# SUPPLEMENTUM VI.

## IN FINE SECTIONIS I. TOM. I.

DE

# INTEGRATIONE FORMULARUM DIFFERENTIALIUM.

De formulis integralibus duplicatis. *Novi Commentarii Academiae Scientiar. Petropolitanae Tom. XIV. Pars I. Pag.* 72 — 103.

§. 1. Si corporis cujusque propositi vel soliditatem vel superficiem vel alias hujusmodi quantitates definire velimus, id per duplicem integrationem fieri solet; formula enim differentialis bis integranda tali forma $Z \partial x \partial y$ exprimitur, binas variabiles $x$ et $y$ continente, quarum altera sola in priori integratione ut variabilis spectatur, posterior vero integratio ad alteram jam ut variabilem spectatam instituitur. Hinc quantitas per duplicem istam integrationem resultans duplex signum integrale praefigendo indicari solet hoc modo $\int\int Z \partial x \partial y$, quippe qua duplicatione formula differentialis proposita $Z \partial x \partial y$ bis integrari debere est intelligenda. Hujusmodi igitur expressiones geminato signo summatorio affectas his formulas integrales duplicatas appello, quarum usus cum latissime pateat, in earum indolem hic diligentius inquirere, earumque proprietates et affectiones accuratius evolvere constitui.

§. 2. Primum igitur cum $x$ et $y$ sint duae quantitates variabiles a se invicem non pendentes, Z vero denotet earum functionem quamcunque, formulae integralis duplicatae $\int\int Z\partial x\partial y$ vis ita exponi potest, ut quaerenda sit functio finita binarum istarum variabilium $x$ et $y$, quae ita bis differentiata, ut in altera differentiatione sola $x$ in altera sola $y$ pro variabili habeatur, ad formulam $Z\partial x\partial y$ deducat. Ita si fuerit $Z = a$, evidens fore $\int\int a\partial x\partial y = axy$; generalius vero erit $\int\int a\partial x\partial y = axy + X + Y$, denotante X functionem quamcunque ipsius $x$ et Y ipsius $y$, quandoquidem hae duae quantitates per geminam illam differentiationem ex calculo tolluntur.

§. 3. In genere autem si V fuerit ejusmodi functio ipsarum $x$ et $y$, quae bis differentiata ita ut modo est praeceptum, praebeat $Z\partial x\partial y$; erit quidem utique $V = \int\int Z\partial x\partial y$; verum duplex integratio insuper functiones arbitrarias X et Y, illam ipsius $x$, hanc ipsius $y$ inducit, ut sit generalissime.

$$\int\int Z\partial x\partial y = V + X + Y.$$

Ex quo statim perspicitur, hujusmodi formulas differentiales necessario affectas esse producto $\partial x\partial y$, neque propterea secundum hanc significationem tales formulas $\int\int Z\partial x^2$ vel $\int\int Z\partial y^2$ quicquam significare; siquidem per ipsam rei naturam excluduntur, dum in altera integratione sola $x$, in altera vero sola $y$ ut variabilis tractatur.

§. 4. Constituta sic forma hujusmodi formularum integralium duplicatarum $\int\int Z\partial x\partial y$, ita ut $x$ et $y$ sint duae quantitates variabiles a se invicem non pendentes, et Z functio finita ex iis utcunque composita, haud difficile est duplicem integrationem, quam involvunt, instituere, quod quidem prout primo vel $x$ vel $y$ sola variabilis consideratur, duplici modo fieri potest. Sumta scilicet primo $y$ pro variabili, altera $x$ ut constans tractatur, quaeriturque integrale $\int Z \partial y$, quod erit certa quaedam functio ipsarum $x$ et $y$; qua inventa suscipiatur formula differentialis $\partial x \int Z \partial y$, in qua jam $y$ ut constans solaque $x$ ut variabilis tractetur, ejusque quaeratur integrale $\int \partial x \int Z \partial y$, qui erit valor quaesitus formulae integralis duplicatae propositae $\int\int Z \partial x \partial y$. Si in hac duplici integratione ordo variabilium $x$ et $y$ invertatur, valor quaesitus ita exprimetur $\int \partial y \int Z \partial x$, qui ab illo non discrepabit.

§. 5. Ob hunc consensum fit, ut talis forma $\int\int Z \partial x \partial y$ promiscue sive hoc modo $\int \partial x \int Z \partial y$ sive hoc $\int \partial y \int Z \partial x$ exhiberi possit; utrovis autem utamur, regulae vulgares integrationis sunt observandae, si modo notetur in ea integratione, in qua vel $x$ vel $y$ pro constante sumatur, constantem introductam ejusdem fore functionem quamcunque. Veluti si proponatur haec forma

$$\int\int \frac{\partial x \partial y}{xx+yy} = \int \partial x \int \frac{\partial y}{xx+yy}, \text{ ob}$$

$$\int \frac{\partial y}{xx+yy} = \frac{1}{x} \text{ Arc. tang. } \frac{y}{x} + \frac{\partial X}{\partial x},$$

denotante $\frac{\partial X}{\partial x}$ functionem quamcunque ipsius $x$, erit

$$\int\int \frac{\partial x \partial y}{xx+yy} = \int \frac{\partial x}{x} \text{ Arc. tang. } \frac{y}{x} + X,$$

ubi in integratione adhuc perficienda $y$ pro constante habetur. Simili vero modo reperitur

$$\int\int \frac{\partial x \partial y}{xx+yy} = \int \frac{\partial y}{y} \text{ Arc. tang. } \frac{x}{y} + Y,$$

in qua integratione $x$ constans assumitur, in quo quidem exemplo consensus binorum valorum inventorum non satis est perspicuus.

§. 6. Interim tamen veritas consensus per series facile ostenditur; cum enim sit

$$\text{Arc. tang. } \frac{x}{y} = \frac{\pi}{2} - \text{Arc. tang. } \frac{y}{x},$$

denotante $\frac{\pi}{2}$ angulum rectum, et

$$\text{Arc. tang. } \frac{y}{x} = \frac{y}{x} - \frac{y^3}{3x^3} + \frac{y^5}{5x^5} - \frac{y^7}{7x^7} + \frac{y^9}{9x^9} - \text{etc.}$$

erit

$$\int \frac{\partial x}{x} \text{Arc. tang. } \frac{y}{x} = \frac{-y}{x} + \frac{y^3}{9x^3} - \frac{y^5}{25x^5} + \frac{y^7}{49x^7} - \text{etc.} + \text{f}:y \text{ et}$$

$$\int \frac{\partial y}{y} \text{Arc. tang. } \frac{x}{y} = \frac{\pi}{2}\, ly - \frac{y}{x} + \frac{y^3}{9x^3} - \frac{y^5}{25x^5} + \frac{y^7}{49x^7} - \text{etc.} + \text{f}:x$$

ex quarum utraque oritur

$$\int\int \frac{\partial x \partial y}{xx+yy} = \text{X} + \text{Y} - \frac{y}{x} + \frac{y^3}{9x^3} - \frac{y^5}{25x^5} + \frac{y^7}{49x^7} - \text{etc.}$$

Verum ubi ambae integrationes succedunt, convenientia sponte se offert: quod quidem pluribus exemplis ostendisse superfluum foret, cum ejus ratio ex natura differentialium et integralium perfecte sit demonstrata.

§. 7. Haec igitur tenenda sunt de istiusmodi formulis integralibus duplicatis, quando binae variabiles $x$ et $y$ nullo plane nexu inter se cohaerent, ita ut in altera integratione altera, in altera vero altera constans accipiatur. Verum tales formulae non confundendae sunt cum iis, quibus ut initio dixi, soliditas et superficies corporum quorumcunque exprimi solet. Etsi enim hae formulae etiam duplicem integrationem requirunt, et in priori altera binarum variabilium puta $y$ sola ut variabilis tractatur altera $x$ pro constante assumta, tamen priori integratione peracta, ea per omnes valores ipsius $y$ extendi, sicque tandem loco $y$ extremus valor, quem recipere potest, statui debet, qui plerumque ab $x$ pendet, ita ut hoc valore post primam integrationem loco $y$ constituto in posteriori integratione $y$ tanquam functio quaedam ipsius $x$ ingrediatur, neque propterea pro constanti haberi queat, qua conditione fit, ut altera integratio plurimum immutetur, etsi prior simili modo ut ante absolvatur.

