

28|282, 284, 286, 287
29|290, 292, 293, 295, 296, 298

Hic igitur numeris exclusis reliqui omnes loco a scripti in formula $3 \cdot aa - 1$ producent numeros primos. His igitur valores ipsius a sequens exhibet tabula:

1, 2, 3, 5, 6, 7, 9, 11, 12, 13, 15, 16, 17, 18,
20, 22, 24, 26, 27, 28, 29, 31, 35, 36, 37, 38,
41, 45, 46, 48, 49, 50, 51, 53, 57, 62, 67, 71,
73, 75, 76, 78, 81, 82, 86, 87, 94, 95, 99, 100,
104, 106, 107, 112, 113, 115, 117, 118, 219, 121,
124, 126, 127, 136, 138, 142, 144, 149, 150, 151,
152, 153, 155, 157, 158, 159, 165, 167, 170, 172,
173, 175, 176, 177, 181, 182, 186, 189, 192,
190, 197, 200, 201, 204, 205, 210, 213, 215, 216,
226, 227, 228, 229, 230, 238, 248, 249, 250, 251,
254, 255, 258, 259, 261, 262, 264, 267, 269, 270,
273, 275, 277, 279, 280, 281, 283, 285, 288, 289,
291, 294, 297, 299;

horum numerorum ultimi fere ad 20 millions exsurgunt.

METHODUS GENERALIOR NUMEROS QUOSVIS SATIS GRANDES PERSCRUTANDI UTRUM SINT PRIMI NEC NE?

AUCTORE

L. EULER O.

Conventui exhibita die 16 Martii 1778.

f. i.

Sit N numerus propositus, et non difficile erit eum reducere ad hujusmodi formam: $N = aa + bb$; tum vero inquiratur, utrum adhuc alio modo ad similem formam reduci queat. Si enim quoque fuerit $N = xx + yy$, ita ut sit $aa + bb = xx + yy$, tum certe numerus N non erit primus, sed ejus factores hoc modo assignari poterunt. Quoniam hinc est $aa - xx = \lambda yy - bb$, erit $\frac{a+x}{y-b} = \lambda \cdot \frac{y-b}{a-x}$, quae fractiones ad minimos terminos reducti fint $\lambda \cdot \frac{p}{q}$. Ponatur igitur $a+x = mp$ et $y-b = np$, erit $y+b = mq$ et $a-x = nq$, et hinc reperietur $a = \frac{km^2 - nq^2}{q^2}$ et $b = \frac{mq - np}{q^2}$, ex quibus valoribus, erit $N = \frac{1}{4}(\lambda mm + nn)(\lambda np + qq)$; unde patet, formulam $\lambda pp + qq$ vel ipsam, vel eius semiensem, vel quadrantem esse factorem numeri propositi N .

f. ii. Quando autem ad talem formam $N = aa + yy$ pervenimus, tum statuamus $N = xx + yy$, ubi statim facile patet, utrum hi numeri x et y sint pares, an vero impares, quo reperio statuatur vel $N = xx = yy$, vel $N = yy = xx$; ac priori quidem easdem numerus x ita accipi debet

dēbet, ut $N - xx$ dividi queat per numerum λ . Hoc modo ad novas formulas perennetur, quae quadrata fieri debent, in quibus inerit numerus incognitus, qui, prout fuerit acceptus vel par vel impar, ad castus ledūct̄ sc̄m̄ evolvendos. Omnes autem illae operationes facilius exmplis docebuntur.

Exemplum.

1003 §. 3. Sit numerus examinandus $N = 10003 = 100^2 + 3 \cdot 1^2$, ubi ergo $\lambda = 3$. Statuatur $N = xx + 3yy$, et quia horum numerorum x et y alter necessario est par, alter impar. Quod videamus ante omnia uter eorum sit par, uter impar. Quoniam autem N est numerus formae $8n + 3$, si y esset par, foret $3yy$ numerus vel formae $8n + 4$, vel formae $8n + c$; at tum foret xx vel formae $8n + 5$, vel $8n + 1$, quod neutra hic locum habere potest. Sumi ergo debet x par, eritque xx vel formae $8n + c$, vel formae $8n + 4$; et quia tum y est impar, erit $3yy$ formae $8n + 3$, ideoque xx formae $8n + 0$ et x numerus paíter par.

§. 4. Quod si ergo statuamus $N = 3yy = xx$, istum numerum divisibile esse oportet per 16; unde si ouiamus $y = 1 + 2a$, haec aequatio dabit $1000 - 12a - 12aa = xx$, quae per 4 divisa abit in $2500 - 3a - 3aa = \frac{xx}{4}$. Unde patet numerum a denuo per 4 divisibile esse debere. vel potius statim ponit̄ potuisse $y = 1 + 8a$, unde prodūset aequatio $625 - 8a - 12aa = \frac{xx}{16} = \square$.

§. 5. Nunc jam duos distinguamus castis, prout numerus a capiatur vel par vel impar. Sit igitur primo a numerus par, et quia numerus absolutus 625 jam habet formam $8n + 1$ et $12aa$ formam $8n$; necesse est ut etiam $3a$ diviso-

divisionem per 8 admetat. Hinc statim ponatur $a = 8$; fletque $625 - 24b - 12 \cdot 64bb = \square$. Quia igitur a numero absoluto 625 subtrahi debet forma $768bb + 24b$, partit valorem minimum $b = 1$ jam esse nimis magnum hincque nullum ori posse quadratum. Ex valore quidem $b = 0$ producit quadratum, sed ad casum cognitum pertinens

§. 6. Consideremos igitur castum, quo a est numerus impar, cuius forma cum sit duplex, vel $4n + 1$, vel $4n - 1$ statuatur primo $a = 4c + 1$, eritque $610 - 108c - 19cc = \square$ qui numerus, cum sit impariter par, quadratum esse nequit

§. 7. Tantum igitur examinandus supereff̄ castus quo $a = 4d - 1$, qui præbet hanc aequationem: $616 + 84d - 19dd = \square$, quae per 4 divisa in hanc abit $154 + 21d - 48dd = \frac{\square}{64} = \square$. A numero igitur absolute 154 subtrahi debent numeri minores in forma $48dd + 21d$ contenti, qui sunt $27, 69, 15c$, quorum ultimus subtrahens reliquit quadratum 4 , ex valore $d = + 2$ defuncto. Hinc igitur erit $a = 7$, $y = 57$ et $x = 16$.

§. 8. Nacti ergo sumus aliam insuper resolutionem numeri $N = 10003$, cognitæ similem, quae est $10003 = 16^2 + 3 \cdot 57^2$. Quare cum jam habeamus $\lambda = 3$, $a = 100$, $b = 1$, $x = 16$ et $y = 57$, hinc ex §. 1. erit $\frac{3p}{q} = \frac{16}{57} = 3 \cdot \frac{56}{34} = 3 \cdot \frac{2}{3}$ ideoque $p = 2$ et $q = 3$, consequenter $3pp + qq = 21$, quod per 3 deprehensum dat 7, qui numerus revera est divisor numeri propositi. 10003 , quoto existente. $= 1429$, numero primo.

§. 9. Hoc exemplum initit̄ formula $3xx + yy$, de qua satis rigide jam est demonstratum: omnes numeros, qui unico modo in ea continentur, certe esse primos, quae praictas

Prietas absolute necessaria est ad omnes numeros primos
hac ratione explorandos. Nisi enim formula $\alpha xx + \beta yy$ hac
propriate gaudet, de numeris, qui unico modo in ea
continerentur, tuto renunciari non posset, eos esse primos;
veluti casu $\alpha = 1$, quo in formula $1 \cdot xx + yy$ numerus 15
unico tantum modo contineatur, etiam certe non sit primus.

§. 10. Quin etiam haec formula generaliori modo ita
exhiberi potest: $\alpha xx + \beta yy$, de qua iudicem est d. monstra-
tum, omnes numeros, qui dupli modo in ea contineantur,
non esse primos, sed compositos, quorum adeo factores fa-
cile assignari poterunt. Si enim duplifici modo fuerit
 $N = \alpha \pm \beta^2 bb$, tum vero etiam $N = \alpha AA + \beta BB$, hinc
fuerint fractio $\frac{p}{q} = \frac{\alpha \pm \beta^2}{\alpha \pm \beta}$, tum iemper formula $\alpha pp + \beta qq$
praebebit factorem numeri N , postquam scilicet per mino-
res divisores α , β , z , si quos admittit, fuerit depre-
sa.

§. 11. Contra vero, si quisdam numerus N unico tan-
tum modo in formula $\alpha xx + \beta yy$ contingat, inde non sem-
per concludi potest, hunc numerum esse plurimum, siqui-
dem immunerabiles exhibent posse tantum hujusmodi formulae, in
quibus etiam numeri compositi sene tantum continentur,
cuius rei exemplum jam supra attulimus. Hanc ob circum-
stantiam maxime necessarium est, formulas hujus posterioris
indolis a prioribus distinguere atque a praesenti negotio
profructus excludere. Domonstravi autem alio loco regulam,
cujus ope formae posterioris indolis dignosci atque adeo e
medio tolli poterunt. Regula autem ista ita se habet:

§. 12. Proposita formula $\alpha xx + \beta yy$, in forma $3x + 2y$,
utrum in ea numeri compositi unico tantum modo contineri
queant nec ne, consideretur haec formula $\alpha \beta + 2x$, ubi ipsa

§. 13. Omnes successive tribuantur valores ad productum $\alpha \beta$ pri-
mi, sive illi ipsius z valores excludantur, qui cum hoc
producto communem habent dividorem; tum vero sufficit hos
numeros ex formula $\alpha \beta + 2x$ resultantes tantum usque ad
terminum $\alpha \beta$ continuare. Quod si enim omnes hi numeri
fuerint primi, formula $\alpha xx + \beta yy$ tuto in nolito negotio
usur, ari potent; si autem unicus inter eos fuerit numerus
compositus, tum haec formula penitus erit rejicienda. In
hoc autem judicio probe est tenendum, numeros quadratos
in istar primorum esse spectandos, pariter ac dupla primorum,
et potestates binarii, quae circumstantia summi in dijudica-
tione nolita est momenti.

