VTRVM HIC NVMERVS: 1000009. SIT PRIMVS, NEC NE, INQVIRITVR

Auctore
L. EVLERO.

Conuent. exhib. die 16 Mart. 1778.

§. 1.

Cum hic numerus manifesto sit summa duorum quadratorum, scilicet: $1000^2 + 3^2$, quaestio huc redit: num iste numerus adhuc alio modo in duo quadrata diuidi queat? Si enim id nullo modo fieri potest, hic numerus certe erit primus; sin autem adhuc alio modo talis resolutio succedat, tum non erit primus, atque tum adeo eius diuisores assignare licebit. Quare si vnum quadratum statuamus $= xx$, inquirendum est, vtrum altera pars, scilicet: $1000009 - xx$ euadere queat quadratum, praeter casus $x = 3$ et $x = 1000$, id quod sequenti modo explorari poterit.

§. 2. Quoniam iste numerus desinit in 9, alterum quadratum necessario diuidi poterit per 5, atque adeo per 25. Statuamus igitur, hanc formulam $1000009 - xx$ esse diuisibilem per 25, ac perspicuum est, necessario esse debere $x = 25a + 3$; tum enim habitur haec formula:

1000000

$$1000000 - 6 . 25\, a - 25^2 . a a$$

quae diuisa per 25 abit in hanc: $40000 - 6 a - 25\, a a$, quae ergo forma quadratum esse debet.

§. 3. Hic duo casus sunt considerandi, prouti a fuerit vel numerus par, vel imper. Sit pro priori casu $a = 2 b$, et facta diuisione per 4. quadratum esse debet haec formula:

$$A = 10000 - 3\, b - 25\, b b.$$

Pro altero casu fit $a = 4\, c + 1$, et formula quadratum reddenda erit

$$B = 39969 - 224\, c - 400\, c c,$$

quae vtique quadratum impar esse potest: sin autem pro eodem casu statuamus $a = 4\, d - 1$, haec resultat formula:

$$C = 39981 + 176\, d - 400\, d d,$$

quae, quia per 8 diuisa relinquit 5, quadratum nunquam esse potest, ita vt tantum binae formulae A et B sint examinandae.

Euolutio formulae.

$$B = 39969 - 224\, c - 400\, c c.$$

§. 4. Hic igitur litterae c successiue omnes valores 0, 1, 2, 3, etc. tam positiuos quam negatiuos tribuamus, et quoniam a numero absoluto 39969 subtrahi debet formula $400\, c c \pm 224\, c$, prout c fuerit numerus vel positiuus vel negatiuus, istos numeros successiue subtrahendos in duabus columnis, vna cum eorum differentiis annotemus:

c

c	400 cc — 224 c	Diff.	c	400 cc + 224 c	Diff.
0	0	176	0	0	624
1	176	976	1	624	1424
2	1152	1776	2	2048	2224
3	2928	2576	3	4272	3024
4	5504		4	7296	

Vbi ſtatim patet, pro vtroque caſu differentias continuo creſcere per 800.

§. 5. Iſtae igitur differentiae a numero illo abſoluto 39969 continuo ſubtrahantur, id quod commode etiam per binas columnas fieri poterit; vbi ergo videndum erit, an vsquam numeri quadrati reſultent.

39969	39969	31089	28849
177	624	4176	4624
39793	39345	26913	24225
976	1424	4976	5424
38817	37921	21937	18801
1776	2224	5776	6224
37041	35697	16161	12577
2576	3024	6576	7024
34465	32673	9585	5553
3376	3824	7376	
31089	28849	* 2209	

§. 6. In vtroque hoc calculo vnicum occurrit quadratum * $2209 = 47^2$; vnde patet, numerum propofitum non effe primum, quemadmodum in differtatione, Tomo XIX. nouor. Commentar. *De tabula numerorum primorum vsque ad millionem et vltra continuanda*, inferta, eft confignatus, fed habere diuifores; ad quos inueniendos notetur, hoc quadratum proueniffe ex valore $c = -10$, vnde fit $a = -39$; tum vero colligitur $x = 25a + 3 = -972$, hincque

$$1000009 - xx = 55225 = 235^2,$$

ita vt hanc duplicem refolutionem habeamus:

$$1000^2 + 3^2 = 972^2 + 235^2,$$

hinc transponendo

$$1000^2 - 235^2 = 972^2 - 3^2,$$

vnde fequitur

$$(1000 - 235)(1000 + 235) = (972 - 3)(972 + 3),$$

fiue $1235 \cdot 765 = 969 \cdot 975$. Hinc fit $\frac{1235}{975} = \frac{969}{765}$, quae fractiones deprimuntur ad hanc fimpliciffimam: $\frac{19}{15}$, vnde denique denique concluditur, noftrum numerum cum fumma quadratorum $19^2 + 15^2$ communem habere diuiforem, qui ergo erit 293, atque reuera reperimus effe

$$1000009 = 293 \cdot 3413.$$

Ex quo patet, in tabulam memoratae differtationis, vbi omnes numeri primi intra 1000000 et 1002000 contenti exhibentur, errorem irrepfiffe, inde natum, quod confideratio diuiforis primi 293 eft praetermiffa.

