vnde fit

$$R = \frac{5r}{\lambda^{95-a}} \text{ et } \frac{R}{(a)(a-20)} = \frac{5r}{\lambda^{95-a}(a)(a-20)}.$$

VI. Casus

quo $d = 25$ ideoque $b = a - 25$.

Hoc casu erit

$$r = (93)(68)\lambda^{2} + (88)(63)\lambda^{7} + (83)(58)\lambda^{12} \ldots (a+3)(a-22)\lambda^{92-a}.$$

vnde fit

$$R = \frac{5r}{\lambda^{95-a}} \text{ et } \frac{R}{(a)(a-25)} = \frac{5r}{\lambda^{95-a}(a)(a-25)}.$$

VII. Casus

quo $d = 30$ ideoque $b = a - 30$.

Tum ergo erit

$$r = (93)(63)\lambda^{2} + (88)(58)\lambda^{7} + (83)(53)\lambda^{12} \ldots (a+3)(a-27)\lambda^{92-a}$$

vnde fit

$$R = \frac{5r}{\lambda^{95-a}} \text{ et } \frac{R}{(a)(a-30)} = \frac{5r}{\lambda^{95-a}(a)(a-30)}.$$

SO-

SOLVTIO
QVARVNDAM QVAESTIONVM
DIFFICILIORVM IN CALCVLO PROBABILIVM.

§. 1.

His quaestionibus occasionem dedit ludus passim publice institutus, quo ex nonaginta schedulis, numeris 1, 2, 3, 4 . . . . 90 signatis, statis temporibus quinae schedulae forte extrahi solent. Hinc ergo huiusmodi quaestiones oriuntur: quanta scilicet sit probabilitas vt, postquam datus extractionum numerus fuerit peractus, vel omnes nonaginta numeri exierint, vel saltem 89, vel 88, vel pauciores. Has igitur quaestiones, vtpote difficillimas, hic ex principiis calculi Probabilium iam pridem vsu receptis, resoluere constitui. Neque me deterrent obiectiones Illustris *D'Alembert*, qui hunc calculum suspectum reddere est conatus. Postquam enim summus Geometra studiis mathematicis valedixit, iis etiam bellum indixisse videtur, dum pleraque fundamenta solidissime stabilita euertere est aggressus. Quamvis enim hae obiectiones apud ignaros maximi ponderis esse debeant, haud tamen metuendum est, inde ipsi scientiae vllum detrimentum allatum iri.

§. 2. Qui in huiusmodi inuestigationibus elaborarunt, facile perspicient, resolutionem harum quaestionum calculos

culos

culos maxime intricatos postulare, quos autem mihi beneficio certorum characterum, quibus iam aliquoties optimo successu sum vsus, superare licuit. Huiusmodi scilicet character: $[\frac{p}{q}]$, quo fractio vncinulis inclusa repraesentatur, mihi denotat istud productum:

$$\frac{p}{1}\cdot\frac{p-1}{2}\cdot\frac{p-2}{3}\cdot\frac{p-3}{4}\;\ldots\ldots\;\frac{p-q+1}{q}$$

cuius ergo valor quouis casu facile exhiberi potest. Circa hunc characterem autem sequentia notasse iuuabit:

1°). Semper est $[\frac{p}{q}] = [\frac{p}{p-q}]$. 2°). Si $q = 0$ semper est $[\frac{p}{0}] = 1$. 3°). Si q sit vel numerus negatiuus, vel maior quam p, valor ipsius $[\frac{p}{q}]$ semper est $= 0$. 4°). Deinde si p numerus negatiuus, tum istam formulam: $-[\frac{p}{q}]$ reducere licet ad hanc: $\pm[\frac{p+q-1}{q}]$, vbi signum $+$ valet si q numerus par, $-$ vero si impar; vnde patet istam formam etiam in hanc mutari posse: $\pm[\frac{p+q-1}{p-1}]$.

§. 3. His praemissis quaestiones ex ludo memorato natas generalissime sum tractaturus. Numerum scilicet schedularum denotabo littera m, quas singulas litteris diuersis a, b, c, d, etc. signatas assumo, ne vsus numerorum absolutorum confusionem pariat. Deinde quouis tractu ex his schedulis i schedulas extrahi supponam, vnde numerus omnium variationum, quae in his tractibus contingere possunt, erit $= [\frac{m}{i}]$. Praeterea si numerus tractuum successiue institutorum fuerit $= n$, ex principiis combinationum patet, numerum omnium variationum, quae contingere queant, esse $[\frac{m}{i}]^n$. Hoc ergo modo sequentia Problemata percurram.

