt}{2t}} = 3,35956$, ideoque error $= -0,00056$, qui pro nullo reputari potest.

Quoniam igitur tertium membrum postremi calculi refert ipsam basin $AB = 2$, primum membrum nobis dabit intervallum $AX = 1,51460$; secundum vero praebet intervallum $BY = 1,84440$, postremum, intervallum $XY = 1,35956$. Hinc ipsa quadrisectio nostri trianguli practice repraesentari poterit. Cum enim sit $t = 3,4018 = \text{tag.}\,\Phi$, erit $\Phi = 73^\circ.\ 37'$, sub quo angulo recta Xx ad basin inclinata esse debet.

Exemplum II.

§. 34. *Proposito triangulo cujus anguli sint* $\alpha = 50^\circ$, $\beta = 70^\circ$, $\gamma = 60^\circ$, *super latere medio* AB *bina puncta* X *et* Y *assignare, ex quibus quadrisectio trianguli perfici possit.* Tab. I. Fig. 1.

Pro hoc igitur triangulo habemus $f = \cot.\,\alpha = 0,8390996$ et $g = \cot.\,\beta = 0,3639702$; unde pro tertio aequationis membro fit $2(f+g) = 2,4061396$, sicque tertium membrum $\sqrt{2(f+g)} = 1,5511740$. Nunc igitur valorem ipsius $t = \text{tag.}\,\Phi$ investigari oportet, ubi quidem initium faciamus a binis valoribus extremis.

Statuamus igitur primo membrum primum $\sqrt{f+\frac{1}{t}}$ aequale tertio, unde fit $\frac{1}{t} = f + 2g = 1,5770400$, ex quo colligitur $t = 0,634100$; ita ut sit angulus $\Phi = 32^\circ.\ 22'$. Cum igitur sit $\frac{1}{t} + t = \frac{tt+1}{t} = 2,211140$, inde fit quartum membrum $\sqrt{\frac{1+tt}{2t}} = 1,05143$. Denique cum sit $g+t = 0,99807$, fiet membrum secundum $\sqrt{g+t} = 0,99904$, a quo quartum sublatum errorem $E = -0,05239$ praebet.

Simili modo faciamus membrum secundum tertio aequale, quod fit sumendo $t = 2f + g = 2,0421694$, unde fit $\frac{1}{t} = 0,489675$. Erit ergo $t + \frac{1}{t} = 2,531844$, ideoque membrum quartum $\sqrt{\frac{1+tt}{2t}} = 1,125132$. Nunc vero pro membro primo habemus $f + \frac{1}{t} = 1,328775$, cujus radix dat membrum primum $\sqrt{f + \frac{1}{t}} = 1,152725$, a quo quartum sublatum dabit errorem $E = +0,027593$.

Ex his duobus erroribus colligitur more solito valor vero propior $t = 1,55644$, ita ut $\frac{1}{t} = 0,64249$, hincque $t + \frac{1}{t} = 2,19893$, consequenter membrum quartum $= 1,04734$, sicque summa tertii membri et quarti erit $= 2,59851$, cui ergo summa primi et secundi debebat esse aequalis.

Pro membro igitur primo habemus $f + \frac{1}{t} = 1,48159$, hinc ipsum membrum $= 1,21721$. Simili modo ob $g + t = 1,92041$ erit membrum secundum $= 1,38579$, quorum ergo summa $= 2,60300$, unde subtrahendo summam tertii et quarti remanet error $E = +0,00449$.

Comparemus hunc errorem cum casu $t = 2,04217$, et cum sit: Pro $+t = 2,04217$ error $= +2759$

Pro $+t = 1,55644$ error $= +449$

manifestum est verum valorem ipsius t infra posteriorem cadere, ad eum inveniendum fiat haec proportio:

2310 : 449 = 0,48573 : 0,09441, unde prodit valor proximus $t = 1,46203$.