§. 8. Quod discrimen quo clarius perspiciatur, exemplum attulisse juvabit. Quaeratur ergo soliditas sphaerae, cujus centrum sit C et radius C A $= a$, ac primo quidem portio ejus quadranti A C B insistens, cujus elementum est columella Y Z $y$ $z$ areolae Y $y = \partial x \partial y$ insistens, positis C P $= x$, et P Y $= y$, erit ejus altitudo Y Z $= \surd (aa - xx - yy)$; hinc soliditas columellae elementaris $= \partial x \partial y \surd (aa - xx - yy)$, quam bis integrari oportet. Maneat primo intervallum C P $= x$ constans, et integrale $\int \partial y \surd (aa - xx - yy)$ ita sumtum, ut evanescat posito $y = 0$, dabit portiunculam areolae P $p$ Y $q$ insistentem, quae ergo erit

$$= \tfrac{1}{2} y \surd (aa - xx - yy) + \tfrac{1}{2} (aa - xx) \text{ Arc. sin. } \frac{y}{\surd (aa - xx)}.$$

Jam hoc valore in altera integratione uti oportet, sed antequam is inducatur, per totam distantiam P M extendi debet, ut habeatur elementum soliditatis toti areolae P $p$ M $m$ insistens; puncto autem Y ad M usque promoto, fit $y = \surd (aa - xx)$, qui ergo valor loco $y$ substitui debet, ita ut in sequente integratione quantitas $y$ minime ut constans consideretur, haecque tractandi methodus plurimum a praecedente discrepet.

§. 9. Posito ergo $y = \surd (aa - xx)$, fit

$$\int \partial y \surd (aa - xx - yy) = \tfrac{\pi}{4} (aa - xx),$$

cum sit Arc. sin. $1 = \frac{\pi}{2}$; sicque integratio adhuc absolvenda erit

$$\int \partial x \int \partial y \surd (aa - xx - yy) = \tfrac{\pi}{4} \int (aa - xx) \partial x,$$

ubi quidem unica variabilis $x$ inest, sed non ideo, quod jam hic $y$ pro constanti habeatur, sed quia pro $y$ certa quaedam functio ipsius $x$ est substituta. Haec altera vero integratio ita instituta, ut evanescat posito $x = 0$, dabit soliditatem portionis sphaerae, quae areae C B M P insistit, quae idcirco erit $= \frac{\pi}{4} (aax - \frac{1}{3} x^3)$; unde sphaerae octans seu portio toti quadranti A C B insistens prodibit, punctum P usque in A promovendo, ut fiat $x = a$. Tum ergo soliditas octantis sphaerae erit $= \frac{\pi}{6} a^3$, hincque totius sphaerae $= \frac{4\pi}{3} a^3$, uti constat. Ex quo exemplo intelligitur, talem soliditatis investigationem plurimum differre ab integratione duplicata formularum primo exposita.

§. 10. Quod si non totum octantem sphaerae, sed eam tantum ejus portionem quae areae rectangulari C E D F insistit investigare velimus, prior integratio ut ante instituenda est, sed ea peracta ipsi $y$ valor P M debet tribui, qui quidem est constans, et propterea haec investigatio ad primum genus videtur accedere, verum tamen eo discrepat, quod integrale determinatum prodeat, cum ibi functiones indefinitae X et Y invehe- rentur. Posito ergo ut ante sphaerae radio C A $= a$, sit rectanguli C E F D latus C D $= e$ et C E $= f$: et solidum elementare areolae P $p$ Y $q$ insistens erit ut ante Fig. 4.

$$\tfrac{1}{2} y \surd (aa - xx - yy) + \tfrac{1}{2}(aa - xx) \text{ Arc. sin. } \frac{y}{\surd (aa - xx)},$$

quod usque ad M extensum, ubi fit $y = f$, erit

$$\tfrac{1}{2} f \surd (aa - ff - xx) + \tfrac{1}{2}(aa - xx) \text{ Arc. sin. } \frac{f}{\surd (aa - xx)},$$

unde solidum areae C P E M insistens sequenti integrali exprimetur

$$\tfrac{1}{2} f \int \partial x \surd (aa - ff - xx) + \tfrac{1}{2} \int (aa - xx) \partial x \text{ Arc. sin. } \frac{f}{\surd (aa - xx)},$$

si quidem ita definiatur, ut evanescat posito $x = 0$. Evolvamus ergo seorsim has binas formulas.

§. 11. Ac prima quidem statim praebet

$$\int \partial x \surd (aa - ff - xx) = \tfrac{1}{2} x \surd (aa - ff - xx) + \tfrac{1}{2}(aa - ff) \text{ Arc. sin. } \frac{x}{\surd (aa - ff)},$$

altera autem ob

$$\partial . \text{ Arc. sin. } \frac{f}{\surd (aa - xx)} = \frac{f x \partial x}{(aa - xx) \surd (aa - ff - xx)},$$

ita transformatur

$$\int(aa-xx)\partial x \,\text{Arc.sin.}\frac{f}{\sqrt{(aa-xx)}}=(aax-\tfrac{1}{3}x^3)\text{Arc.sin.}\frac{f}{\sqrt{(aa-xx)}}$$
$$-f\int\frac{(aa-\frac{1}{3}xx)xx\partial x}{(aa-xx)\sqrt{(aa-ff-xx)}},$$

ad quam postremam partem integrandam, notetur esse

$$\text{Arc. sin.}\frac{fx}{\sqrt{(aa-ff)(aa-xx)}}=\int\frac{af\partial x}{(aa-xx)\sqrt{(aa-ff-xx)}},$$

hujus ergo dabitur multiplum quoddam, quod illi formae adjectum praebeat talem formam

$$\int\frac{(aa-\frac{1}{3}xx)xx\partial x}{(aa-xx)\sqrt{(aa-ff-xx)}}+m\,\text{Arc. sin.}\frac{fx}{\sqrt{(aa-ff)(aa-xx)}}$$
$$=\int\frac{(aaxx-\frac{1}{3}x^4+maf)\partial x}{(aa-xx)\sqrt{(aa-ff-xx)}},$$

ut $aaxx-\frac{1}{3}x^4+maf$ fiat per $aa-xx$ divisibile, id quod fit sumendo $m=-\frac{2a^3}{3f}$; hincque erit

$$\int\frac{(aa-\frac{1}{3}xx)xx\partial x}{(aa-xx)\sqrt{(aa-ff-xx)}}=\frac{2a^3}{3f}\text{Arc. sin.}\frac{fx}{\sqrt{(aa-ff)(aa-xx)}}$$
$$-\tfrac{1}{3}\int\frac{(2aa-xx)\partial x}{\sqrt{(aa-ff-xx)}}.$$

§. 12. Cum igitur sit

$$\int\frac{(2aa-xx)\partial x}{\sqrt{(aa-ff-xx)}}=\tfrac{1}{2}(3aa+ff)\text{Arc.sin.}\frac{x}{\sqrt{(aa-ff)}}+\tfrac{1}{2}x\sqrt{(aa-ff-xx)}$$

erit $\displaystyle\int\frac{(aa-\frac{1}{3}xx)xx\partial x}{(aa-xx)\sqrt{(aa-ff-xx)}}=$

$$\frac{2a^3}{3f}\text{Arc. sin.}\frac{fx}{\sqrt{(aa-ff)(aa-xx)}}-\tfrac{1}{6}(3aa+ff)\text{Arc.sin.}\frac{x}{\sqrt{(aa-ff)}}-\tfrac{1}{6}x\sqrt{(aa-ff-xx)}$$

hincque $\int (aa - xx)\partial x \text{ Arc. sin. } \frac{fx}{\sqrt{(aa-xx)}} =$

$$(aax - \tfrac{1}{3}x^3) \text{ Arc. sin. } \frac{f}{\sqrt{(aa-xx)}} - \tfrac{2}{3}a^3 \text{ Arc. sin. } \frac{fx}{\sqrt{(aa-ff)(aa-xx)}}$$
$$+ \tfrac{1}{6}f(3aa+ff) \text{ Arc. sin. } \frac{x}{\sqrt{(aa-ff)}} + \tfrac{1}{6}fx\sqrt{(aa-ff-xx)}.$$

