E586

CONSIDERATIONES
SVPER
THEOREMATE FERMATIANO
DE RESOLVTIONE NVMERORVM IN NVMEROS POLYGONALES.

§. 1.

Hoc theorema *Fermatianum* in ſe complectitur ſequentes aſſertiones numero infinitas:

I. Omnem numerum eſſe ſummam trium trigonalium vel pauciorum.

II. Omnem numerum eſſe ſummam quatuor tetragonalium ſeu quadratorum, vel pauciorum.

III. Omnem numerum eſſe ſummam quinque pentagonalium, vel pauciorum.

IV. Omnem numerum eſſe ſummam, ſex hexagonalium; vel pauciorum.

V. Omnem numerum eſſe ſummam ſeptem heptagonalium, vel pauciorum.

etc. etc.

Quorum theorematum cum *Fermatius* asseuerasset, demonstrationem a se esse inuentam, dubitari certe nequit, eius demonstrationem certissimis principiis fuisse innixam; ex quo eo magis dolendum est, eam post eius obitum prorsus periisse, vt nullum plane vestigium reperiri potuerit, cum sine dubio plerique Geometrae in his demonstrationibus inuestigandis frustra desudauerint. Hinc quidem excipienda est secunda assertio de resolutione numerorum in quatuor quadrata, cuius perfecta demonstratio ab Ingeniosissimo *La Grange* in lucem est protracta, quae autem ex eiusmodi principiis est deducta, vt inde nullum plane subsidium ad reliqua demonstranda expectari possit.

§. 2. Ingens igitur discrimen inter resolutionem in quadrata et reliquos numeros polygonales intercedere est censendum, quod potissimum in hoc consistit, quod resolutio in quaterna quadrata ad omnes plane numeros tam fractos quam integros se extendat, cum resolutio in alios polygonales tantum ad numeros integros restringatur, atque adeo nonnisi sub certa limitatione veritati sit consentanea. Resolutio enim in ternos trigonales manifesto tantum ad numeros integros adstringitur, cum infinitae dentur fractiones, quas nullo modo in ternas partes, in formula $\frac{xx+x}{2}$ contentas, resoluere licet; veluti si pro fractione $\frac{1}{3}$ statuere vellemus

$$\frac{1}{3} = \frac{xx+x}{2} + \frac{yy+y}{2} + \frac{zz+z}{2},$$

multiplicando per 8 deberet esse

$$4 = 4xx + 4x + 4yy + 4y + 4zz + 4z,$$

hincque tribus vnitatibus additis fieret

$$7 = (2x+1)^2 + (2y+1)^2 + (2z+1)^2.$$

Demon-

Demonstratum autem est, numerum 7 nullo modo esse posse summam trium quadratorum. Quocirca si quis demonstrationem huius partis ita instituere voluerit, vt, proposito numero quocunque N, hanc aequationem:

$$N = \frac{xx+x}{2} + \frac{yy+y}{2} + \frac{zz+z}{2}$$

sibi resoluendam proponeret, oleum atque operam perdiderit.

§. 3. Porro vero etiam resolutio in quinque pentagonales ad numeros integros adstringitur, sed longe alio modo atque in trigonalibus vsu venit. Nam si inter numeros pentagonales etiam fractiones in formula $\frac{3xx-x}{2}$ contentas admittere velimus, tum omnes plane numeros adeo in quatuor pentagonales discerpere liceret. Proposito enim numero quocunque N si statuamus

$$N = \frac{3xx-x}{2} + \frac{3yy-y}{2} + \frac{3zz-z}{2} + \frac{3vv-v}{2},$$

per 24 multiplicando fiet

$$24N = 36xx - 12x + 36yy - 12y + 36zz - 12z + 36vv - 12v$$

vnde quatuor vnitatibus additis fiet

$$24N + 4 = (6x-1)^2 + (6y-1)^2 + (6z-1)^2 + (6v-1)^2$$

Cum igitur numerus $24N+4$ certo sit summa quatuor quadratorum, quae sit $aa + bb + cc + dd$, hinc reperiemus

$$x = \frac{a+1}{6},\ y = \frac{b+1}{6},\ z = \frac{c+1}{6},\ v = \frac{d+1}{6}$$

atque horum radicum numeri pentagonales iunctim sumti numero proposito N aequabuntur. Nihilo vero minus si tantum numeros integros admittamus, vti *Fermatius* manifesto postulat, vtique dantur eiusmodi numeri, quos in pauciores quam quinque pentagonales neutiquam resoluere licet.

