

OBSERVATIO SINGULARIS
CIRCA AEQUATIONES DIFFERENTIALES LINEARES

AUCTORE
L. EULERO.

Conventui exhibita die 19. Mart. 1778.

§. 1.

Hoc nomine hodie designari solent aequationes differentiales hujus formae:

$$pz + q \frac{d^2z}{dx^2} + r \frac{d^3z}{dx^3} + s \frac{d^4z}{dx^4} + t \frac{d^5z}{dx^5} + \text{etc.} = 0,$$

ubi variabilis z in singulis terminis univocam tantum tenet dimensionem, litterae vero p, q, r, s , etc. derivantur a functionibus quascunque alterius variabilis x , cujus differentiale constantem assumitur, quod, quia in singulis terminis homogeneitatem complere debet, brevitate gratia ubique omittere licebit, sicque illam aequationem in posterum hac forma repraesentabimus:

$$pz + q\partial^2z + r\partial^3z + s\partial^4z + t\partial^5z + \text{etc.} = 0.$$

§. 2. Constat autem hujusmodi aequationes duobus casibus in genere resolvi posse, altero quo singularae litterae p, q, r, s, t sunt quantitates constantes, altero vero, quo aequationem homogeneam reddunt; priore ergo casu aequatio hanc habebit formam:

$$az + \beta d^2z + \gamma ddz + \delta d^3z + \epsilon d^4z + \text{etc.} = 0,$$

cui semper hujusmodi forma satisfacit $z = e^{\lambda x}$, quippe quo valore

valore substituto, factaque divisione per $e^{\lambda x}$, oritur aequatio mere algebraica, ista scilicet:

$$a + \beta\lambda + \gamma\lambda^2 + \delta\lambda^3 + \epsilon\lambda^4 + \zeta\lambda^5 + \text{etc.} = 0,$$

ex qua ergo uti valores pro littera λ erui poterunt, quoti ordinis fuerit aequatio differentialis, qui valores si fuerint a, b, c, d, e etc. hinc adeo integrale completum exhiberi poterit, ita expressum: $z = Ae^{ax} + Be^{bx} + Ce^{cx} + De^{dx} + \text{etc.}$ ubi litterae A, B, C, D etc. sunt constantes arbitrariae per integrationem ingressae.

§. 3. Pro altero casu, quo aequatio evadit homogenea, eam semper ad hanc formam reducere licet:

$$az + \beta x dz + \gamma x ddz + \delta x^3 d^2z + \epsilon x^4 d^3z + \text{etc.} = 0,$$

cui semper satisfacit hujusmodi forma $z = x^\lambda$. Hinc iterum oritur aequatio algebraica ista, postquam scilicet per x fuerit divisat

$$a + \beta\lambda + \gamma\lambda^2 (\lambda - 1) + \delta\lambda^3 (\lambda - 1) (\lambda - 2) + \epsilon\lambda^4 (\lambda - 1) (\lambda - 2) (\lambda - 3) + \zeta\lambda^5 (\lambda - 1) (\lambda - 2) (\lambda - 3) (\lambda - 4) + \text{etc.} = 0,$$

unde iterum tot valores pro λ eruntur, quoti gradus fuerit aequatio, qui valores si fuerint a, b, c, d, e etc. habebitur integrale completum

$$z = Ax^a + Bx^b + Cx^c + Dx^d + Ex^e + \text{etc.}$$

§. 4. Praeter hos duos casus raro tales aequationes occurrere solent, quas quidem resolvere seu integrare licet, nisi forte data opera a posteriori fabricentur. Interim tamen ab acutissimis Geometris Gallis non ita pridem insignia subsidia circa tales aequationes ingeniosissime sunt excogitata, quae cum perlustrassem. in observationem quandam profus singularem incidi, quae mihi quidem in hoc genere maximi momenti videtur, et quam propterea hic in medium proferre consilui.

§. 5.

§. 5. Proposita autem tali forma generali :

$$pz + qdz + rddz - sdt^2z + td^2z + \text{etc.} = c,$$

quae usque ad quartum gradum assurgat, quandoquidem deinceps calculum ad quosvis alios gradus accommodare facile erit, quaeo ejusmodi functionem ipsius x , in quam ista forma ducatur, integrabilis evadat. Sit igitur iste multiplicator $= m$, ita ut integrabilis esse debeat haec forma :

$$mpz + mqdz + mrdz + msd^2z + mt^2z = c,$$

atque duplici modo ad integrale perveniri potest, prouti vel a primo termino vel ab ultimo integrale inchoetur; ubi quidem sponte intelligitur, insuper per clementum dx multiplicativam esse instituentiam, quod autem brevitate gratia omitimus.