Pro-

nefi- fuc- cter: de- Circa uper vel De- $[\frac{p}{q}]$ valet for- orato fche- erfis abfo- c his om- funt, infti- atet, effe m. Pro-

Problema I.

Si numerus schedularum litteris a, b, c, d, etc. signatarum sit m, indeque quolibet tractu extrahantur i schedulae, atque iam numerus tractuum peractorum fuerit $= n$, quaeritur, quanta sit probabilitas vt omnes m litterae a, b, c, d, etc. exierint.

Solutio.

§. 4. Hic primo obseruandum est, quoniam in n tractibus numerus schedularum extractarum est $i\,n$, omnes litteras exire non posse, nisi fuerit $in > m$, ideoque $n > \frac{m}{i}$, vel saltem non minus. Denotet iam Δ numerum omnium variationum, quae in his n tractibus euenire possunt, eritque vt iam indicauimus $\Delta = [\frac{m}{i}]^n$, qui cum sit numerus omnium casuum possibilium, pro nostra quaestione hinc omnes casus excludi debent, qui pauciores quam m litteras continent. Primo ergo, si numerus litterarum tantum esset $= m - 1$, quod m modis fieri potest, numerus casuum qui tantum $m - 1$ litteras, vel pauciores continent, erit $m[\frac{m-1}{i}]^n$, quem numerum ponamus $= A$. Simili modo, si binae litterae excludantur, quod $[\frac{m}{2}]$ modis fieri potest, numerus casuum tantum $m-2$, vel pauciores litteras continentium, erit $[\frac{m}{2}].[\frac{m-2}{i}]^n$, quem numerum littera B indicemus. Porro sit C numerus omnium casuum, qui tantum $m-3$ litteras vel pauciores continent, eritque $C = [\frac{m}{3}].[\frac{m-3}{i}]^n$. Eodemque modo fit

$$D = [\tfrac{m}{4}][\tfrac{m-4}{i}]^n;\; F = [\tfrac{m}{5}][\tfrac{m-5}{i}]^n;\ \text{etc.}$$

Atque his elementis constitutis inueni numerum omnium casuum, qui omnes m litteras contineant, esse

$$\Delta - A + B - C + D - \text{etc.}$$

quem numerum indicemus littera Σ.

Δ –

§. 5. Euidens eſt hunc numerum Σ per ſolam Theoriam combinationum determinari poſſe, ideoque nulli prorſus dubio eſſe obnoxium, ita vt tanquam veritas geometrica ſpectari poſſit. Hinc autem ſecundum Principia Probabilium numerus caſuum fauorabilium per numerum omnium caſuum poſſibilium diuiſus praebebit probabilitatem quaeſitam, quae ergo ſi ponatur $= \Pi$, erit $\Pi = \frac{\Sigma}{\Delta}$. Quare cum ſit

$$\Sigma = \Delta - A + B - C + D - \text{ etc.},$$

pro litteris Δ, A, B, C, etc. valores aſſignatos ſubſtituendo erit

$$\Sigma = [\tfrac{m}{i}]^n - [\tfrac{m}{1}][\tfrac{m-1}{i}]^n + [\tfrac{m}{2}][\tfrac{m-2}{i}]^n - [\tfrac{m}{3}][\tfrac{m-3}{i}]^n + \text{ etc.}$$

Haec forma per $[\frac{m}{i}]^n$ diuiſa dabit probabilitatem, quod poſt n tractus omnes m litterae exierint, vnde neceſſario iſta expreſſio Σ ſemper nihilo aequalis eſſe debet, quoties fuerit $n < \frac{m}{i}$, quod etiam calculum pro caſibus ſimplicioribus inſtituenti reuera euenire patebit. Veluti ſi fuerit $m = 7$, $n = 3$, $i = 2$ erit

$$[\tfrac{m}{i}]^n = 21^3 = 9261;$$
$$[\tfrac{m}{1}][\tfrac{m-1}{i}] = 7 \cdot 15^3 = 23625;$$
$$[\tfrac{m}{2}][\tfrac{m-2}{i}]^n = 21 \cdot 10^3 = 21000;$$
$$[\tfrac{m}{3}][\tfrac{m-3}{i}]^n = 35, 6^3 = 7560$$
$$[\tfrac{m}{4}][\tfrac{m-4}{i}]^n = 35 \cdot 3^3 = 945;$$
$$[\tfrac{m}{5}][\tfrac{m-5}{i}]^n = 21 \cdot 1^3 = 21;$$
$$[\tfrac{m}{6}][\tfrac{m-6}{i}]^n = 0;$$

vnde prodit $\Sigma = 0$.