§. 4.

§. 4. Praeterea vero, etiamsi hinc fractiones excludamus et tantum numeros integros admittere velimus, tamen nouam limitationem adiicere, atque ex ordine pentagonalium omnes eos, quorum radices sunt numeri negatiui, excludere debemus. Cum enim formula generalis numerorum pentagonalium $\frac{3xx-x}{2}$ pro radicibus x negatiue sumptis praebeat hos numeros: 2, 7, 15, 26, 40, etc. si etiam hos admittere vellemus, non amplius quinque, sed tantum tres numeri pentagonales sufficerent omnibus plane numeris producendis, atque talis gemina limitatio multo magis pro sequentibus numeris polygonalibus est necessaria, vt theoremata *Fermatiana* veritati sint consentanea, quae limitatio sine dubio in caussa est, quod nulli adhuc Geometrae post *Fermatium* ad demonstrationem horum casuum penetrare licuerit.

§. 5. Cum igitur in demonstrationibus, quae desiderantur, harum restrictionum ratio necessario sit habenda, ipsa Theoremata *Fermatiana* sub alia forma repraesentemus, quae istas limitationes iam in se contineat, quod commodissime sequenti modo fieri posse videtur.

Pro resolutione in numeros trigonales.

§. 6. Consideretur series potestatum

$$1 + x + x^3 + x^6 + x^{10} + x^{15} + x^{21} + x^{28} + x^{36} + x^{45}$$

in qua potestates ipsius x progrediuntur secundum ipsos numeros trigonales

0, 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, etc.

ac primo manifestum est, si huius seriei quadratum capiatur, alias potestates ipsius x occurrere non posse, nisi quarum exponentes sint summae duorum numerorum trigonalium.

Eo es excluda-
in us, tamen
tes tagonalium
mu , excludere
sun um penta-
ipf ptis prae-
1 hos admit-
der tres numeri
for oducendis,
nul equentibus
ta Ferma-
dubio in
natium ad
quae desi-
habenda,
cu esentemus,
tes mmodissi-
qu
va s.
bu
na
$x^{36} + x^{45}$
qu um ipso
nu
en
ne capiatur,
quarum
gonalium.
Eodem

Eodem modo intelligitur, si eiusdem seriei capiatur cubus, in eo alias potestates non occurrere, nisi quarum exponentes sint summae trium numerorum trigonalium. Quocirca primum theorema *Fermatii* huc reducitur, vt si pro cubo assumtae seriei statuatur haec series per omnes potestates ipsius x ascendens:

$$1 + Ax + Bxx + Cx^3 + Dx^4 + Ex^5 + Fx^6 + Gx^7 + Hx^8 + \text{etc.}$$

demonstretur in hac serie nullum plane coefficientem nihilo fore aequalem. Ex ipsa autem formatione manifestum est, nullum horum coefficientium fieri posse negatiuum.

Pro resolutione in numeros tetragonales, seu quadratos.

§. 7. Hic consideretur ista series potestatum:

$$P = 1 + x + x^4 + x^9 + x^{16} + x^{25} + x^{36} + \text{etc.}$$

cuius biquadratum P^4, si euoluatur, omnes complectetur potestates ipsius x, quarum exponentes sunt summae quatuor quadratorum; atque adeo cuiusque coefficiens ostendet, quot variis modis exponens ipsius x in quatuor quadrata distribui queat; quare pro hoc casu demonstrari oportet, si ponatur

$$P^4 = 1 + Ax + Bxx + Cx^3 + Dx^4 + Ex^5 + Fx^6 + \text{etc.}$$

quae scilicet series per omnes potestates ipsius x ascendat, nullum coefficientium A, B, C, D, E esse euaniturum. Hoc enim si fuerit demonstratum, simul erit euictum, omnes plane numeros in quatuor quadrata resolui posse.

Pro

Pro resolutione in numeros pentagonales.