Quare posito $x = CD = e$, erit soliditas portionis sphaerae rectangulo CDEF insistentis

$$\tfrac{1}{4}ef\sqrt{(aa-ee-ff)} + \tfrac{1}{4}f(aa-ff) \text{ Arc. sin } \frac{e}{\sqrt{(aa-ff)}} + \tfrac{1}{6}e(3aa-ee) \times$$
$$\text{Arc. sin. } \frac{f}{\sqrt{(aa-ee)}} - \tfrac{1}{3}a^3 \text{ Arc. sin. } \frac{ef}{\sqrt{(aa-ee)(aa-ff)}} + \tfrac{1}{12}f(3aa-ff) \times$$
$$\text{Arc. sin. } \frac{e}{\sqrt{(aa-ff}} + \tfrac{1}{12}ef\sqrt{(aa-ee-ff)},$$

quae expressio reducitur ad hanc

$$\tfrac{1}{3}ef\sqrt{(aa-ee-ff)} + \tfrac{1}{6}f(3aa-ff) \text{ Arc. sin. } \frac{e}{\sqrt{(aa-ff)}} + \tfrac{1}{6}e(3aa-ee) \times$$
$$\text{Arc. sin. } \frac{f}{\sqrt{(aa-ee)}} - \tfrac{1}{3}a^3 \text{ Arc. sin. } \frac{e}{\sqrt{(aa-ee)(aa-ff)}}.$$

§. 13. Si ergo rectanguli terminus F usque ad peripheriam porrigatur, ut sit $ee + ff = aa$, primum membrum evanescit, et arcus circulares tria reliqua afficientes abeunt in angulum rectum seu $\frac{\pi}{2}$, eritque soliditas

$$\tfrac{\pi}{2}(\tfrac{1}{3}aae + \tfrac{1}{2}aaf - \tfrac{1}{6}e^3 - \tfrac{1}{6}f^3 - \tfrac{1}{3}a^3)$$

seu ob $f = \sqrt{(aa-ee)}$ soliditas erit

$$\tfrac{\pi}{12}[(2aa+ee)\sqrt{(aa-ee)} - 2a^3 + 3aae - e^3]$$

quod solidum fit maximum, si $f = e = \frac{a}{\sqrt{2}}$, fitque id tum $= \frac{\pi a^3(5-2\sqrt{2})}{12\sqrt{2}}$, dum soliditas octantis sphaerae est $= \frac{\pi}{6}a^3$. Ita ut nostrum solidum sit ad octantem sphaerae ut $5 - 2\sqrt{2}$ ad $2\sqrt{2}$. Sin autem punctum F non ad peripheriam quadrantis pertingat, fueritque $f = e$ erit soliditas quaesita

$$= \tfrac{1}{3}ee\sqrt{(aa-2ee)} + \tfrac{1}{3}e(3aa-ee) \text{ Arc. sin. } \frac{e}{\sqrt{(aa-ee)}}$$
$$- \tfrac{1}{3}a^3 \text{ Arc. sin. } \frac{ee}{aa-ee}.$$

Quare si fuerit

$$\text{Arc. sin.} \frac{e}{\sqrt{(aa-ee)}} : \text{Arc. sin.} \frac{ee}{(aa-ee)} = a^3 : e(3aa-ee)$$

solidum algebraice exprimetur.

Fig. 5. §. 14. Quo autem rem generalius complectamur, quaeramus solidum areae cuicunque G Q H R insistens, cujus elementum cum areolae $Yy = \partial x \partial y$ insistat, idque sit

$$= \partial x \partial y \sqrt{(aa - xx - yy)},$$

prima integratio sumto $x$ constante praebet

$$\tfrac{1}{2}\partial x[y\sqrt{(aa-xx-yy)} + (aa-xx)\,\text{Arc. sin.} \frac{y}{\sqrt{(aa-xx)}}].$$

Sint jam ex natura curvae G Q H R distantiae extremae $PQ = q$ et $PR = r$, atque solidum elementare areolae Q R insistens erit

$$\tfrac{1}{2}\partial x \left\{ \begin{array}{l} +r\sqrt{(aa-xx-rr)} + (aa-xx)\,\text{Arc. sin.} \frac{r}{\sqrt{(aa-xx)}} \\ -q\sqrt{(aa-xx-qq)} - (aa-xx)\,\text{Arc. sin.} \frac{q}{\sqrt{(aa-xx)}} \end{array} \right\}.$$

Quare cum $q$ et $r$ possint esse functiones quaecunque ipsius $x$, evidens est quantum absit, quo minus quantitas $y$ in sequente integratione pro constanti habeatur. Sequens autem integratio a valore $x = CE$ usque ad valorem $x = CF$ est extendenda.

Fig 6. §. 15. Si figura basis G Q H R a recta C A trajiciatur, ut quaeratur solidum basi C G H insistens, cujus natura exprimatur aequatione quacunque inter $CP = x$, $PR = r$, erit solidum

$$\tfrac{1}{2}\int \partial x[r\sqrt{(aa-xx-rr)} + (aa-xx)\,\text{Arc. sin.} \frac{r}{\sqrt{(aa-xx)}}]$$

ubi problema non inelegans se offert, *quo figura basis* C G H *quaeritur, ut solidum ei insistens algebraice exprimatur.* Statuatur in hunc finem $r = u\sqrt{(aa-xx)}$, ut solidum indefinitum areae C P R G insistens sit

$$\tfrac{1}{2}\int (aa-xx)\partial x[u\sqrt{(1-uu)} + \text{Arc. sin.}\, u]$$

quae expressio transformatur in hanc

$$\tfrac{1}{2}(aax - \tfrac{1}{3}x^3)[u\sqrt{(1-uu)} + \text{Arc. sin. } u] \\ - \int (aax - \tfrac{1}{3}x^3)\,\partial u \sqrt{(1-uu)}.$$

Fiat jam

$$\int (aax - \tfrac{1}{2}x^3)\,\partial u \sqrt{(1-uu)} = n a^3 \text{ Arc. sin. } u + a^3 \mathrm{U},$$

existente U functione algebraica ipsius $u$, et cum sit soliditas

$$\tfrac{1}{2}(aax - \tfrac{1}{3}x^3) u \sqrt{(1-uu)} - a^3 \mathrm{U} + (\tfrac{1}{2}aax - \tfrac{1}{6}x^3 - n a^3)\text{ Arc. sin. } u,$$

ea erit algebraica casu $-x^3 + 3aax = 6na^3$: dummodo $u$ evanescat posito $x = 0$, tum enim soliditas erit

$$= n a^3 u \sqrt{(1-uu)} - a^3 \mathrm{U}.$$

§. 16. Ponamus $\partial \mathrm{U} = \mathrm{U}' \partial u$, ac prodibit haec inter $x$ et $u$ aequatio

$$aax - \tfrac{1}{3}x^3 = \frac{na^3}{1-uu} + \frac{a^3 \mathrm{U}'}{\sqrt{(1-uu)}}.$$

Fingatur

$$\mathrm{U} = m u \sqrt{(1-uu)}, \text{ erit } \mathrm{U}' = \frac{m - 2muu}{\sqrt{(1-uu)}},$$

et ut $u$ evanescat posito $x = 0$, debet esse $m = -n$, ut fiat

$$aax - \tfrac{1}{3}x^3 = \frac{2na^3uu}{1-uu}, \text{ seu } u = \sqrt{\frac{3aax - x^3}{6na^3 + 3aax - x^3}},$$

hincque

$$r = \sqrt{\frac{(aa - xx)(3aax - x^3)}{6na^3 + 3aax - x^3}}.$$

Jam ob

$$u\sqrt{(1-uu)} = \frac{\sqrt{6na^3(3aax - x^3)}}{6na^3 + 3aax - x^3},$$

fit soliditas illa

$$= \frac{2na^3\sqrt{6na^3(3aax - x^3)}}{6na^3 + 3aax - x^3}.$$

Si haec soliditas locum habere debeat, facto $x = a$, fit $n = \tfrac{1}{3}$,

$$r = \sqrt{\frac{(aa - xx)(3aax - x^3)}{2a^3 + 3aax - x^3}} = \sqrt{\frac{x(a-x)(3aa - xx)}{(a+x)2a - x)}},$$

ac posito $x = a$, erit soliditas $= {}^{1} a^3$, et curva pro basi inventa est linea quarti ordinis.