§. 14. Illustreremus hanc regulam aliquibus exemplis;
ac primo quidem proposita sit haec forma: $xx + 2yy$, unde
consideretur haec expressio: $14 + 2zz$, ubi ipsi z successive
tribuantur valores ad 14 primi, 3, 1, unde resultant
numerii 15, 7, 3, quorum primus cum iam sit compo-
tus, pariter ac tertius, formulam propositam tanquam im-
eclatam excludi oportet perinde atque haec ad idem judi-
cium deducentem: $14xx + yy$.

§. 15. Proposita formula $12xx + yy$, in forma $12 + zz$,
ipfi z tribuantur valores impares ad 30 primi, qui sunt
1 et 7, unde oriuntur numeri 11 et 79, qui cum ambo
sunt primi, haec formula in praesenti negotio tuto adhiberi
potest, nec non sequentes lineas oriundas: $15xx + yy$,
 $6xx + 5yy$, $1xx + 3yy$.

§. 16. Proposita sit formula $12xx + yy$; ubi in forma
 $120 + zz$ ipfi z tribui debent hi valores impares ad 120
primi: 1, 7, 11, 13, 17; numerus enim 19 praebet nu-
merum

merum, quadruplicatum producti $\alpha\beta = 120$ superantem. Inde autem colliguntur numeri sequentes: 121, 169, 41, 289, 409, qui cum sint vel primi vel quadrati, hinc concludimus formulam propositam, perinde ac sequentes inde defuntas, scilicet: 4. $xx + 3yy; z^2xx + 5yy; 15xx + 9yy$, tanquam idoneas spectari debere et in examine tuto admitti posse.

§. 16. Sit proposita formula $-xx + 5yy$ et in hac expressione 35 + zz valores ipsi z tribuendi erunt: 1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, qui praebent hos numeros: 36, 39, 44, 51, 61, 99, 116, ubi cum adeo sex sint compositi, hanc formam omnino excludi oportet.

§. 17. Habeatur formula $15xx + yy$ et in expressione $105 + zz$ ipsi z tribuendi erunt hi valores ad 15 primi: 1, 2, 3, 4, 8, 11, 13, 16, 17, qui praebent hos numeros, omnes pro primis habendos: 106, 109, 121, 169, 226, 274, 361, 394 unde sequentes formulae in classem idoneorum sunt ponenda: $105xx + yy; 35xx + 3yy; 21xx + 5yy; 15xx + 7yy$.

§. 18. Addamus his exemplis examen formulae $57xx + yy$: et numeri loco z successivæ scribendi, scilicet 1, 2, 4, 5, 7, 10, 11, 13 hos praebent valores formae $57 + zz$ rotatus dignoscit: 58, 61, 73, 82, 106, 121, 157, 178, 226, qui omnes sunt vel primi, vel quadrati vel dupli primorum, ita ut formula proposita certe sit inter idoneos referenda.

§. 19. Haec sufficient ad insignem simulque facilium usum nostræ regulæ illudrandum, cuius oœ causis idoneos formulæ $xx + \beta yy$ ab ineptis discernere valentius, qua igitur regularib[us] stabilita, illos causis optimo cum successu adhibere poterimus ad numeros quosvis in talibus formulis contentos, utrum sint

sint primi nec ne, perficiendos. Proposito scilicet numero quoconque N facile erit illum pluribus modis ad tam formam $\alpha xx + \beta yy$ reducere, quo facto talis eligatur causa, qui per regulam supra datum non-excludatur, ac disciatur, utrum ille numerus N unico tantum modo, an vero plurius, in hac forma continetur. Priore enim casu certe erit primus, posteriori vero compositus, cuius factores ope methodi supra traditæ facile assignare licet.

Exemplum I.

§. 20. Proponatur numerus $N = 100003$, qui manifestatur in forma $1cxx + 3yy$ continetur, existente $x = 100$ et $y = 1$. Videamus ergo, an ille numerus adhuc alio modo in eadem forma continetur. Hunc in finem ponamus $100003 - 3yy = 1cxx$, atque ut divisio per 10 faccet, ponatur $y = 1 + 10z$, hincque ostentur $10000 - 6z - 3czz - xx$, rive facta adhuc divisione per 4 erit $2500 - \frac{3}{2}z - \frac{15}{2}zz = \frac{xx}{4}$. Hinc igitur, prouti z fuerit vel par vel impar, formemus duos causis principales. Pro primo scilicet si $z = za$, ostentur aequatio $A = 2500 - 3a - 30aa = \frac{xx}{4}$. Pro altero causa si $z = 2b - 1$, ostentur ista: $B = 2494 + 27b - 3cb^2 = \frac{xx}{4}$.

Evolutio formulae

$$A = 2500 - 3a - 3ca^2 = \frac{xx}{4}$$

§. 21. Hic statim patet, sumto $a = 0$ produc quadratum, praebens causum cognitum $x = 100$ et $y = 1$. Jam iterum duos causis diffinxisse convenient, quibus a est numerus vel par vel impar: ac priori quidem evidens est pro a sumi debere numerum pariter patrem. Sit ergo pri-

mo $a \equiv 4c$, et facta divisione per 4 oritur haec aequatio:
 $C = 625 - 3c - 120c = \frac{1}{16}xx$. Hic igitur, quia c tam
 positive quam negative sumi poterit, numeri a 625 successi-
 vae subtrahendi ordine erunt sequentes in forma $125, c + 3c$
 contenti: 117, 123, 474, 486, unde autem nullum plane
 quadratum refutat.

§. 22. Tribuamus nunc ipsi a valorem imparem; quod
 fit $a \equiv 4d + 1$, et facile est videre, solum signum inferius
 valere posse. Fiat igitur $a \equiv 4d - 1$, et aequatio per 4
 divisa evadet $D \equiv 2473 + 225d - 4Scdd$. Hinc igitur a
 numero absoluto 2473 successive subtrahi debent numeri
 sequentes in forma $45, dd, \dots, 24d$ contenti, scilicet 225, 725,
 1464, 2376, unde iterum nullum quadratum refutat.

Evolutio Formulae.

$$B \equiv 2494 + 27b - 3bb \equiv \frac{xx}{4}$$

§. 23. Hic statim patet, si pro b captiatur numerus;
 Par, eum impariter parem esse debere. Sit igitur $b \equiv 4e + 2$,
 et facta divisione per 4 aequatio hinc resultans erit
 $B \equiv 657 - 93e - 12cc - \frac{xx}{16}$. A numero ergo absoluto 657
 subtrahi debent sequentes in forma $12cc - 93e$ contenti,
 qui sunt 27, 213, 294; ubi autem nullum quadratum oc-
 currit.

§. 24. Denique pro b numeros impares tenemus. Fac-
 ile autem patet, poni debere $b \equiv 4f - 1$, ita tamen, ut
 numerus f sit impar, qui ergo ponatur $\equiv 2g + 1$, entique $b \equiv 8g + 3$,
 unde oritur haec aequatio: $23c5 - 1224g - 192c2g \equiv \frac{xx}{4}$. Hic
 ergo unicus numerus 696 ab absoluto 23c5 subtrahendus
 occurrit, unde autem numerus non-quadratus relinquitur
 Quod.

Quoniam igitur ex toto hoc calculo nullus numerus qua-
 dratus prodit, jam certo pronunciare possumus numerum
 propositum 10003 esse primum.

Brevior Methodus in hunc numerum inquirendi.

§. 25. Quoniam ante habuimus $10003 \equiv 10, 100^2 + 3, 1^2$,
 etiam statuere posleimus $10003 \equiv 40, 50^2 + 3 \cdot 1^2$, ita ut sit
 $\alpha \equiv 40$ et $\beta \equiv 3$, qui casus, uti supra vidimus, admittitur. Hanc
 ob rem statuamus $10003 - 3yy \equiv 4cxx$, fiatque $y \equiv 1 + 2cZ$,
 et facta divisione per 40 statim pervenientis ad hanc aequa-
 tionem: $25cc - z - 3czz \equiv xx$; ubi duo casus considerandi
 occurunt, prouti z fuerit numerus par vel numerus impar,
 quorum utrumque seorsim evolvamus.

§. 26. Pro priore casu evidens est pro z sumi debere
 numerum pariter parem. Sit ergo $z \equiv 4a$, et facta divisione
 per 4 oritur haec aequatio: $625 - 3a - 12ca \equiv \frac{xx}{4}$. Hic
 ergo a numero absoluto 625 sequentes ex forma $12caa + 5a$
 defuncti sunt subtrahendi: 117, 123, 474, 486. Hinc
 autem nullum occurrit quadratum, praeter casum $a \equiv c$, qui
 per se jam est notus.

§. 27. Superest ut pro z numerum imparem scribamus,
 qui sit $z \equiv 2b - 1$, siisque aequatio $2473 + 14b - 12ccbb \equiv xx$,
 qui numerus cum sit impar, ideoque debet esse formae
 $8n + 1$, evidens est sumi debere $b \equiv 4c$, unde prodit haec
 aequatio: $2473 + 456c - 1920 \cdot cc \equiv xx \equiv \square$. Sumto igitur
 $c \equiv +1$ numeri a 2473 subtrahendi erunt 1464 et 2376,
 quorum neuter quadratum relinquit. Hinc eadem, quam
 supra, conclusio: numerum 10003 certo esse primum. Ex
 posite.

posteriori autem hujus numeri examine intelligere licet, in genere eo majus lucrum expectari posse, quo maiores numeros pro α et β accipere licet.

Exemplum 2.