§. 6. Dummodo ergo n non ſit minus quam $\frac{m}{i}$ ſemper erit $\Sigma = 0$; at ſi fuerit $n = \frac{m}{i}$, ſiue $m = i\,n$, hic caſus maxime eſt memorabilis; tum enim formula noſtra pro Σ inuenta reduci poteſt ad productum ex meris factoribus conſtans. Erit enim

quod

n Theo-
li pror-
eometri-
Probabi-
omnium
aeſitam,
cum ſit
endo erit
]ⁿ + etc.
uod poſt
rio iſta
quoties
nplicioři-
t m = 7,
quam m/i
i n, hic
a noſtra
is facto-
quod

$$\Sigma = [\tfrac{m}{i}] \cdot [\tfrac{m-i}{i}] \cdot [\tfrac{m-2i}{i}] \cdot [\tfrac{m-3i}{i}] \ldots [\tfrac{i}{i}];$$

quod vt exemplo illuſtremus, ſumamus vt ante $n = 3$ et $i = 2$, ſit vero $m = 6$, atque forma prior pro Σ data praebet $\Sigma = 90$, altera vero dat $\Sigma = 15 \cdot 6 \cdot 1 = 90$.

§. 7. Quanquam autem hae formulae, ſi pro n maiores numeri accipiantur, valde fiunt prolixae: tamen per logarithmos haud difficile erit quouis caſu valorem probabilitatis Π aſſignare. Cum enim ſit

$$\frac{A}{\Delta} = m[\tfrac{m-i}{m}]^n;\quad \frac{B}{A} = \frac{m-1}{2}[\tfrac{m-1-i}{m-1}]^n;\quad \frac{C}{B} = \frac{m-2}{3}[\tfrac{m-2-i}{m-2}]^n;$$

hinc ſumtis logarithmis erit

$$l\frac{A}{\Delta} = l\,m - n\,l[\tfrac{m}{m-i}];$$
$$l\frac{B}{A} = l\frac{m-1}{2} - n\,l[\tfrac{m-i}{m-1-i}];$$
$$l\frac{C}{B} = l\frac{m-2}{3} - n\,l[\tfrac{m-2}{m-2-i}];$$
etc.

ex quibus colligitur

$$l\frac{A}{\Delta} = l\,m - n\,l[\tfrac{m}{m-i}]$$
$$l\frac{B}{\Delta} = l\frac{A}{\Delta} + l\frac{m-1}{2} - n\,l[\tfrac{m-1}{m-1-i}]$$
$$l\frac{C}{\Delta} = l\frac{B}{\Delta} + l\frac{m-2}{3} - n\,l[\tfrac{m-2}{m-2-i}]$$
etc.

Vnde ergo facile inueniuntur valores $\frac{A}{\Delta}$, $\frac{B}{\Delta}$, $\frac{C}{\Delta}$, etc. quibus inuentis probabilitas quaeſita erit

$$\Pi = 1 - \frac{A}{\Delta} + \frac{B}{\Delta} - \frac{C}{\Delta} + \frac{D}{\Delta} - \text{ etc.}$$

§. 8. Applicemus haec ad caſum ludi initio memorati, quo eſt $m = 90$ et $i = 5$, eritque vt ſequitur:

$$l\frac{A}{\Delta} = l\,90 - n\,l\tfrac{90}{85} \quad = \quad 1,9542425 - n.\,0,0248236$$
$$l\frac{B}{\Delta} = l\frac{A}{\Delta} + l\tfrac{89}{2} - n\,l\tfrac{89}{84} = l\frac{A}{\Delta} + 1,6483600 - n.\,0,0250107$$

$l\frac{B}{A}$

$$l\frac{C}{\Delta} = l\frac{B}{\Delta} + l\frac{88}{3} - n\,l\frac{88}{83} = l\frac{B}{\Delta} + 1,4673614 - n.\,0,0254046$$
$$l\frac{D}{\Delta} = l\frac{C}{\Delta} + l\frac{87}{4} - n\,l\frac{87}{82} = l\frac{C}{\Delta} + 1,3374593 - n.\,0,0257054$$
$$l\frac{E}{\Delta} = l\frac{D}{\Delta} + l\frac{86}{5} - n\,l\frac{86}{81} = l\frac{D}{\Delta} + 1,2355283 - n.\,0,0260133$$
$$l\frac{F}{\Delta} = l\frac{E}{\Delta} + l\frac{85}{6} - n\,l\frac{85}{80} = l\frac{E}{\Delta} + 1,1512676 - n.\,0,0263289$$
$$l\frac{G}{\Delta} = l\frac{F}{\Delta} + l\frac{84}{7} - n\,l\frac{84}{79} = l\frac{F}{\Delta} + 1,0791813 - n.\,0,0266522$$
etc. etc.

