ÉCLAIRCISSEMENS

SUR

LE MÉMOIRE DE Mr. DE LA GRANGE,

INSÉRÉ DANS LE V^e. VOLUME DE MÉLANGES DE TURIN, CONCERNANT LA MÉTHODE DE PRENDRE LE MILIEU ENTRE LES RÉSULTATS DE PLUSIEURS OBSERVATIONS, &c.

Par
M. *L. EULER.*

Présenté à l'Académie le 27 Nov. 1777.

Qu'on concoive un Quart-de-cercle tel que, lorsqu'on s'en sert pour observer, par exemple, la hauteur du Pole, après avoir fait un grand nombre de telles observations il se trouve a observations qui donnent cette hauteur exacte, b observations qui la donnent d'une minute trop grande, et enfin c observations qui la donnent trop petite d'une minute; desorte que le nombre de toutes ces observations soit $N = a + b + c$, parmi lesquelles il y en ait a où l'erreur est $= + 1$ & c où l'erreur est $= - 1$.

Un tel Quart-de-cercle étant supposé, quand on aura fait n observations pour déterminer l'élévation du pole, la declinaison d'une étoile, ou quoi que ce soit, parmi lesquelles on aura pris un milieu, ſelon la manière ordinaire, en ajoutant tous les réſultats enſemble & diviſant la ſomme par le nombre des obſervations n; on demande: quelle ſera la probabilite, que ce milieu donne exactement la vraye hauteur cherchée, ou que la ſomme de tous les réſultats donne exactement zero? & enſuite: quelle ſera la probabilité que la ſomme de tous les réſultats devienne ou $+1$, ou -1, ou $+2$, ou -2, ou $+3$, ou -3; &c.?

Pour repandre plus de lumière ſur cette queſtion, on n'a qu'à concevoir pluſieurs billets dont le nombre ſoit $N = a + b + c$ & qui ſoyent marqués a par o, b par $+1$ & c par -1. Que de ces billets renfermés dans une boite, on tire, au hazard, ſucceſſivement n billets, en remettant chaque fois le billet tiré dans la boite, & l'on pourra demander: quelle ſera la probabilité, que la ſomme de tous les nombres tirés ſucceſſivement ſoit ou o, ou $+1$, ou -1, ou $+2$, ou -2, &c. où il eſt d'abord clair que cette ſomme ne ſçauroit jamais ſupaſſer ou $+n$, ou $-n$. De cette manière la queſtion propoſée pourra aiſément être réſolue par la Théorie des Combinaiſons, en ſuppoſant d'abord $n = 1$, enſuite $n = 2$, $n = 3$, &c.

Soit donc $n = 1$, ou qu'on ne tire de la boite qu'un ſeul billet, & il eſt évident, qu'il y aura a cas où le nombre tiré peut être o, b cas où il peut être $+1$ & c cas où il peut être -1; donc puisque le nombre de tous les cas eſt $a + b + c = N$, la probabilité que le nombre tiré ſoit o ſera $\frac{a}{N}$, la probabilité qu'il ſoit $+1$ ſera $\frac{b}{N}$ & celle enfin qu'il ſoit -1 ſera $\frac{c}{N}$, & puisqu'ici on ne tire qu'un ſeul billet il n'y a pas de milieu à prendre.

Soit

Soit $n = 2$, ou qu'on tire de la boite deux billets successivement, & quel que soit le nombre du premier, le second pourra être celui de chaque billet dans la boite, en sorte que chaque billet tiré d'abord admet N variations, d'où l'on voit que le nombre de tous les cas possibles sera $N^2 = (a+b+c)^2$. Or cette formule étant développée donne $aa + bb + cc + 2(ab + ac + bc)$, dont le premier terme aa exprime le nombre des cas où les deux billets tirés sont $0 + 0$ & la probabilité de ce cas sera $\frac{aa}{N^2}$. Ensuite le second terme bb marque le nombre des cas où les deux billets tirés feront $+1 + 1 = + 2$, dont la probabilité sera $\frac{bb}{N^2}$. Le troisième terme cc marque le nombre des cas où les nombres des billets tirés feront $-1 - 1 = -2$, dont la probabilité $= \frac{cc}{N^2}$. De la même manière le quatrième terme $2ab$ exprime le nombre des cas, où l'un des nombres tirés est 0 & l'autre $+1$ & partant leur somme $= + 1$, dont la probabilité $= \frac{2ab}{N^2}$. Le terme $2ac$ est le nombre des cas où il arrive que les nombres des deux billets tirés sont 0 & -1, & partant la somme $= -1$, dont la probabilité $= \frac{2ac}{N^2}$. Enfin le dernier terme marque le nombre des cas où ces nombres tirés sont $+1$ & -1, leur somme partant $= 0$, & la probabilité en est $\frac{2bc}{N^2}$.

