

SOLVTIO
 FACILIS PROBLEMATIS,
 QVO QVAERITVR CIRCVLVS,
 QVI
 DATOS TRES CIRCVLVS TANGAT.

Auctore
 L. EVLERO.

Conuent. exhib. d. 4 Nouembr. 1779.

§. 1.

Sint A, B, C centra trium circulorum datorum, pro quo-
 rum fitu fit distantia $CA = a$, $CB = b$ et angulus Tab. I.
Fig. 5.
 $ACB = C$. Deinde sint α , β , γ radii horum trium cir-
 culorum, O centrum circuli omnes tres tangentis, cuius
 radius ponatur $= x$. Ductis igitur rectis OA, OB, OC,
 quae per puncta contactus transibunt, habebimus $OA = x$
 $+ a$, $OB = x + \beta$ et $OC = x + \gamma$. Hic vero ante
 omnia probe notandum est, contactus singulorum circulo-
 rum non solum intus, sed etiam extus euenire posse. Ita si
 circulus C extus tangeretur, foret $OC = x - \gamma$; vnde pa-
 tet, radios horum circulorum tam negatiue, quam affirmatiue
 accipi posse. Hinc euidens est octo solutiones locum habere
 posse, quae scilicet ex variatione signorum litterarum α , β , γ
 oriuntur. Interim tamen in solutione has litteras α , β , γ vt
 positiuas spectabimus, calculo vero expedito nihil impedit,
 quo minus earum vni vel alteri valor negatiuus tribuatur.

§. 2.

§. 2. Statuamus autem breuitatis gratia $OC = x + \gamma = z$ vt fit $x = z - \gamma$, tum vero fiat $\alpha - \gamma = f$ et $\beta - \gamma = g$, vt prodeat $OA = z + f$ et $OB = z + g$. Quodsi iam vocentur anguli $OCA = p$ et $OCB = q$, ita vt fit $p + q = C$, ex triangulo OCA , cuius latera sunt $OC = z$; $OA = z + f$ et $AC = a$, colligitur:

$$\text{cof. } p = \frac{aa + zz - (z+f)^2}{2az} = \frac{aa - 2fz + ff}{2az}.$$

Simili modo ex triangulo OCB , cuius latera sunt $OC = z$; $OB = z + g$ et $CB = b$, colligitur:

$$\text{cof. } q = \frac{bb + zz - (z+g)^2}{2bz} = \frac{bb - 2gz + gg}{2bz}.$$

Quoniam igitur angulorum p et q summa datur $= C$, euidentis est hinc incognitam z determinari posse.

§. 3. Cum igitur fit $p + q = C$, erit

$$\text{cof. } C = \text{cof. } p \text{ cof. } q - \text{fin. } p \text{ fin. } q,$$

tum vero

$$\text{fin. } C = \text{fin. } p \text{ cof. } q + \text{cof. } p \text{ fin. } q,$$

cuius formulae quadratum praebet:

$$\text{fin. } C^2 = \text{fin. } p^2 \text{ cof. } q^2 + \text{cof. } p^2 \text{ fin. } q^2 + 2 \text{ fin. } p \text{ cof. } q \text{ cof. } p \text{ fin. } q.$$

At vero ex priori formula est

$$\text{fin. } p \text{ fin. } q = \text{cof. } p \text{ cof. } q - \text{cof. } C,$$

quo valore substituto prodit

$$\begin{aligned} \text{fin. } C^2 &= \text{fin. } p^2 \text{ cof. } q^2 + \text{cof. } p^2 \text{ fin. } q^2 + 2 \text{ cof. } p^2 \text{ cof. } q^2 \\ &\quad - 2 \text{ cof. } p \text{ cof. } q \text{ cof. } C, \end{aligned}$$

hinc iam cum fit

$$\text{fin. } p^2 = 1 - \text{cof. } p^2 \text{ et fin. } q^2 = 1 - \text{cof. } q^2,$$

haec aequatio induet istam formam:

$$\text{fin. } C^2 = \text{cof. } p + \text{cof. } q - 2 \text{ cof. } p \text{ cof. } q \text{ cof. } C.$$