§. 9. Perspicuum hic est, quo maior accipiatur numerus tractuum n, eo promptius istam progressionem convergere, ita vt, si n denotet numerum vehementur magnum, semper proxime proditurum sit $\Pi = 1$: tum scilicet maxime erit probabile omnes prorsus m numeros exiisse. Contra autem, si numerus n parum superet minimum valorem $\frac{m}{1} = 18$, euolutio horum terminorum maxime fiet operosa, cum pluribus terminis sit opus, ante quam ad euanescentes perueniatur. Sumamus $n = 100$, vt huic quaestioni respondeamus: quanta sit probabilitas, vt post centum tractus omnes nonaginta numeri exierint? Hic ergo erit

$l\frac{A}{\Delta} = 9,47188$, ergo $\frac{A}{\Delta} = 0,2964$
$l\frac{B}{\Delta} = 8,61917$ — $\frac{B}{\Delta} = 0,0416$
$l\frac{C}{\Delta} = 7,54607$ — $\frac{C}{\Delta} = 0,0035$
$l\frac{D}{\Delta} = 6,31299$ — $\frac{D}{\Delta} = 0,0002$
$l\frac{E}{\Delta} = 4,94719$ — $\frac{E}{\Delta} = 0,0000$

ergo $\Pi = 0,7419$.

§. 10. Sit $n = 200$ et pro hoc casu erit
$l\frac{A}{\Delta} = 6,98952$, ergo $\frac{A}{\Delta} = 0,00097$
$l\frac{B}{\Delta} = 3,63574$, ergo $\frac{B}{\Delta} = 0,00000$

vnde

vnde 1. 0,0254046
omnes 1. 0,0257054
titudini n. 0. 0260133
n. 0,0263289
Pc 1. 0,0266522
ccipiatur nu-
lionem con-
tur magnum,
ras co licet maxime
merun sse. Contra
subduć lorem $\frac{m}{1} = 18$,
a, eum plu-
vnde entes perue-
exierir i respondea-
ractus omnes
$\Sigma' = [$
Vnde
Δ, A
logarit
facile
litas c
erit
En
vnde

vnde colligitur probabilitas, quod post 200 extractiones omnes numeri exierint, $\Pi = 0,99903$, quae probabilitas certitudini omnes exiisse valde est propinqua.

Problema II.

Positis quae in Problemate praecedente sunt constituta quaeritur, quanta futura sit probabilitas, vt saltem $m-1$ litterae post n tractus exierint.

Solutio.

§. 11. Hic ergo numerus tractuum omnes m litteras continentium non excluditur, vnde patet tractuum numerum nostro praesenti casu fore maiorem. Calculo autem subducto, si numerus horum casuum ponatur Σ', inueni fore

$$\Sigma' = \Delta - B + 2\,C - 3\,D + 4\,E - 5\,F + \text{etc.}$$

vnde probabilitas, quod post n tractus saltem $m-1$ litterae exierint, erit $\Pi' = \frac{\Sigma'}{\Delta}$, ideoque

$$\Pi' = 1 - \frac{B}{\Delta} + 2\,\frac{C}{\Delta} - 3\,\frac{D}{\Delta} + 4\,\frac{E}{\Delta} - \text{etc.}$$

§. 12. Hoc ergo casu erit

$$\Sigma' = \left[\tfrac{m}{1}\right]^n - \left[\tfrac{m}{2}\right]\left[\tfrac{m-2}{1}\right]^n + 2\left[\tfrac{m}{3}\right]\left[\tfrac{m-3}{1}\right]^n - \left[\tfrac{m}{4}\right]\left[\tfrac{m-4}{1}\right]^n + \left[\tfrac{m}{5}\right]\left[\tfrac{m-5}{1}\right]^n - \text{etc.}$$

Vnde si applicatio fiat ad ludum memoratum, cum litterae Δ, A, B, C, D, etc. eosdem retineant valores, calculus per logarithmos institutus ex inuentis valoribus $\frac{B}{\Delta}, \frac{C}{\Delta}, \frac{D}{\Delta}$, etc. facile perficietur. Ita si post 100 tractus requiratur probabilitas quod saltem 89 numeri exierint, ob

$$\frac{B}{\Delta} = 0,0416;\ \frac{C}{\Delta} = 0,0035;\ \frac{D}{\Delta} = 0,0002;$$

 erit

erit ista probabilitas $\Pi' = 0,9648$. Vnde sequitur probabilitatem, quod tantum pauciores numeri exierint, fore $0,0352$.