Puisque ici nous avons deux billets, la somme des deux nombres tirés dans chaque cas étant divisée par 2, donne le milieu dont nous avons parlé ci-dessus, & partant la probabilité que ce milieu soit $= 0$, sera $\frac{aa + 2bc}{N^2}$. Que ce milieu soit $+1$, la probabilité sera $\frac{bb}{N^2}$; qu'il soit -1, elle sera $\frac{cc}{N^2}$. Or il peut aussi arriver que ce milieu soit $+\frac{1}{2}$ & la probabilité de ce cas sera $\frac{2ab}{N^2}$; & enfin pour le milieu $-\frac{1}{2}$ la probabilité est $\frac{2ac}{N^2}$.

 Suppo-

Suppoſons maintenant $n = 3$, & puisque chacun des cas précédens, dont le nombre étoit N^2, peut être ſuivi de chacun des N billets, le nombre de tous les cas poſſibles ſera $N^3 = (a + b + c)^3$, dont nous devons conſidérer tous les termes qui reſultent du développement de cette formule, & chacun exprimera le nombre des cas qui produiſent les trois nombres tirés, dont on aura par conſéquent tant la ſomme que le milieu, en la diviſant par trois, auquel il ſera aiſé d'ajouter la probabilité, qui ſe trouve en diviſant chaque terme par le nombre de tous les cas poſſibles, c'eſt à dire par N^3. Nous repréſenterons tous les cas dans la table ſuivante:

Termes.	Nombres.	Somme	Milieu.	Probabilité.
a^3	$0+0+0$	0	0	$\frac{a^3}{N^3}$
b^3	$1+1+1$	3	1	$\frac{b^3}{N^3}$
c^3	$-1-1-1$	-3	-1	$\frac{c^3}{N^3}$
$3aab$	$0+0+1$	$+1$	$+\frac{1}{3}$	$\frac{3aab}{N^3}$
$3aac$	$0+0-1$	-1	$-\frac{1}{3}$	$\frac{3aac}{N^3}$
$3abb$	$0+1+1$	$+2$	$+\frac{2}{3}$	$\frac{3abb}{N^3}$
$3acc$	$0-1-1$	-2	$-\frac{2}{3}$	$\frac{3acc}{N^3}$
$6abc$	$0+1-1$	0	0	$\frac{6abc}{N^3}$
$3bbc$	$+1+1-1$	$+1$	$+\frac{1}{3}$	$\frac{3bbc}{N^3}$
$3bcc$	$+1-1-1$	-1	$-\frac{1}{3}$	$\frac{3bcc}{N^3}$

On voit de cette table que le milieu $= 0$ s'y rencontre deux fois, la probabilité en ſera par conſéquent $= \frac{a^3 + 6abc}{N^3}$. Enſuite elle montre que le milieu $\frac{1}{3}$ ſe rencontre deux fois, & partant la probabilité ſera $\frac{3aab + 3bbc}{N^3}$. Or que ce milieu devienne $-\frac{1}{3}$ la probabilité ſera $\frac{3aac + 3bcc}{N^3}$. La probabilité pour le milieu

$+\frac{2}{3}$

$+\frac{2}{3}$ fera $\frac{3abb}{N^3}$; pour $-\frac{2}{3}$ elle fera $\frac{3acc}{N^3}$. Pour que le milieu devienne $+1$ la probabilité eſt $\frac{b^3}{N^3}$ & pour qu'il ſoit -1 il y aura la probabilité $\frac{c^3}{3}$.

De la même manière parcourons le cas où $n=4$, & où par conſéquent on tire quatre billets, & il eſt clair que le nombre de tous les cas poſſibles ſera $N^4=(a+b+c)^4$. Developpant donc cette formule, on verra aiſément tant ces quatre nombres tirés, répondans à chaque nombre, que leur ſomme & leur milieu, qui avec la probabilité feront repréſentés dans la table ſuivante:

Termes	Nombres	Somme	Milieu	Probabilité
a^4	$+0+0+0+0$	0	0	$\frac{a^4}{N^4}$
$4a^3b$	$+0+0+0+1$	$+1$	$+\frac{1}{4}$	$\frac{4a^3b}{N^4}$
$4a^3c$	$+0+0+0-1$	-1	$-\frac{1}{4}$	$\frac{4a^3c}{N^4}$
$6aabb$	$+0+0+1+1$	$+2$	$+\frac{1}{2}$	$\frac{6aabb}{N^4}$
$6aacc$	$+0+0-1-1$	-2	$-\frac{1}{2}$	$\frac{6aacc}{N^4}$
$12aabc$	$+0+0+1-1$	0	0	$\frac{12aabc}{N^4}$
$4ab^3$	$+0+1+1+1$	$+3$	$+\frac{3}{4}$	$\frac{4ab^3}{N^4}$
$12abbc$	$+0+1+1-1$	$+1$	$+\frac{1}{4}$	$\frac{12abbc}{N^4}$
$12abcc$	$+0+1-1-1$	-1	$-\frac{1}{4}$	$\frac{12abcc}{N^4}$
$4ac^3$	$+0-1-1-1$	-3	$-\frac{3}{4}$	$\frac{4ac^3}{N^4}$
b^4	$+1+1+1+1$	$+4$	$+1$	$\frac{b^4}{N^4}$
$4b^3c$	$+1+1+1-1$	$+2$	$+\frac{1}{2}$	$\frac{4b^3c}{N^4}$
$6bbcc$	$+1+1-1-1$	0	0	$\frac{6bbcc}{N^4}$
$4bc^3$	$+1-1-1-1$	-2	$-\frac{1}{2}$	$\frac{4bc^3}{N^4}$
c^4	$-1-1-1-1$	-4	-1	$\frac{c^4}{N^4}$

Dans

Dans cette table en trouve 9 milieux différens dont quelques uns se rencontrent deux & même trois fois. Nous marquerons donc dans la table suivante pour chacun de ces milieux la probabilité qui lui répond:

Milieu	Probabilité.
0 - - -	$\frac{a^4 + 12\,a\,a\,b\,c + 6\,b\,b\,c\,c}{N^4}$
$+\frac{1}{4}$ - - -	$\frac{4\,a^3\,b + 12\,a\,b\,b\,c}{N^4}$
$-\frac{1}{4}$ - - -	$\frac{4\,a^3\,c + 12\,a\,b\,c\,c}{N^4}$
$+\frac{1}{2}$ - - -	$\frac{6\,a\,a\,b\,b + 4\,b^3\,c}{N^4}$
$-\frac{1}{2}$ - - -	$\frac{6\,a\,a\,c\,c + 4\,b\,c^3}{N^4}$
$+\frac{3}{4}$ - - -	$\frac{4\,a\,b^3}{N^4}$
$-\frac{3}{4}$ - - -	$\frac{4\,a\,c^3}{N^4}$
$+1$ - - -	$\frac{b^4}{N^4}$
-1 - - -	$\frac{c^4}{N^4}$.

La considération de ces quatre cas nous ouvre la route à la question générale, où le nombre des billets tirés est $= n$; car d'abord il est évident que le nombre de tous les cas possibles est ici $N^n = (a + b + c)^n$, dont le developpement n'a aucune difficulté. Mais pour nous dispenser de la considération de chacun des termes qui en résultent, nous considérons ici la forme générale de chacun de ces termes, qui soit $M\,a^\alpha\,b^\beta\,c^\gamma$, où la somme des exposans $\alpha + \beta + \gamma$ doit être $= n$ et pour trouver le coëfficient M de ce terme, la Théorie des Combinaisons nous fournit cette formule:

$$M = \frac{1.\,2.\,3.\,4. \;.\;.\;.\;.\; n}{1.\,2. \;.\;.\;.\; \alpha \cdot 1.\,2. \;.\;.\;.\; \beta \cdot 1.\,2. \;.\;.\;.\; \gamma}.$$

Or les nombres tirés qui répondent à ce terme seront $0.\,\alpha$

$+ 1.$

$+ 1 . \beta - 1 . \gamma$, & partant le milieu de ces nombres tirés sera $\frac{\beta - \gamma}{n}$, auquel répond la probabilité $\frac{M\ a^{\alpha}\ b^{\beta}\ c^{\gamma}}{N^{n}}$.

Puisque la somme de tous les nombres tirés qui repondent à ce terme est $0 . \alpha + 1 . \beta - 1 . \gamma$, on voit que si nous écrivions au lieu des lettes a, b, c ces formules: $a\,x^{0}$, $b\,x^{+1}$, $c\,x^{-1}$; le terme que nous considérons prendroit cette forme: $M\ a^{\alpha}\ b^{\beta}\ c^{\gamma}\ x^{\beta - \gamma}$; de sorte que l'exposant de x nous donneroit d'abord la somme de tous les nombres tirés. Pour cet effet on n'a qu'à développer cette puissance: $(a\,x^{0} + b\,x^{1} + c\,x^{-1})^{n}$, & chacun de ses termes, qui aura, comme nous venons de voir, la forme $M\ a^{\alpha}\ b^{\beta}\ c^{\gamma}\ x^{\beta - \gamma}$, nous donne pour le milieu $\frac{\beta - \gamma}{n}$, et la probabilité sera $\frac{M\ a^{\alpha}\ b^{\beta}\ c^{\gamma}}{N^{n}}$.

