

INVESTIGATIO SUPERFICIERVM
 QVARVM NORMALES AD DATVM PLANVM
 PRODUCTAE

SINT OMNES INTER SE AEQVALES.

Auctore
 L. EVLERO.

Conuentui exhib. die 28 Decemb. 1777.

§. I.

Referat tabula planum, ad quod omnes normales sunt Tab. I:
 producendae, et pro superficie quaesita constituatur in- Fig. 1.
 ter tres coordinatas $AX = x$, $XY = y$ et $YZ = z$, haec
 aequatio differentialis: $\partial z = p \partial x + q \partial y$, atque constat,
 normalem ex superficie Z ad planum productam esse ZN
 $= z \sqrt{(1 + pp + qq)}$, quam ergo constantem esse oportet.
 Sit igitur $z \sqrt{(1 + pp + qq)} = a$, atque vt irrationalitas
 tollatur, ponatur $p = \text{tang. } \omega \text{ fin. } \Phi$ et $q = \text{tang. } \omega \text{ cof. } \Phi$;
 tum enim normalis ZN ita exprimetur: $z \sqrt{(1 + \text{tang. } \omega^2)}$
 $= \frac{z}{\text{cof. } \omega} = a$, ficque erit $z = a \text{ cof. } \omega$, quo valore substituto
 aequatio illa differentialis hanc induet formam:

$$- a \partial \omega \text{ fin. } \omega = \partial x \text{ tang. } \omega \text{ fin. } \Phi + \partial y \text{ tang. } \omega \text{ cof. } \Phi,$$

ideoque erit

$$- a \partial \omega \text{ cof. } \omega = \partial x \text{ fin. } \Phi + \partial y \text{ cof. } \Phi.$$

Noua Acta Acad. Imp. Scient. Tom. X.

F

Sic

Sicque adepti sumus aequationem, ex qua valores \bar{x} et y per angulos Φ et ω definiri poterunt.

§. 2. Cum enim prima pars huius aequationis — $a \partial \omega \operatorname{cof.} \omega$ sponte fit integrabilis, etiam alteram partem integrabilem reddi oportet. Per notam iam integralium reductionem integratio ita instituitur:

$$- a \operatorname{fin.} \omega = x \operatorname{fin.} \Phi - \int x \partial \Phi \operatorname{cof.} \Phi + y \operatorname{cof.} \Phi + \int y \partial \Phi \operatorname{fin.} \Phi,$$

vnde habebimus

$$- a \operatorname{fin.} \omega = x \operatorname{fin.} \Phi + y \operatorname{cof.} \Phi + \int \partial \Phi (y \operatorname{fin.} \Phi - x \operatorname{cof.} \Phi),$$

vbi postremum membrum integrabile esse nequit, nisi sit $y \operatorname{fin.} \Phi - x \operatorname{cof.} \Phi$ functio solius anguli Φ , quae sit Φ' , vt inde fiat $\int \Phi' \partial \Phi = \Phi$; quo facto aequatio integralis erit

$$- a \operatorname{fin.} \omega = x \operatorname{fin.} \Phi + y \operatorname{cof.} \Phi + \Phi.$$

§. 3. Habemus igitur has duas aequationes:

I. $y \operatorname{fin.} \Phi - x \operatorname{cof.} \Phi = \Phi'.$

II. $x \operatorname{fin.} \Phi + y \operatorname{cof.} \Phi = - a \operatorname{fin.} \omega - \Phi,$

ex quibus facile eliciuntur coordinatae x et y , quippe quae reperiuntur

$$x = - \Phi \operatorname{fin.} \Phi - \Phi' \operatorname{cof.} \Phi - a \operatorname{fin.} \Phi \operatorname{fin.} \omega \text{ et}$$

$$y = \Phi' \operatorname{fin.} \Phi - \Phi \operatorname{cof.} \Phi - a \operatorname{fin.} \omega \operatorname{cof.} \Phi.$$

Praeterea vero erit tertia coordinata $z = a \operatorname{cof.} \omega$; ita vt iam omnes tres coordinatae per binos angulos variables exprimantur, scil. Φ et ω .