Problema III.

Iisdem positis, vt hactenus, quaeritur: quanta sit probabilitas, vt saltem $m-2$ litterae post n tractus fuerint extractae.

Solutio.

§. 13. Numerus omnium casuum, qui saltem $m-2$ litteras contineant, per litteras ante stabilitas Δ, A, B, C, D, etc. ita definitur, vt sit

$$\Sigma'' = \Delta - C + 3D - 6E + 10F - \text{etc.}$$

quae expressio, restitutis valoribus, hoc modo se habet:

$$\Sigma'' = [\tfrac{m}{i}]^n - [\tfrac{2}{2}][\tfrac{m}{2}][\tfrac{m-2}{i}]^n + [\tfrac{3}{2}][\tfrac{m}{3}][\tfrac{m-3}{i}]^n - [\tfrac{4}{2}][\tfrac{m}{4}][\tfrac{m-4}{i}]^n$$

atque hinc probabilitas erit

$$\Pi = 1 - \frac{C}{\Delta} + 3\frac{D}{\Delta} - 6\frac{E}{\Delta} + 10\frac{F}{\Delta} - \text{etc.}$$

Pro ludo igitur ante memorato, si quaeratur probabilitas, vt post 100 tractus saltem 88 numeri exierint, ea reperietur $\Pi'' = 0,9971$, vnde probabilitas, quod contrarium euenit, erit $= 0,0029$.

Problema generale.

Iisdem positis vt ante, quaeritur quanta sit probabilitas, vt post n tractus saltem $m-\lambda$ litterae exierint.

Solutio.

Numerus casuum ad minimum tot litteras continentium per nostros characteres ita commode exprimitur, vt sit

$$[\tfrac{m}{i}]^n - [\tfrac{\lambda}{\lambda}][\tfrac{m}{1+\lambda}][\tfrac{m-1-\lambda}{i}]^n + [\tfrac{\lambda+1}{\lambda}][\tfrac{m}{\lambda+2}][\tfrac{m-\lambda-2}{i}]^n$$
$$- [\tfrac{\lambda+2}{\lambda}][\tfrac{m}{\lambda+3}][\tfrac{m-\lambda-3}{i}]^n + \text{etc.}$$

quae formula per terminum primum $[\frac{m}{i}]^n$ diuisa praebebit probabilitatem quaesitam.

§. 15. In his probabilitatibus aestimandis vtique assumitur omnes litteras ad extrahendum aeque esse procliues, quod autem Ill. *D'Alembert* negat assumi posse. Arbitratur enim, simul ad omnes tractus iam ante peractos respici oportere; si enim quaepiam litterae nimis crebro fuerint extractae, tum eas in sequentibus tractibus rarius exituras; contrarium vero euenire si quaepiam litterae nimis raro exierint. Haec ratio, si valeret, etiam valitura esset si sequentes tractus demum post annum, vel adeo integrum saeculum, quin etiam si in alio quocunque loco instituerentur; atque ob eandem rationem etiam ratio haberi deberet omnium tractuum, qui iam olim in quibuscunque terrae locis fuerint peracti, quo certe vix quicquam absurdius excogitari potest.

Demonstratio solutionum praecedentium.

§. 16. Cum numerus omnium litterarum a, b, c, d, etc. quibus singulas schedulas signatas assumimus, sit $= m$, hunc litterarum complexum vocabo systema principale, vnde alia systemata deriuata, quae pauciores litteras contineant, formari conueniet, quae ita in ordines dispesco, vt ordo primus complectatur omnia systemata quae tantum $m-1$ litteras contineant, quorum ergo numerus erit $= m$. Ad ordinem vero secundum referam omnia systemata in quibus litterarum numerus est $m-2$, quorum numerus erit $\frac{m}{1} \cdot \frac{m-1}{2} = [\frac{m}{2}]$. Ordo autem tertius habebit omnia systemata, vbi numerus litte-

litterarum est $m-3$, quorum numerus est $\frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}\cdot\frac{m-2}{3}=\left[\frac{m}{3}\right]$. Eodem modo numerus systematum quarti ordinis tantum $m-4$ litteras continentium erit $\left[\frac{m}{4}\right]$; quinti autem ordinis, vbi tantum $m-5$ litterae insunt, numerus systematum erit $\left[\frac{m}{5}\right]$, et ita porro.

