PROBLEMA GEOMETRICVM,

QVO INTER OMNES ELLIPSES, QVAE PER DATA QVATVOR PVNCTA TRADVCI POSSVNT, EA QVAERITVR, QVAE HABET AREAM MINIMAM.

Auctore

L. EVLERO.

Conuentui exhib. die 4 Sept. 1777.

§. 1.

Casum huius problematis, quo quatuor puncta in angulis parallelogrammi rectanguli constituta assumuntur, iam olim solutum dedi; verum problema generale tum temporis adgredi non sum ausus, propter ingentem quantitatum numerum, quae in calculum introduci deberent, vnde formulae analyticae penitus inextricabiles orirentur: quamobrem Geometris haud ingratum fore spero, si hic solutionem satis succinctam istius Problematis difficillimi tradidero.

§. 2. Primo igitur quatuor puncta data ita disposita esse debent, vt per ea saltem vnam ellipsin ducere liceat, id quod euenit, quando quodlibet istorum punctorum extra triangulum per terna reliqua formatum incidit. Statim vero atque vnica ellipsis per haec puncta duci potest, iam satis

ſatis conſtat ſimul quoque infinitas alias traduci poſſe, inter quas ergo noſtrum problema iubet eam inueſtigare, cuius area omnium ſit minima.

§. 3. Sint igitur A, B, C, D, quatuor illa puncta, Tab. I. Fig. 2. per quae ellipſes tranſire oporteat. Agatur per bina quaeuis puncta A et B linea recta O A B, pro axe habenda, cui recta, per bina reliqua puncta C et D ducta, occurrat in puncto O, vbi initium abſciſſarum conſtituamus. Applicatas vero hic non more ſolito axi O A B normales, ſed alteri directioni O C D parallelas ſtatuamus; ſcilicet ſi vocetur abſciſſa $OX = x$, applicata ei reſpondens $XY = y$ ſemper rectae O C D parallela eſt concipienda. Vocetur ergo iſte angulus obliquitatis $AOC = \omega$, et quoniam quatuor puncta A, B, C, D, ſunt data, vocemus eorum diſtantias a puncto O vt ſequitur: $OA = a$; $OB = b$; $OC = c$ et $OD = d$, vnde ſtatim tam ipſa latera quam diagonales per haec quatuor puncta tranſeuntes exprimere poterimus. Primo enim erit $AB = b - a$ et $CD = d - c$; tum vero erunt rectae in figura non expreſſae:

$$AC = \surd(cc + aa - 2ac \operatorname{cof.} \omega),$$
$$AD = \surd(aa + dd - 2ad \operatorname{cof.} \omega),$$
$$BC = \surd(bb + cc - 2bc \operatorname{cof.} \omega),$$
$$BD = \surd(bb + dd - 2bd \operatorname{cof.} \omega).$$

Caeterum hic obſeruetur perinde eſſe, per quaenam datorum punctorum axis traducatur, dummodo directio applicatarum per duo reliqua puncta tranſeat; quod notaſſe iuuabit, quando forte rectae A B et C D fuerint inter ſe parallelae; tum enim axem per puncta A et D vel B et C duci conueniet.

§. 4. Quia nunc curuas per quatuor puncta A, B, C, D, ducendas ellipſes eſſe oportet, aequatio inter coordinanatas $OX = x$ et $XY = y$ hac forma repraesentetur:

$$Axx + 2Bxy + Cyy + 2Dx + 2Ey + F = 0,$$

in qua ergo primo litterae A et C eodem signo debent esse affectae; praeterea vero earum productum AC maius esse debet, quam BB, quia alioquin curuae in hac aequatione contentae forent hyperbolae. Vt nunc istam aequationem generalem ad statum propositum accommodemus, statuamus primo $y = 0$, vnde aequatio abibit in hanc formam: $Axx + 2Dx + F = 0$, quae ergo praebere debet bina puncta in axe posita, scilicet A et B, pro quorum illo fit $x = a$, pro hoc vero $x = b$, quae ergo esse debent radices illius aequationis $Axx + 2Dx + F = 0$; quamobrem statuamus

$$Axx + 2Dx + F = m(x - a)(x - b),$$

vnde fiet

$$A = m;\ D = -\frac{m(a+b)}{2} \text{ et } F = mab.$$

§. 5. Ponamus nunc simili modo abscissam $x = 0$, vnde aequatio euadit $Cyy + 2Ey + F = 0$, cuius radices dare debent puncta C et D, siue eius radices esse debent $y = c$ et $y = d$; quamobrem statuatur:

$$Cyy + 2Ey + F = n(y - c)(y - d),$$

vnde fit

$$C = n;\ E = -\frac{n(c+d)}{2} \text{ et } F = ncd.$$

Ante vero inueneramus $F = mab$, qui valores vt congruant, capiatur $m = cd$ et $n = ab$, quocirca aequatio generalis quatuor data puncta complectetur, si fiat:

$$A = cd;\ C = ab;\ 2D = -cd(a + b);$$

$$2E = -ab(c + d) \text{ et } F = abcd,$$

ita vt iam omnes litterae, praeter B, sint determinatae. Hoc ergo

ergo modo littera B indeterminata relinquitur, ac pro variis valoribus innumerabiles naſcentur ellipſes per eadem quatuor puncta A, B, C, D tranſeuntes, dummodo accipiatur $BB < AC$. Si enim ſumeretur $BB = AC$, curua foret parabola, ſiue ellipſis infinite longa, cuius ergo area etiam foret infinita, quamobrem quaeſtio propoſita ad minimam aream adſtringitur. Sin autem adeo eſſet $BB > AC$ curuae forent hyperbolae, ideoque a noſtro problemate excluduntur.

§. 6. Quaeramus nunc applicatam XY. Manifeſtum autem eſt cuilibet abſciſſae $CX = x$ geminam applicatam reſpondere debere XY et XY′, quandoquidem iſta applicata curuam ſecabit in duobus punctis Y et Y′, quae ergo applicatae erunt radices aequationis noſtrae generalis, cuius reſolutio dabit Tab. I. Fig. 3.

$$y = -\frac{E - Bx \pm \surd[(E + Bx)^2 - ACxx - 2CDx - FC]}{C},$$

quorum duorum valorum alter dabit applicatam XY alter vero applicatam XY′, ita vt ſit:

$$XY = -\frac{E - Bx - \surd[(E + Bx)^2 - ACxx - 2CDx - FC]}{C} \text{ et}$$

$$XY' = -\frac{E - Bx + \surd[(E + Bx)^2 - ACxx - 2CDx - FC]}{C}.$$

§. 7. Quia nunc ambo puncta Y et Y′ ſita ſunt in ellipſi per puncta A, B, C, D tranſeunte, interuallum YY′ intra ellipſin continebitur. Quare cum ſit $YY' = XY' - XY$, erit iſtud interuallum:

$$YY' = \frac{2\surd[(E + Bx)^2 - ACxx - 2CDx - FC]}{C}.$$

Quod ſi iam illi applicatae ducatur proxima xyy', ea a priore remota eſt interuallo xv (ducta ſcilicet ex x in XY

X Y perpendiculari $x v$, quae ob $X x = \partial x$ et angulum $x X v = \omega$, erit $x v = \partial x$ fin. ω) per quod fi interuallum Y Y′ multiplicetur, orietur elementum areae $Y Y' y y'$, quod ergo erit

$$= \frac{2 \partial x \, fin. \, \omega}{C} \sqrt{[(E + B x)^2 - A C x x - 2 C D x - F C]},$$

cuius ergo integrale, per totam ellipfin extenfum, dabit totam aream ellipfis quam confideramus.

§. 8. Quoniam quadratura ellipfis pendet a quadratura circuli, hoc integrale commodiffime inueniemus, fi rem ad circulum referamus. Confideremus igitur circulum, cuius radius fit $a r = r$, ideoque eius area $= \pi r r$, in quo capiatur elementum analogum $Y' y' y Y$, ad quod ex centro a ducatur normalis $a T = t$, eritque $Y Y' = 2 \sqrt{(r r - t t)}$, ideoque elementum areae $Y Y' y' y = 2 \partial t \sqrt{(r r - t t)}$. Hinc difcimus, fi integrale per totam figuram extendatur, fore $\int 2 \partial t \sqrt{(r r - t t)} = \pi r r$, vnde fi vtrinque per n multiplicemus, erit

Tab. I. Fig. 4.