N = 100003 §. 28. Propositus sit numerus $N = 100003$, qui manifesto continetur in formula: $3 \cdot 1^2 + 1 \cdot 1000$. Quoniam antem, ut modo mundius, expedit pro α et β numeros maiores adhibere, idem quoque numerus facile repetit 3, ita ut sit $\alpha = 3$ et $\beta = 19$, ideoque $\alpha\beta = 57$, qui numerus, uti commode contuleris $100003 - 3xx = 10y$, atque ipsi x talis valor tribui debet, ut formula haec divisionem per numerum 19 adimitat. Quare cum in easi cognito sit $x = 577 = 3c. 19 + 7$, ponamus hic $x = 7 + 15z$, et facta divisione per 19 ostentur bacc acquatio: $52624 - 42z - 57zz = 10y$. Ubi fratrum duorum confiderandi occurunt protuli z fuerit numerus par vel impar. Pro prioi casu fratratur $z = 2a$, et aquatio per 4 divisa ita se habebit: $13155 - 21a - 57aa = 0$, quam vocemus = A. Pro altero casu ponatur $z = 4b - 1$, quocumque facile est videre, valorem $z = 4b - 1$ penitus excludi. Hinc ergo ostentur haec altera aquatio principialis:

B = $52624 - 42z - 57zz = 10y$.
Has igitur duas aquationes A et B, principales, scilicet ultieius evolvamus.

Evolutio Formulae

$$A = 13155 - 21a - 57aa = 0.$$

§. 29. Hic subdiviso in duos alios, casus insitui debet, quorum quisque iterum teorism. evolvatur. Sit primo a numerus

merus par, et quidem $a = 4c$, qui valor, in aquatione A substitutus, producit sequentem aquationem, posquam sci licet divisio per 4 fuerit facta: $C = 3259 - 21c - 228cc = \frac{27}{16}$. Hic ergo a numero ab soluto 3289 successive subtracti debent numeri in forma $228cc + 21c$ contenti, qui sunt:
si c numerus positivus: 249, 954, 2115
si c numerus negativus: 267, 870, 1989
unde autem nullum quadratum resultat.

§. 30. Sumamus ergo pro a numerum imparem, qui manifesto debet esse formae $4d - 1$. Facta igitur substitutione $a = 4d - 1$, simul tunc divisione per 4, oictur haec aquatio: $D = 3255 + 9; d = 228dd$. Hinc numeri formae $228dd + 93d$ a numero absoluto 3289 successive subtracti erunt

si d numerus negativus: 135, 726, 1773, 3276

si d numerus positivus: 321, 1098, 2331
quorum quartus prioris seriei dat quadratum 4 ex casu $d = -4$, unde sit $y = 8$, qui casus jam est cognitus, prae ter quem hic nullum amplius quadratum occurrit.

Evolutio Formulae

$$B = 52624 + 285b - 912bb = 10y.$$

§. 31. Hic ergo a numero absoluto 52624 successively subtractantur numeri in formula $912bb + 285b$ contenti, quos hic in gemina columna, una cum eorum differentiis, tam pro valoribus ipsius b politivis quam negativis represe- temus:

| b | $912bb + 285b$ | | Diff. | b | $912bb + 285b$ | | Diff. |
|-----|----------------|--------|-------|-----|----------------|--------|-------|
| | 0 | 1200 | | | 0 | 1200 | |
| 1 | 624 | 1 | 1200 | 1 | 624 | 1200 | 1200 |
| 2 | 3272 | 2 | 4224 | 2 | 3272 | 4224 | 3024 |
| 3 | 7344 | 3 | 9072 | 3 | 7344 | 9072 | 4848 |

§. 32. Jam vero loco successivae subtractionis numero-

rum in forma $912bb \pm 255b$ contentorum differentiae eorum
augmento constanti 1824 crecentes continuo subtracti poten-

runt, quos in subdium calculi hic subjungamus

$\underline{624} - - - - -$

$\underline{2448} - - - - -$

$\underline{4272} - - - - -$

$\underline{6396} - - - - -$

$\underline{7920} - - - - -$

$\underline{9744} - - - - -$

$\underline{11568} - - - - -$

$\underline{1200} - - - - -$

$\underline{12144} - - - - -$

$\underline{9937} - - - - -$

$\underline{5905} - - - - -$

$\underline{52609} - - - - -$

$\underline{624} - - - - -$

$\underline{51985} - - - - -$

$\underline{2448} - - - - -$

$\underline{19537} - - - - -$

$\underline{4272} - - - - -$

$\underline{45265} - - - - -$

$\underline{6296} - - - - -$

$\underline{39169} - - - - -$

$\underline{7920} - - - - -$

$\underline{31249} - - - - -$

$\underline{9744} - - - - -$

$\underline{21505} - - - - -$

$\underline{11568} - - - - -$

$\underline{9937} - - - - -$

Tabula numerorum idoneorum $\alpha\beta$, hac proprietate pre-

ditorum, ut omnes numeri unico modo in formula

$\alpha xx + \beta yy$ contenti certe sint primi:

$\begin{array}{r} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \\ 11 \\ 12 \\ 13 \\ 14 \\ 15 \end{array} - - - - -$

$\begin{array}{r} 16 \\ 18 \\ 21 \\ 22 \\ 24 \\ 25 \\ 28 \\ 30 \\ 33 \\ 37 \\ 40 \\ 42 \\ 45 \\ 48 \\ 57 \\ 58 \\ 60 \\ 70 \\ 72 \\ 78 \\ 85 \\ 88 \\ 93 \\ 102 \\ 105 \\ 112 \\ 120 \\ 125 \\ 133 \\ 136 \\ 140 \\ 168 \\ 177 \\ 190 \\ 210 \\ 232 \\ 240 \\ 253 \\ 273 \\ 280 \end{array} - - - - -$

$\begin{array}{r} 48 \\ 57 \\ 58 \\ 60 \\ 70 \\ 72 \\ 78 \\ 85 \\ 88 \\ 93 \\ 102 \\ 105 \\ 112 \\ 120 \\ 125 \\ 133 \\ 136 \\ 140 \\ 168 \\ 177 \\ 190 \\ 210 \\ 232 \\ 240 \\ 253 \\ 273 \\ 280 \end{array} - - - - -$

$\begin{array}{r} 120 \\ 130 \\ 133 \\ 136 \\ 140 \\ 165 \\ 168 \\ 177 \\ 190 \\ 210 \\ 232 \\ 240 \\ 253 \\ 273 \\ 280 \end{array} - - - - -$

$\begin{array}{r} 312 \\ 330 \\ 357 \\ 385 \\ 408 \\ 462 \\ 520 \\ 760 \\ 840 \\ 848 \end{array} - - - - -$

$\begin{array}{r} 330 \\ 357 \\ 385 \\ 408 \\ 462 \\ 520 \\ 760 \\ 840 \\ 848 \end{array} - - - - -$

$\begin{array}{r} 357 \\ 385 \\ 408 \\ 462 \\ 520 \\ 760 \\ 840 \\ 848 \end{array} - - - - -$

$\begin{array}{r} 385 \\ 408 \\ 462 \\ 520 \\ 760 \\ 840 \\ 848 \end{array} - - - - -$

$\begin{array}{r} 408 \\ 462 \\ 520 \\ 760 \\ 840 \\ 848 \end{array} - - - - -$

$\begin{array}{r} 462 \\ 520 \\ 760 \\ 840 \\ 848 \end{array} - - - - -$

$\begin{array}{r} 520 \\ 760 \\ 840 \\ 848 \end{array} - - - - -$

$\begin{array}{r} 760 \\ 840 \\ 848 \end{array} - - - - -$

$\begin{array}{r} 840 \\ 848 \end{array} - - - - -$

tbi nullum plane quadratum occurrunt, pariter ac in praec-

cedentibus, casu scilicet cognito excepto. Hinc igitur jure
concludimus, numerum propositum, 11111111111111111111 uno modo
in forma $\alpha xx + \beta yy$ continet, ideoque certe esse primum.

§. 34. Ex hoc exemplo clare apparet, quantum in-
terfit in formula $\alpha xx + \beta yy$ pro α et β maioriis numeros
investigare, dummodo eorum productum $\alpha\beta$ in classe nume-
rorum idoneorum contineatur, pro quibus inveniendis regu-
la supra fuit exposita. Quamobrem, ut quovis casu fiatim
apparet, utrum tale productum $\alpha\beta$ sit numerus idoneus,
nec ne tubulum illorum numerorum, quousque eam con-
tinuare licuit, hic subjungamus.

§. 35. Quoties igitur numerum quempiam propositum ad talen formam $\alpha xx + \beta yy$ reducere licent, ut productum $\alpha\beta$ inter numeros illius tabulae continetur, tum haec formula nūmpari poterit ad examen, jam saepius allatum, inveniendum. Conveniet autem accuratius explicare regulam, cuius ope operationes necessariae expedite insituiqueant, id quod in sequente Problemate ostendamus.

Problemata.

Proposito numero quantumvis magno N , explorare, utrum sit primus nec ne?

Solutio.

§. 36. Quo major facit iste numerus N , eo pluribus modis eum in ejusmodi duas partes refidere licet, quadratum, quae sint αaa et βbb , ex quibus igitur tales eligi conveniet, ut numerorum α et β productum in tabula modo exposita continetur, ubi quidem plurimum intererit majores hujusmodi numeros indagare.

§. 37. Talibus igitur numeris inventis ponamus esse $N = \alpha aa + \beta bb$, et nunc totum negotium hoc reddit, ut inveteretur, utrum iste numerus in super alio modo in eadem forma $\alpha xx + \beta yy$ contingat, nec ne. Si enim talis casus occurrat, numerus propositus non erit primus, atque tum adeo eius factores, per praecetta supra data assignare licet. Sin autem nullus talis casus occurrat certo pionunciate poterimus, istum numerum N esse primum.

§. 38.

