DE MOTV PENDVLI

CIRCA AXEM CYLINDRICVM, FVLCRO DATAE FIGVRAE INCVMBENTEM, MOBILIS. REMOTA FRICTIONE.

Differtatio prior.

Auctore

L. EVLERO.

§. 1.

Confidero hic pendulum, compofitum ex axe cylindrico AABB, cui firmiter connexum fit in medio ipfum corpus penduli EDF figurae cuiuscunque; in quo fit punctum G centrum grauitatis totius penduli compofiti, vnde ad axem cylindri ducta fit normalis GC, quam diftantiam vocemus $GC = c$; praeterea vero denotet M maffam feu pendus totius huius penduli, ex cylindro ABAB et mole EDF compofiti; tum vero per centrum grauitatis G ducta concipiatur recta IK axi cylindri parallela, cuius refpectu fit momentum inertiae totius penduli $= Mkk$, quod fcilicet reperitur, fi fingula penduli elementa, quatenus ex materia Tab. IV. Fig. 3.

teria constant, in quadrata distantiarum suarum ab ista recta I K multiplicentur et omnia haec producta in vnam summam colligantur.

§. 2. Iam axis cylindricus huius penduli A B A B vtroque termino A et A ita duobus fulcris fixis vtrinque aequalibus incumbat, vt perpetuo maneat horizontalis, ita vt istud pendulum, circa axem cylindricum his fulcris incumbentem, libere oscillationes peragere queat, dum perpetuo ab ambobus fulcris pariter manet remotum, ac propterea pressio in ambo fulcra vtrinque aequalis spectari poterit. Motum autem huius penduli eatenus tantum hic perscrutari constitui, quatenus eius oscillationes sunt quam minimae, quandoquidem oscillationes maiores in calculos nimis molestos praecipitarent.

Tab. IV. Fig. 4. §. 3. Consideremus nunc primo pendulum nostrum in statu naturali, in quo perpetuo acquiescere queat; vbi tabula referat planum verticale axem cylindri normaliter traiiciens, sitque M A N figura fulcri, cui axis cylindri A B ex vna parte incumbat, dum ex altera parte simili fulcro incumbit; vtrumque autem fulcrum M A N excauatum sit in curuaturam circularem, cuius centrum sit in O, eiusque radius vocetur $AO = a$; circulus vero A B referat sectionem transuersam verticalem axis cylindrici, circa quem pendulum est mobile, cuius centrum sit in puncto C, et radius $AC = CB = b$. In statu igitur aequilibrii, seu quietis, iste axis incumbet fulcri puncto imo A, per quod si recta verticalis O C A producatur, in ea reperiatur necesse est centrum grauitatis totius penduli G, existente distantia

$CG =$

CG $= c$, vti ſupra poſuimus; ſicque ſtatus aequilibrii noſtri penduli perfecte erit determinatus.

§. 4. Deſcripto hoc ſtatu aequilibrii concipiamus iſti pendulo imprimi motum quemcunque quam minimum, vt ſcilicet inde oriantur oſcillationes quaſi infinite paruae. Ad hunc autem motum nobis rite repraeſentandum, primo ſpectari debet motus ipſi centro grauitatis G impreſſus, cuius directio ſit recta horizontalis Gg, ſecundum quam id primum moueri incipiat, cuius celeritatem ponamus $= n$, quam ergo quaſi infinite paruam ſpectari oportet; praeterea vero ponamus toti pendulo ſimul motum quempiam angularem imprimi circa axem illum IK horizontalem, qui hic plano tabulae normaliter inſiſtere concipi debet; iſte vero motus angularis pariter ſit quam minimus, ac vocetur $= \nu$. Hic notetur, litteram n denotare ſpatium, quod a celeritate centro grauitatis impreſſa vno minuto ſecundo percurri poſſet. Simili modo celeritas angularis ν exhibibit angulum, quem motus angularis impreſſus vno minuto ſecundo eſſet confecturus. Poſtquam igitur talis duplex motus pendulo fuerit impreſſus, inueſtigari debet totus motus, quo iſtud pendulum deinceps agitabitur.

§. 5. Nunc elapſo tempore quocunque, quod in minutis ſecundis expreſſum ſit $= t$, peruenerit centrum grauitatis totius penduli ex G in g, vnde ad rectam verticalem agatur horizontalis gp, pro quo ſitu vocentur coordinatae $Op = x$ et $pg = y$; vbi notetur primo initio fuiſſe $x = a + c - b$ et $y = 0$. Nunc vero axis cylindricus penduli fulcro incumbat in puncto a, vnde ad centrum fulcri O ducta recta aO, ea ſimul per axem cylindri c tranſibit, Tab. IV. Fig. 5.