Euo-

Euolutio formulae
$$A = 10000 - 3b - 25bb.$$

§. 7. Haec formula est pars centesima formulae $1000009 - xx$, ad quam igitur euoluendam iterum duo casus sunt distinguendi, alter quo b est numerus par, alter vero quo impar. Pro priori casu euidens est, nisi b sit numerus pariter par, formulam propositam quadratum esse non posse. Sit igitur $b = 4c$, et forma resultans, per 4 diuisa, fiet $2500 - 3c - 100cc$, quae num quadratum esse queat, praeter casum $c = 0$, haud difficulter apparebit. Primo enim euidens est, esse non posse $c = \pm 1$; deinde pariter sumi nequit $c = \pm 2$. Sit igitur $c = \pm 3$, et formula nostra euadet $2500 - 900 \pm 9 = 1600 \pm 9$, quod quadratum esse nequit. Sin autem sumatur $c = \pm 4$ fiet

$$2500 - 1600 \pm 12 = 900 \pm 12,$$

certe non quadratum. Denique sumto $c = \pm 5$, pariter quadratum oriri nequit: prodit enim

$$2500 - 2500 \pm 15 = 0 \pm 15.$$

§. 8. Pro altero casu, vbi b numerus impar, statuatur primo $b = 4d + 1$, ac formula proposita euadet

$$9972 - 212d - 400dd,$$

quae diuisa per 4 fit

$$2493 - 53d - 100dd,$$

quae casu $d = 0$ manifesto non est quadratum. Sumatur igitur $d = \pm 1$, prodibitque 2393 ± 53, pariter non quadratum; at casus $d = \pm 2$, praebet 2093 ± 106; casus vero $d = \pm 3$ dat 1593 ± 159, ex quorum neutro quadratum resultat, neque ex casu $d = \pm 4$, quippe qui dat 893 ± 212.

Casus denique $d = -5$ praebet $-7 + 265$. Sit denique b numerus formae $4d - 1$, prodibitque

$$9978 + 188d - 400dd$$

qui numerus, cum sit par, neque tamen per 4 diuisibilis, quadratum esse nequit.

§. 9. Quo vis huius calculi magis eluceat, examinemus adhuc alium huiusmodi numerum in duo quadrata resolubilem, qui sit $1000081 = 1000^2 + 9^2$, et videamus utrum adhuc alio modo in duo quadrata resolui possit, quorum alterum, vti in casu praecedente, necessario per 5 debet esse diuisibile. Posito igitur vno quadrato $= xx$, videamus an reliqua pars $1000081 - xx$ possit esse quadratum per 5 siue per 25 diuisibile.

§. 10. Hunc in finem statuamus $x = 25y + 9$, fietque formula illa $1000000 - 18 \cdot 25y - 25^2 yy$, quae per 4 diuisa abit in hanc simplicem: $40000 - 18y - 25yy$. Sit nunc primo y numerus par, h. e. $y = 2a$, et formula iterum per 4 diuisa ita se habet:

$$A = 10000 - 9a - 25aa.$$

Secundo pro numero impari statuatur 1°. $y = 4b + 1$, prodibitque

$$B = 39957 - 272b - 400bb,$$

qui numerus est impar et per 8 diuisus relinquit 5, ideoque quadratum esse nequit, vnde penitus omitti debet formula B. 2°. Statuamus $y = 4c - 1$, et formula erit:

$$C = 39993 + 128c - 400cc,$$

vbi

vbi numerus 39993 per 8 diuiſus relinquit 1, ideoque propiori examini eſt ſubiiciendus.

Euolutio formulae

$$C = 39993 + 128\,c - 400\,.\,c\,c.$$

§. 11. Quoniam hic a numero abſoluto 39993 ſucceſſiue ſubtrahi debent numeri in forma $400\,.\,cc \pm 128\,c$ contenti, in ſubſidium calculi, vt ſupra, ſubtrahendos numeros cum differentiis, prouti c fuerit vel poſitiuum vel negatiuum, in ſequenti tabula apponamus:

c	$400\,cc - 128\,c$	Diff.	c	$400\,cc + 128\,c$	Diff.
0	0	272	0	0	528
1	272	1072	1	528	1328
2	1344	1872	2	1856	2128
3	3216		3	3984	

Vbi iterum differentiae continuo 800 creſcunt.