§. 4. Quo iam hanc aequationem facilius resoluamus, statuamus breuitatis gratia $aa - ff = 2F$ et $bb - gg = 2G$, ut sit $\text{cof. } p = \frac{F - fz}{az}$ et $\text{cof. } q = \frac{G - gz}{bz}$, quibus valoribus substitutis nostra aequatio erit

$$\text{fin. } C^2 = \frac{(F - fz)^2}{a^2 z^2} + \frac{(G - gz)^2}{b^2 z^2} - 2 \frac{(F - fz)(G - gz) \text{ cof. } c}{ab z^2},$$

quae aequatio in ordinem redacta euadet:

$$\begin{aligned} a a b b z z \text{ fin. } C^2 &= b b F^2 - 2 b b F f z + b b f f z z \\ &+ a a G^2 - 2 a a G g z + a a g g z z \\ &- 2 a b F G \text{ cof. } C + 2 a b G f z \text{ cof. } C \\ &- 2 a b f g z z \text{ cof. } C + 2 a b F g z \text{ cof. } C. \end{aligned}$$

Aequatio igitur inuenta sub hac forma repraesentari potest: $L z z - 2 M z + N = 0$, existente

$$\begin{aligned} L &= b b f f + a a g g - a a b b \text{ fin. } C^2 - 2 a b f g \text{ cof. } C, \\ M &= b b F f + a a G g - a b \text{ cof. } C (G f + F g), \\ N &= b b F^2 + a a G^2 - 2 a b F G \text{ cof. } C. \end{aligned}$$

Quoniam igitur valores litterarum L , M , N sunt cogniti, ex resolutione huius aequationis quadraticae colligitur fore $z = \frac{M \pm \sqrt{M^2 - LN}}{L}$. Vnde patet binas solutiones prodire, atque adeo ambas reales, si modo fuerit $M^2 > LN$; consequenter ob illas octo signorum variationes, quae supra sunt commemoratae, omnino sedecim diuersae videntur dari solutiones, id quod eo magis notari meretur, quod omnes istae solutiones tantum ex aequatione quadratica deducuntur. Praeterea vero imprimis hoc obseruandum est, dari etiam casus, quibus solutio prorsus fit impossibilis, id quod euenit, quando fuerit $LN > M^2$.

§. 5. Hoc igitur modo solutio nostri problematis ad calculum non nimis complexum est deducta, vnde, quicumque
Noua Acta Acad. Imp. Sc. T. VI. N valo-

valores pro quantitibus cognitis fuerint assumpti, per calculum numericum valor ipsius z facile assignabitur.

§. 6. Quanquam autem applicatio ad quosuis casus propositos nulla laborat difficultate, tamen, quando aequatio quadratica radicem negativam inuoluit, ita vt littera z negativum obtineat valorem, non tam facile perspicitur, quo modo tales casus sint repraesentandi. Omnis autem difficultas euanesct, si ostenderimus, valores negativos pro z inuentos proprie non ad ipsum casum propositum pertinere, sed ad eum casum, quo radiis circulorum α , β , γ contraria signa tribuntur; vnde fit, vt, etiamsi quaelibet aequatio quadratica duas complectatur radices, tamen omnino non plures quam octo solutiones locum habere queant.