§. 39. Quidam igitur $yy - bb$ per α divisibile esse debet, ante omnia erit dispiciendum, utrum α sit numerus primus nec ne. Primi enim casu vel $y + b$ vel $y - b$ divisorem habere debet, unde unicus tantum casus existit; sin autem α involvat factores, tum utique fieri potest, ut alter continetur in forma $y + b$, alter vero in forma $y - b$; unde praeter illum casum adhuc unus vel plures novi casus evanari debebunt. Unicus icticet casus occurreret, si α duos tantum habeat factores; sin autem plures factores involvat tum etiam pluribus modis in duos factores resolvi poterit, quos singulos seorsim perfrutari oportet.

§. 40. Ponamus igitur in genere esse $\alpha = \mu\nu$, et quovis casu facile patet, quot modis numerus α in binos hujusmodi factores resolvere licet, quotunque etiam involvat divisores; neque etiam numeri primi hinc excluduntur, quippe quibus casibus vel pro μ vel pro ν unitas erit scribenda. Hinc ergo ponamus $y + b = \mu p$ et $y - b = q$. ita ut sit $yy - bb = pq = \alpha pq$, et facta divisione per α aquatio deinceps resolvenda erit $\mu - \beta pq = xx$.

§. 39. Ita autem investigatio sequenti modo generaliter instituatur: Ponamus esse $N = \alpha xx + \beta yy$, ita ut sit $\alpha aa + \beta bb = \alpha xx + \beta yy$, unde formemus hanc aequationem: $\alpha aa - \beta yy - bb = \alpha xx$, ubi praetulit pro α maiorem numerum astumere, pro β vero minorem. Hic igitur statim patet, pro y ejusmodi numerum accipi debere, ut formula $yy - bb$ divisorem α involvat. Evidens enim est non solum numeros α et β primos inter se esse debere, sed etiam tam x ad β quam y ad α primum esse statuendum.

Nova Acta Acad. Imp. Scient. Tom. XIV.

D

§. 41.

| | | | | | | |
|------|---|---|---|---|---|-------|
| 6561 | - | - | - | - | - | 6561 |
| 2040 | | | | | | -1020 |
| 4521 | - | - | - | - | - | 7561 |

§. 41. Numeri autem p et q hoc modo commodissime reperiuntur. Eliminata enim litera y habebimus $\pm b = p - q$. Jam quaeatur fractio $\frac{m}{n}$ proxime aequalis fractioni $\frac{\mu}{\nu}$, ita ut.

$m' - n \lambda = 1$; tum capiatur $p = s - nh$ et $q = \mu s - \nu m$, ubi s jam pro s numeros quoescunque integros accipere licet, five positivos five negativos, et acquatio nolta resolvenda induet hanc formam:

$$(a - \beta(s - \nu m))(\mu s - \nu m) = vr,$$

ubi jum pro s ejusmodi valores investigari debent, ut ista formula ad $\beta \geq s - \nu m$ ($a, \mu, s - \nu m$) quadratum evadat. Totum negotium igitur eo reddit, ut dispiciatur, an, tribuendo litterae s successive omnes valores iam positivos quam negativos, a zyphra ad terminum usque qui numeros præberet negativos an dico usquam quadratum resultare possit.

§. 42. Evolvam s igitur singulos numeros, quos a quadrao ag librali o vertet quos litera S designemus, ita ut fit, ut $S = rx$. Habetimur ergo

$$\begin{array}{c|cc} S & \text{---} & \text{---} \\ \hline & 4 \mu nh & 1 \\ \text{o} & (v + nh)(\mu + \nu m) & \\ \pm 1 & (\pm v + \pm nh)(\pm \mu + \pm nh) & \text{II} \\ \pm 2 & (\pm 2v + \pm nh)(\pm 2\mu + \pm nh) & \text{III} \\ \pm 3 & (\pm 3v + \pm nh)(\pm 3\mu + \pm nh) & \text{IV} \\ \pm 4 & (\pm 4v + \pm nh)(\pm 4\mu + \pm nh) & \text{V} \\ \pm 5 & (\pm 5v + \pm nh)(\pm 5\mu + \pm nh) & \text{VI} \end{array}$$

Quoniam ita valores sat simplici legi progrediuntur, perpendamus eorum differentias, ac repensemus:

$$\begin{aligned} II - I &= \beta(\mu v + \nu m + nh) \\ III - II &= \beta(3\mu v + \nu m + nh) \\ IV - III &= \beta(5\mu v + \nu m + nh) \\ V - IV &= \beta(7\mu v + \nu m + nh) \end{aligned}$$

quae

quae manifeste in progressione arithmeticæ progreduntur, cuius differentia est $\pm \beta \mu \nu$.

§. 43. His differentiis inventis nihil aliud superest, nisi ut eae ordine continuo a quadrato aa , primo termino minuto subtrahantur. Ab aa feliciter primo subtrahatur prima differentia; tum vero a residuo secunda, a residuo hinc nato tertia, porro quarta etc. quoad ad numeros negativos perveniant; hisque operationibus ita continuales disiiciantur, utrum usquam numerus quadratus remanerit, quod si non contigenit, numerus propositus certe pro primo erit habendus; sin autem usquam quadratum prodierit, ejus radix dabit valorem ipsius x , et notato valore infra s convenienter etiam reperiri poterit alter numerus y , siquidem erit $y = b + \nu s - \nu m b$. Quia vero supra summissus $m \nu - n \mu = 1$, erit nunc $y = \mu \nu s - b(m \nu + n \mu)$.

§. 44. Quod si numerus propositus N fuerit vehementer magnus, numerum harum operationum non parum diminuere licet, si numeri S , quos a quadrato aa continuo librabi oportet, in duas classes distinguantur, prouti pro s valores five tales five impares accipiuntur. Priore enim casu, cum sit vel $s = \pm n$, vel $s = 4n + r$, plerumque eveniet, ut alter casus penitus excludatur, ob eam proprietatem, quod inde pro S numeri prodirent impaire pares. Eodem modo si pro s sumatur numerus impar, erit vel $s = 4n + r$, vel $s = 4n - 1$, quarum formarum altera penitus excluditur, quia omnia quadrata imparia sunt formae $8n + 7$, ita ut hoc modo numerus operationum ad semisem redigatur.

§. 45. Quoniam initio possumus $s = \mu \nu$, hosque numeros μ et ν ut primos inter se spectavimus, id quod politum

D 2

28

num de factoribus imparibus est tenendum, notetur si α sit numerus par et potest in quanticunque ipsius binarii involvatur, tunc utrumque factorem $y+b = \mu p$ et $y-b = \nu q$ parem esse debet. Unde si ipsi μ valor par tributatur, nihil impedit quo minus et ν par statuatur, id quod facile in exemplis oblatis observare licet. Ita cum numerus $5^{20} = 35 \cdot 13$ in tabula superiori numerorum idoneorum contineatur, secundum praecpta hic tradita in genere numeros $N = 4c aa + 13 bb$ evolvantur.

Evolutio generalis

numerorum contentorum in forma

$$N = 4c aa + 13 bb.$$

§. 46. Hic igitur erit $\alpha = 40$ et $\beta = 13$, atque hinc numeros x et y ex sequenti forma elicere licet:

$$40aa - 13(yy - bb) = 4cxr.$$

ubi statim duos casus distinguuntur convenienter, quibus est vel $\mu = 10$ et $\nu = 4$, vel $\mu = 20$ et $\nu = 2$, quia scilicet ambo factores debent esse pares.

Casus I.

quo $\mu = 10$ et $\nu = 4$.

§. 47. Hic igitur erit $y+b = 1c p$ et $y-b = 4q$, hincque $b = 5p - 2q$. Fractioni ergo $\frac{s}{2}$ proxima erit, unde statutamus $p = 2s + b$ et $q = 5s + 2b$, quibus valibus substitutis aequatio resolvenda erit: $aa - 13pq = rr$

$$aa - 13s(1c s + b) = S,$$

valores ipsius S , prout s fuerit vel 0 , vel 1 , vel 2 , vel 3 , erunt sequentes:

| s | S | Diff. |
|---------|----------------|---------------|
| 0 | 0 | |
| ± 1 | $13(10 \pm b)$ | $130 \pm 13b$ |
| ± 2 | $26(20 \pm b)$ | $390 \pm 13b$ |
| ± 3 | $39(30 \pm b)$ | $650 \pm 13b$ |
| ± 4 | $52(40 \pm b)$ | $910 \pm 13b$ |
| etc. | etc. | etc. |

Posito igitur brevitatis gratia numerum a quadrato aa substituendum, scilicet $13(2s + b)(5s + 2b) = S$, si loco s suffici-

29

cepsive scribamus numeros $0, \pm 1, \pm 2, \pm 3$, etc. valores ipsius S cum suis differentiis, quorum usum jam facilius explicavimus, ita se habebunt:

| s | S | Diff. |
|---------|----------------|---------------|
| 0 | 0 | |
| ± 1 | $13(10 \pm b)$ | $130 \pm 13b$ |
| ± 2 | $26(20 \pm b)$ | $390 \pm 13b$ |
| ± 3 | $39(30 \pm b)$ | $650 \pm 13b$ |
| ± 4 | $52(40 \pm b)$ | $910 \pm 13b$ |
| etc. | etc. | etc. |

quae differentiae continuo crescenti augmentatione constanti 260, unde facile, quoisque libuerit, continuabuntur; ubi autem probe notetur, subtractionem differentiarum fieri debere a numero $aa - 26bb$.

Casus II.

quo $\mu = 20$ et $\nu = 2$.

§. 48. Hic igitur erit $y+b = 20p$ et $y-b = 2q$ unde, cum hinc fiat $b = 1cp - q$, sumto $p = s$ fieri $q = 1cs - b$, et aequatio resolvenda erit: $aa - 13pq = rr$ five $aa - 13s(1c s - b) = rr$. Posito igitur brev. gr.