§. 6. Incipiamus primo a termino ultimo mt^2z , qui pro integrali praebet terminum mt^2z ; hujus ergo differentiale auferatur et remanebit haec forma :

$$mpz + mqdz + mrdz + d^2z(ms - d \cdot mt).$$

Jam ex hoc postremo membro in integrale ingrediatur $ddz(ms - d \cdot mt)$; hujus jam differentiale iterum auferatur, et remanebit $mpz + mqdz + d^2z(mr - d \cdot ms + dd \cdot mt)$. Hinc jam novus terminus in integrale ingrediens erit $dz mr - d \cdot ms + dd \cdot mt$, cuius differentiale alatum relinquit adhuc $mpz + dz mq - d \cdot mr + dd \cdot ms - d^2 \cdot mt$, unde ultimum integralis membrum erit $z(mq - d \cdot mr + dd \cdot ms - d^2 \cdot mt)$, cuius ergo differentiale si auferatur, nihil relinqui debet, unde refutabit ista aequatio :

$$mp - d \cdot mq + dd \cdot mr - d^2 \cdot ms + d^2 \cdot mt = c.$$

§. 7. Hoc igitur modo deducti sumus ad aequationem differentialem pariter quarti ordinis, ex qua valorem

hanc formam : $\frac{3z \cos \omega + \sqrt{1 - \sin^2 \omega}}{\sqrt{5}}$. Quare cum sit

multiplicatoris quaesiti m investigari oportet, quippe quo invento forma integrata erit

$$mt^2z + ddz(ms - d \cdot mt) + dz(mr - d \cdot ms + dd \cdot mt) + z(mq - d \cdot mr + dd \cdot ms - d^2 \cdot mt),$$

aequatio autem, unde valorem ipsius m erui convenit, est uti invenimus, $mp - d \cdot mq + dd \cdot mr - d^2 \cdot ms + d^2 \cdot mt = c$.

§. 8. At vero invento ordine integrationem a termino primo inchoare licet, siquidem hinc oriatur prima integralis pars z/mq , cuius differentiale subtractum relinquet $dz(mq - smq) + mrdz + msd^2z + mt^2z$. Ex prima parte deductur secunda integralis pars $dz(smq - ssmq)$. Jam hujus differentiale ablatum relinquet

$$dlz(mr - smq + ssmq) + msd^2z + mt^2z.$$

Hinc igitur nascitur tertia integralis pars $dlz(sm - ssmq + ssmq)$, hujus porro differentiale ablatum relinquet

$$d^2z(ms - smr + smq - s^3mp) + mt^2z,$$

unde postrema integralis pars colligitur :

$$d^2z(sm - ssmr + s^3mq - s^4mp),$$

quocirca si hujus differentiale auferatur, nihil relinqui debet, sicque pervenitur ad hanc aequationem :

$$mt \cdot sm - ssmr - s^3mq + s^4mp = c,$$

unde pariter valorem multiplicatoris quaesiti m investigari oportet.

§. 9. Evidens autem est hanc aequationem postferiorem egregie cum priore consentire, nam haec aequatio differentiatia praebet

$$d \cdot mt - ms + smr - ssmq + s^3mp = 0,$$

haec autem porro differentiatia praebet

$$dd \cdot mt - d \cdot ms + mr - smq + ssmq = 0,$$

quae rursus differentiatia dat

$$d^3 \cdot mt$$

§. 7. Simili modo pro parte imaginaria, ob $\sin(\frac{1}{2}\pi + \omega) = \sin \frac{1}{2}\pi \cos \omega + \cos \frac{1}{2}\pi \sin \omega$, ista pars componetur

$d^2 m t - d^2 m s + d \cdot m r + m q - \int m p = 0$,
cujus denique differentiale producti ipsam aequationem prius
inventam:

$$d^2 m t - d^2 m s + d d \cdot m r - d \cdot m q + m p = 0.$$

§. 10. Evolvamus nunc hanc aequationem, ex qua
multiplicatorem quaesitum m erui oportet, unde nascetur se-
quens aequatio:

$$\left. \begin{aligned} m p - q d m + r d d m - s d^2 m + t d^3 m \\ - m d q + 2 d r d m - 3 d s d d m + 4 d t d^2 m \\ + m d d r - 3 d m d d s + 6 d d m d d t \\ - m d^2 s + 4 d m d^2 t \\ + m d^3 t \end{aligned} \right\} = c.$$

§. 12. Quodsi ergo hanc postremam aequationem re-
solvere, vel saltem quodpiam integrale particulare erue-
re licent, talis valor ipsius m si in aequationem primo pro-
positam multiplicetur, eam integrabilem reddet, ita ut hoc
modo per unam integrationem ad gradum inferiorem differ-
entialitatis reducatur. Hanc ob rationem aequationem ultimo in-
ventam vocabimus *aequationem resolyentem* formae propositae
 $p z + q d z + r d d z + s d^2 z + t d^3 z = 0$,
atque hinc patet quomodo pro quavis aequatione differen-
tiali lineari proposita ejus resolyentem inveniri oporteat.