$$\int 2 \partial t \sqrt{(n n r r - n n t t)} = \pi n r r,$$

eodemque modo

$$\int 2 m \partial t \sqrt{(n n r r - n n t t)} = \pi m n r r.$$

§. 9. Quo nunc hanc formam ad noftrum inftitutum accommodemus, fumamus $t = x + f$, eritque

$$\int 2 m \partial x \sqrt{[n n r r - n n (x + f)^2]} = \pi m n r r,$$

hincque

$$\int 2 m \partial x \, \text{fin.} \, \omega \sqrt{[n n r r - n n (x + f)^2]} = \pi m n r r \, \text{fin.} \, \omega.$$

Tantum igitur fupereft, vt iftam formulam ad noftrum cafum accommodemus, id quod fiet fumendo $m = \frac{1}{C}$, deinde vero

$n n r r$

$$nnrr = nn(x+f)^2 = (E+Bx)^2 - ACxx - 2CDx - FC,$$

quae aequatio euoluta ita se habebit:

$$nnrr = nnff - 2nnfx - nnxx$$
$$= EE - FC + 2(BE - CD)x + (BB - AC)xx,$$

Hinc patet esse debere 1°.) $nn = AC - BB$, ideoque $n = \sqrt{(AC - BB)}$, 2°.) esse debet $nnf = CD - BE$, ideoque $f = \frac{CD - BE}{AC - BB}$; 3°.) vero necesse est vt fiat

$$rr = ff + \frac{EE - FC}{nn},$$

vbi si valores inuentos substituamus, prodibit:

$$rr = \frac{(CD - BE)^2}{(AC - BB)^2} + \frac{EE - FC}{AC - BB},$$

siue

$$rr = \frac{CCDD - 2BCDE + ACEE}{(AC - BB)^2} - \frac{CF}{AC - BB}.$$

His valoribus inuentis area tota nostrae ellipsis debet esse $= \pi mnrr \sin.\omega$, vnde facta substitutione obtinebitur sequens expressio:

$$\pi \frac{(CDD - 2BDE + AEE)\sin.\omega}{(AC - BB)^{\frac{3}{2}}} - \frac{\pi F \sin.\omega}{\sqrt{(AC - BB)}},$$

quae area etiam hoc modo exhiberi potest:

$$\pi \sin.\omega \left(\frac{CDD + AEE - 2BDE}{(AC - BB)^{\frac{3}{2}}} - \frac{F}{\sqrt{(AC - BB)}}\right).$$

Haec expressio ideo maxime est notatu digna, quod eius ope omnium ellipsium areae totae satis expedite assignari possunt ex sola aequatione inter coordinatas, siue eae sint rectangulae siue obliquangulae. Ita si habeatur aequatio notissima pro ellipsi: $ffxx + ggyy = ffgg$, inter coordinatas

natas rectangulas, erit primo fin. $\omega = 1$; tum vero $A = ff$; $B = 0$; $C = gg$; $D = 0$; $E = 0$; $F = -ffgg$, vnde tota area huius ellipfis per regulam noftram erit $= \pi f g$.

§. 10. Quoniam igitur hoc modo omnium ellipfium per data quatuor puncta A, B, C, D, tranfeuntium areae innotefcunt, tantum fupereft, vt inter omnes has areas minima inueftigetur. Quare cum praeter litteram B reliquae omnes per quatuor data puncta fint determinatae, fiquidem inuenimus effe $A = cd$; $C = ab$; $2D = -cd(a+b)$; $2E = -ab(c+d)$ et $F = abcd$: quaeftio huc redit, vt quaeratur valor litterae B, qui formulam modo inuentam reddat omnium minimam, fiue vt, pofito breuitatis gratia $CDD + AEE = \Delta$, haec formula:

$$\frac{\Delta - 2BDE}{(AC - BB)^{\frac{3}{2}}} - \frac{F}{\sqrt{(AC - BB)}},$$

minima efficiatur.

§. 11. Tractetur ergo littera B tanquam variabilis, huiusque expreffionis differentiale nihilo aequale ftatuatur, vnde nafcetur fequens aequatio:

$$\frac{2DE}{(AC - BB)^{\frac{3}{2}}} - \frac{BF}{(AC - BB)^{\frac{3}{2}}} + \frac{3B(\Delta - 2BDE)}{(AC - BB)^{\frac{5}{2}}} = 0,$$

quae ducta in $(AC - BB)^{\frac{5}{2}}$ producet hanc aequationem:

$$\left.\begin{array}{l} -2ACDE + 3CDDB - 4DEBB + FB^3 \\ \qquad\qquad\quad + 3AEEB \\ \qquad\qquad\quad - ACFB \end{array}\right\} = 0.$$