$13s(1c s - b) = S$, valores ipsius S , prout s fuerit vel 0 , vel 1 , vel 2 , vel 3 , erunt sequentes:

| s | S | Diff. |
|---------|----------------|---------------|
| 0 | 0 | |
| ± 1 | $13(10 \pm b)$ | $130 \pm 13b$ |
| ± 2 | $26(20 \pm b)$ | $390 \pm 13b$ |
| ± 3 | $39(30 \pm b)$ | $650 \pm 13b$ |
| ± 4 | $52(40 \pm b)$ | $910 \pm 13b$ |
| etc. | etc. | etc. |

ubi

39

ubi differentiae iterum manifesto augmēto constanti ± 60 crescut, quas igitur loco S continuo ab ipso quadrato aa subtrahi oportet.

Alia Evolutio numerorum formae $4 \cdot aa + 13 bb$.

§. 49. Cum habeatur aequatio: $4 \cdot aa - 13(yy - bb) = 4 \cdot xx$, tollantur primo tantum factorem parem s , et quia b denotat numerum imparem, evidens est, dummodo pro y etiam sumatur numerus impar, formulaum $yy - bb$ fore divisibilem per s . Ponatur igitur in genere $y = z \cdot b$, et facta divisione per s habebimus haec aequationem:

$$5aa - \frac{13}{2}(zz \pm bz) = 5xx; \text{ ubi evidens est, membrum medium semper esse integrum. Nunc igitur loco } z \text{ talis numerum assumi oportet, ut vel } z, \text{ vel } z \cdot b \text{ factorem habeat:} \\ \text{perinde autem est inter horum factorum per } 5 \text{ divisibilis reddatur, propterea quod inter se sunt permutabiles, mutato scilicet signo ipsius } b. \text{ Ponatur igitur } z = 5s \text{ et facta divisione per } 5 \text{ aequatio, cui satisfieri oportet, erit:}$$

§. 50. Hic igitur a quadrate aa subtrahi debent numeri in forma $\frac{13}{2}(5ss \pm bs)$ contenti, quae si vocetur $= S$, valores ipsius S erunt, uti in sequenti tabula cum suis differentiis exhibentur.

| S | S | Diff. |
|----------------|---------------------------|--------------------------|
| $\frac{13}{2}$ | $\frac{13}{2}(5 \pm b)$ | $\frac{13}{2}(5 \pm b)$ |
| ± 1 | $\frac{13}{2}(20 \pm 2b)$ | $\frac{13}{2}(15 \pm b)$ |
| ± 2 | $\frac{13}{2}(45 \pm 3b)$ | $\frac{13}{2}(45 \pm b)$ |
| ± 3 | $\frac{13}{2}(80 \pm 4b)$ | $\frac{13}{2}(35 \pm b)$ |
| etc. | etc. | etc. |

ubi

ubi differentiae, quas a quadrato aa continuo subtrahi oportet, augmento constanti $\frac{13}{2} \cdot 10 = 65$ crescunt.

§. 51. Quin etiam unica substitutione totus numerus $4 \cdot statim tolli potest, porendo $y = 1 \cdot s - b$; tum enim ob $yy - bb = 1 \cdot ss + 2 \cdot bs$, dividendo per $4 \cdot statim pervenit ad hanc aequationem: aa - \frac{13}{2}(ss + bs) = xx$, uti quoties littera z valorem habeat paucem, atque adeo cum potestat biuarii simul unum factorem primum tollere licet. Veluti si $u = z^{\lambda} \cdot f_g$, ita ut formula $yy - bb$ per hunc valorem divisibilis reddi debeat, statim poni poterit:$

$$y = z^{\lambda} - 1 \cdot f_z + b; \text{ tum enim erit:}$$

$$yy - bb = z^{2\lambda} - 2 \cdot ff_{zz} + z^{\lambda} bf_z \text{ per } z^{\lambda} f \text{ divisaabit in hanc:}$$

$$z^{\lambda} - z^{\lambda} f_z + bz; \text{ quod igitur cum fuerit praefitum, resiliunt factores per praecpta generalia, albi tradita, facta divisione per } 5 \text{ aequatio, cui sufficiunt, erit:}$$

§. 52. Cum p̄.sto $N = 4 \cdot ax + 13yy$ aequatio prima fundamentalis hoc modo representetur: $13bb - 4 \cdot (xx - aa) = 13yy$, cervalle juvabit, eam unica operatione resolvi posse, pernendo $x = 13s + a$. Facta enim substitutione et divisione per 13 perveniet ad hanc aequationem simplicissimam: $bb - 4 \cdot (13ss + 2 \cdot as) = yy$. Hic igitur a quadrate bb successive subtrahi debent valores formulae: $4 \cdot (13ss + 2 \cdot as)$, qui ita (postea hac formula br. gr. $= S$) ordine cum suis differentiis disponantur:

| S | S | Diff. |
|-----|---------------------|--------------------|
| 0 | 0 | $4 \cdot (13 + a)$ |
| + 1 | 40 ($13 + 2a$) | $40(39 \pm a)$ |
| + 2 | 40 ($52 \pm 4a$) | $40(65 \pm 2a)$ |
| + 3 | 40 ($117 \pm 6a$) | $40(91 \pm 2a)$ |
| + 4 | 40 ($208 \pm 8a$) | etc. |
| | | etc. |

ubi differentiae per augmentum confans $40 \cdot 26 = 1040$ progrediuntur.

Hanc jam posteriorem resolutionem maxime succinctam aliquot exemplis illustratae operae pretium exit.

Exemplum I.

§. 53. Sumatur $b = 81$ et $a = 1$, ita ut numerus examinandus sit 8533. Hic ergo differentiae a quadrato $bb = 6561$ continuo subtrahendae erunt $4c(13 \pm 2)$; $4c(39 \pm 2)$; etc. quae crescent augmento confianti $4c \cdot 26 = 1040$; unde ob signa ambigua totus hic calculus per duas columnas abolvvi poterit:

| | | |
|------|-----------|------|
| 6561 | - - - - - | 6561 |
| 6560 | 1320 | -280 |
| 5241 | - - - - - | 6841 |
| 2360 | 2360 | 760 |
| 2881 | - - - - - | 6081 |
| | | 1860 |
| | | 4281 |
| | | 2840 |
| | | 1441 |

Quoniam igitur hic etiam nullum quadratum occurrit, numerus propositus 89293 certe erit primus.

Exemplum 3.

§. 55. Maneat adhuc $b = 81$ sumaturque $a = 19$, ut sit $N = 99733$; et ad examen hujus numeri necesse est ut a quadrato 6561 subtrahantur differentiae augmendo 1040 crescentes, quarum primae sunt 2040 et -1000, hoc modo:

| | | |
|------|-----------|------|
| 6561 | - - - - - | 6561 |
| 5961 | - - - - - | 6121 |
| 1640 | 1480 | |
| 4321 | - - - - - | 4641 |
| 2680 | 2520 | |
| 1641 | - - - - - | 2121 |

Quoniam igitur nullum residuum ex hac subtractione narrorum quadratum deparetur, tuto concludere possumus hunc numerum 5533 esse primum.

Exem.

§. 44. Maneat $b = 81$ sique $a = 10$, et numerus examinandus erit $N = 89293$. Hic igitur a quadrato $bb = 6561$ subtrahenda erit differentia $4c(13 + 20)$, ideoque 1320 et -280; sequentes autem differentiae crescunt augeamento $\equiv 1040$. Hinc calculus ita se habet:

6561 - - - - - 6561

1320

5241 - - - - - 6841

2360

2881 - - - - - 6081

1860

4281

2840

1441

34

$$\begin{array}{r}
 6561 \\
 -240 \\
 \hline
 6321 \\
 -360 \\
 \hline
 5961 \\
 -1080 \\
 \hline
 5181 \\
 -7521 \\
 \hline
 4321 \\
 -1080 \\
 \hline
 3241 \\
 -640 \\
 \hline
 2160 \\
 -5160 \\
 \hline
 1161
 \end{array}$$

Quia igitur hic nullum quadratum resultat, numerus 99733 etiam pro primo est habendus.

Exemplum 4.

§. 56. Adjungamus exemplum numeri propositi. Neat iterum $b = 81$ sitque $a = 1$, enit $N = 90853$ et subtractio differentiarum ita se habebit:

$$\begin{array}{r}
 6561 \\
 -1550 \\
 \hline
 5011 \\
 -2920 \\
 \hline
 2161 \\
 -1761 \\
 \hline
 400 \\
 -1240 \\
 \hline
 5961 \\
 -2280 \\
 \hline
 3681 \\
 -3320 \\
 \hline
 361
 \end{array}$$

35

Hic jam occurrit numerus quadratus $* 361 = 19^2$ ipsi y aquandus. Fit igitur $y = 19$, $s = -5$, hincque $x = 4s$, unde factor numeri profecti inventi potest quaerendo fractionem $\frac{p}{q} = \frac{x \pm s}{x \mp b} = \frac{4s + 19}{4s - 19} = \frac{1}{2}$; hinc factor est $\frac{1}{2}pp + 1 \cdot qq = 49 \cdot 1^2 + 13 \cdot 3^2$, qui ad minimo terminos reductus est $10 \cdot 1^2 + 13 \cdot 1^2 = 23$. Alter factor ex eadem fractione derivari potest, si sumatur $\frac{p}{q} = \frac{6}{5}$; hinc enim fit $4 \cdot pp + 13qq = 49 \cdot 65^2 + 13 \cdot 62^2$, qui factor per $4 \cdot 13$ depresso dat $10 \cdot 65 \cdot 5 + 31^2 = 4211$; at revera est $96853 = 23 \cdot 4211$.

Exemplum 5.