§. 12. Quo autem formam aequationis resolyentis cla-
rius perspicimus, eam hac forma representemus:

$$P m + Q d m + R d d m + S d^2 m + T d^3 m = c,$$

ut ad similitudinem aequationis propositae revocetur; atque
comparatio re instituta quantitates P, Q, R, S et T per cognitas,
quae sunt p, q, r, s , etc. sequenti modo determinabuntur:

$$P = p - d q + d d r - d^2 s + d^3 t$$

$$Q = p - q - 2 d r - 3 d d s + 4 d^2 t$$

$$R =$$

$$\begin{aligned} R &= r - 3 d s + 6 d d t \\ S &= -s + 4 d t \\ T &= t. \end{aligned}$$

Cujus relationis ope pro quovis casu aequatio resolyens nul-
lo labore exhiberi poterit.

§. 13. Quodsi aequationem resolyentem tanquam da-
tam spectare velimus, ex ea vicissim ipsa aequatio prior,
cujus est resolyens, exhiberi poterit per sequentes relationes,
quibus litterae minusculae p, q, r etc per maiusculas $P, Q,$
 R etc. determinantur:

$$\begin{aligned} t &= T \\ s &= -S + 4 d T \\ r &= R - 3 d S + 6 d d T \\ q &= -Q + 2 d R - 3 d d S + 4 d^2 T \\ p &= P - d Q + d d R - d^2 S + d^3 T. \end{aligned}$$

Unde patet litteras minusculas eadem profors lege a majus-
culis pendere, qua haec ab illis pendere sunt inventae.

§. 14. Quaelibet igitur hujusmodi aequatio differentia-
lis cum sua resolyente tali reciproco nexu conjugatur, ut si
una fuerit resolyens alterius, vicissim quoque haec resoly-
vens sit illius. Cum igitur hujusmodi binae aequationes
tam insigni vinculo sint inter se connexae, eas inter se con-
jugatas appellamus, ita ut quaelibet aequatio hujus indolis
suam habeat conjugatam, atque utraque ope alterius resoly-
visit. Quodsi enim alterutra resolutionem admittat, simul
quoque alterius resolutio semper est in potestate, atque in
hoc consistit observatio illa singularis, quae mihi quidem
maxime notatu digna videtur; neque enim memini eam a
quoquam alio factam vidisse.

Novae Acta Acad. Imp. Scient. Tom. XIV.

H

§. 15.

§. 15. Scribamus nunc uniformitatis gratia litteram Z loco m, atque binæ hujusmodi aequationes conjugatae, cuiuscuque fuerint ordinis, sequenti modo repraesententur:

$$\begin{aligned}
 pz + qdz + rddz - 5d^2z + t d^3z + r^2 d^4z + etc. &= 0 \\
 pZ + QdZ + R^2 d^2Z + S d^3Z + T d^4Z + V d^5Z + etc. &= 0 \\
 \text{ac primo quidem litterae majusculae sequenti Legge per mi-} \\
 \text{nusculas determinabuntur:} \\
 P = p - dq + ddr - d^2s + d^3t - d^4u + d^5v + etc. \\
 Q = -q + 2dr - 3dds + d^2t - 5d^3u + 6d^4v + etc. \\
 R = r - 3ds + 6ddl - 10d^2v + 15d^3w + etc. \\
 S = -s + 4dt - 10ddv + 20d^2w + etc. \\
 T = t - 5dv + 15d^2w + etc. \\
 V = -v + 6dw + etc. \\
 W = w + etc.
 \end{aligned}$$

Proflus autem secundum eandem Legem litterae minusculae per minusculas determinabuntur; erit enim:

$$\begin{aligned}
 p &= P - dQ + ddR - d^2S + d^3T - d^4V + d^5W + etc. \\
 q &= -Q + 2dR - 3dS + 4d^2T - 5d^3V + 6d^4W + etc. \\
 r &= R - 3dS + 6ddT - 10d^2V + 15d^3W + etc. \\
 s &= -S + 4dT - 10ddV + 20d^2W + etc. \\
 t &= T - 5dV + 15d^2W + etc. \\
 v &= -V + 6dW + etc. \\
 w &= W + etc.
 \end{aligned}$$