§. 17. Quae quo fiant clariora, systema principale his sex litteris $a\,b\,c\,d\,e\,f$ constans contemplemur, ex quo ergo sequentia deriuata cuiusque ordinis resultabunt, quae hac tabula exhibemus:

I.	II.	III.	IV.	V.
$abcde$	$abcd$	abc	ab	a
$abcdf$	$abce$	abd	ac	b
$abcef$	$abcf$	abe	ad	c
$abdef$	$abde$	abf	ae	d
$acdef$	$abdf$	acd	af	e
$bcdef$	$abef$	ace	bc	f
	$acde$	acf	bd	
	$acdf$	ade	be	
	$acef$	adf	bf	
	$adef$	aef	cd	
	$bcde$	bcd	ce	
	$bcdf$	bce	cf	
	$bcef$	bcf	de	
	$bdef$	bde	df	
	$cdef$	bdf	ef	
		bef		
		cde		
		cdf		
		cef		
		def		

$\frac{-1}{2}\cdot\frac{m-2}{3}=\left[\frac{m}{3}\right]$.
dinis tantum
autem or-
: systematum

na principale
ır, ex quo
ıbunt, quae

vbi

vbi ergo numerus systematum ordinis primi est $6=\left[\frac{6}{1}\right]$, ordinis secundi $15=\left[\frac{6}{2}\right]$, ordinis tertii $20=\left[\frac{6}{3}\right]$, quarti $=15=\left[\frac{6}{4}\right]$, quinti $=6=\left[\frac{6}{5}\right]$.

§. 18. Nunc euidens est singula systemata cuiusque ordinis inferioris in omnibus superioribus contineri, quod quoties eueniat plurimum interest obseruasse. Ita pro casu $m=6$ systema primi ordinis $a\,b\,c\,d\,e$ in ordine hoc semel occurrit. At systema secundi ordinis $a\,b\,c\,d$ in primo ordine bis, in secundo semel occurrit. Deinde systema tertii ordinis $a\,b\,c$ in primo ordine ter, in secundo ter, at in tertio semel reperitur. Systema quarti ordinis $a\,b$ in primo ordine quater, in secundo sexies, in tertio quater, in quarto semel inest. Denique systema quinti ordinis in primo ordine quinquies occurrit, in secundo decies, in tertio decies, in quarto quinquies, in quinto semel. Ex quo manifestum est hos numeros conuenire cum coëfficientibus binomii ad potestates eleuato, siquidem omnia systemata in ipso principali semel continentur.

§. 19. Hinc ergo in genere pro quouis systemate cuiuspiam ordinis inferioris facile assignari potest, quot modis in quolibet ordine superiore occurrat, id quod sequens tabula manifesto declarabit, vbi systema principale littera O, systemata autem primi, secundi, tertii, quartii, etc. ordinis notis romanis I, II, III, IV V, VI denotabo.

	O	I	II	III	IV	V	VI
m	1						
$m-1$	1	1					
$m-2$	1	2	1				
$m-3$	1	3	3	1			
$m-4$	1	4	6	4	1		
$m-5$	1	5	10	10	5	1	
$m-6$	1	6	15	20	15	6	1
— —	—	—	—	—	—	—	—
— —	—	—	—	—	—	—	—
— —	—	—	—	—	—	—	—
$m-\lambda$	$[\frac{\lambda}{0}]$	$[\frac{\lambda}{1}]$	$[\frac{\lambda}{2}]$	$[\frac{\lambda}{3}]$	$[\frac{\lambda}{4}]$	$[\frac{\lambda}{5}]$	$[\frac{\lambda}{6}]$