ſibit, eritque $ao = a$ et $ac = b$, angulus vero AOa vocetur $= \theta$, qui ergo erit quantitas variabilis; vnde cum ſit $cO = a - b$, ſi ex c ducatur horizontalis cq, erit

$$cq = (a-b)\,\text{ſin.}\,\theta \text{ et } Oq = (a-b)\,\text{coſ.}\,\theta.$$

Deinde recta $cg = c$ producatur vsque in h, vbi verticalem OG interſecet in h, voceturque angulus $Ahg = \Phi$, qui indicat, quantum ſitus penduli a ſitu naturali declinet, cuius ratio ad angulum θ ſequenti modo definiri poterit. Cum ſit $Op = x$ et $Oq = (a-b)\,\text{coſ.}\,\theta$, erit interuallum $pq = x - (a-b)\,\text{coſ.}\,\theta$; tum vero erit

$$pg - qc = y - (a-b)\,\text{ſin.}\,\theta;$$

ſicque ob

$$cg^2 = pq^2 + (pg - qc)^2$$

iam habebitur iſta aequatio:

$$cc = (x - (a-b)\,\text{coſ.}\,\theta)^2 + (y - (a-b)\,\text{ſin.}\,\theta)^2$$

ſiue

$$cc = xx + yy - 2(a-b)(x\,\text{coſ.}\,\theta + y\,\text{ſin.}\,\theta) + (a-b)^2$$

qua aequatione relatio inter ternas variabiles x, y et θ determinatur; praeterea vero pro angulo Φ manifeſtum eſt fore

$$\text{tang.}\,\Phi = \frac{pg - qc}{pq} = \frac{y - (a-b)\,\text{ſin.}\,\theta}{x - (a-b)\,\text{coſ.}\,\theta}, \text{ hincque}$$

$$\text{ſin.}\,\Phi = \frac{y - (a-b)\,\text{ſin.}\,\theta}{c} \text{ et coſ.}\,\theta = \frac{x - (a-b)\,\text{coſ.}\,\theta}{c}.$$

His igitur aequationibus quatuor variabiles in calculum introductae, x et y, cum angulis θ et Φ, ad duas reuocantur.

§. 6. Definito igitur ſtatu, quem pendulum elapſo tempore $= t$ tenebit, vt in eius motum inquiramus, omnes vires, quibus ſollicitatur, probe perpendi oportet. Primo autem

autem totum pendulum a propria vi grauitatis vrgetur, cuius pondus cum positum sit $= M$, tota haec vis eundem praestabit effectum, ac si ipsi centro grauitatis g in directione verticali gf vis esset applicata $gf = M$. Deinde cum axis cylindricus penduli a fulcro sustentetur in puncto a, vtique ipsum fulcrum hic certam sustinebit vim, qua pendulum vicissim ob reactionem a fulcro quasi repelli est censendum, cuius vis directio erit normalis ad contactum, ideoque secundum directionem ac sollicitabit; ipsa autem haec vis etiamnunc est incognita, ac demum ex euolutione motus cognosci poterit. Statuatur igitur ista vis, seu pressio incognita, in directione ac vrgens $= \Pi$; ita vt nostrum pendulum reuera a duabus viribus sollicitari sit censendum: priore scilicet in directione gf vi $= M$; posteriore vero in directione ac vi $= \Pi$, siquidem animum a frictione abstrahamus. Si enim adesset frictio in contactu a, et cylindrus super fulcro reperet versus N, insuper vis retro versus A vrgens esset introducenda, ipsi pressioni Π proportionalis; at vero frictionis considerationem in praesenti inuestigatione remoueamus.

§. 7. Constitutis viribus, quibus nostrum pendulum agitatur, ipsa motus determinatio ad duo capita reuocatur. Primo enim motus ipsius centri grauitatis debet inuestigari, quo facto insuper motus angularis, quo pendulum circa suum axem I K (fig. 3.) conuertitur, exquiri debebit. Quod igitur primo ad motum centri grauitatis attinet, quoniam vis prior M iam in puncto g est applicata, etiam altera vis Π in sua directione in ipsum punctum g est transferenda, quae secundum directiones coordinatarum resoluta dabit vim verticalem secundum pO siue $g\zeta = \Pi \cos. \phi$ et et horizontalem secundum $gp = \Pi$ fin. θ, ita vt punctum g verticaliter deorsum vrgeatur vi $= M - \Pi$ cof. θ, horizontaliter autem secundum gp vi $= \Pi$ fin. θ.