§. 8. Consideretur series potestatum ipsius x, quarum exponentes secundum numeros pentagonales ascendant, quae sit

$$P = 1 + x + x^5 + x^{12} + x^{22} + x^{35} + x^{51} + \text{etc.}$$

eiusque euoluatur potestas quinta, quae sit

$$P^5 = 1 + Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + Ex^5 + \text{etc.}$$

per omnes plane potestates ipsius x ascendens, ac demonstrandum est, in hac serie nullum prorsus coefficientem reperiri, qui sit nihilo aequalis.

Pro resolutione in numeros polygonales quoscunque.

§. 9. Sit π numerus laterum polygonorum, et cum formula generalis omnes istos numeros polygonales complectens sit $= \frac{1}{2}(\pi - 2)zz - \frac{1}{2}(\pi - 4)z$, posita scilicet radice $= z$, sint omnes numeri polygonales hinc ordine resultantes 0, α, β, γ, δ, ε, ζ, η, etc. vbi quidem constat esse

$$\alpha = 1,\ \beta = \pi,\ \gamma = 3\pi - 3,$$
$$\delta = 6\pi - 8,\ \varepsilon = 10\pi - 15,\ \zeta = 15\pi - 24;$$

tum vero consideretur series infinita

$$P = 1 + x^\alpha + x^\beta + x^\gamma + x^\delta + x^\varepsilon + x^\zeta + \text{etc.}$$

huiusque seriei sumatur potestas exponentis $= \pi$, quae sit

$$P^\pi = 1 + Ax + Bxx + Cx^3 + Dx^4 + Ex^5 + \text{etc.}$$

per omnes plane potestates ipsius x ascendens, ac demonstrandum erit, in hac serie nullum occurrere coefficientem nihilo aequalem; vnde patet, si modo hoc demonstrari in genere posset, simul omnia theoremata *Fermatiana* fore demonstrata.

§. 10. In hoc igitur negotio non parum fortasse proderit, si euolutionem istius potestatis P^π in genere docuero, simulque ostendero, quomodo omnes coefficientes seriei euolutae a praecedentibus pendeant, ex iisque determinentur. Hunc in finem coefficientes singularum potestatum ipsius x idoneis characteribus designemus, sitque potestatis x^n coefficiens $[n]$; quandoquidem hoc modo statim perspicitur, ad quamnam potestatem quisque coefficiens referatur. Nunc igitur inuestigemus, quomodo quilibet coefficiens $[n]$ ex praecedentibus, qui sunt $[n-1]$, $[n-2]$, $[n-3]$, $[n-4]$, etc. determinetur. Hoc enim modo iudicium facillime instituetur, num quis coefficiens nihilo aequalis fieri possit, id quod forsan eo facilius ostendi poterit, cum certum sit, nullum coefficientem fieri posse negatiuum.

§. 11. Cum igitur posito

$$P = 1 + x^\alpha + x^\beta + x^\gamma + x^\delta + x^\varepsilon + \text{etc.}$$

quaeri debeat istius seriei potestas exponentis π, statuamus $S = P^\pi$, eritque sumtis logarithmis $lS = \pi\, lP$, hincque differentiando $\frac{dS}{S} = \frac{\pi\, dP}{P}$, vnde formetur ista aequatio:

$$P.\ \frac{x\,dS}{dx} = \frac{\pi S x\,dP}{dx},$$

pro qua ergo erit

$$\frac{x\,dP}{dx} = \alpha x^\alpha + \beta x^\beta + \gamma x^\gamma + \delta x^\delta + \varepsilon x^\varepsilon + \zeta x^\zeta + \text{etc.}$$

quae ergo series per λS multiplicata idem productum generare debet, quod oritur, si ipsa series

$$P = 1 + x^\alpha + x^\beta + x^\gamma + x^\delta + \text{etc.}$$

per formulam $\frac{x\,dS}{dx}$ multiplicetur.

§. 12. Ponatur igitur secundum characteres ante descriptos:

$$R = 1 + [1]x + [2]x^2 + [3]x^3 [4]x^4 + \text{etc.}$$

vbi notetur, primum terminum 1 aequiualere termino [o], vnde fiet

$$\frac{x\,ds}{dx} = 1[1]x^1 + 2[2]x^2 + 3[3]x^3 + 4[4]x^4 + \text{etc.}$$

hisque seriebus constitutis perpendamus, quot modis proposita potestas x^n in vtroque producto $P\frac{x\,ds}{dx}$ et $\pi\frac{S\,x\,dP}{dx}$ occurrat.