§. 57. Sumatur $a = 40$ et $b = 1$ et numeris examinandis erit $N = 64c13$. Hic autem modus procedendi a praecedentibus diversius adhiberi debet; quia enim a quadrato b iubtiani deberent numeri in forma $4c(13ss - 40s)$ contenti, quod autem fieri nequit, hic solum signum inferius valebit, ita ut successore ad quadratum b $\equiv 1$ additibant numeri in forma $S = 4c(50s - 15ss)$ contenti, quos cum suis differentiis hic adjungamus.

| s | S | Diff. |
|------|----------|-----------|
| 0 | 0 | |
| + 1 | 40 . 67 | 40 . 67 + |
| + 2 | 40 . 108 | 40 . 41 + |
| + 3 | 40 . 123 | 40 . 15 + |
| + 4 | 40 . 112 | 40 . 11 - |
| etc. | etc. | etc. |

ubi differentiae decrescent quantitate constanti $40 \cdot 26$; quamobrem, si ad unitatem primo addamus numerum $40 \cdot 67 = 2680$, tum vero differentias sequentes decremeno

E₂

1040

Hic

est primus, ejusque factores sequenti modo assignari possunt.
Foumetur fractio: $\frac{p}{q} = \frac{1+1}{3+2}$ et ob signa ambiguous haec quatuor
habebuntur fractiones: $\frac{1}{15}, \frac{11}{15}, \frac{1}{15}, \frac{11}{15}$. Hinc formula
factoris $s_4 = pp + qq$ ex priore fractione fit $s_4 = 1 + 25 = 26$, sive
per 25 depressus, $3c + 2s = 15 + 14 = 29$, qui idem fac-
tor etiam prodit ex quarta fractione $\frac{p}{q} = \frac{1}{3}$; hinc enim fit
factor $= s_4 = 1 + 25 = 14 + 15 = 29$. Alter factor vel ex
secunda vel tercia fractione colligitur; sumto enim $\frac{p}{q} = \frac{11}{15}$ fit
factor $= s_4 = 1 + 27 + 45 = 81$, qui per 60 depressus est $\frac{p}{q} = \frac{5}{6}$: at vero revera est $29 + 3469 = 34469$. Idem prodit ex fractione

$14 + 11 + 27 + 45 = 34469$. Alter factor vel ex
secunda vel tercia fractione colligitur; sumto enim $\frac{p}{q} = \frac{11}{15}$ fit
factor $= s_4 = 1 + 27 + 45 = 81$, qui per 60 depressus est $\frac{p}{q} = \frac{5}{6}$: at vero revera est $29 + 3469 = 34469$.

§. 61. Ex hoc exemplo luculenter apparet, quanti
momenti sint numeri idonei majores in percutandis numeris
pragrandibus, utrum sint primi nec ne. Cum igitur nu-
merus 15+5 sit maximus idoneus, qui in nostra tabula oc-
currit, operaе premium erit, in subsidium examinis numero-
rum vehementer magiorum, sequens problema generalius hic
adjungere.

Problem a.

*Numerum propositum quantumvis magnum $N = 1845aa + bb$
examinare, utrum sit primus nec ne?*

Solutio.

§. 62. Subtrahantur ab isto numero N successive om-
nes numeri in hac forma: 1848xx contenti, et si quisquam
quadratum remanat, praeter easum cognitum $x = a$, ille
nummerus certe erit primus. Sin autem aliud praeterea qua-
dratum relinquatur, ille numerus est compotus, ejusque
ad eo

adeo factores assignare licet. Verum quia iste calculus ob
ingentes numeros continuo subtrahendos non parum est mo-
lefus, totum negotium sequenti modo facilitius reddi poterit.

§. 63. Statuatur $1848aa - (yy - bb) = 1848xx$ et
cum fit $1848 = 3 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11$, ponatur primo $y = 2xz + b$
et facta divisione per 3, 11 fit $21(a - \frac{1}{2}z, 11z + b) = 21xx$.
Quod si ergo brevitas gratia ponatur $z(11z + b) = 21pq$
acquatio nostra erit $aa - \frac{1}{2}pq = xx$, quae quadruplici modo
locum habere potest:

- I. Si $11z + b = 21p$ et $z = 21q$.
- II. Si $11z + b = p$ et $z = 3q$.
- III. Si $11z + b = 7p$ et $z = 3q$.
- IV. Si $11z + b = 3p$ et $z = 7q$.

§. 64. Evolvamus seorsim singulos hos modos et pro
primo casu, ob $z = q$, erit $11q + b = 21p$, hincque $q = 2p$
 $\frac{p-b}{11} = p-s$, ita ut $p+b = 11s$, ideoque $p = 11s-b$,
et $q = 2r-s = b = z$, ita ut aequatio nostra fiat

$$aa - \frac{1}{2}(11s - b)(21s - 2b) = xx.$$

Pro secundo casu. ob $z = 21q$, erit $231q + b = p$, siveque
sumto $q = s$ erit $p = 231s + b$ et $z = 21s$, unde aquatio
pro hoc casu erit $aa - \frac{1}{2}(231s + b) = xx$.

Pro tertio casu, ob $z = 3q$, erit $33q + b = 7p$ ideoque
 $p = 5q - 2q + \frac{b}{7} = 5q - r$, ita ut $2q - b = 7r$ et $2q = 7r + b$,
hincque $q = 3r + \frac{r+b}{2} = 5r + s$, unde fit $r = 2s - b$, hincque
 $q = 7s - 3b$ et $p = 33s - 14b$, et $z = 21s - 9b$, unde
nostra aquatio erit $aa - \frac{1}{2}(7s - 3b)(33s - 14b) = xx$.

Pro quarto casu, ob $z = 7q$, erit $77q + b = 3p$, hincque
 $p = 2c q - \frac{4}{3}b = 26q - 5$, existente $s = \frac{4q-b}{3}$, unde fit $q = 3s + b$
 ideoque $p = 77s + 26b$ et $z = 21s + 7b$, unde aequatio
 resolvenda erit: $aa - \frac{1}{2}(5s + b)(7s + 26b) = xx$. Ulte-
 riorem calculum sequenti exemplo illustremus.

Exemplum.

§. 65. Sumatur $a = 100$ et $b = 197$, ut numerus exami-
 nandus sit. $N = 1848aa + bb = 1851880$, ubi facile patet
 numerum y maiorem fore quam 197 ideoque z fore nume-
 rum positivum. Hoc observato ad examen hujus ingentis
 numerii instituendum singulos casus supra a se invicem se-
 paratos hic etiam in commodum calculi seorsim evolvanus,

§. 66. Pro casu primo nostra aquatio erit

$1000 - \frac{1}{2}(11s - b)(21s - b) = xx$; et quia hinc est $z = 21s - 194$,
 patet numerum s maiorem esse debere quam 18. Statuimus
 igitur $s = 18 + t$, ut siat $z = 21t - 10$, atque aquatio
 nostra hanc inducit formam: $1000 - \frac{1}{2}(11t + 1)(-1t + 16) = xx$.
 Numeri S igitura numero absoluto 1000 subtractandi, cum
 fuis differentiis tam pro valoribus ipsius t positivis quam

negativis, in sequenti tabula referantur:

| t | S | Diff. | t | S | Diff. |
|------|------|-------|------|------|-------|
| 0 | -8 | | 0 | -8 | |
| +1 | 30 | 38 | -1 | 185 | 193 |
| +2 | 299 | 269 | -2 | 6c9 | 424 |
| +3 | 799 | 500 | -3 | 1264 | 655 |
| etc. | etc. | etc. | etc. | etc. | etc. |

ubi differentiae crescunt auctento constanti 231. At quia
 primus numerus subtractandus est $-t$, continua differentia-
 rum subtractio fieri debet a numero 1000, ut sequitur.

1000s'

1350

ex quo igitur calculo nullum quadratum resultat.

§. 68. Pro casu secundo aquatio resolvenda erit
 $1000 - \frac{1}{2}s(231s + 197) = xx$. Hic ergo a numero 1000
 subtractandi sunt numeri in forma $S = \frac{1}{2}s(231s \pm 197)$,
 contenti, qui cum suis differentiis hic exhibentur:

| s | C | O | 214 | 0 | 0 | 17 |
|------|------|------|-------|------|------|------|
| +1 | | | | -1 | -17 | 248 |
| +2 | | | 445 | -2 | 265 | 479 |
| +3 | | | 659 | 676 | -3 | 744 |
| etc. | etc. | etc. | etc. | etc. | etc. | etc. |

A

Nova Acta Acad. Imp. Scient. Tom. XIII.

| | | | | | | |
|-------|----|---|---|---|---|-------|
| 10008 | - | - | - | - | - | 10008 |
| | 38 | | | | | 193 |
| 9970 | - | - | - | - | - | 9815 |
| 269 | | | | | | 424 |
| 9701 | - | - | - | - | - | 9391 |
| 500 | | | | | | 655 |

| | | | | | | |
|------|---|---|---|---|---|------|
| 9201 | - | - | - | - | - | 8736 |
| 731 | | | | | | 886 |
| 8470 | - | - | - | - | - | 7850 |
| 962 | | | | | | 1117 |
| 75c8 | - | - | - | - | - | 6733 |
| 1193 | | | | | | 1348 |

| | | | | | | |
|------|---|---|---|---|---|------|
| 6315 | - | - | - | - | - | 5385 |
| 1424 | | | | | | 1579 |
| 4091 | - | - | - | - | - | 3706 |
| 1655 | - | - | - | - | - | 1810 |
| 3236 | - | - | - | - | - | 1996 |
| 1886 | | | | | | |

A quadrato igitur 10000 subtrahantur differentiae numero 231 crescentes

| | | | | | | |
|-------|---|---|---|---|---|-------|
| 10000 | - | - | - | - | - | 10000 |
| 214 | - | - | - | - | - | 17 |
| 9786 | - | - | - | - | - | 9983 |
| 445 | - | - | - | - | - | 248 |
| 9341 | - | - | - | - | - | 9735 |
| 676 | - | - | - | - | - | 479 |
| 8665 | - | - | - | - | - | 9256 |
| 907 | - | - | - | - | - | 710 |
| 7758 | - | - | - | - | - | 8546 |
| 1138 | - | - | - | - | - | 941 |
| 6620 | - | - | - | - | - | 7605 |
| 1369 | - | - | - | - | - | 1172 |
| 5251 | - | - | - | - | - | 6433 |
| 1600 | - | - | - | - | - | 1403 |
| 3651 | - | - | - | - | - | 5030 |
| 1831 | - | - | - | - | - | 1634 |
| 1820 | - | - | - | - | - | 3396 |
| 1531 | - | - | - | - | - | 1865 |

Ubi iterum nullus numerus quadratus occurrit praeter 10000, qui autem dat casum cognitionis.