§. 7. Quod quo clarius perspiciatur, ante omnia obseruasse iuuabit, cum sit $\alpha - \gamma = f$ et $\beta - \gamma = g$, mutatis signis litterarum α , β , γ etiam f et g contraria signa recipere; nihilo vero minus litterae deriuatae $F = \frac{a^2 - f^2}{2}$ et $G = \frac{b^2 - g^2}{2}$, nullam patiuntur mutationem. Hinc cum sit

$L = b b f f + a a g g - a a b b \sin. C^2 - a b f g \cos. C$,
euidens est, mutatis litterarum f et g signis litteram L eandem manere; at quia est

$M = b b F f + a a G g - a b \cos. C (G f + F g)$,
mutatis litterarum f et g signis etiam signum litterae M immutatur; denique vero ob

$N = b b F^2 + a a G^2 - 2 a b F G \cos. C$
etiam littera N idem signum conseruabit. Quamobrem mutatis signis radiorum α , β , γ solutio perducet ad hanc aequationem:

$$L z z + 2 M z + N = 0,$$

quae

quae eadem aequatio prodit, si z negativè capiatur. Ex quo sequitur, quoties valor ipsius z prodit negativus, tum eum respondere casui quo radiis α, β, γ contraria signa tribuuntur; ita ut bini casus α, β, γ et $-\alpha, -\beta, -\gamma$ ad eandem aequationem quadraticam perducant, cuius radix positiva priori casui convenit, negativa vero posteriori, quae autem tum ut positiva est spectanda. Hinc igitur manifestum est, tantum quatuor diversas aequationes quadraticas prodire posse, quarum quaelibet binos casus complectatur, uti hoc schema declarat:

$$\text{I. } \begin{cases} \alpha + \beta + \gamma \\ -\alpha - \beta - \gamma \end{cases}; \text{ II. } \begin{cases} \alpha + \beta - \gamma \\ -\alpha - \beta + \gamma \end{cases}; \text{ III. } \begin{cases} \alpha - \beta + \gamma \\ -\alpha + \beta - \gamma \end{cases}; \text{ IV. } \begin{cases} -\alpha + \beta + \gamma \\ +\alpha - \beta - \gamma \end{cases}.$$

Hoc observato applicatio ad quaecumque exempla nulli amplius difficultati erit obnoxia.

§. 8. Verum quia hoc problema est geometricum, non tam calculus numericus, quam constructio geometrica desiderari solet, quae utique nimis prodiret operosa, si eam ex aequatione quadratica $Lz^2 - 2Mz + N = 0$, derivare vellemus; quamobrem hic plurimum iuvabit talem constructionem ex ipsis calculi principiis derivasse.

Constructio problematis propositi.

§. 9. Ponatur angulus datus $ACB = 2\zeta$, ac statuatur angulus $ACO = p = \zeta + \phi$ & $BCO = q = \zeta - \phi$, calculumque ita instruamus, ut angulus ϕ fiat nostra incognita. Habebimus ergo

$$\cos. (\zeta + \phi) = \frac{r}{az} - \frac{f}{a} \text{ et}$$

$$\cos. (\zeta - \phi) = \frac{c}{bz} - \frac{g}{b},$$

hinc eliminando z erit

$$\frac{c}{b} \operatorname{cof.} (\zeta + \Phi) - \frac{f}{a} \operatorname{cof.} (\zeta - \Phi) = \frac{fg - cf}{ab}, \text{ siue}$$

$$a G \operatorname{cof.} (\zeta + \Phi) - b F \operatorname{cof.} (\zeta - \Phi) = Fg - Gf,$$

quae aequatio porro euoluta dat

$$\left. \begin{aligned} a G \operatorname{cof.} \zeta \operatorname{cof.} \Phi - a G \operatorname{fin.} \zeta \operatorname{fin.} \Phi \\ - b F \operatorname{cof.} \zeta \operatorname{cof.} \Phi - b F \operatorname{fin.} \zeta \operatorname{fin.} \Phi \end{aligned} \right\} = Fg - Gf,$$

siue

$$Gf - Fg = (bF - aG) \operatorname{cof.} \zeta \operatorname{cof.} \Phi + (aG + bF) \operatorname{fin.} \zeta \operatorname{fin.} \Phi.$$