§. 17. Quae hic de soliditate portionis sphaericae datae basi insistentis sunt tradita, simili calculo ad quaevis alia corpora accommodari possunt, cum tantum in formula $Z \partial x \partial y$ quantitas Z alio modo per $x$ et $y$ determinetur, dum hic erat $Z = \sqrt{(aa - xx - yy)}$. Quin etiam si superficies corporis cujuscunque datae basi imminens definiri debeat, id integratione gemina similis formulae differentialis $Z \partial x \partial y$ eodem modo expedietur: ita si corpus sit sphaera, elementum superficiei areolae elementari basis $\partial x \partial y$ imminentis est $\frac{a \partial x \partial y}{\sqrt{(aa - xx - yy)}}$ ita ut sit $Z = \frac{a}{\sqrt{(aa - xx - yy)}}$, cujus gemina integratio pari modo pro ratione basis, cui imminens portio superficiei quaeritur, est instituenda. Atque in genere quantitates quaecunque aliae cujusvis corporis, quae certae basi respondeant, ope similium operationum determinabuntur.

§. 18. Quaecunque ergo Z fuerit functio ipsarum $x$ et $y$, pro integrali duplicato $\int\int Z \partial x \partial y$ primo quaeritur integrale $\int Z \partial y$, quantitate $x$ ut constante spectata, idque extendatur per totam quantitatem $y$, sicque extremi valores ipsius $y$ in computum ingredientur, quae erunt functiones ipsius $x$, ex basis figura cognitae: sicque pro $\int Z \partial y$ orietur functio ipsius $x$, quae in $\partial x$ ducta denuo more solito debet integrari. Idem tenendum est, si ordine inverso primo formula $\int Z \partial x$ integretur, spectato y ut constante, quod integrale dum per totum intervallum $x$ extenditur, extremi valores ipsius $x$ eidem $y$ respondentes, qui erunt functiones ipsius $y$, invehentur, sicque $\int Z \partial x$ abibit in functionem ipsius $y$ tantum, quae per $\partial y$ multiplicata denuo ita integrari debet, ut integrale per totum intervallum $y$ extendatur. Utroque scilicet modo integratio per totam basin est extendenda, eademque praecepta sunt observanda, qualiscunque Z fuerit functio ipsarum $x$ et $y$.

§. 19. Basi ergo data, determinatio integrationum perinde se habet, ac si quantitas Z esset constans, quaereretürque tantum integrale $\int\int \partial x \partial y$, quo area basis exprimitur. Quare ad praecepta, quae in determinatione horum integralium observari oportet, stabilienda, sufficiet posuisse $Z = 1$, ut integrale duplicatum $\int\int \partial x \partial y$ definiendum sit, sive autem sumatur $x$ sive $y$, extremi valores utriusque determinabuntur per aequationem basis figuram exprimentem. Scilicet priori integratione peracta, ubi punctum Y ubicunque intra terminos extremos erat assumtum; tum hoc punctum in peripheriam basis transferatur, quo pacto $x$ et $y$ fient coordinatae basis, inter quas aequatio datur, ex qua deinceps sive $y$ per $x$ sive $x$ per $y$ determinabitur. Fig. 7.

§. 20. Quae quo clarius perspiciantur, sumamus basis figuram esse circulum centrum in G et radium G Q habentem, ponamusque $CF = f$, $FG = g$, et $GQ = c$, erit puncto Y in peripheriam hujus circuli translato

$$cc = (f - x)^2 + (g - y)^2.$$

Jam ad aream hujus circuli investigandam sit primo $x$ constans, eritque $\int \partial y = y + C$, et quia $y$ habet geminum valorem in nostra basi

$$y = g \pm \sqrt{[cc - (f - x)^2]},$$

haec integratio ita determinetur, ut integrale evanescat, dum ipsi $y$ minor horum valorum $g - \sqrt{[cc - (f - x)^2]}$ tribuitur, ita ut sit

$$\int \partial y = y - g + \sqrt{[cc - (f - x)^2]}.$$

Nunc ergo $y$ usque ad alterum terminum

$$y = g + \sqrt{[cc - (f - x)^2]}$$

extenso erit

$$\int \partial y = 2\sqrt{[cc - (f - x)^2]},$$

quod jam per $\partial x$ multiplicatum et integratum praebet

$$\int \partial x \int \partial y = \mathrm{C} - (f - x)\sqrt{[cc - (f - x)^2]} - cc \text{ Arc. sin. } \frac{f - x}{c},$$

quod ut evanescat posito

$$x = f - c, \text{ fit } \mathrm{C} = cc \text{ Arc. sit. } 1 = \tfrac{\pi}{2} cc.$$

Porro statuatur $x = f + c$, et ob

$$cc \text{ Arc. sin. } \frac{f - x}{c} = - cc \text{ A sin. } 1 = - \tfrac{\pi}{2} cc,$$

erit area quaesita tota $= \frac{\pi}{2} cc + \frac{\pi}{2} cc = \pi cc$, uti constat.

§. 21. Si has determinationes accuratius perpendamus, videmus extremos valores ipsius $x$ ita esse comparatos, ut alter sit maximus, siquidem basis tota quadam curva in se redeunte terminetur. Hi ergo ambo valores reperientur, si aequatio naturam basis exprimens differentietur, et $\partial x = 0$ ponatur. Quando autem basis non una quadam linea curva terminatur, sed portione quapiam veluti C G H continetur, cujus basis C H sit maxima, tum minor terminus ipsius $x$ manifesto est $= 0$, major autem ipsi C H aequalis: eodemque casu termini applicatae P R abscissae C P $= x$ respondentis sunt alter $= 0$, alter vero $=$ P R. Quacunque ergo basi proposita, ejus figura ante probe est examinanda, ipsiusque termini quaquaversus explorandi, quam investigatio areae vel cujusvis alius formulae integralis duplicatae suscipi queat: definitis autem terminis quibus area continetur, inde determinationes integrationum sunt petendae.

Fig. 5.

§. 22. His de integrationum determinatione expositis, insignes maximeque notatu dignae affectiones hujusmodi formularum integralium duplicatarum perpendi merentur, quae in earum transformatione occurrunt. Scilicet quemadmodum coordinatae ejusdem curvae infinitis modis sumi possunt, ita hic loco binarum variabilium $x$ et $y$, binae quaecunque aliae variabiles in computum introduci possunt, sive eae pariter sint coordinatae, sive aliae quantitates utcunque definitae. Ita talis transformatio in genere ita concipi potest, ut loco $x$ et $y$ functiones quaecunque aliarum duarum variabilium $t$ et $v$ substituantur, hisque in aequationem pro basi datam introductis, simili modo limites harum quantitatum $t$ et $v$ quibus figura basis terminatur, definiri poterunt. Utcunque autem hae substitutiones sumantur, tandem post duplicem integrationem semper eadem quantitas resultet, necesse est.

§. 23. Si loco $x$ et $y$ aliae quaecunque binae coordinatae orthogonales introducantur puta $t$ et $v$, quod fit in genere ponendo

$$x = f + mt + v\surd(1 - mm) \text{ et}$$
$$y = g + t\surd(1 - mm) - mv,$$

manifestum est, elementum areae basis, quod ante erat $\partial x \partial y$, nunc per $\partial t \partial v$ exprimitur debere. Cum autem inde sit

$$\partial x = m\partial t + \partial v\surd(1 - mm) \text{ et}$$
$$\partial y = \partial t\surd(1 - mm) - m\partial v,$$

minime patet, quomodo loco $\partial x \partial y$ per has substitutiones oriri possit $\partial t \partial v$; dum potius prodiret

$$\partial x \partial y = m\partial t^2\surd(1 - mm) + (1 - 2mm)\partial t\partial v$$
$$- m\partial v^2\surd(1 - mm),$$

quae autem formula, utcunque ad geminam integrationem adaptatur, semper in maximos errores inducet. Multo minus ergo hinc colligere licet, si loco $x$ et $y$ aliae functiones ipsarum $t$ et $v$ substituantur, cujusmodi expressio loco $\partial x \partial y$ adhiberi debeat.