§. 20. Consideremus nunc numerum schedularum, quae quouis tractu tam ex systemate principali actu extrahuntur, quam ex systematibus deriuatis extrahi concipi possunt, quae quidem ex principali facillime deduci poterunt. Quodsi quouis tractu vnica littera extrahatur, pro systemate principali numerus tractuum diuersorum erit $=[\frac{m}{1}]$; sin autem binae litterae simul extrahantur, numerus omnium tractuum diuersorum erit $\frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}=[\frac{m}{2}]$. Si ternae litterae quouis tractu extrahantur, numerus tractuum diuersorum erit $[\frac{m}{3}]$, atque in genere, si i litterae quouis tractu extrahantur, numerus omnium tractuum diuersorum erit $[\frac{m}{i}]$. Sin autem tales extractiones etiam ex systematibus deriuatis fieri concipiantur, pro quolibet systemate ordinis primi numerus tractuum diuersorum erit $[\frac{m-1}{i}]$, ordinis secundi $=[\frac{m-2}{i}]$, ordinis tertii $[\frac{m-3}{i}]$, et ita porro.

§. 21. Quodsi iam hae extractiones bis repetantur, quoniam pro systemate principali quemlibet tractum non solum

a schedularum, li actu extra- hi concipi pos- educi poterunt. , pro systemate it $=[\frac{m}{1}]$; sin nerus omnium ternae litterae m diuersorum ouis tractu ex- rum erit $[\frac{m}{i}]$. natibus deriuatis is primi nume- secundi $=[\frac{m-2}{i}]$,

bis repetantur, tractum non solum

solum reliquae omnes sequi possunt, sed etiam ipsae, numerus diuersorum casuum erit $[\frac{m}{i}]^2$. Si tres extractiones successiue instituantur, omnium casuum numerus erit $[\frac{m}{i}]^3$; atque in genere, si n extractiones sibi succedant, numerus omnium casuum possibilium erit $[\frac{m}{i}]^n$, quem numerum littera Δ supra designauimus, ita vt sit $\Delta=[\frac{m}{i}]^n$.

§. 22. Simili modo numerus omnium casuum, qui in quolibet systemate primi ordinis locum habere possunt, est $[\frac{m-1}{i}]^n$; quare cum horum systematum numerus sit $[\frac{m}{1}]$, numerus omnium casuum, quem primus ordo praebet, erit $[\frac{m}{1}][\frac{m-1}{i}]^n$, quemque littera A designemus, ita vt sit $A=[\frac{m}{1}][\frac{m-1}{i}]^n$. Eodem modo facile intelligitur, numerum omnium casuum, qui ex singulis systematibus oriri possunt esse

pro ordine secundo $B=[\frac{m}{2}][\frac{m-2}{i}]^n$,

pro ordine tertio $C=[\frac{m}{3}][\frac{m-3}{i}]^n$,

pro ordine quarto $D=[\frac{m}{4}][\frac{m-3}{i}]^n$,

et ita porro. His iam praemissis solutiones singulorum Problematum praecedentium facile expedire licebit.

Pro Problemate primo.

§. 23. Cum in hoc Problemate ex omnibus casibus possibilibus, quorum numerus est Δ, ii enumerari debeant, qui omnes m litteras inuoluunt, inde excludamus primo omnes casus, qui tantum $m-1$ litteras, vel pauciores continent, quod fiet si omnes casus possibiles primi ordinis, quorum numerus est A, auferamus. Hoc enim modo casus, qui $m-1$ litteras continent, e medio tollentur. At vero casus qui $m-2$ litteras continent, bis auferentur hoc modo; vnde

vnde in formula $\Delta - A$ femel deficient, ita vt eorum numerus $1 - 2 = -1$. At pro cafibus $m - 3$ litteras continentibus numerus, quo in formula $\Delta - A$ occurrent, erit $1 - 3 = -2$. Simili modo pro $m-4$ habebimus $1-4=-3$, et ita porro, qui ergo cafus deficientes iterum reftitui debebunt.

§. 24. Cafus autem formae $m - 2$ femel deficientes reftituentur, fi ad formulam $\Delta - A$ addatur B. Hoc autem modo terminos formae $m - 3$ ter adduntur, cum tamen bis tantum deficiffent, ergo nunc femel abundabunt, fiue index erit $+1$. At forma $m-4$ fexies adiicitur, cum tantum ter defuiffet, ideoque index erit $+ 2$. Simili modo pro terminis formae $m - 5$ index erit $10 - 4 = + 6$, et ita porro.

§. 25. Vt igitur hos cafus iam abundantes iterum tollamus, fubtrahamus omnes cafus ordinis tertii $=$ C. Hoc enim modo termini formae $m - 3$ penitus tollentur, reliqui autem nimis crebro aufferentur, fcilicet pro ordine $m - 4$ index erit -1, pro ordine $m - 5$, index erit -4, etc.