Ponatur hic breuitatis gratia, $Gf - Fg = L$; $bF - aG = M$
et $aG + bF = N$, habebimus hanc aequationem:

$$L = M \operatorname{cof.} \zeta \operatorname{cof.} \Phi + N \operatorname{fin.} \zeta \operatorname{fin.} \Phi,$$

cuius constructio sequenti modo erui poterit. Introducatur an-
gulus θ , vt fit $\operatorname{tang.} \theta = \frac{M \operatorname{cof.} \zeta}{N \operatorname{fin.} \zeta}$, vt adeo iste angulus θ fit
cognitus; hinc ergo fiet

$$\operatorname{fin.} \theta = \frac{M \operatorname{cof.} \zeta}{\sqrt{(M^2 \operatorname{cof.} \zeta^2 + N^2 \operatorname{fin.} \zeta^2)}} \text{ et}$$

$$\operatorname{cof.} \theta = \frac{N \operatorname{fin.} \zeta}{\sqrt{(M^2 \operatorname{cof.} \zeta^2 + N^2 \operatorname{fin.} \zeta^2)}}.$$

Cum igitur fit

$$N \operatorname{fin.} \zeta = \operatorname{cof.} \theta \sqrt{(M^2 \operatorname{cof.} \zeta^2 + N^2 \operatorname{fin.} \zeta^2)} \text{ et}$$

$$M \operatorname{cof.} \zeta = \operatorname{fin.} \theta \sqrt{(M^2 \operatorname{cof.} \zeta^2 + N^2 \operatorname{fin.} \zeta^2)},$$

his substitutis erit

$$\frac{L}{\sqrt{(M^2 \operatorname{cof.} \zeta^2 + N^2 \operatorname{fin.} \zeta^2)}} = \operatorname{fin.} \theta \operatorname{cof.} \Phi + \operatorname{cof.} \theta \operatorname{fin.} \Phi = \operatorname{fin.} (\theta + \Phi).$$

Quodsi iam ille angulus, cuius sinus est $\frac{L}{\sqrt{(M^2 \operatorname{cof.} \zeta^2 + N^2 \operatorname{fin.} \zeta^2)}}$, po-
natur $= \lambda$, habebitur ista aequatio: $\operatorname{fin.} \lambda = \operatorname{fin.} (\theta + \Phi)$,
vnde quia etiam est $\operatorname{fin.} \lambda = \operatorname{fin.} (180^\circ - \lambda)$, habebimus
duplicem aequationem: altera dat $\theta + \Phi = \lambda$, ideoque
 $\Phi = \lambda - \theta$; altera vero aequatio dat $\Phi = 180^\circ - \lambda - \theta$. Si
autem loco L , M et N valores assumpti restituantur, prodi-
bit $\operatorname{tag.} \theta = \frac{(bF - aG) \operatorname{cof.} \zeta}{(aG + bF) \operatorname{fin.} \zeta}$, vnde angulus θ facile colligitur.

Porro

Porro vero erit

$\sqrt{(M^2 \operatorname{cof.} \zeta^2 + N^2 \operatorname{fin.} \zeta^2)} = \sqrt{(bbF^2 + aaG^2 - 2abFG \operatorname{cof.} 2\zeta)}$,
 quae formula radicalis ergo facile construitur per triangulum
 PQR, cuius angulus PQR = 2ζ et latera PQ = bF et
 PR = aG; tum enim erit tertium latus

Tab. I.
Fig. 6.

$$QR = \sqrt{(bbF^2 + aaG^2 - 2abFG \operatorname{cof.} 2\zeta)}.$$

Denique erit $\operatorname{fin.} \lambda = \frac{cf - FG}{QR}$, ex quo etiam angulus λ facile
 construitur, vnde determinatio anguli ϕ , ideoque rectae CO
 innotescit, nec non ipsa quantitas

$$CO = z = \frac{F}{f + a \operatorname{cof.} (\zeta + \phi)}.$$