§. 24. Ac primo quidem observo nullam hic esse rationem, cur expressio loco $\partial x \partial y$ in calculum introducenda ei aequalis esse debeat; quod tum demum necesse esset, si binae integrationes eodem modo ut ante secundum binas variabiles instituerentur. Cum autem nunc aliae variabiles $t$ et $v$ adsint, atque altera integratio per variabilitatem ipsius $t$, altera ipsius $v$, sit administranda, quae operationes a praecedentibus plurimum differunt; formula jam loco $\partial x \partial y$ introducenda non ex aequalitate aestimari, sed potius ad scopum, qui est propositus, accommodari debet. Et quoniam jam binas integrationes secundum binas variabiles $t$ et $v$ distingui oportet, manifestum est formulam loco $\partial x \partial y$ adhibendam necessario producto $\partial t \partial v$ affectam esse, et hujusmodi formam $Z \partial t \partial v$ habere debere.

§. 25. Quo haec certius expediantur, maneat primo $x$, et loco $y$ introducatur alia variabilis $u$, ita ut sit $y$ functio quaecunque ipsarum $x$ et $u$, et $\partial y = P \partial x + Q \partial u$. Si jam in priori integratione $x$ constans sumatur, erit utique $\partial y = Q \partial u$, hinc $\int\int \partial x \partial y = \int \partial x \int Q \partial u$, ita ut nunc loco formulae $\partial x \partial y$ habeatur $Q \partial x \partial u$, cujus integrale duplicatum proinde etiam hoc modo exprimi poterit $\int \partial u \int Q \partial x$, ubi in priori integratione $\int Q \partial x$ quantitas $u$ sumitur pro constante. Quodsi nunc simili modo $u$ retineatur et loco $x$ introducatur functio quaecunque ipsarum $t$ et $u$, ut sit $\partial x = R \partial t + S \partial u$, in tractatione formulae $\int \partial u \int Q \partial x$ prior integratio $\int Q \partial x$, in qua $u$ constans statuitur, abibit in hanc $\int Q R \partial t$; ita ut integrale duplicatum sit $\int \partial u \int Q R \partial t$, seu promiscue $\int\int Q P \partial t \partial u$; unde manifestum est ob has ambas substitutiones loco formulae $\partial x \partial y$ hanc $Q R \partial t \partial u$ tractari debere.

§. 26. Introducamus nunc statim loco $x$ et $y$ has duas novas variabiles $t$ et $u$, per quas illae ita determinentur, ut sit

$$\partial x = R \partial t + S \partial u \text{ et } \partial y = T \partial t + V \partial u,$$

unde valore ipsius $\partial x$ in forma $\partial y = P \partial x + Q \partial u$ substituto, fit $\partial y = P R \partial t + (P S + Q) \partial u$, ita ut sit $P R = T$ et $P S + Q = V$, unde fit $P = \frac{T}{R}$ et $\frac{S T}{R} + Q = V$, sicque $Q R = V R - S T$. Quare vi harum substitutionum loco $\partial x \partial y$ uti debemus formula $(V R - S T) \partial t \partial u$, quae bis integrata justis abhibitis determinationibus, aeque aream totius basis praebere debet, atque ipsa formula $\partial x \partial y$ bis integrata. Quod autem hic pro formula areae baseos $\int\int \partial x \partial y$ est ostensum, locum habet pro quacunque alia formula $\int\int Z \partial x \partial y$, quippe quae per easdem substitutiones transformatur in hanc $\int\int Z (V R - S T) \partial t \partial u$, dummodo in $Z$ loco $x$ et $y$ assumti valores substituantur. Pari enim modo binas integrationes ex figura basis determinari oportet.

§. 27 Quod si ergo ponatur

$$\partial x = R \partial t + S \partial u \text{ et } \partial y = T \partial t + V \partial u,$$

loco $\partial x \partial y$ consequimur $(R V - S T) \partial t \partial u$, quae formula plurimum differt ab ea, cui productum $\partial x \partial y$ revera est aequale; etiamsi enim termini per $\partial t^2$ et $\partial u^2$ affecti, utpote ad duplicem integrationem inepti, rejiciantur tamen quod restat $(R V + S T) \partial t \partial u$ ratione signi a vera formula discrepat. Verum hic non leve dubium exoritur quod cum coordinatae $x$ et $y$ pari passu ambulent, nostra formula potius differentiam $R V - S T$ quam inversam S T — R V complectatur: quod dubium eo magis augetur, quod si superius ratiocinium respectu $x$ et $y$ invertissemus eaedem substitutiones nos revera ad formulam $(ST - RV) \partial t \partial u$ perduxissent. Sed quia totum discrimen tantum in signo versatur, alteraque formula alterius est negativa, hinc determinatio absoluta areae basis, quippe cujus quantitas absoluta quaeritur, nullam mutationem realem patitur.

§. 28. Haec autem magis fient perspicua, si modum
Fig. 7. quo supra (20) ad aream E Q H R inveniendam usi sumus attentius consideremus. Primum scilicet ex integratione formulae $\int\int \partial x \partial y$ deduximus hanc aream $= \int \partial x \, (PR - PQ)$, ubi quidem P Q a P R subtraximus, quia manifesto erat $PR > PQ$, sed in ipso calculo nulla continetur ratio, quae praecipiat, ut potius P Q a P R quam vicissim P R a P Q subtrahamus, sicque non adversante calculo potuissemus aequo jure eandem aream per $\int \partial x \, . (PQ - PR)$ exprimere, quo pacto ea negativa sed priori aequalis proditura fuisset. Ex quo perspicuum est signum $+$ vel $-$ non quantitatem areae, quae quaeritur, afficere, et calculum pari jure ad utrumque perducere posse. Quam ob causam superius dubium ita diluetur, ut dicamus aream quaesitam ita exprimi debere, ut sit

$$= \pm \int\int \partial t \partial u \, (RV - ST),$$

et ut area positive expressa prodeat, quovis casu eo signo utendum esse, quo $\pm (RV - ST)$ reddatur quantitas positiva.

§. 29. Hinc etiam dubia, quae forte oriri possent circa inventionem areae curvarum, quarum partes utrinque ad axem sunt dispositae, et quibus tyrones saepe non parum turbari solent, facile resolvuntur. Si enim curvae Q A R ad axem A P relatae area tota Q A R abscissae $AP = x$ respondens definiri debeat, ejusque partes A P Q et A P R seorsim considerentur, certum est si altera A P Q affirmative spectetur ut sit $= + Q$, alteram A P R negative concipi debere, ut sit $= - R$. Neque tamen hinc sequitur, aream totam Q A R fore $= Q - R$, quippe quae evanesceret, si ambae partes A P Q et A P R essent aequales; sed perinde ac si ambo puncta Q et R ad eandem axis partem sita essent, area perpetuo est $= \pm \int \partial x\,(PR - PQ)$, unde ob $\int PQ \,.\, \partial x = Q$ et $\int PR \,.\, \partial x = -R$, fit tota area $= \pm (Q + R)$, uti rei natura postulat. Fig. 8.

§. 30. Ope autem talium substitutionum, quibus loco binarum variabilium $x$ et $y$ binae quaecunque aliae introducantur $t$ et $u$, saepenumero integrationes plurimum sublevari facilioresque reddi possunt, et quovis casu haud difficile est substitutiones maxime idoneas reperire. Fig. 7. Veluti si area circuli E Q H R ad axem C P relati definiri debeat, ubi ob $CF = f$, $FG = g$, $GQ = c$, erat $cc = (f - x)^2 + (g - y)^2$, poni conveniet

$$f - x = \frac{t}{\sqrt{(1+uu)}} \text{ et } g - y = \frac{tu}{\sqrt{(1-uu)}},$$

ut fiat $tt = cc$ et $t = c$. Tum vero ob

$$\partial x = \frac{-\partial t}{\sqrt{(1+uu)}} + \frac{tu\,\partial u}{(1+uu)^{\frac{3}{2}}}, \text{ et}$$

$$\partial y = \frac{-u\,\partial t}{\sqrt{(1+uu)}} - \frac{t\,\partial u}{(1+uu)^{\frac{3}{2}}},$$

loco $\partial x\,\partial y$ per §. 27. adipiscimur

$$\partial t\,\partial u\left(\frac{t}{(1+uu)^2} + \frac{tuu}{(1+uu)^2}\right) = \frac{t\,\partial t\,\partial u}{1+uu},$$

cujus duplex integrale ita exprimatur $\int \frac{\partial u}{1+uu} \int t\,\partial t$. Jam vero est $\int t\,\partial t = \frac{1}{2}tt = \frac{1}{2}cc$, et area tota erit $\frac{1}{2}cc \int \frac{\partial u}{1+uu}$, dum ipsi $u$ omnes valores possibiles tribuuntur, quandoquidem $u$ non amplius aequationem pro basi afficiebat.