Or on comprend aisément que ce même milieu $\frac{\beta - \gamma}{n}$ peut résulter de plusieurs termes différens, d'où par conséquent il faudra tirer la probabilité qui repond à chacun, & la somme de toutes ces probabilités donnera la probabilité pour le même milieu $\frac{\beta - \gamma}{n}$. Pour trouver tous les termes affectés de la même puissance de x, je tâcherai de donner une méthode qui nous dispensera de ramasser tour ces termes par le dévelopement actuel; mais auparavant je parcourrai successivement les cas où l'exposant de x devient ou 0 ou ± 1, ou ± 2, ± 3. Et d'abord pour le premier, où le milieu est $= 0$, il faudra mettre $\beta = \gamma$, desorte que les termes suivans, qui produisent ce même milieu, seront a^{n}, $a^{n-2}\,b\,c$, $a^{n-4}\,b^{2}\,c^{2}$, $a^{n-6}\,b^{3}\,c^{3}$, $a^{n-8}\,b^{4}\,c^{4}$, qu'il faut continuer jusqu'à ce que les exposans de a deviendront négatifs, & de ce que nous avons observé il sera facile d'assigner à chacun de ces termes son coëf-

coëfficient; par conféquent la fomme de tous ces termes divifée par N^n donne la probabilité entière pour que ce milieu ait lieu.

De la même manière, pour que le milieu en queftion devienne $\frac{1}{n}$, où l'expofant de x, fçavoir $\beta - \gamma$, devient $= 1$; tous les termes qui y conduifent, à caufe de $\beta = \gamma + 1$ & $\alpha = n - 2\gamma - 1$, feront exprimés par les formules fuivantes: $a^{n-1} b$, $a^{n-3} b^2 c^1$, $a^{n-5} b^3 c^2$, $a^{n-7} b^4 c^3$, &c. dont la fomme, après y avoir joint leurs coéfficiens, divifée par N^n donne la probabilité pour ce milieu $\frac{1}{n}$. De même pour que le milieu devienne $-\frac{1}{n}$, & partant $\beta - \gamma = -1$, on aura $\gamma = \beta + 1$ & $\alpha = n - 2\beta - 1$, d'où les termes qui produifent ce milieu feront: $a^{n-1} c$, $a^{n-3} b c^2$, $a^{n-5} b^2 c^3$, $a^{n-7} b^3 c^4$, $a^{n-9} b^5 c^4$, &c.

Si l'on veut que le milieu fe trouve $= +\frac{2}{n}$, ou qu'il foit $\beta - \gamma = 2$, et partant $\beta = \gamma + 2$ & $\alpha = n - 2\gamma - 2$, tous les termes qui produifent ce milieu feront $a^{n-2} b^2$, $a^{n-4} b^3 c$, $a^{n-6} b^4 c^2$, $a^{n-8} b^5 c^3$, $a^{n-10} b^6 c^4$, &c. Or pour que le milieu foit $-\frac{2}{n}$, les termes qui le produifent, à caufe de $\beta - \gamma = -2$ & partant $\alpha = n - 2\beta - 2$, feront $a^{n-2} c^2$, $a^{n-4} b c^3$, $a^{n-6} b^2 c^4$, $a^{n-8} b^3 c^5$, $a^{n-10} b^4 c^6$, &c. où l'on doit continuer ces formules tant que l'expofant de a demeure pofitif; & il eft très-facile de continuer cette opération pour tous le milieux différens qui peuvent avoir lieu.

Maintenant il fera très-aifé de réfoudre cette queftion en général, lorsque le Quart-de-cercle eft fuppofé tel que parmi un très grand nombre N d'obfervations, il y en ait a qui ayent la même erreur $= \alpha$, b obfervations qui produifent la même erreur $= \beta$, c obfervations qui ayent la même erreur

erreur $= \gamma$ & d obſervations dont l'erreur ſoit $= \delta$, &c. où α, β, γ, δ, marquent en général des nombres quelconques poſitifs ou négatifs, de ſorte qu'on ait

$$N = a + b + c + d + e + \&c.$$

Cela poſé ſi l'on veut ſçavoir la probabilité, qu'ayant fait n obſervations, la ſomme de tous les nombres tirés (ſuppoſant qu'à chaque obſervation réponde un billet, comme ci-deſſus) ſoit ou 0, ou 1, ou 2, ou 3, ou en général λ, on n'a qu'à développer cette puiſſance:

$$(a x^{\alpha} + b x^{\beta} + c x^{\gamma} + d x^{\delta} + \&c.)^{n}$$

& à prendre la ſomme de tous les termes affectés par la même puiſſance x^{λ}, qui étant diviſée par N^{n}, donnera la probabilité qui convient à la ſomme de tous les nombres tirés $= \lambda$, ou bien à leur milieu $\frac{\lambda}{n}$. Toutes ces opérations ſe feront ſans aucune difficulté, de la même manière que nous l'avons enſeigné ci-deſſus.