§. 12. Subtrahamus ergo a numero abſoluto 39993 continuo has differentias octingentis creſcentes, qui calculus ita ſe habebit:

39993	39993	30633	29353
272	528	4272	4528
39721	39465	26361	24825
1072	1328	5072	5328
38649	38137	21289	19497
1872	2128	5872	6128
36777	36009	15417	13369
2672	2928	6672	6928
34105	33081	8745	6441
3472	3728	7472	
30633	29353	1273	

Hic igitur nullum plane quadratum occurrit.

Euolutio formulae.

$$A = 10000 - 9a - 25aa.$$

§. 13. Ponamus loco a numerum parem, qui adeo debebit esse pariter par, fitque idcirco $a = 4e$, ita vt facta diuisione per 4 oriatur haec forma: $2500 - 9e - 100ee$. Hic igitur a numero absoluto successiue subtrahi debent numeri in forma $100ee \pm 9e$ contenti, qui igitur in sequenti tabula, prouti e fuerit numerus vel positiuus vel negatiuus, referuntur:

e	$100ee\ 9 - e$	Diff.	$109ee + 9e$	Diff.
0	0	91	0	109
1	91	291	109	309
1	382	491	418	509
3	873		927	

Has igitur differentias ducentis crescentes a numero absoluto 2500 continuo subtrahamus, sequenti modo:

2500	2500
91	109
2409	2391
291	309
2118	2082
491	509
1627	1573
691	709
936	864
891	
45	

vbi igitur nulli occurrunt quadrati, praeter 2500, qui autem numerus ad quadratum notum 1000^2 perducit.

§. 9. Sit nunc a numerus impar, ac primo quidem formae $4f + 1$, vnde formula nostra euadit,

$$9966 - 236f - 4ff,$$

qui numerus cum sit impariter par, quadratum esse nequit. Statuamus ergo $a = 4f - 1$, et formula prodit

9984

$$9984 + 164f - 4ff,$$

ideoque pariter par; at per 4 diuiſa ea abit in hanc:

$$2496 + 41f - 100ff.$$

Hic igitur a numero abſoluto numeri in forma $100ff \pm 41f$ ſunt ſubtrahendi, qui, prouti f fuerit numerus poſitiuus vel negatiuus, ita ſe habebunt:

f	$100ff - 41f$	Diff.	f	$100ff + 41f$	Diff.
0	0		0	0	
		59			141
1	59		1	141	
		259			341
2	318		2	482	
		459			541
3	777		3	1023	

Subtrahantur iam differentiae ducentis creſcentes a numero abſoluto:

2496	2496
59	141
2437	2355
259	341
2178	2014
459	541
1719	1473
659	741
1060	732
859	
201	

Quoniam igitur in toto hoc calculo nullum quadratum occurrit, certum eſt numerum propoſitum 1000081 vnico tantum

tum modo in duo quadrata resolui posse, ideoque certo esse numerum primum, qualis in tabula dissertationis memoratae exhibetur; atque hic imprimis memorabile est, quod tam facili calculo de hac veritate sumus certiores facti.

§. 15. Dolendum autem est, hanc methodum non ad omnes numeros explorandos adhiberi posse, sed restringi ad eos tantum numeros, qui non solum sint summae duorum quadratorum, sed qui desinant insuper in 1 vel 9; quia de his tantum valet, quod alterum quadratum diuisibile sit per 5.

§. 16. Interim tamen hac methodo omnes plane numeri in forma $4n+1$ contenti et siue in 1 siue in 9 desinentes pari successu examinari possunt; quandoquidem nouimus, si tales numeri in duo quadrata resolui queant, alterum certo per 5 esse diuisibile. Tum autem, calculo secundum praecepta data instituto, si reperiatur, numerum propositum vnico modo in duo quadrata resolui posse, id certum erit signum, illum esse primum: sin autem hoc duobus pluribusue modis fieri queat, inde eius factores assignare licebit, eo modo, quo supra vsi sumus. Quod si vero eueniat, vt numerus propositus nullo plane modo in duo quadrata diuidi queat, tum id etiam erit signum, talem numerum non esse primum, etiamsi eius factores hinc definire non licet; tantum autem concludere licet, duos ad minimum factores habere primos formae $4n-1$.