§. 31 Quo hunc usum clarius explicemus, consideremus iterum sphaeram centrum C et radium C A $= a$ habentem, cujus portio basi circulari perpendiculariter insistens quaeri debeat. Quia radium C A per centrum cujus circuli G ducere licet, sit F G $= g = 0$, ut fiat $cc = (f+x)^2 + yy$, et solidum quaesitum

$$= \int\int \partial x\,\partial y \sqrt{(aa - xx - yy)};$$

statuatur jam

$$x = \frac{t}{\sqrt{(1+uu)}} \text{ et } y = \frac{tu}{\sqrt{(1+uu)}},$$

ut fiat $xx + yy = tt$, et

$$\sqrt{(aa - xx - yy)} = \sqrt{(aa - tt)},$$

et pro $\partial x\,\partial y$ prodeat $\frac{t\,\partial t\,\partial u}{1+uu}$, ita ut soliditas quaesita ita exprimatur $\int\int \frac{t\,\partial t\,\partial u \sqrt{(aa-tt)}}{1+uu}$, quae integrationes determinari debebunt ex aequatione hinc pro figura basis oriunda

$$cc = ff - \frac{2ft}{\sqrt{(1+uu)}} + tt,$$

unde fit

$$\text{vel } t = \frac{f \pm \sqrt{(cc + ccuu - ffuu)}}{\sqrt{(1+uu)}},$$

$$\text{vel } \sqrt{(1+uu)} = \frac{2ft}{ff - cc + tt}.$$

§. 32. Consideretur primo $t$ ut constans, fietque integrale

$$= \int t\,\partial t \sqrt{(aa - tt)} \,.\, \text{Arc. tang.}\, u,$$

ubi constantem adjici non est necesse, quia evanescente $u$ simul

$y$ evanescit, quaeramus enim primo solidum semicirculo insistens. At integrali hoc primo extenso ad terminum extremum, ob Arc. tang. $u =$ Arc. cos. $\frac{1}{\sqrt{(1+uu)}}$, fit id

$$\int t\,\partial t \sqrt{(aa - tt)} \,.\, \text{Arc. cos.} \frac{ff - cc + tt}{2ft},$$

cujus integrationis limites sunt $t = f - c$ et $t = f + c$. Si non soliditatem hujus portionis sphaerae, sed ejus superficiem basi quasi imminentem definire voluissemus, perventuri fuissemus ad hanc formulam

$$\int \frac{at\,\partial t}{\sqrt{(aa - tt)}} \text{Arc. cos.} \frac{ff - cc + tt}{2ft},$$

at operae pretium non videtur ejus integrationem fusius prosequi.

§. 33. Methodus autem hujusmodi formulas integrales duplicatas tractandi haud parum illustrabitur, si eam ad problema illud quondam famosum Florentinum accommodemus, quo in superficie sphaerica portio geometrice assignabilis requirebatur, cujus superficies algebraice exprimi possit. Immineat talis sphaerae portio curvae GRH, cujus propterea figura est determinanda: in qua si ponatur CP $= x$, PR $= y$, superficies sphaerae imminens hac formula integrali duplicata exprimitur $\iint \frac{a\,\partial x\,\partial y}{\sqrt{(aa - xx - yy)}}$. Fig. 6.
Jam nulla substitutione adhibita, si primo $x$ pro constante habeatur, prodibit

$$\int a\,\partial x \text{ Arc. sin.} \frac{y}{\sqrt{(aa - xx)}},$$

qua portio sphaerae aream indefinitam CPRG tegens exprimitur; et quaestio nunc huc redit, ut ejusmodi aequatio algebraica inter $x$ et $y$ assignetur, unde pro tota area CHRG portio superficiei sphaericae ei respondentis fiat algebraice assignabilis.

§. 34. Ponamus brevitatis gratia $\frac{y}{\sqrt{(aa - xx)}} = v$, ut sit $y = v\sqrt{(aa - xx)}$, ac posito $x = 0$ fiat $v = n$: quoniam superius integrale evanescere debet posito $x = 0$. Erit ergo superficies sphaerica aream indefinitam CPRG tegens

$$= ax \text{ Arc. sin. } v - a\int \frac{x\partial v}{\sqrt{(1-vv)}},$$

sumto hoc integrali ita ut evanescat posito $x = 0$. Statuatur nunc

$$\int \frac{x\partial v}{\sqrt{(1-vv)}} = f \text{ Arc. sin. } v - a\mathrm{V},$$

denotante V functionem quamcunque algebraicam ipsius $v$, quae abeat in N posito $x = 0$, eritque superficies nostra

$$= ax \text{ Arc. sin. } v - af \text{ Arc. sin. } v + aa\mathrm{V} + fa \text{ Arc. sin. } n - aa\mathrm{N},$$

atque $x$ per $v$ ita determinabitur, ut sit

$$x = f - \frac{a\partial \mathrm{V}\sqrt{(1-vv)}}{\partial v},$$

sit jam $\mathrm{CH} = b$, ac ponatur $x = h$, quo casu fiat $v = m$ et $\mathrm{V} = \mathrm{M}$, et cum superficies proposita sit

$$ah \text{ Arc. sin. } m - af \text{ Arc. sin. } m + aa\mathrm{M} + af \text{ Arc. sin. } n - aa\mathrm{N},$$

ea algebraica esse nequit nisi sit

$$h \text{ Arc. sin. } m - f \text{ Arc. sin. } m + f \text{ Arc. sin. } n = 0.$$

§. 35. Hic igitur primo arcus quorum sinus sunt $m$ et $n$ inter se commensurabiles reddi debent, nisi forte sit $n = 0$, quo casu sufficit fieri $h = f$. Quod etsi facile infinitis modis praestari potest, tamen hoc problema multo facilius adhibendis substitutionibus ante expositis resolvetur. Ponatur ergo

$$x = \frac{t}{\sqrt{(1+uu)}} \text{ et } y = \frac{tu}{\sqrt{(1+uu)}},$$

ut fiat $xx + yy = tt$, et pro $\partial x\, \partial y$ prodeat $\frac{t\,\partial t\,\partial u}{1+uu}$; atque superficies portionis sphaericae hac formula integrali duplicata exprimetur $\int\int \frac{at\,\partial t\,\partial u}{(1+uu)\sqrt{(aa-tt)}}$. Sumatur primo $u$ constans erit ea

$$= \int \frac{a \partial u}{1 + u u} [b - \sqrt{(a a - t t)}],$$

quae jam facile absolute integrabilis reddi potest: ponatur enim aequalis functioni algebraicae cuicunque ipsius $u$, quae sit $= \mathrm{V}$, eritque

$$b - \sqrt{(a a - t t)} = \frac{\partial \mathrm{V} (1 + u u)}{a \partial u},$$

et portio superficiei sphaericae adeo indefinita erit $= \mathrm{V}$, ubi pro V functionem algebraicam quamcunque ipsius $u$ accipere licet.