§. 8. Cum igitur celeritas verticalis centri grauitatis g fit $= \frac{dx}{dt}$, celeritas autem horizontalis secundum $gp = \frac{dy}{dt}$, fumto elemento temporis dt conftante, accelerationes fecundum has directiones erunt $\frac{ddx}{dt^2}$ et $\frac{ddy}{dt^2}$, quas per maffam totius penduli M multiplicari oportet, vt producta aequentur viribus acceleratricibus ductis in $2g$, denotante g altitudinem lapfus grauium vno minuto fecundo. Hinc igitur nancifcemur duas fequentes aequationes:

$$1^\circ.\ M\frac{ddx}{dt^2} = 2g\,(M - \Pi \text{ cof. } \theta) \text{ et}$$

$$2^\circ.\ M\frac{ddy}{dt^2} = -2g\,\Pi \text{ fin. } \theta$$

in quibus cum infit vis incognita Π, ea eliminata fupererit vna aequatio

$$M\left(\frac{ddx \text{ fin. } \theta - ddy \text{ cof. } \theta}{dt^2}\right) = 2gM \text{ fin. } \theta,$$

hincque per M diuidendo habebimus

$$\frac{ddx \text{ fin. } \theta - ddy \text{ cof. } \theta}{dt^2} = 2g \text{ fin. } \theta.$$

§. 9. Deinde pro motu angulari, quoniam pendulum a fitu naturali iam declinatum reperitur angulo $Ghg = \Phi$, eius celeritas angularis in fenfum Gg erit $= \frac{d\Phi}{dt}$, hincque eius acceleratio in eundem fenfum $= \frac{dd\Phi}{dt^2}$, quae per ipfum momentum inertiae totius penduli, quod eft Mkk, multiplicari, tum vero aequari debet momento virium follicitantium refpectu axis IK (fig. 3.) pariter ducto in $2g$. Quoniam autem vis grauitatis M per ipfum punctum

tum g transit, eius momentum erit nullum; alterius autem vis Π, quae puncto c applicata secundum c O agit, eius momentum respectu puncti g erit $= \Pi . cg . \sin. O c b$. Quia igitur angulus $O c b = \Phi - \theta$, erit istud momentum $= \Pi c \sin. (\Phi - \theta)$, quod tendit ad angulum obliquitatis Φ diminuendum, vnde obtinebitur sequens aequatio:

$$M \frac{kk dd\Phi}{dt^2} = - 2 g \Pi c \sin. (\Phi - \theta),$$

quae aequatio iterum continet vim incognitam Π, quae autem ope binarum aequationum ante inuentarum facile elidi poterit. Cum enim ex illis fiat

$$M \left(\frac{ddx \cos. \theta + ddy \sin. \theta}{dt^2}\right) = 2 g (M \cos. \theta - \Pi).$$

erit

$$\Pi = M \cos. \theta - M \left(\frac{ddx \cos. \theta + ddy \sin. \theta}{2 g dt^2}\right)$$

quo valore substituto et per massam M diuisione facta haec postrema aequatio hanc induet formam:

$$\frac{kk dd\Phi}{dt^2} = - 2 g c \cos. \theta \sin. (\Phi - \theta)$$
$$+ c \sin. (\Phi - \theta) \left(\frac{ddx \cos. \theta + ddy \sin. \theta}{dt^2}\right).$$

§. 10. Vniuersa ergo motus determinatio, etiam pressione incognita Π, perducta est ad duas sequentes aequationes:

1°. $ddx \sin. \theta - ddy \cos. \theta = 2 g dt^2 \sin. \theta$

2°. $c \sin. (\Phi - \theta) (ddx \cos. \theta + ddy \sin. \theta)$
$= kk dd\Phi + 2 g c dt^2 \cos. \theta \sin. (\Phi - \theta)$.