§. 12. Ecce ergo tota ſolutio problematis propoſiti perducta eſt ad reſolutionem aequationis cubicae, quae cum ſemper habeat radicem realem, certum eſt, quomodocunque quatuor puncta fuerint diſpoſita, ſemper vnam ellipſin aſſignari poſſe per quatuor illa puncta tranſeuntem, cuius area omnium ſit minima, pro qua aequatio inter coordinatas x et y exhiberi poterit, ſi modo loco B radix ex illa aequatione cubica oriunda ſubſtituatur. Quodſi forte eueniat vt aequatio illa cubica tres admittat radices reales, totidem quoque ſolutiones locum habebunt, quarum autem indolem aliis perſcrutandam relinquo.

APPLICATIO

huius ſolutionis ad caſum, quo ellipſis minima dato parallelogrammo circumſcribenda quaeritur.

§. 13. Cum hic latera oppoſita ſint inter ſe parallela, neutrum eorum pro axe accipi conuenit; quamobrem alteram diagonalem pro axe ſumamus, alteri vero applicatas parallelas ſtatuamus. Sit igitur ADBC parallelogrammum propoſitum, cuius diagonales AB et CD ſe mutuo in O interſecent, vocenturque $AO = BO = a$ et $CO = OD = c$, angulus vero $AOC = \theta$. Quibus poſitis ponatur abſciſſa quaecunque, ſuper diagonali AB a puncto O ſumta, $OX = x$, eique applicata reſpondens, alteri diagonali CD parallela, $XY = y$, ſitque aequatio relationem inter x et y exprimens: Tab. I. Fig. 5.

$$Axx + 2Bxy + Cyy + 2Dx + 2Ey + F = 0,$$

atque ſupra §. 9. vidimus aream ellipſis eſſe

 π ſin. θ

$$\pi \,\text{fin.}\, \theta \left(\frac{CDD + AEE - 2BDE}{(AC - BB)^{\frac{3}{2}}} - \frac{F}{\sqrt{(AC - BB)}} \right).$$

§. 14. Accommodemus igitur istam aequationem generalem ad casum propositum, ac primo quidem manifestum est, applicatam y euanescere debere in punctis A et B, pro quibus fit $x = + a$ et $x = - a$, vnde oriuntur hae duae aequationes:

$$A\,a\,a + 2\,D\,a + F = 0 \text{ et}$$
$$A\,a\,a - 2\,D\,a + F = 0,$$

vnde sequitur esse $F = - A\,a\,a$ et $D = 0$. Deinde posito $x = 0$, fieri debet tam $y = + c$ quam $y = - c$, vnde oriuntur hac duae aequationes:

$$C\,c\,c + 2\,E\,c + F = 0 \text{ et}$$
$$C\,c\,c - 2\,E\,c + F = 0,$$

hincque fit $F = - C\,c\,c$ et $E = 0$. Cum igitur esse debeat $A\,a\,a = C\,c\,c$, sumi conueniet $A = c\,c$ et $C = a\,a$, ita vt sit $F = - a\,a\,c\,c$, ideoque aequatio pro curua nostra erit.

$$c\,c\,x\,x + 2\,B\,x\,y + a\,a\,y\,y - a\,a\,c\,c = 0.$$

§. 15. Hinc ergo area istius ellipsis hoc modo exprimetur: $\frac{\pi\,a\,a\,c\,c\,\text{fin.}\,\theta}{\sqrt{(a\,a\,c\,c - BB)}}$, quae omnium fit minima sumto $B = 0$. Sit igitur $B = 0$, atque pro ellipsi omnium minima habebimus hanc aequationem:

$$c\,c\,x\,x + a\,a\,y\,y - a\,a\,c\,c = 0,$$

cuius area erit $= \pi\,a\,c\,\text{fin.}\,\theta$. Vbi notetur aream huius parallelogrammi esse $= 2\,a\,c\,\text{fin.}\,\theta$, ita vt area ellipsis se habeat ad aream parallelogrammi vt π ad 2.

§. 16.

§. 16. Apparet ergo huius ellipsis centrum cadere in ipsum punctum O, atque ambas diagonales AB et CD fore diametros coniungatos, sub angulo obliquitatis eius $AOC = \theta$ inuicem inclinatos; ex quo sequitur tangentes in punctis A et B diametro CD esse parallelas, tangentes vero in punctis C et D parallelas diametro AB, vnde haec curua facile describitur. Quodsi angulus θ fuerit rectus, parallelogrammum abit in rhombum, cuius diagonales AB et CD erunt axes principales ellipsis.