§. 13. Cum igitur ambo multiplicatores P et $\frac{x\,dP}{dx}$ alias potestates ipsius x non contineant, nisi quarum exponentes sunt $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, etc. manifestum est, seriei S terminum $[n]x^n$ ex aliis terminis praecedentibus resultare non posse, praeter hos:

$$[n-\alpha]x^\alpha,\ [n-\beta]x^\beta,\ [n-\gamma]x^\gamma;$$

quamobrem omissis reliquis terminis consideremus tantum istos, ita vt habeamus:

$$S = [n]x^n \ldots + [n-\alpha]x^{n-\alpha} \ldots$$
$$+ [n-\beta]x^{n-\beta} \ldots + [n-\gamma]x^{n-\gamma} \ldots \text{etc.}$$

vbi per se manifestum est, hos terminos tantum eo vsque continuari debere, quoad exponentes $[n-\alpha], [n-\beta], [n-\gamma]$, etc. non fiunt negatiui. Multiplicetur igitur ista forma per

$$\frac{\pi\,x\,dP}{dx} = \pi\alpha x^\alpha + \pi\beta x^\beta + \pi\gamma x^\gamma + \pi\delta x^\delta + \text{etc.}$$

et productum sequentes terminos potestatem x^n continentes suppeditabit:

$$\pi\alpha[n-\alpha]x^n + \pi\beta[n-\beta]x^n + \pi\gamma[n-\gamma]x^n + \text{etc.}$$

§. 14.

teres ante
etc.
mino [o],
+ etc.
odis pro-
$\frac{S\,x\,dP}{dx}$ oc-
P et $\frac{x\,dP}{dx}$
n expo-
erminum
n posse,
tantum
.. etc.
o vsque
$-\gamma]$, etc.
per
+ etc.
ntinentes
+ etc.
§. 14.

§. 14. Deinde iisdem terminis retentis, erit

$$\frac{x\,ds}{dx} = n[n]x^n \ldots + (n-\alpha)[n-\alpha]x^{n-\alpha} \ldots + (n-\beta)[n-\beta]x^{n-\beta} \ldots$$
$$+ (n-\gamma)[n-\gamma]x^{n-\gamma} \ldots + (n-\delta)[n-\delta]x^{n-\delta} \ldots + \text{etc.}$$

quae forma ducta in seriem

$$P = 1 + x^\alpha + x^\beta + x^\gamma + x^\delta + \text{etc.}$$

sequentes praebebit terminos potestatem x^n continentes:

$$n[n]x^n + (n-\alpha)[n-\alpha]x^n + (n-\beta)[n-\beta]x^n$$
$$+ (n-\gamma)[n-\gamma]x^n + \text{etc.}$$

Quamobrem cum hoc productum priori debeat esse aequale, obtinebimus sequentem aequationem:

$$n[n] + (n-\alpha)[n-\alpha] + (n-\beta)[n-\beta] + (n-\gamma)[n-\gamma] + \text{etc.}$$
$$= \pi\alpha[n-\alpha] + \pi\beta[n-\beta] + \pi\gamma[n-\gamma] + \pi\delta[n-\delta] + \text{etc.}$$

§. 15. Hinc igitur patet, coefficientem $[n]$ ab iis tantum praecedentium, quorum characteres sunt

$$[n-\alpha],\ [n-\beta],\ [n-\gamma],\ \text{etc.}$$

pendere, ita vt sit

$$n[n] = \frac{\pi\alpha}{(n-\alpha)}[n-\alpha] \pm \frac{\pi\beta}{(n-\beta)}[n-\beta] \pm \frac{\pi\gamma}{(n-\gamma)}[n-\gamma] \pm \text{etc.}$$

Vbi quidem primo non est metuendum, ne ob terminos negatiuos vnquam valor ipsius $[n]$ proditurus sit negatiuus, quandoquidem hoc naturae rei repugnaret; et quia valor ipsius $[n]$ certe est numerus integer, euidens est omnes terminos in dextro membro iunctim sumtos semper valorem praebere debere vel n, vel $2n$, vel $3n$, vel $4n$, vel etc. nisi forte inde prodeat o, quod igitur demonstrandum est nunquam eueniri posse, si quidem theorema *Fermatianum* fuerit veritati consentaneum, atque literae $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, etc. deno-

denotent ordine omnes numeros polygonales pro numero laterum $= \pi$.