§. 4. Quo has formulas magis ad vsum accomodemus, ponamus $a \operatorname{fin.} \omega = -v$ et $-\Phi \operatorname{fin.} \Phi - \Phi' \operatorname{cof.} \Phi = t$
et

et $-\Phi \operatorname{cof.} \Phi + \Phi' \operatorname{fin.} \Phi = u$, vt obtineamus has formulas:
 $x = v \operatorname{fin.} \Phi + t$ et $y = v \operatorname{cof.} \Phi + u$. Nunc vero erit $z = \sqrt{(aa - vv)}$. Hic autem obseruetur, ambas litteras t et u functiones esse folius anguli Φ , inde autem colligimus

$$\begin{aligned} t \operatorname{fin.} \Phi + u \operatorname{cof.} \Phi &= -\Phi; \\ u \operatorname{fin.} \Phi - t \operatorname{cof.} \Phi &= +\Phi'. \end{aligned}$$

§. 5. Nunc vero notetur litteras Φ et Φ' ita a se inuicem pendere, vt fit $\partial \Phi = \Phi' \partial \Phi$; prior autem formula differentiata praebet

$\partial t \operatorname{fin.} \Phi + t \partial \Phi \operatorname{cof.} \Phi + \partial u \operatorname{cof.} \Phi - u \partial \Phi \operatorname{fin.} \Phi = -\Phi' \partial \Phi$,
 cui si addatur altera aequatio in $\partial \Phi$ ducta, oriatur haec:

$$\partial t \operatorname{fin.} \Phi + \partial u \operatorname{cof.} \Phi = 0,$$

vnde colligitur $\operatorname{tang.} \Phi = -\frac{\partial u}{\partial t}$.

§. 6. Hinc iam pro u functio quaecunq; ipsius t accipi potest. Concipi igitur poterit curua quaecunq; CU per coordinatas $CT = t$ et $TU = u$ determinata, ad quam si in U ducatur tangens $U\Theta$, innotescet angulus ad Θ , qui fit θ , eritque $\frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{tang.} \theta$, ideoque $\Phi = -\theta$. Tum ergo erit $x = t - v \operatorname{fin.} \theta$ et $y = u + v \operatorname{cof.} \theta$. Iam in normali ducta et producta in V capiatur pro lubitu interuallum $UV = v$, indeque ad axem ducto perpendicularo VX euidentis est fore interuallum $CX = CT - US$, ideoque $= t - v \operatorname{fin.} \theta = x$. Simili modo erit recta $XV = TU + VS = u + v \operatorname{cof.} \theta = y$. Si ergo in V erigatur perpendicularum $VZ = z = \sqrt{(aa - vv)}$, punctum Z erit in superficie quaesita. Patet ergo fore rectam $UZ = a$. Consequenter si centro U in plano verticali super recta UV describatur

Tig. I.

Fig. 2.

circulus radio $UZ = a$, totus hic circulus erit in superficie quaesita; vnde intelligimus totam hanc superficiem semper esse cylindrum, cuius axis secundum datam curuam arbitriam incuruatur, quemadmodum iam dudum a me et aliis est obseruatum. Hic autem imprimis ipsa Analysis eo perducens spectari meretur.

Alia Solutio.

§. 7. In aequatione pro superficie quaesita, quae erat $\partial z = p \partial x + q \partial y$, ponatur $p = \frac{r}{z}$ et $q = \frac{s}{z}$, vt prodeat aequatio huius formae: $z \partial z = r \partial x + s \partial y$; tum vero erit normalis ad superficiem

$$ZN = \sqrt{(zz + rr + ss)},$$

quae cum debeat esse constans $= a$, erit

$$zz = aa - rr - ss,$$

ideoque

$$z \partial z = -r \partial r - s \partial s,$$

vnde ergo fiet

$$0 = r \partial x + s \partial y + r \partial r + s \partial s,$$

siue

$$r(\partial x + \partial r) + s(\partial y + \partial s) = 0.$$

Iam ponatur porro $x + r = t$ et $y + s = u$, atque aequatio solutionem quaestionis continens erit $r \partial t + s \partial u = 0$.