§. 17. Sin autem ambae diagonales AB et CD fuerint inter se aequales, manente angulo θ obliquo, parallelogrammum nostrum abit in rectangulum; huncque casum iam olim sum contemplatus, ellipsinque minimam determinaui tali rectangulo circumscribendam, quae solutio quoque cum praesenti egregie conuenit.

§. 18. Videamus nunc etiam quomodo axes principales ellipsis inuentae in genere definiri oporteat. Positis ergo coordinatis $OX = x$ et $XY = y$, existente angulo $AXY = \theta$, inuenimus hanc aequationem: Tab. II. Fig. 1.

$$ccxx + aayy - aacc = 0.$$

Ponamus nunc OF esse semiaxem principalem huius ellipsis, inclinatum ad rectam OA sub angulo $AOF = \Phi$, et referamus punctum ellipsis Y ad istum axem OF, per coordinatas orthogonales $Ox = X$ et $xY = Y$. Quem in finem ex x ducamus prioribus coordinatis parallelas xu et xt, atque in triangulo Oxt erit angulus $Oxt = \theta - \Phi$; in triangulo vero xuY, ob angulum $Oxu = \Phi$, erit angulus $uxY = 90^\circ - \Phi$, et angulus xYu complementum anguli $\theta - \Phi$, tum vero angulus $xuY = \theta$.

 §. 19.

§. 19. Iam reſolutio horum triangulorum praebet:

$$O\,t = \frac{X\,\text{ſin.}\,(\theta - \Phi)}{\text{ſin.}\,\theta} \text{ et } t\,x = \frac{\text{ſin.}\,\Phi}{\text{ſin.}\,\theta};$$

porro vero

$$x\,u = \frac{Y\,\text{coſ.}\,(\theta - \Phi)}{\text{ſin.}\,\theta} \text{ et } Y\,u = \frac{Y\,\text{coſ.}\,\Phi}{\text{ſin.}\,\theta},$$

vnde per X et Y priores coordinatae x et y ita determinantur, vt ſit

$$x = \frac{X\,\text{ſin.}\,(\theta - \Phi) - Y\,\text{coſ.}\,(\theta - \Phi)}{\text{ſin.}\,\theta} \text{ et } y = \frac{X\,\text{ſin.}\,\Phi + Y\,\text{coſ.}\,\Phi}{\text{ſin.}\,\theta},$$

qui valores in aequatione:

$$c\,c\,x\,x + a\,a\,y\,y = a\,a\,c\,c,$$

ſubſtituti producunt inter X et Y hanc aequationem:

$$\left.\begin{array}{l} c\,c\,X\,X\,\text{ſin.}\,(\theta-\Phi)^2 - 2\,c\,c\,X\,Y\,\text{ſin.}\,(\theta-\Phi)\,\text{coſ.}\,(\theta-\Phi) \\ \qquad\qquad + c\,c\,Y\,Y\,\text{coſ.}\,(\theta-\Phi)^2 \\ + a\,a\,X\,X\,\text{ſin.}\,\Phi^2 - 2\,a\,a\,X\,Y\,\text{ſin.}\,\Phi\,\text{coſ.}\,\Phi \\ \qquad\qquad + a\,a\,Y\,Y\,\text{coſ.}\,\Phi^2 \end{array}\right\} = a\,a\,c\,c\,\text{ſin.}\,\theta^2.$$

In hac igitur aequatione, quia ad axem principalem refertur, ante omnia termini continentes X Y ſe mutuo deſtruere debent, vnde ſit

$$c\,c\,\text{ſin.}\,(\theta - \Phi)\,\text{coſ.}\,(\theta - \Phi) = a\,a\,\text{ſin.}\,\Phi\,\text{coſ.}\,\Phi,$$

ex qua aequatione angulum Φ eruere licet. Cum enim ſit

$$a\,a\,\text{ſin.}\,2\,\Phi = c\,c\,\text{ſin.}\,(2\,\theta - 2\,\Phi) = c\,c\,\text{ſin.}\,2\,\theta\,\text{coſ.}\,2\,\Phi - c\,c\,\text{coſ.}\,2\,\theta\,\text{ſin.}\,2\,\Phi,$$

per ſin. $2\,\Phi$ diuidendo habebimus:

$$a\,a = c\,c\,\text{ſin.}\,2\,\theta\,\text{coſ.}\,2\,\Phi - c\,c\,\text{coſ.}\,2\,\theta,$$

hincque fiet

$$\text{coſ.}\,2\,\Phi\,\frac{a\,a + c\,c\,\text{coſ.}\,2\,\theta}{c\,c\,\text{ſin.}\,2\,\theta},$$

vnde duplex valor pro angulo Φ elicitur, pro vtriusque axis principalis poſitione.