Instituamus denuo talem operationem, et cum sit $t = 1,46208$, erit $\frac{1}{t} = 0,68396$, hincque $t + \frac{1}{t} = 2,14604$, unde colligitur membrum IV = 1,03586, ideoque III+IV = 2,58703. Tum vero cum sit $f + \frac{1}{t} = 1,52306$ et $g + t = 1,82605$, erit membrum I = 1,23412 et II = 1,35130, eorumque summa = 2,58542, ideoque error E = 0,00161.

Quoniam igitur valor $t = 1,55644$ dederat errorem + 449, et valor $t = 1,46203$ dederat − 162, fiet hinc vero proximus valor $t = 1,48701$; unde fit $\frac{1}{t} = 0,67249$ et angulus $\phi = 56°. 5'$. Porrò membrum IV = 1,03911, ideoque III + IV = 2,59028. Deinde cum sit $f + \frac{1}{t} = 1,51159$, erit membr. I = 1,22944; tum ob $g + t = 1,85098$ erit membrum II = 1,36051, ergo I + II = 2,58995, a quo summa III + IV sublata relinquit errorem − 0,00033, quem pro nihilo reputari liceat.

En ergo nacti sumus hanc solutionem: Quoniam tertium membrum refert totam basin AB, primum vero intervallum AX et secundum intervallum BY, si ponamus AB = III membro = 1,55117, erit AX = 122944, BY = 1,36051, ideoque intervalla AY = 0,19066 et BX = 0,32173, ac angulus $\phi = AXO = 56°. 5'$.

§. 35. Arbitror has dilucidationes Geometris non fore ingratas, cum in iis plures investigationes non vulgares occurrant, cujusmodi in aliis problematibus raro, atque vix, occurrere solent. Imprimis autem hic notari meretur, quod ad hoc Problema solvendum minime consultum est, aequationem principalem, quae quatuor formulis radicalibus constat, ad rationalitatem reducere, propterea quod aequatio rationalis simul omnes signorum ambiguitates complecteretur, cum tamen natura quaestionis nullam talem ambiguitatem admittat.

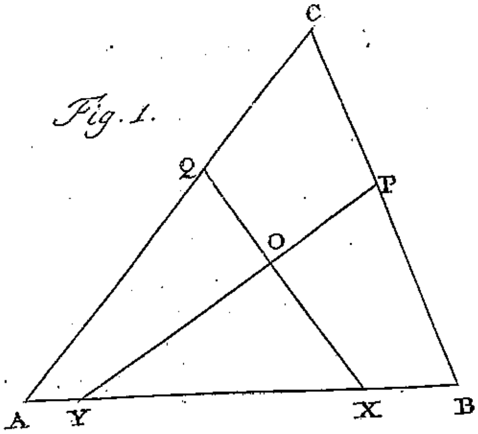

Fig. 1.

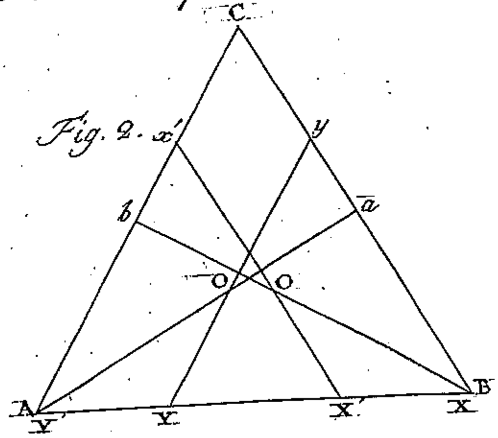

Fig. 2.

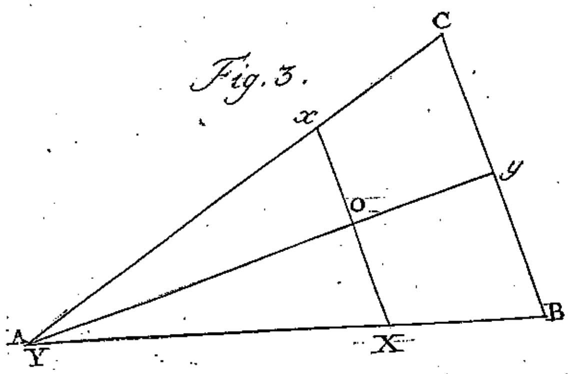

Fig. 3.