Cum his autem duabus aequationibus coniungi debent binae conditiones iam supra repertae, quae erant:

3°. $cc = xx + yy - 2(a-b)(x \cos. \theta + y \sin. \theta) + (a-b)^2$ et

4°. tang. $\Phi = \frac{y - (a - b)\, \text{ſin.}\, \theta}{x - (a - b)\, \text{coſ.}\, \theta}$

ita vt nunc habeamus quatuor aequationes, ex quibus ergo quatuor incognitas x & y cum angulis θ et Φ ita per tempus t definire licebit, vt ad quoduis tempus inde quatuor illae incognitae aſſignari, ſicque totus penduli motus determinari queat. Id quidem in genere maximis difficultatibus foret inuolutum; verum quia nobis hic tantum propoſitum eſt oſcillationes quaſi infinite paruas indagare, haec conditio formulas inuentas ad multo maiorem ſimplicitatem perducet; propterea quod ambo anguli θ et Φ tanquam infinite parui ſpectari poterunt; tum vero inſuper ordinata y perpetuo quam minima manebit, interea dum etiam altera x vix vllas ſenſibiles mutationes ſubibit.

§. 11. Ante omnia autem hic obſeruari conuenit, cuncta elementa, quae in has aequationes ingrediuntur, ad binos angulos θ et Φ reuocari poſſe; cum enim ſit O c $= a - b$, vocetur haec diſtantia breuitatis gratia $= e$, vt ſit $a - b = e$, ob angulum A O $c = \theta$ erit $c\, q = e$ ſin. θ et O $q = e$ coſ. θ; deinde quia recta $c\, g = c$ ad verticalem O A inclinatur angulo A $b\, g = \Phi$, erit interuallum

$$q\, p = c \text{ coſ. } \Phi \text{ et } p\, g = e \text{ ſin. } \theta + c \text{ ſin. } \Phi.$$

Hinc igitur colligimus

$$\text{O}\, p = x = e \text{ coſ. } \theta + c \text{ coſ. } \Phi \text{ et}$$
$$p\, g = y = e \text{ ſin. } \theta + c \text{ ſin. } \Phi.$$

§. 12. Cum igitur noſtras inueſtigationes ad oſcillationes infinite paruas reſtringamus, ambo anguli θ et Φ perpetuo manebunt quam minimi, vnde ſine errore ſtatuere

ere licebit $\sin.\theta = \theta$ et $\sin.\Phi = \Phi$, tum vero $\cos.\theta = 1$ et $\cos.\Phi = 1$; ex quo habebimus $x = e + c$, ideoque conſtans, et $y = e\theta + c\Phi$; quamobrem aequationes differentio-differentiales, ob $\frac{ddx}{dt^2} = 0$, erunt ſequentes:

1°. $0 = 2g(M - \Pi)$, ideoque $\Pi = M$,

2°. $\frac{M(edd\theta + cdd\Phi)}{dt^2} = -2g\Pi\theta = -2gM\theta$, ſiue
$\frac{edd\theta + cdd\Phi}{dt^2} = -2g\theta$;

3°. $\frac{Mkkdd\Phi}{dt^2} = -2g\Pi c(\Phi - \theta)$, ſiue
$\frac{kkdd\Phi}{dt^2} = -2gc(\Phi - \theta)$.

§. 13. Tota ergo motus determinatio pendet a reſolutione harum duarum aequationum differentio-differentialium:

1°. $\frac{edd\theta + cdd\Phi}{dt^2} = -2g\theta$ et

2°. $\frac{kkdd\Phi}{dt^2} = -2gc(\Phi - \theta)$,

ex quibus vtrumque angulum θ et Φ ad quoduis tempus t definiri oportet. Quoniam autem in vtraque aequatione ambo anguli θ et Φ inſunt; has aequationes ita combinari conuenit, vt aequatio inde reſultet duas tantum variabiles inuoluens.

§. 14. Hunc in finem aequatio prima ducatur in conſtantem A, altera vero in conſtantem B, vt ambae inuicem additae praebeant hanc aequationem:

$$\frac{Aedd\theta + (Ac + Bkk)dd\Phi}{2g\,dt^2} = -(A - Bc)\theta - Bc\Phi,$$

vbi conſtantes A et B ita definiri oportet, vt duae tantum variabiles in ea ineſſe cenſeri queant, quod igitur

 vt

vt euenire poſſit, pro parte ſiniſtra ſtatuamus:

$$A\,e\,d\,d\,\theta + (A\,c + B\,k\,k)\,d\,d\,\Phi = C\,d\,d\,z,$$

ideoque

$$A\,e\,\theta + (A\,c + B\,k\,k)\,\Phi = C\,z;$$

pro altera autem parte ponamus

$$(A - B\,c)\,\theta + B\,c\,\Phi = D\,z,$$

et aequatio noſtra induet hanc formam: $\frac{C\,d\,d\,z}{2\,g\,d\,t^2} = -D\,z$, quae duas tantum variabiles z et t complectitur.