§. 36. Simplicissimae solutiones deducentur ex hac hypothesi $\mathrm{V} = \frac{a(\alpha + \beta u)}{\sqrt{(1 + u u)}}$, unde fit

$$\frac{\partial \mathrm{V}}{a \partial u} = - \frac{\alpha u + \beta}{(1 + u u)^{\frac{3}{2}}},$$

hincque

$$b - \sqrt{(a a - t t)} = \frac{\beta - \alpha u}{\sqrt{(1 + u u)}}.$$

Ponatur $b = 0$, et cum per substitutiones sit

$$u = \frac{y}{x} \text{ et } t = \sqrt{(x x + y y)},$$

erit pro curva quaesita

$$\sqrt{(x x + y y)(a a - x x - y y)} = \alpha y - \beta x,$$

et pro superficie

$$\mathrm{V} = \frac{a(\alpha x + \beta y)}{\sqrt{(x x + y y)}}.$$

Hinc casus simplicissimus oritur, ponendo $\beta = 0$ et $\alpha = a$, unde prodit $a a x x - (x x + y y)^2 = 0$, seu $y y = a x - x x$; ita ut curva G R H sit circulus diametro A C descriptus, et $\mathrm{V} = \frac{a a x}{\sqrt{(x x + y y)}}$. Infiniti alii circuli diametrum $= a$ habentes ac per centrum sphaerae transeuntes reperiuntur, si sit

$$\beta = \sqrt{(a a - \alpha \alpha)},$$

unde fit

$$a x + y \sqrt{(a a - \alpha \alpha)} = x x + y y \text{ et}$$
$$V = \frac{a [\alpha x + y \sqrt{(a a - \alpha \alpha)}]}{\sqrt{(x x + y y)}} = a \sqrt{(x x + y y)}:$$

ubi notandum est, quantitatem V pro natura rei constantem quandam assumere.

§. 37. Concipiatur ergo octans sphaerae super quadrante A C B extractus, cujus radius C A $= a$, qui simul sit diameter semicirculi C R A, in quo si ducatur corda quaecunque C R, et perpendiculum R P, ut sit C P $= x$ et P R $= y$, erit C R $= t$, ét $u$ erit tangens anguli A C R. Quoniam igitur posuimus $b = 0$, prius integrale, quo $u$ erat constans, est $\sqrt{(a a - t t)}$, quod cum evanescat si $t = a$, evidens est, id non per cordam C R $= t$ sed per ejus complementum R S extendi. Hinc repetita integratio $\int \frac{a \partial u}{1 + u u} \sqrt{(a a - t t)}$ eam sphaericae superficiei portionem exprimit, quae trilineo R V A S imminet, quae ergo ob

Fig. 9.

$$\sqrt{(a a - t t)} = \frac{a u}{\sqrt{(1 + u u)}}, \text{ est} = \frac{-a a}{\sqrt{(1 + u u)}} + a a,$$

integrali scilicet ita sumto, ut evanescat cum angulo A C R. Quare ob $\frac{1}{\sqrt{(1 + u u)}} = \cos.$ A C R, ducto perpendiculo S T, erit illa superficies

$$= a (a - \text{C T}) = \text{C A} \cdot \text{A T} = \text{A V}^2,$$

ducta corda A V. Consequenter portio superficiei sphaerae spatio C E R A S B inter quadrantem et semicirculo intercepto imminens, aequatur quadrato radii sphaerae.

§. 38. Contemplemur autem adhuc ejusmodi casum, quo prima integratio evanescat posito $t = 0$, seu sit $b = a$, ac ponatur $V = \frac{1}{2} a a u$, quae expressio simul superficiem quaesitam praebet. Erit ergo

$$a - \sqrt{(aa - tt)} = \tfrac{1}{2} a (1 + uu) \text{ et}$$ Fig 10.

$$\sqrt{(aa - tt)} = \tfrac{1}{2} a (1 - uu),$$

ita ut sit

$$t = \tfrac{1}{2} a \sqrt{(3 + 2uu - u^4)} \text{ seu}$$

$$t = \tfrac{1}{2} a \sqrt{(1 + uu)(3 - uu)},$$

ubi est $CR = t$, et $u$ denotat tangentem anguli $ACR$. Ex hac aequatione patet, si sit $u = 0$, fore $t = \frac{a\sqrt{3}}{2}$; scilicet curva quaesita radio $AC$ ita in $E$ occurrit, ut sit $CE = CA \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$, eique perpendiculariter insistit. Tum si angulus $ACR$ augeatur ad semirectum $ACF$, ut fiat $u = 1$, erit $t = a$; hocque casu curva per ipsum punctum $F$ transit, ibique quadrantem osculabitur; ac simul distantia $t$ fit maxima. Dehinc curva introrsum reflectitur, et $t$ evanescit si $u = \sqrt{3}$: hoc est, curva centro $C$ ita immergitur, ut ejus tangens in $C$ cum radio $CA$ faciat angulum $60^\circ$.

§. 39. Tota ergo curva in quadrante descripta figuram habebit $ERFGC$, et ducta in ea ex $C$ recta utcunque $CR$, angulique $ECR$ tangens sit $= u$, tum portio superficiei sphaericae sectori $ECR$ imminens algebraice poterit assignari, eritque ea $= \tfrac{1}{2} aau$. Quare si $CR$ ad occursum cum tangente $AT$ producatur, ob $AT = au$, ea portio praecise aequabitur triangulo $CAT$: et portio imminens sectori $ECF$ erit $= \tfrac{1}{2} aa$, si autem angulus $ECR$ major semirecto sumatur, ut sit $u > 1$, quia tum

$$\sqrt{(aa - tt)} = \sqrt{(aa - xx - yy)},$$

quae est elevatio superficiei sphaericae supra quadrantem, fit negativa, superficies in inferiori octante capi debet. Quodsi hujus curvae aequationem inter coordinatas $CP = x$ et $PR = y$

desideremus, ob

$$tt = xx + yy \text{ et } u = \frac{y}{x},$$

habebimus

$$4xx + 4yy = aa\left(3 + \frac{2yy}{xx} - \frac{y^4}{x^4}\right) = \frac{aa(xx+yy)(3xx-yy)}{x^4},$$

quae divisa per $xx + yy$ praebet

$$4x^4 = 3aaxx - aayy, \text{ seu } yy = 3xx - \frac{4x^4}{aa}.$$

§. 40. Hanc solutionem reddere possumus generaliorem ponendo $V = abu$, fietque

$$a - \sqrt{(aa - tt)} = b(1 + uu), \text{ hinc}$$
$$\sqrt{(aa - tt)} = a - b - buu, \text{ ergo}$$
$$tt = 2ab - bb + 2(a-b)buu - bbu^4$$
$$= (1 + uu)(2ab - bb - bbuu).$$

Qua ad coordinatas orthogonales translata, divisio per $xx + yy$ iterum succedet, fietque

$$x^4 = (2ab - bb)xx - bbyy \text{ seu}$$
$$y = \frac{x}{b}\sqrt{(2ab - bb - xx)},$$

ac portio superficiei sphaericae sectori E C R hujus curvae imminens erit $= \frac{aby}{x} = b \,.\, AT$: quae expressio locum habet, quamdiu $uu < \frac{a-b}{b}$; hoc est donec anguli E C R tangens fiat $= \sqrt{\frac{a-b}{b}}$, ubi fit $t = a$. Tum vero angulo E C R ultra aucto, perpendiculares super curva erectae ad hemisphaerium inferius protendi debent, quo casu superficies eo magis augetur. Si ergo sit $b = a$, quia $\sqrt{(aa - tt)}$ ubique fit quantitas negativa, quantitas $b \,.\, AT$ portionem superficiei sphaericae ad inferius hemisphaerium continuatae exprimit.