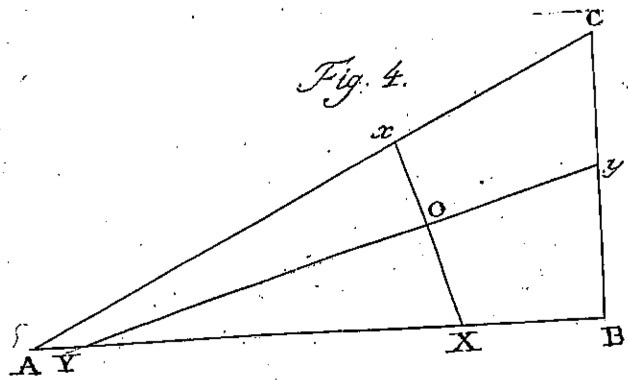

Fig. 4.

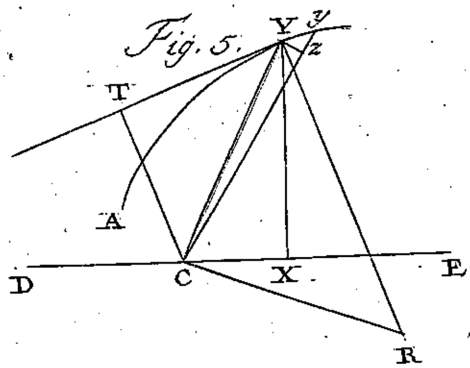

Fig. 5.

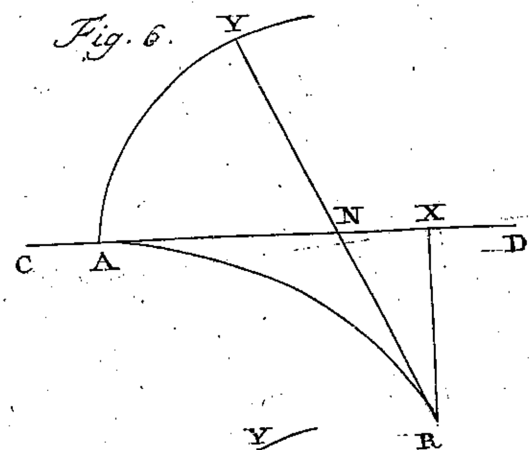

Fig. 6.

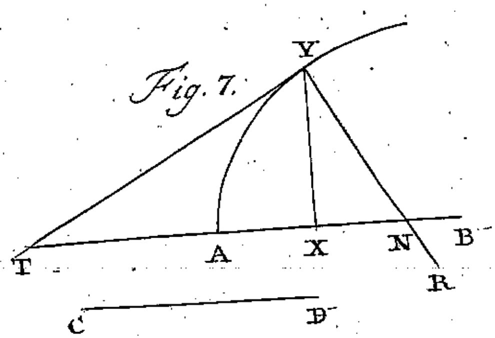

Fig. 7.

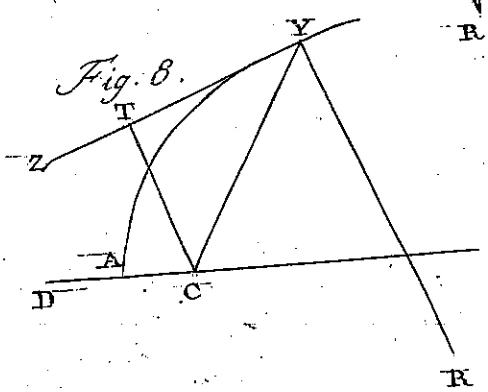

Fig. 8.