Tab. I.

Fig. 3.

§. 8. Haec autem aequatio facillime confruitur, describendo curuam quamcunque CU , coordinatis $CT = t$ et $TU = u$ determinatam. Si enim ad hanc curuam ex U ad axem ducatur normalis UP , voceturque angulus $CPU = \phi$, qui amplitudinem curuae metietur, siquidem axis CP ad

cur-

curu
nunc
 $\frac{s}{r} =$
hocq
que

erit
dina
prod
axer

ficqu
X Y
tur
de p
radic
vt p
Hoc
quat

vam
esse
mat
diue
dior
mat

curuam fuerit normalis; tum erit tang. $\Phi = \frac{\partial t}{\partial u} = \frac{\sin. \Phi}{\cos. \Phi}$. Cum nunc ex aequatione inuenta fit $\frac{\partial t}{\partial u} = -\frac{s}{r}$, statui debeat $\frac{s}{r} = -\frac{\sin. \Phi}{\cos. \Phi}$; quamobrem fiat $r = v \cos. \Phi$ et $s = -v \sin. \Phi$, hocque modo aequationi inuentae erit satisfactum, quaecunque etiam quantitas variabilis pro v accipiatur.

§. 9. Hinc igitur cum fit $x = t - r$ et $y = u - s$, erit $x = t - v \cos. \Phi$ et $y = u + v \sin. \Phi$; tertia vero coordinata tum erit $z = \sqrt{(aa - vv)}$. Quocirca si in normali producta PU capiatur interuallum $UY = v$ et ex Y ad axem perpendiculum demittatur YX , erit

$$\begin{aligned} CX &= CT - TX = t - v \cos. \Phi, \\ XY &= TU + SY = u + v \sin. \Phi, \end{aligned}$$

ficque erit, vt in praecedente constructione, $CX = x$ et $XY = y$. Praeterea vero si in Y perpendiculariter erigatur $YZ = z$, erit recta $YZ = \sqrt{(aa - vv)}$ et $UZ = a$; unde patet, superficiem quaesitam describi, si centrum circuli, radio a descripti, secundum curuam CU ita promoueatur, vt planum circuli perpetuo ad curuam CU sit normale. Hoc enim modo peripheria circuli ipsam superficiem quam quaerimus describet.

§. 10. Ex hac facillima constructione patet, curuam CU penitus arbitrio nostro relinqui, neque adeo opus esse, vt eius natura certa aequatione inter t et u exprimatur; sed eam pro lubitu duci atque adeo ex partibus diuersissimis componi posse. Haec scilicet curua CU functionem illam arbitrariam inuoluit, quam huiusmodi problemata, quae circa functiones duarum variabilium versantur,

per integrationem recipere debent, loco constantis, quae in integrationibus ordinariis introduci solet.

§. 11. Ceterum, quia huiusmodi superficies per motum continuum circuli generantur, dum directio motus perpetuo ad planum circuli est normalis, hic regula *Guldini* notissima in usum vocari potest, si quidem velimus tam ipsam superficiem genitam quam solidi ea inclusi quantitatem definire. Scilicet tota superficies solidi hoc modo generati secundum hanc regulam reperitur, si peripheria circuli, quae est $= 2\pi a$, multiplicetur per viam a centro gravitatis circuli descriptam, quae cum sit longitudo curvae CU, superficies istius solidi erit $= 2\pi a \cdot CU$; ipsa autem eius soliditas reperietur, si area istius circuli, quae est $\pi a a$ per eandem viam centri gravitatis, siue arcum CU multiplicetur, ita ut soliditas haec futura sit $\pi a a \cdot CU$.

TR

Pri
teste
angl
mae
ipsa
xim
adm
fit
lat.
det
terc
eius

cui