§. 41. Sit adhuc $b = a$, ac ponatur

$$V = \frac{a^2(\alpha + \beta u)}{\sqrt{(1+uu)}} - \alpha a^2$$

ut superficies assignanda evanescat posito $u = 0$, eritque

$$a - \sqrt{(aa - tt)} = \frac{a(\beta - \alpha u)}{\sqrt{(1+uu)}} \text{ et}$$

$$\sqrt{(aa - tt)} = a - \frac{a(\beta - \alpha u)}{\sqrt{(1+uu)}},$$

ubi notandum est, si haec expressio fiat negativa, ibi in hemisphaerium inferius descendi. Ex his autem prodit

$$\frac{tt}{aa} = \frac{2(\beta - \alpha u)}{\sqrt{(1+uu)}} - \frac{(\beta - \alpha u)^2}{1+uu}.$$

Quare evanescente angulo E C R, cujus tangens $= u$, erit

$$\frac{tt}{aa} = 2\beta - \beta\beta, \text{ at si } u = \frac{\beta}{\alpha}, \text{ evanescit } t.$$

Pro altera parte axis C A fit $u$ negativum, ac posito $u = -v$ habetur superficies negative expressa

$$V = \frac{aa(\alpha - \beta v)}{\sqrt{(1+vv)}} - \alpha a^2,$$

et curva hac definietur aequatione

$$\frac{tt}{aa} = \frac{2(\beta + \alpha v)}{\sqrt{(1+vv)}} - \frac{(\beta + \alpha v)^2}{1+vv},$$

unde posito $v$ infinito prodit $\frac{tt}{aa} = 2\alpha - \alpha\alpha$; ubi recta C R fit in curvam normalis, quod etiam evenit, ubi

$$v = \frac{\alpha}{\beta} \text{ et } \frac{tt}{aa} = 2\sqrt{(\alpha\alpha + \beta\beta)} - \alpha\alpha - \beta\beta.$$

Quare ne fiat $t$ imaginarium, oportet sit $\sqrt{(\alpha\alpha + \beta\beta)} < 2$.

§. 42. Consideremus casum quo

$$\alpha = -\frac{1}{\sqrt{2}} \text{ et } \beta = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

ut sit superficies

$$V = aa\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1+u}{\sqrt{2(1+uu)}}\right) \text{ et}$$

$$\frac{tt}{aa} = \frac{2(1+u)}{\sqrt{2(1+uu)}} - \frac{(1+u)^2}{2(1+uu)},$$

ubi patet si $u = -1$ fore $t = 0$; tum vero ut sequitur
si $u = 0$, $u = 1$, $u = 7$, $u = \infty$,
erit $t = a\sqrt{\frac{2\sqrt{2}-1}{2}}$, $t = a$, $t = a\sqrt{\frac{24}{25}}$, $t = a\sqrt{\frac{2\sqrt{2}-1}{2}}$,
ubi notandum, casibus $u = 1$ et $u = \infty$ rectam C R fore in curvam normalem. In hoc ergo quadrante curva nostra fere cum quadrante confunditur, cum ubique sit proxime $s = a$: cui portio superficiei sphaericae imminens erit $= aa\sqrt{2}$, quae deficit a superficie totius octantis, quae est $\frac{\pi}{2}aa$, parte satis parva $aa(\frac{\pi}{2} - \sqrt{2}) = 0,15658\,aa$. Ad alteram axis C A partem haec curva in centrum incidit, ubi tangens cum C A faciet angulum semirectum.

§. 43. Verum solutio §. 35. data multo magis amplificari potest, cum enim superficies sphaerae assignanda hac formula exprimatur $\int \frac{a\,\partial u}{1+uu} \int \frac{t\,\partial t}{\sqrt{(aa-tt)}}$, et in integratione $\int \frac{t\,\partial t}{\sqrt{(aa-tt)}}$ quantitas $u$ ut constans consideretur, integrale ita exhiberi poterit $U - \sqrt{(aa-tt)}$, denotante U functionem quamcunque ipsius $u$; quae formula, quoniam evanescit si

$$\sqrt{(aa-tt)} = U \text{ et } t = \sqrt{(aa - UU)},$$

ab hoc termino quantitas $t$ ulterius protendi est concipienda. Denotet jam V aliam quamcunque functionem ipsius $u$, quae abeat in C posito $u = 0$, ac ponatur superficies

$$\int \frac{a\,\partial u}{1+uu}[U - \sqrt{(aa-tt)}] = aV - aC,$$

eritque hinc

$$U - \sqrt{(aa-tt)} = \frac{\partial V(1+uu)}{\partial u},$$

ideoque

$$\sqrt{(aa-tt)} = U - \frac{\partial V(1+uu)}{\partial u},$$

unde alter terminus ipsius $t$ definitur.

§. 44. Hinc igitur solutio problematis Florentini ita generalissime adornabitur. Constituto quadrante circuli A C B, cui octans sphaerae insistat, radio C A existente $= a$, ductoque radio quocunque C S, vocetur anguli A C S tangens $= u$; tum primo curva E Q G ita construatur, ut sit C Q $= \sqrt{(aa - UU)}$, et perpendiculum ex Q ad sphaericam usque superficiem erectum Q M $=$ U, denotante U functionem quamcunque algebraicam ipsius $u$. Si $u = 0$ abeat C Q in C E, et Q M in E I. Deinde alia describatur curva F R H, ut sit Fig. 11.

$$CR = \sqrt{[aa - (U - \frac{\partial V(1 + uu)}{\partial u})^2]},$$

et perpendiculum ex R ad sphaeram usque pertingens

$$RN = U - \frac{\partial V(1 + uu)}{\partial u},$$

denotante V aliam quamcunque functionem algebraicam ipsius $u$, quae abeat in C si $u = 0$; quo casu simul C E in C F et R N in F K abeat. Jam his duabus curvis constructis, portio superficiei sphaericae areae E Q R F imminens et intra terminos I, K, M, N contenta, algebraice exprimetur, eritque ea $= a(V - C)$.

§. 45. Haec de natura formularum integralium duplicatarum commentandi occasionem praebuit problema aeque elegans atque utile in analysi, si quidem ejus solutionem evolvere liceret. Quaerebatur scilicet inter omnia corpora ejusdem soliditatis id, quod minima superficie contineretur: quod quidem ad ternas coordinatas orthogonales $x$, $y$ et $z$ relatum, posito $\partial z = p\,\partial x + q\,\partial y$ ita analytice exprimitur, ut inter omnes relationes harum trium variabilium, quae eandem quantitatem hujus formulae integralis duplicatae $\int\int z\,\partial x\,\partial y$ contineant, ea definiatur, cui minima quantitas hujus $\int\int \partial x\,\partial y\,\sqrt{(1 + pp + qq)}$ respondeat. Quod problema si per theoriam variationum aggrediamur, effici oportebit ut fiat

$$a\delta\int\int\partial x\,\partial y\,\sqrt{(1+pp+qq)}=\delta\int\int z\,\partial x\,\partial y,$$

ita ut totum negotium ad variationes hujusmodi formularum integralium duplicatarum indagandas reducatur.

§. 46. Quoniam utraque formula duplicem integrationem exigit, si in priori $x$ pro constante habeatur, nostra aequatio ita repraesentabitur

$$a\delta\int\partial x\int\partial y\,\sqrt{(1+pp+qq)}=\delta\int\partial x\int z\,\partial y.$$

Verum hic probe animadvertendum est, postquam integralia

$$\int\partial y\,\sqrt{(1+pp+qq)} \text{ et } \int z\,\partial y$$

fuerint inventa, tum variabilem $y$ non amplius indefinitam seu ab $x$ non pendentem relinqui, quin potius pro $y$ certam functionem ipsius $x$, quam figura corporis exigit, substitui oportere, ita ut in secunda integratione quantitas $y$ non ut constans seu ab $x$ non pendens spectari queat. Quia autem ob figuram corporis etiamnunc incognitam ista functio non constat, neutiquam apparet, quomodo variationes istiusmodi formularum duplicatarum determinari debeant.

§. 47. Ipsa vero hujus quaestionis natura alias praeterea determinationes requirere videtur, quarum ratio in solu-
Fig 12. tione haberi debeat. Nam quemadmodum si curva quaeritur, quae inter omnes alias eandem aream includentes brevissimo arcu contineatur, non solum basis A P sed etiam duo puncta B et M, per quae curva transeat, praescribi solent, ita etiam in nostro problemate non modo basis, cui corpus tanquam columna insistat pro cognita assumi debere videtur, sed etiam ipsi extremi termini superficiei quaesitae. Quodsi enim hae res non praescribantur omnes, ne quaestioni quidem certae locus relinquitur: nam etiamsi

basis praescriberetur, termini vero supremi superficiei arbitrio nostro relinquerentur, manifestum est, quo altior fuerit columna, eo magis soliditatem auctum iri eadem manente superficie suprema; quandoquidem superficies laterum non in computum ducitur. Multo minus autem problema sine basis praescriptione ullam vim retineret, quoniam basi coarctanda quantumvis magna soliditas cum minima superficie posset esse conjuncta.