§. 16. Applicemus hoc ad binos casus initio memoratos, quorum resolutio nulla laborat difficultate, atque prioris aequationis

$$\alpha z + \beta dz + \gamma ddz + \epsilon d^2z + \epsilon d^3z + etc. = 0,$$

conjugata erit

$$\alpha Z - \beta dZ + \gamma ddZ - \epsilon d^2Z + \epsilon d^3Z + etc. = 0,$$

quae ab illa non discrepat nisi alternatione signorum; pro alterius vero

$$\alpha z + \beta xdz + \gamma xddz + \epsilon x^2 d^2z + \epsilon x^3 d^3z + etc. = 0$$

con-

conjugata habebimus

$$\begin{aligned}
 P &= \alpha - \beta + 2\gamma - 6\delta + 24\epsilon + etc. \\
 Q &= -\alpha(\beta - 2.2\gamma + 3.6\delta - 4.24\epsilon + etc.) \\
 R &= \alpha x(\gamma - 3.3\delta + 6.12\epsilon + etc.) \\
 S &= -\alpha x^2(\delta - 4.4\epsilon + etc.) \\
 T &= \alpha x^3 + etc.
 \end{aligned}$$

Unde patet aequationem conjugatam etiam esse homogeneam.

§. 17. Quodsi ergo binarum talium aequationum conjugatarum alterutra resolutionem admittat, tum altera quoque, saltem semel, integrari poterit; quo facto, si insuper hujus aequationis integralae conjugata resolutionem admittat, denno integratio succedet, atque ita porro, quae methodus utique foret non parum operosa. Verum hic imprimis observandum occurrit, quotiescunque integrale completum aequationis resolventis innotuerit, tum ope facili operantis non solum ipsius aequationis propositae

$$pz + qdz + rddz + sd^2z + etc. = 0,$$

integrale completum, sed etiam integrale hujus aequationis multo generalioris:

$$Pz + qdz + rddz + sd^2z + etc. = X,$$

exhiberi posse, denotante X functionem quamcumque ipsius x, id scilicet integrale, quod absolutis tot integrationibus, quoti gradus fuerit differentialitas, tandem reperiretur, idque ad ope unice tantum integrationis, quod, cum plurimum in accessu habere possit, hic data opera explicabo.

§. 18. Sufficiet autem aequationem differentialem tertii tantum gradus summsse, ita ut resolvenda proponatur haec aequatio:

$$p + qdz + rddz + sd^2z = X,$$

H 2 cui

cui respondeat ista conjugata:

$$PZ + QdZ + RddZ + Sd^2Z = 0,$$

cujus integrale completum, quoniam tres constantes arbitarias involvere debet. ita repraesentari poterit: $Z = A\Phi + B\Phi' + C\Phi''$, ubi ergo litterae Φ, Φ', Φ'' , certae erunt functiones ipsius x , quae singulae idoneis multiplicatoribus pro aequatione proposita praebebunt: multiplica tione autem per Φ facta et integratione infinita ponamus resultare hanc aequationem:

$$b'z + z'dz + \int \sigma' ddz = \int X\Phi dx.$$

Simili vero modo sumto Φ' pro multiplicatore prodeat haec aequatio:

$$b''z + z'dz + \int \sigma'' ddz = \int X\Phi' dx.$$

Eodemque modo ex multiplicatore Φ'' prodeat

$$b'''z + z'dz + \int \sigma''' ddz = \int X\Phi'' dx.$$

Ubi hae tres integrationes infiar unicae spectari possunt.

§. 19. Totum negotium ergo perduximus ad has tres aequationes:

- I. $b'z + z'dz + \int \sigma' ddz = \int X\Phi dx.$
- II. $b''z + z'dz + \int \sigma'' ddz = \int X\Phi' dx.$
- III. $b'''z + z'dz + \int \sigma''' ddz = \int X\Phi'' dx.$

Ex his tribus aequationibus jam facile est binas formulas dz et ddz eliminare. Multiplicetur felicit prima per \odot , secunda per \odot' , tertia per \odot'' , quae quantitates ita capiuntur, ut fiat

$$\odot z + \odot' z' + \odot'' z'' = 0, \text{ et}$$

$$\odot \sigma' + \odot' \sigma'' + \odot'' \sigma''' = 0,$$

et hae aequationes in unam summam collectae dabunt

$$z(\odot b' + \odot' b'' + \odot'' b''') = \odot \int X\Phi dx + \odot' \int X\Phi' dx + \odot'' \int X\Phi'' dx.$$

Sic-

Sicque valor quaestus quantitates z erit

$$z = \frac{\odot \int X\Phi dx + \odot' \int X\Phi' dx + \odot'' \int X\Phi'' dx}{\odot b' + \odot' b'' + \odot'' b'''}$$

haecque expressio adeo est integrale completum aequationis differentialis propositae tertii ordinis, siquidem hic tria occurrunt signa summatoria, quorum quodvis involvit constantem arbitriam.