§. 20.

§. 20. Sublato iam termino X Y aequatio nostra erit

$$\left.\begin{array}{l} XX[cc \sin.(\theta-\Phi)^2 + aa \sin.\Phi^2] \\ + YY[cc \cos.(\theta-\Phi)^2 + aa \cos.\Phi^2] \end{array}\right\} = aacc \sin.\theta^2,$$

vnde ambo semiaxes principales, qui sint f et g, sequenti modo definientur:

$$ff = \frac{aacc \sin.\theta^2}{cc \sin.(\theta-\Phi)^2 + aa \sin.\Phi^2} \text{ et } gg = \frac{aacc \sin.\theta^2}{cc \cos.(\theta-\Phi)^2 + aa \cos.\Phi^2},$$

sicque erit

$$\frac{aacc \sin.\theta^2}{ff} = cc \sin.(\theta-\Phi)^2 + aa \sin.\Phi^2 \text{ et}$$

$$\frac{aacc \sin.\theta^2}{gg} = cc \cos.(\theta-\Phi)^2 + aa \cos.\Phi^2,$$

vnde ob iam inuentum angulum Φ ambo semiaxes principales f et g determinari poterunt.

§. 21. Si duae postremae aequalitates addantur, orietur ista aequatio:

$$\frac{aacc \sin.\theta^2 (ff+gg)}{ffgg} = cc + aa, \text{ siue}$$

$$\frac{ff+gg}{ffgg} = \frac{aa+cc}{aacc \sin.\theta^2}.$$

Deinde vero si in prioris aequationis

$$\frac{aacc \sin.\theta^2}{ff} = cc \sin.(\theta-\Phi)^2 + aa \sin.\Phi^2,$$

membro dextro loco cc scribatur valor $\frac{aa \sin.\Phi \cos.\Phi}{\sin.(\theta-\Phi) \cos.\theta-\Phi)}$, prodibit haec aequatio:

$$\frac{cc \sin.\theta^2}{ff} = \frac{\sin.\Phi \cos.\Phi \sin.(\theta-\Phi)}{\cos.(\theta-\Phi)} + \sin.\Phi^2$$

$$= \frac{\sin.\Phi[\cos.\Phi \sin.(\theta-\Phi) + \sin.\Phi \cos.(\theta-\Phi)]}{\cos.(\theta-\Phi)} = \frac{\sin.\Phi \sin.\theta}{\cos.(\theta-\Phi)},$$

sicque erit $\frac{cc \sin.\theta}{ff} = \frac{\sin.\Phi}{\cos.(\theta-\Phi)}$. Tum vero si in alterius aequationis

$$\frac{aacc \sin.\theta^2}{gg} = cc \cos.(\theta-\Phi) + aa \cos.\Phi^2.$$

mem-

membro dextro loco $a\,a$ ſcribatur valor $\frac{c\,c\,\mathit{ſin.}(\theta-\Phi)\,\mathit{coſ.}(\theta-\Phi)}{\mathit{ſin.}\,\Phi\,\mathit{coſ.}\,\Phi}$, prodibit haec aequatio:

$$\frac{a\,a\,\mathit{ſin.}\,\theta^2}{g\,g} = \text{coſ.}\,(\theta-\Phi)^2 + \frac{\mathit{ſin.}\,(\theta-\Phi)\,\mathit{coſ.}\,(\theta-\Phi)\,\mathit{coſ.}\,\Phi}{\mathit{ſin.}\,\Phi}$$

$$= \frac{\mathit{coſ.}(\theta-\Phi)}{\mathit{ſin.}\,\Phi}[\text{ſin.}\Phi\,\text{coſ.}(\theta-\Phi)+\text{coſ.}\Phi\,\text{ſin.}(\theta-\Phi)] = \frac{\mathit{ſin.}\,\theta\,\mathit{coſ.}\,(\theta-\Phi)}{\mathit{ſin.}\,\Phi}.$$

vnde fit $\frac{a\,a\,\mathit{ſin.}\,\theta}{g\,g} = \frac{\mathit{coſ.}\,(\theta-\Phi)}{\mathit{ſin.}\,\Phi}$.