§. 69. Pro casu tertio aequatio examinanda erit

$10000 - \frac{1}{2}(7t - 591)(33t - 2758) = xx$, quae igitur, posito $s = 84 + t$, abilit in hanc: $10000 - \frac{1}{2}(7t - 3)(33t + 14) = xx$. Prout igitur t valorem habet vel positivum vel negativum, numeri subtrahendi

di S continebuntur in hac forma: $\frac{1}{2}(7t \mp 3)(33t \pm 14)$,

et erunt uti hic exhibentur:

| t | S | Diff. | t | S | Diff. |
|------|------|-------|------|------|-------|
| 0 | - 21 | 115 | 0 | - 21 | 116 |
| + 1 | + 94 | 346 | - 1 | + 95 | 347 |
| + 2 | 440 | - 2 | 2 | 442 | 578 |
| + 3 | 1017 | - 3 | 3 | 1020 | |
| etc. | etc. | etc. | etc. | etc. | etc. |

Jam a numero absoluto 10021 subtrahantur differentiae hic assignatae, et, quoisque rei natura postulat, continuatae

| | | | | | |
|-------|---|---|---|---|-------|
| 10021 | - | - | - | - | 10021 |
| 115 | - | - | - | - | 116 |
| 9906 | - | - | - | - | 9905 |
| 346 | - | - | - | - | 347 |
| 9560 | - | - | - | - | 9558 |
| 577 | - | - | - | - | 578 |
| 8983 | - | - | - | - | 8980 |
| 808 | - | - | - | - | 809 |
| 8075 | - | - | - | - | 8171 |
| 1039 | - | - | - | - | 1040 |
| 7036 | - | - | - | - | 7131 |
| 1270 | - | - | - | - | 1271 |
| 5866 | - | - | - | - | 5860 |
| 1501 | - | - | - | - | 1502 |
| 4365 | - | - | - | - | 4358 |
| 1732 | - | - | - | - | 1733 |
| 2633 | - | - | - | - | 2625 |
| 1963 | - | - | - | - | 1964 |
| 670 | - | - | - | - | 661 |

ubi nullum plane quadratum occurrit.

F₂

§. 70.

§. 70. Pro casu quarto aequatio resolvenda est

$$100c - \frac{1}{2}(35+197)(77s+5122) = xx. \text{ Sit brevitas grata: } s = t - 66, \text{ erit } 100c - \frac{1}{2}(5t-1)(77t+4c) = xx, \text{ si que numeri subtrahendi continentur in forma } S = \frac{1}{2}(5t+1)(77t \pm 40),$$

qui cum suis differentiis sunt uti sequitur:

| t | \$ | Diff. | t | S | Diff. |
|------|------|-------|------|------|-------|
| 0 | -20 | | 0 | -20 | |
| +1 | +117 | 137 | -1 | 74 | 94 |
| +2 | 485 | 368 | -2 | 399 | 325 |
| +3 | 1084 | 599 | -3 | 955 | 556 |
| etc. | etc. | etc. | etc. | etc. | etc. |

Hinc ergo ob primum numerum negativum $= -20$ a numero absolute 1000 subtrahendae erunt differentiae quotusque opus est continuatae hoc modo:

10020 - - - - - 10000

| | | |
|------|-----------|------|
| 137 | | 94 |
| 9883 | - - - - - | 9926 |
| 368 | | 325 |
| 9515 | - - - - - | 9601 |
| 599 | | 556 |
| 8916 | - - - - - | 9045 |
| 839 | | 787 |
| 8086 | - - - - - | 8258 |
| 1061 | | 1018 |
| 7025 | - - - - - | 7240 |
| 1292 | | 1249 |
| 5733 | - - - - - | 5991 |
| 1523 | | 1480 |
| 4210 | - - - - - | 4514 |

1754

$$\begin{array}{r} 1754 \\ 2456 \\ \hline 1985 \\ 471 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} 1711 \\ 2800 \\ \hline 1942 \\ 858 \\ \hline \end{array}$$

nullum quadratum in hisce residuis occurrit.

§. 71. Quoniam igitur in omnibus his quatuor casibus nullum quadratum est relictum, certo affirmare possumus, numerum 18518859 esse primum. Ex hoc exemplo simul intelligere licet, fatis raro evenire posse, ut in talibus operationibus quadra data relinquantur; hanc ob rem formam 1845aa + bb etiam apissima videtur, ad plures inde numeros primos deducendos; tantum enim opus est valoras a et b variare, quod, cum infinitis modis fieri queat, inde haud difficulter plures alii numeri primi tam ingentes repeniri poterunt, ut problemati illo Fermatiano, quo numeros primos, dato quovis majoribus, requiruntur, quodammodo fit satisfactum.

§. 72. Quoniam in hoc exemplo numeri successive a quadrato aa subtrahendi idem manent, quādā sumitur b = 19, s' operac' prelium erit pro littera a alios quoque valores, polissimum minores, statuere, ubi totus calculus evadet facilioris. Ut autem, quādo quadratum occurrit, pro xc etiam valorem respondentem ipsius y assignare licet, meminisse oportet, in initio hujus solutionis positum fuisse $y = z^2 + 197$; tum vero in quaternis casibus allatis statutum fuisse ut sequitur:

Pro primo casu $z = 215 - 394$, tum vero $s = t + 18$; quamobrem, quia ipsi t tam valores positivos quam negativos tribuumus, erit $z = +21t - 16$; ubi signum superioris pro columna prima, inferioris vero pro altera valet.

Pro

36

1010 decrescentes: 1640, 600, — 440 — 1480, — 2510,
quia iude nullum quadratum resultat, concluditus nume-
rum 64013 esse primum.

§. 58. His circa evolutionem numerorum in forma
40aa + 13bb contentorum expeditis, praestabit usum majo-
rum numerorum idoneorum exemplo illiusfalle. Considera-
tur numerus N = 99901 = 840 · 34 + 169², et examine-
tur, utrum hic numerus propositus plus uno modo in forma
idonea 840xx - yy continetur, id quod sine pluris amba-
gibus sequenti modo satis commode fieri licet.

§. 59. Cum debeat esse 999601 - 840xx = yy, ipf x
successive tribuantur numeri naturales et numeri S a pro-
posito subtrahendi cum suis differentiis erunt

| x | S | Dif. |
|------|----------|---------|
| 0 | 0 | |
| 1 | 1 · 840 | 1 · 840 |
| 2 | 4 · 840 | 3 · 840 |
| 3 | 9 · 840 | 5 · 840 |
| 4 | 16 · 840 | 7 · 840 |
| etc. | etc. | etc. |

Loco S jam continuo subtrahantur differentiae angmento
1680 crescentes, quae subtractiones continuae sequenti mo-
do insinuantur.

§. 60. Hic jam duo occurunt quadrata pro yy. Prius
dat y = 979 et x = 7; posterius praebet casum cognitum
y = 169 et x = 34. Numerus agitur propositus dupli-
modo in forma idonea 840xx + yy continetur, ideoque non
est

37

| | |
|--------|--------|
| 999601 | 756841 |
| 840 | 59400 |
| 998761 | 727441 |
| 250 | 3180 |
| 996241 | 696301 |
| 4200 | 32760 |
| 992041 | 665601 |
| 5880 | 54440 |
| 988161 | 629161 |
| 2560 | 36120 |
| 978601 | 593041 |
| 9240 | 57800 |
| 969361 | 555241 |
| 10930 | 59480 |
| 938441 | 513761 |
| 12600 | 41160 |
| 943841 | 474601 |
| 14280 | 42840 |
| 95361 | 431761 |
| 15960 | 44520 |
| 915601 | 387241 |
| 17640 | 46200 |
| 897601 | 351041 |
| 10520 | 47880 |
| 878641 | 293161 |
| 51040 | 49550 |
| 837641 | 243501 |
| 22680 | 51230 |
| 834601 | 192561 |
| 24560 | 52920 |
| 810601 | 159441 |
| 26040 | 54600 |
| 784561 | 84841 |
| 27720 | 56280 |
| 756841 | 28561 |

999601

Pro secundo casu erat $z = \pm 15$, unde ob binas columnas cum ambiguitate signorum erit $z = \pm 215$.
Pro tertio casu erat $z = \pm 15 - 9 \cdot 197$, tum vero $s = t + 84$, unde cum ambiguitate signorum erit $z = \pm 21t - 9$.
Pro quarto casu erat $z = \pm 15 + 7 \cdot 197$, tum vero posuit $s = t - 66$, unde cum signorum ambiguitate erit $z = \pm 21t - 7$. His notatis sequentes numeros examini subjiciamus.

§. 73. Sit $a = 1$, existente $b = 197$, et numerus propositus erit $N = 40657$. Hic igitur statim ex primo casti occurrit quadratum $aa + 8 = xx$, unde fit $xx = 9$ ideoque $x = 3$, cui respondet valor $t = 0$, ex quo fit $z = -16$, consequenter $y = 155$. Numerus igitur propositus etiam continetur in forma $1848 \cdot 3^2 + 155^2$, unde formatur fractio $\frac{p}{q} = \frac{a \pm y}{b \pm y} = \frac{1 \pm 3}{197 \pm 197}$, cuius valor simplicissimus est $\frac{p}{q} = \frac{1}{32}$. Hinc factor numeri propositi erit $1848 pp + qq = 1848 \cdot 1^2 + 21^2$, qui per 21 depresso fit $88 + 21 = 109$. Numerus igitur propositus 40657 non est primus, sed divisorem habet 109, quoto existente 373.