§. 16. Manifeſtum autem eſt, hanc determinationem coefficientis $[n]$ maxime eſſe generalem, neque tantum ad numeros polygonales extendi. Quaecunque enim ſeries numerorum pro literis α, β, γ, δ, etc. accipiatur, aequatio inuenta ſemper habebit locum, et coefficiens $[n]$ indicabit quot variis modis numerus n poſſit eſſe ſumma π terminorum iſtius ſeriei:

$$0, \alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta, \eta, \text{etc.},$$

hincque numerus π ita definiri poterit, vt nullus huiusmodi coefficiens $[n]$ prodeat nihilo aequalis. Euidens enim eſt numerum π ſemper tantum accipi poſſe, vt dextrum membrum noſtrae aequationis nunquam prodeat negatiuum. Quaeri autem ſemper ſolet minimus valor, qui pro π aſſumtus hoc ſit praeſtaturus; vnde patet hanc methodum ad infinitas alias quaeſtiones huius generis pari fortaſſe ſucceſſu applicari poſſe.

§. 17. Caeterum in genere notaſſe iuuabit, niſi fuerit $\alpha = 1$, ſemper fore $[n] = 0$, quamdiu fuerit $n < \alpha$; vnde in omnibus huiusmodi quaeſtionibus neceſſe eſt vt ſit $\alpha = 1$, quem quidem terminum ſemper praecedere ſolet terminus $= 0$, ſiquidem ſeries pro P aſſumta ab vnitate incipiat.

Applicatio ad numeros trigonales.

§. 18. Quo natura aequationis inuentae clarius percipiatur, eam ad numeros trigonales applicemus, pro quibus erit $\alpha = 1$, $\beta = 3$, $\gamma = 6$, $\delta = 10$, $\varepsilon = 15$, etc. tum vero, ſumto

pro numero
terminationem ue tantum ad in ſeries nu- tur, aequatio $[n]$ indicabit na π termi-
is huiusmodi ens enim eſt xtrum mem- iuum. Quae- π aſſumtus 1 ad infinitas eſſu applica-
t, niſi fuerit $< \alpha$; vnde vt ſit $\alpha = 1$, et terminus ncipiat.
clarius per- pro quibus tum vero, ſumto

ſumto exponente $\pi = 3$, noſtra formula inuenta hanc induet formam:

$$n[n] = (4-n)[n-1] + (12-n)[n-3] + (24-n)[n-6] + (40-n)[n-10] + \text{etc.}$$

Hinc ergo, a numeris minimis incipiendo, ſequentes nanciſcemur reductiones:

1 $[1] = 3[0]$, ergo $[1] = 3$

2 $[2] = 2[1] = 6$, ergo $[2] = 3$

3 $[3] = 1[2] + 9[0] = 12$, ergo $[3] = 4$

4 $[4] = 0[3] + 8[1] = 24$, ergo $[4] = 6$

5 $[5] = -1[4] + 7[2] = 15$, ergo $[5] = 3$

6 $[6] = -2[5] + 6[3] + 18[0] = 36$, ergo $[6] = 6$

7 $[7] = -3[6] + 5[4] + 17[1] = 63$, ergo $[7] = 9$

8 $[8] = -4[7] + 4[5] + 16[2] = 24$, ergo $[8] = 3$

9 $[9] = -5[8] + 3[6] + 15[3] = 63$, ergo $[9] = 7$

10 $[10] = -6[9] + 2[7] + 14[4] + 30[0] = 90$, ergo $[10] = 9$

11 $[11] = -7[10] + 1[8] + 13[5] + 29[1] = 66$, ergo $[11] = 6$

12 $[12] = -8[11] + 0[9] + 12[6] + 28[2] = 108$, ergo $[12] = 9$

13 $[13] = -9[12] - 1[10] + 11[7] + 27[3] = 117$, ergo $[13] = 9$

14 $[14] = -10[13] - 2[11] + 10[8] + 26[4] = 84$, ergo $[14] = 6$

15 $[15] = -11[14] - 3[12] + 9[9] + 25[5] + 45[0] = 90$, erg. $[15] = 6$

16 $[16] = -12[15] - 4[13] + 8[10] + 24[6] + 44[1] = 240$, erg. $[16] = 15$

17 $[17] = -13[16] - 5[14] + 7[11] + 23[7] + 43[2] = 153$, erg. $[17] = 9$

18 $[18] = -14[17] - 6[15] + 6[12] + 22[8] + 42[3] = 126$, erg. $[18] = 7$

19 $[19] = -15[18] - 7[16] + 5[13] + 21[9] + 41[4] = 228$, erg. $[19] = 12$

20 $[20] = -16[19]\ 8[17] + 4[14] + 20[10] + 40[5] = 60$, erg. $[20] = 3$

Hinc

Hinc igitur patet, feriei $1+x+x^3+x^6+x^{10}+x^{15}+\text{etc.}$ cubum euolui in hanc feriem:

$$1+3x^1+3x^2+4x^3+6x^4+3x^5+6x^6+9x^7$$
$$+3x^8+7x^9+9x^{10}+6x^{11}+9x^{12}+9x^{13}+6x^{14}$$
$$+6x^{15}+15x^{16}+9x^{17}+7x^{18}+\text{etc.}$$

§. 19. In hac euolutione non iniucundum erat videre, quomodo priora membra negatiua a fequentibus pofitiuis-femper fuperentur, atque exceffus femper per numerum n diuifibilis prodierit, id quod etiam perinde in forma generali neceffario vfu venire debet. Quod quo clarius in oculos incurrat, aequationem generalem fub hac forma exhibeamus:

$$n[n]=((\pi+1)\alpha-n)[n-\alpha]+((\pi+1)\beta-n)[n-\beta]$$
$$+((\pi+1)\gamma-n)[n-\gamma]\ \text{etc.}$$

vnde partibus negatiuis ad finiftram translatis erit

$$n([n]+[n-\alpha]+[n-\beta]+[n-\gamma]+[n-\delta]+\text{etc.})=$$
$$(\pi+1)(\alpha[n-\alpha]+\beta[n-\beta]+\gamma[n-\gamma]+\delta[n-\delta]+\text{etc.})$$

Hinc igitur intelligimus: primo fummam omnium horum valorum $\alpha[n-\alpha]+\beta[n-\beta]+\gamma[n-\gamma]$ femper fore diuifibilem per numerum n, nifi forte $\pi+1$ fuerit per n diuifibile; deinde fummam horum valorum

$$[n]+[n-\alpha]+[n-\beta]+[n-\gamma]+\text{etc.}$$

femper effe diuifibilem per numerum $\pi+1$, nifi forte ipfe numerus n per eum diuifionem admittat.

§. 20. Neque vero hae eximiae proprietates tantum in numeris polygonalibus, quos hic potiffimum contemplamur

$x^{10}+x^{15}+\text{etc.}$
$-6x^6+9x^7$
$-9x^{13}+6x^{14}$
dum erat vi-
fequentibus
femper per
iam perinde
Quod quo
em fub hac
$\beta-n)[n-\beta]$
rit
$]+\text{etc.})=$
$-\delta]+\text{etc.})$
ium horum
femper fore
uerit per n
etc.
fi forte ipfe
ates tantum
contempla-
mur

mur, locum habent, fed etiam generaliffime obferuari debent, quaecunque numerorum feries pro literis α, β, γ, etc. affumatur, etiamfi ea nulli certae legi fuerit adftricta. At vero haec ipfa circumftantia non multum pro fcopo noftro polliceri videtur, quandoquidem theoremata *Fermatiana* tum demum veritati confentanea cenferi debent, quando pro litteris α, β, γ, δ, etc. ipfi numeri polygonales ordine fcribuntur; ita vt, fi earum ordo tantillum perturbaretur, demonftratio etiam ipfa hinc petenda claudicare deberet; quocirca ad legitimam demonftrationem horum theorematum inueniendam neceffario opus erit, vt fimul etiam ipfa lex progreffionis literarum α, β, γ, δ, etc. in computum ducatur, id quod vtrum cum ifta methodo commode coniungi queat, nec ne, non tam facile perfpicitur. Interim tamen iftae confiderationes fortaffe aliis aliquam lucem accendere poterunt, quo felicius ad has veritates penetrare valeant.