§. 26. Quia forma $m - 4$ femel deficit, reftitutio fiet addendo litteram D. Inferiores autem nunc redundabunt fecundum indices 1, 5, 15, etc. vnde E fubtrahendo hi tollentur; quod minis fubtractum eft additione litterae F reftituetur, et ita porro.

§. 27. Hinc iam fatis manifeftum eft, ex forma Δ fublatos effe omnes cafus pauciores quam m litteras continentes, quorum ergo reftantium numerus erit

$$\Delta - A + B - C + D - E + F - \text{etc.}$$

quem

quem indicauimus per Σ, ficque Solutio primi Problematis firmiter eft demonftrata.

Pro Problemate fecundo.

§. 28. Manifeftum eft, fecundum idem, quo hic vfi fumus, ratiocinium procedendo, demonftrationem pro fecundi Problematis folutione adornari poffe. Nec opus erit omnia tam prolixe exponere. Cum enim ex numero cafuum poffibilium Δ ii fint enumerandi, qui tantum $m-1$ litteras continent, ftatim patet, hinc excludendos effe omnes cafus $m - 2$ litteras continentes, quod fiet fi a numero Δ numerus B fubtrahatur. At tabula fupra § 19 data declarat, hoc modo terminos formae $m - 3$ ter ablaturos effe, cum tamen femel tantum fubtrahi debuiffent, et ita de reliquis formis. Ad eos reftituendos addatur numerus 2 C, quo numeri deficientes formae $m - 3$ penitus tollentur: redundabunt autem numeri formae $m - 4$, indice 3; ac magis fuperfluunt fequentes. Quo priores tollantur iterum fubtrahi debet numerus 3 D, quo fublato termini formae $m - 4$ exclufi erunt. Deficientes numeri formae $m - 5$ et fequentium iterum additione numeri 4 E erunt reftituendi, et ita porro, quibus operationibus peractis numerus reftantium erit

$$\Sigma' = \Delta - B + 2C - 3D + 4E - 5F + \text{etc.}$$

ficque folutio fecundi Problematis eft demonftrata.

Pro Problemate tertio.

§. 29. Hic a numero Δ fubtrahi debet numerus C, quo cafus $m - 3$ fchedularum excludantur, et quia hoc pacto numerus $m - 4$ quater fubtrahitur, cum tantum femel

mel redundabat, iterum addi debet numerus 3 D, quo ille et ſequentes deficientes reſtituantur. Quod excedit ſubtractione numeri 6 E tolletur: deficientes vero additione numeri 10 F reſtituendi ſunt, et ita porro, vnde numerus caſuum $m-2$ litteras continentium erit

$$\Sigma'' = \Delta - C + 3D - 6E + 10F - \text{etc.}$$

quemadmodum in ſolutione tertii Problematis aſſeueraui. Hoc modo igitur haec etiam ſolutio firmiter eſt demonſtrata.

Euleri Opuscula Tom. II TAB. I

Fig. 1.

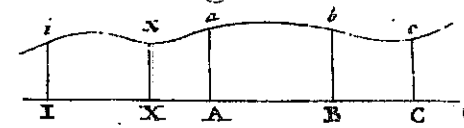

Fig. 2.

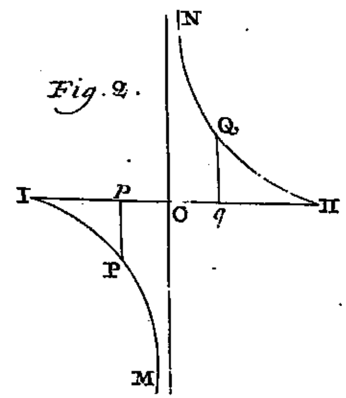

Fig. 3.

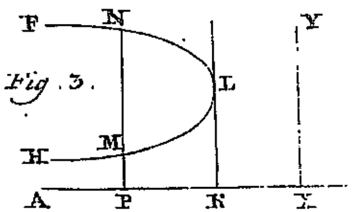

Fig. 4.

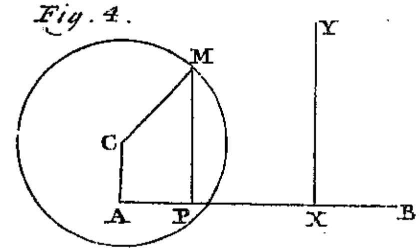

Fig. 6.