§. 74. Sit $a = 2$ eritque numerus propositus $N = 46201$, Hic neque ex primo neque ex secundo casu quadratum resultat, verum ex casu tertio statim fit $aa + 21 = 25 = xx$, unde fit $x = 5$, existente $t = 0$, adeoque $z = -9$, consequenter $y = -9 \cdot 21 + 197 = 1$. Ad divisoriem igitur numeri propositi explorandum fiat $\frac{p}{q} = \frac{r}{s} = \frac{1 \pm 1}{25} = \frac{1}{25}$, unde pro factorie haec prodit forma: $1848 \cdot 1^2 + 28^2 = 33 + 14 = 47$. At revera est $N = 46201 = 47 \cdot 983$.

§. 75. Quoniam autem hic numeros compostos non curamus, superfluum foret examen pro omnibus valoribus ipsius

ipsius a hic ordine apponere. Sufficiet enim omnes numeri primi in forma $1848aa + 197$ contenti in sequenti tabula exhibuisse

Tabula numerorum primorum in forma $1848aa + 197$ contentorum.

| Numerus primus | ex valore a |
|----------------|-------------|
| 55441 | - |
| 85009 | - |
| 105337 | - |
| 129361 | - |
| 157081 | - |
| 351121 | - |
| 401517 | - |
| 454609 | - |
| 511897 | - |
| 572881 | - |
| 705937 | - |
| 933241 | - |
| 1016401 | - |
| 1103257 | - |
| 1288057 | - |
| 1487641 | - |
| 172009 | - |
| 2995609 | - |
| 4658309 | - |
| 9094029 | - |
| 11866009 | - |
| 18518809 | - |

| | |
|-----|-----|
| 5 | -3 |
| 7 | 8 |
| 13 | 13 |
| 14 | 15 |
| 16 | 16 |
| 17 | 17 |
| 19 | 19 |
| 22 | 22 |
| 23 | 23 |
| 24 | 24 |
| 26 | 26 |
| 28 | 28 |
| 30 | 30 |
| 40 | 40 |
| 50 | 50 |
| 70 | 70 |
| 80 | 80 |
| 100 | 100 |

§. 76. Omnes ergo isti numeri primi deducti sunt ex formula $1848aa + 197$; unde patet, hinc patet factum esse fontem inexhaustum quamplurimos numeros primos ad plures

plures nulliones exsurgentes modo labore inveniendi; quan-
doquidem non solum in eadem formula: $184 \cdot aa + 197^2$,
loco 197 quoque aliis numeris ut licet, sed etiam loco nu-
meri idonei 1843 etiam maiores eum praecedentes adhucerit pos-
sent. Ac si forte adhuc major numerus idoneus investigari
posset, pari labore infuper ad multo maiores numeros primos
pertingere possent. At vero examini instituto inveni hujus-
modi numeros usque ad terminum 7500 certe non dari,
quod autem ultra hunc terminum adhuc dentur numeri
idonei, vix probabile videatur.

THEOREMA

*Si quispiam numerus idoneus fuerit impariter par, scilicet
 $N = n + 2$, tum etiam ejus quadruplicum in classe hab-
merorum idoneorum reperiatur.*

DEMONSTRATIO.

§. 77. Cum N sit numerus idoneus, intra intervalum
 $N \leq n + 2$, tum etiam ejus quadruplicum in classe hab-
merorum idoneorum reperiatur.

§. 78. Sit $2i$ numerus idoneus, impariter par, ideoque
i numeris impar, et quia natura numerorum idoneorum in
hoc consistit, ut omnes numeri unico modo in formula
 $2i \cdot xx + yy$ contenti certe sint primi: necesse est, ut omnis
numeris compositus, qui fit C, in eadem formula contentus,
finiū insticer alio modo in ea coniineatur. Ponamus igit-
ter esse $C = i \cdot aa + bb$ et $C = 2i \cdot cc + dd$, hincque fit
 $2i \cdot aa - cc = dd - bb$; ubi observetur numeros b et d im-
pares esse debere, quandoquidem primi esse debent ad $2i$,
quamvis quadratorum differentia $dd - bb$ per se erit di-
visibilis.

§. 79. Consideremus jam castum, quo a est numerus
par $\equiv f$, ita ut sit $C = 2i \cdot f^2 + bb$, atque postrema
aequatio erit: $i(f^2 - cc) = dd - bb$. Hic manifestum
est, ut prius huius acquisitionis membrum per se divisibile
fit, numerum c necessario parcum esse debere. Sit igitur
 $c = g$, atque hinc sequitur, si numeris compositus C fe-
rit $\equiv iff^2 - bb$, tum adhuc alio modo fore $C = 2ifg^2 + dd$,
quo concidit, etiam intra intervalum $4N$ et $16N$ nullos

numeros compositos formae $4Nxx + yy$ cadere posse; unde
sequitur numerum $4N$ etiam esse idoneum.

§. 80. Hoc etiam colligere licet. ex ipsa tabula nu-
merorum idoneorum supra § 34. exhibita, in qua repen-
tur frequentes numeri impariter parres: 2, 6, 10, 18, 22, 30,
 4^2 , 58, 70, 88, 10, 138, 190, 212, 330, 462, quorum ergo
quadruplica etiam, vi superioris theorematis, sunt numeri idonei,
scilicet: 5, 24, 42, 72, 85, 125, 165, 32, 230, 312, 488,
524, 760, 340, 1320, 1548, qui omnes in eadem tabula
occurunt.

ALIA DEMONSTRATIO.

§. 81. Consideremus jam castum, quo a est numerus
par $\equiv f$, ita ut sit $C = 2i \cdot f^2 + bb$, atque postrema
aequatio erit: $i(f^2 - cc) = dd - bb$. Hic manifestum
est, ut prius huius acquisitionis membrum per se divisibile
fit, numerum c necessario parcum esse debere. Sit igitur
 $c = g$, atque hinc sequitur, si numeris compositus C fe-
rit $\equiv iff^2 - bb$, tum adhuc alio modo fore $C = 2ifg^2 + dd$,
quo

quocum si alius numerus quicunque N unico modo in forma $8ixx + yy$ contineatur, is certe debet esse primus; unde manifesto concluditur, etiam numerum $8i$ in tabula numerorum idoneorum contineri debere.

§. 81. Super tabula autem numerorum idoneorum sequentes observationes fecisse operae erit pretium:

1º. Videamus in hac tabula aliis numeros primos non occulere, praeter $2, 3, 5, 7, 13$ et \dots , atque rationes non deflent numerum 37 tanquam ultimum plane primum in classe numerorum idoneorum spectandi, siquidem quo longius procedatur, numeri idonei eo plures factores involvant,

2º. Præterea cum etiam dupla numerorum primorum in hoc negotio pro primis haberi debent, etiam tales numeri pauci occurant, qui sunt $2 \cdot 3, 2 \cdot 5, 2 \cdot 11, 2 \cdot 29$; ita ut 5 , pro ultimo talium numerorum habendus videatur, idque ob rationem modo ante allatam, quod scilicet numeri idonei continuo plures factores recipient.

3º. Quoniam in isto calculo etiam quadrata numerorum primorum pro primis sunt habita, talia quadrata hic quoque pauca occurunt, quae sunt $4, 9, 16, 25$, neque enim ob eandem rationem plures admitti posse videntur.

4º. Consideremus etiam omnes eos numeros idoneos, qui tantum ex duobus factoribus constant, ubi quidem ipsum binarium rejiciunt, ejus vero potestates, perinde ac quadrata numerorum primorum, tanquam simplices factores spectamus. Tales numeros tabula nostra offerit (sequentes: $4 \cdot 3, 3 \cdot 5, 3 \cdot 6, 3 \cdot 7, 4 \cdot 6, 4 \cdot 7, 5 \cdot 6, 5 \cdot 8, 6 \cdot 7, 6 \cdot 8, 3 \cdot 19, 7 \cdot 16, 5 \cdot 9, 6 \cdot 13, 5 \cdot 17, 3 \cdot 31, 6 \cdot 17, 16 \cdot 7, 10 \cdot 13$,

$10 \cdot 13, 7 \cdot 19, 3 \cdot 59, 10 \cdot 19, 8 \cdot 29, 11 \cdot 23$. Reliqui vero omnes vel tres vel adeo plures factores involvent. His rationibus conjectura nostra non parum confirmatur, quod, quo longius progrediamur, numeri idonei continuo plures factores involvere debeant.

5º. Cum numeri idonei ab initio usque ad 11 omnes numeros conlectantur, deinde vero continuo evadant rariores, maxime mirandum, mox tanta intervalla occurtere a talibus numeris prorsus vacua. Veltui in toto intervallo a 520 usque ad 760 nullus plane repertus; deinde vero ab 840 usque ad 1320 , h. e. in intervallo febre quingentorum numerorum, nullus est inventus; ac fere per finile intervallum a 1365 usque ad 1348 neutrino quidem deprehenditur.

6º. Quid autem hic maxime est mirandum, Post istum numerum, in tabula nostra positemus, nulli ali a me sunt inventi, quamquam istum calculum usque ad 4 millia sum prosecutus, ita ut totum hoc spatium prorsus sit vacuum.

7º. Hinc autem porro concludi oportet, ulterius usque ad 1600 progrediendo nullum faltem numerum idoneum. Pariter parem occurre posse; si enim talis daretur, ejus pars quarta in hanc classem, atque adeo ante 4000 , cadere debet. Quare cum maxime probable sit, etiam per hoc intervallum neque numeros impares neque impares reperiri: hinc manifesto sequitur, postremum numerum nostrae tabulae 1348 etiam revra esse ultimum, id quod utique tanquam insigne paradoxum spectari potest. Propreca quod hi numeri secundum certam legem formantur, quae adeo in infinitum progreedi debere videtur.