§. 22. Nunc binae poſtremae aequalitates in ſe inuicem ductae dabunt $\frac{a\,a\,c\,c\,\mathit{ſin.}\,\theta^2}{f\,f\,g\,g} = 1$, ideoque

$$f\,f\,g\,g = a\,a\,c\,c\,\text{ſin.}\,\theta^2,$$

conſequenter $f\,g = a\,c\,\text{ſin.}\,\theta$, in qua aequatione continetur inſignis illa proprietas, qua parallelogrammum circa binos diametros coniugatos deſcriptum aequale perhibetur parallelogrammo circa axes principales deſcripto. Cum deinde ſupra inuenerimus $\frac{f\,f+g\,g}{f\,f\,g\,g} = \frac{a\,a+c\,c}{a\,a\,c\,c\,\mathit{ſin.}\,\theta^2}$, quoniam modo vidimus eſſe $a\,a+c\,c\,\text{ſin.}\,\theta^2 = f\,f\,g\,g$, hinc reſultat altera principalis proprietas, qua eſt $a\,a+c\,c = f\,f+g\,g$, ſcilicet in omni ellipſi ſummae quadratorum duorum diametrorum ſemper aequales ſunt ſummae quadratorum axium principalium.

§. 23. Applicemus haec ad caſum rectangulorum iam dudum tractatum, pro quo eſt $c = a$, atque pro ſitu axium principalium nunc habebitur iſta aequatio:

$$\text{coſ.}\,2\,\Phi = \frac{1+\mathit{coſ.}\,2\,\theta}{\mathit{ſin.}\,2\,\theta},$$

vnde colligitur

$$\text{coſ.}\,2\,\Phi = \frac{1+\mathit{coſ.}\,2\,\theta}{\sqrt{2\,(1+\mathit{coſ.}\,2\,\theta)}} = \sqrt{\frac{1+\mathit{coſ.}\,2\,\theta}{2}}.$$

Conſtat autem eſſe

$$\sqrt{\frac{1+\mathit{coſ.}\,2\,\theta}{2}} = \pm\,\text{coſ.}\,\theta,$$

vnde

vnde fit vel $2\Phi = \theta$, ideoque $\Phi = \frac{1}{2}\theta$; vel $2\Phi = \pi + \theta$, ideoque $\Phi = 90^\circ + \frac{1}{2}\theta$. Hinc igitur patet alterum axem principalem OF angulum $AOC = \theta$ bisecare, alterumque OG, huic normalem, angulum BOC bisecare. Deinde vero erit Tab. II. Fig. 2.

$$fg = a\,a\,\text{fin.}\,\theta \text{ et } ff + gg = 2\,a\,a,$$

vnde colligimus:

$$(f+g)^2 = 2\,a\,a\,(1 + \text{fin.}\,\theta) = 4\,a\,a\,\text{cof.}\,(45^\circ - \tfrac{1}{2}\theta)^2,$$

ideoque erit

$$f + g = 2\,a\,\text{cof.}\,(45^\circ - \tfrac{1}{2}\theta).$$

Simili modo habebitur:

$$(f-g)^2 = 2\,a\,a\,(1 - \text{fin.}\,\theta) = 4\,a\,a\,\text{fin.}\,(45^\circ - \tfrac{1}{2}\theta)^2,$$

consequenter

$$f - g = 2\,a\,\text{fin.}\,(45^\circ - \tfrac{1}{2}\theta),$$

quocirca habebimus

$$f = a\,[\text{cof.}\,(45^\circ - \tfrac{1}{2}\theta) + \text{fin.}\,(45^\circ - \tfrac{1}{2}\theta)] = a\,\text{cof.}\,\tfrac{1}{2}\theta . \sqrt{2},$$

similique modo

$$g = a\,[\text{cof.}\,(45^\circ - \tfrac{1}{2}\theta) - \text{fin.}\,(45^\circ - \tfrac{1}{2}\theta)] = a\,\text{fin.}\,\tfrac{1}{2}\theta . \sqrt{2},$$

qui valores manifesto satisfaciunt; fit enim

$$fg = a\,a\,\text{fin.}\,\theta \text{ et } ff + gg = 2\,a\,a,$$

haecque solutio perfecte congruit cum ea quam olim dederam.