§. 15. Nunc igitur ex formulis aſſumtis ambos angulos θ et Φ per nouam variabilem z exprimamus, atque ex prima reperietur

$$\theta = \frac{C\,z}{A\,e} - \frac{(A\,c + B\,k\,k)\,\Phi}{A\,e},$$

ex altera autem reperietur $\theta = \frac{D\,z - B\,c\,\Phi}{A - B\,c}$, qui duo valores ita inter ſe aequales ſtatuantur, vt vtrinque partes tam quantitatem nouam z quam angulum Φ continentes ſeorſim inter ſe aequales euadant; fieri igitur debebit

$$\frac{C}{A\,e} = \frac{D}{A - B\,c} \text{ et } \frac{A\,c + B\,k\,k}{A\,e} = \frac{B\,c}{A - B\,c},$$

quae poſtrema aequatio in ordinem redacta praebet

$$A\,A\,c + (k\,k - c\,c - e\,c)\,A\,B - B\,B\,c\,k\,k = 0,$$

quae aequatio quadratica geminos dabit valores pro litteris A et B, ad quos inueniendos ſtatuamus breuitatis gratia $c + e - \frac{k\,k}{c} = 2f$, vt aequatio noſtra fiat

$$A\,A - 2\,f\,A\,B - B\,B\,k\,k = 0,$$

vnde ſi ſumamus $B = 1$, pro A duo reperiuntur valores

1°. $A = f + \sqrt{(f\,f + k\,k)}$

2°. $A = f - \sqrt{(f\,f + k\,k)}$,

exiſten-

existente $B = 1$: ambo autem hi valores aequaliter satisfacere debent.

§. 16. Nunc igitur primo loco A scribamus valorem priorem inuentum, ex eoque orietur aequatio

$$\frac{D}{C} = \frac{1}{e} - \frac{c}{ef + e\sqrt{(ff+kk)}},$$

quae reducitur ad hanc:

$$\frac{D}{C} = \frac{kk + cf - c\sqrt{(ff+kk)}}{ekk};$$

ex altero autem valore pro A assumto reperietur

$$\frac{D}{C} = \frac{kk + cf + c\sqrt{(ff+kk)}}{ekk}.$$

Quamobrem si sumamus $C = ekk$, geminos pro D habebimus valores, perinde ac pro A; scilicet constitutis valoribus $B = 1$ et $C = ekk$, pro A et D duas nacti sumus solutiones:

$$\text{Solutio prior: } \begin{cases} A = f + \sqrt{(ff+kk)} \\ D = kk + cf - c\sqrt{(ff+kk)} \end{cases}$$

$$\text{Solutio posterior: } \begin{cases} A = f - \sqrt{(ff+kk)} \\ D = kk = cf + c\sqrt{(ff+kk)}. \end{cases}$$

§. 17. Pro solutione igitur priore relatio inter angulos θ et Φ, et nouam variabilem z sequenti modo erit comparata:

$$e\theta(f + \sqrt{(ff+kk)}) + (cf + kk + c\sqrt{(ff+kk)})\Phi = ekkz,$$

atque aequatio, ex qua incognitam z inuestigari oportet, erit

$$\frac{ekk\,ddz}{2g\,dt^2} = -z(kk + cf - \sqrt{(ff+kk)}).$$

§. 18. Simili modo alteros valores loco A et D scribendo, pro iis loco z alia variabilis in calculum introduci

troduci debet, quae ſit z', atque relatio inter θ, Φ et z' iſta exprimetur aequatione:

$$e\theta(f-\sqrt{(ff+kk)})+(cf+kk-c\sqrt{(ff+kk)})\Phi=ekkz'$$

ipſa autem haec noua incognita z' quaeri debet ex ſequenti aequatione differentiali ſecundi gradus:

$$\frac{ekkddz'}{2gdt^2}=-z'(kk+cf+\sqrt{(ff+kk)}).$$

§. 19. Hoc igitur modo duas nouas variabiles z et z' in calculum introduximus, quarum vtramque per integrationem aequationis differentialis ſecundi gradus haud difficulter definire licet, vt ſtatim oſtendemus; iis autem inuentis ambo anguli θ et Φ facile per z et z' exprimi poterunt. Si enim binae aequationes ante datae inuicem addantur, peruenietur ad hanc aequationem:

$$\theta+\Phi\frac{(ef+kk)}{ef}=\frac{c\Phi}{f}\frac{kk}{2f}(z+z').$$

Sin autem poſterior a priore ſubtrahatur, relinquetur iſta:

$$\theta+\frac{c\Phi}{e}=\frac{kk(z-z')}{2\sqrt{(ff+kk)}},$$

haec poſterior ab antecedente ablata relinquit

$$\frac{kk}{ef}\Phi=\frac{kkz}{2}\left(\frac{1}{f}-\frac{1}{\sqrt{(ff+kk)}}\right)+\frac{kkz'}{2}\left(\frac{1}{f}+\frac{1}{\sqrt{(ff+kk)}}\right),$$

quae aequatio per kk diuiſa et reducta dat

$$\Phi=\frac{ez(\sqrt{(ff+kk)}-f)+ez'(f+\sqrt{(ff+kk)})}{2\sqrt{(ff+kk)}}.$$

Ex hoc autem valore pro Φ inuento colligitur alter angulus

$$\theta=z\frac{(kk+cf-c\sqrt{(ff+kk)})}{2\sqrt{(ff+kk)}}-z'\frac{(kk+cf+c\sqrt{(ff+kk)})}{2\sqrt{(ff+kk)}}.$$

§. 20. Supereſt igitur, vt in valores litterarum z et z' inquiramus. Prodiit autem pro z haec aequatio:

ekk

$$\frac{ekk\,ddz}{2g\,dt^2} + z(kk + cf - \sqrt{(ff + kk)}) = 0.$$

Ponatur hic breuitatis gratia $\frac{ekk}{kk + cf - \sqrt{(ff + kk)}} = b$, et aequatio noſtra erit $\frac{b\,ddz}{2g\,dt^2} + z = 0$, quae per $2\,dz$ multiplicata et integrata praebet $\frac{b\,dz^2}{2g\,dt^2} + zz = \alpha\alpha$, vnde elicitur $\frac{2g\,dt^2}{b} = \frac{dz^2}{\alpha\alpha - zz}$; ſicque fiet $dt\sqrt{\frac{2g}{b}} = \frac{dz}{\sqrt{(\alpha\alpha - zz)}}$, hincque integrando $t\sqrt{\frac{2g}{b}} = \alpha.\ \text{ſin.}\ \frac{z}{\alpha}$. Hinc igitur erit

$$\text{ſin.}\left(t\sqrt{\frac{2g}{b}} + \delta\right) = \frac{z}{\alpha};$$

conſequenter quantitas hactenus incognita z ita per ſolum tempus t exprimetur, vt ſit $z = \alpha\ \text{ſin.}\left(t\sqrt{\frac{2g}{b}} + \delta\right)$, exiſtente $b = \frac{ekk}{kk + cf - \sqrt{(ff + kk)}}$.

§. 21. Simili modo reperietur altera quantitas incognita z'. Quodſi enim breuitatis gratia ſtatuamus

$$\frac{ekk}{kk + cf + \sqrt{(ff + kk)}} = b',$$

et loco conſtantium per integrationem ingredientium ſcribamus α' et δ', concluditur fore

$$z' = \alpha'\ \text{ſin.}\left(t\sqrt{\frac{2g}{b'}} + \delta'\right),$$

quibus duobus valoribus inuentis iam docuimus, quomodo ex iis ambos angulos θ et Φ determinari oporteat, quos ergo iam ad quoduis tempus elapſum t aſſignare licebit. Vbi quidem euidens eſt, quoniam anguli θ et Φ perpetuo quam minimi manere debent, coëfficientes α et α' tanquam infinite paruos eſſe ſpectandos.

Alia resolutio concinnior

aequationum differentio-differentialium supra §. 12. inventorum

§. 22. Loco binorum angulorum θ et Φ in calculum introducantur duo alii anguli z et z', per quos illi ita determinentur, vt fit

$$\theta = A z + A' z' \text{ et } \Phi = B z + B' z';$$

tum vero isti noui anguli z et z' ita a tempore t pendeant, vt fit

$$\frac{ddz}{2g\,dt^2} = -\frac{z}{b} \text{ et } \frac{ddz'}{2g\,dt^2} = -\frac{z'}{b'}.$$

Ex his autem aequationibus, vt modo vidimus, ambo anguli z et z' ita per tempus t definientur, vt fit

$$z = \alpha \sin.\left(t\sqrt{\tfrac{2g}{b}} + \delta\right) \text{ et } z' = \alpha' \sin.\left(t\sqrt{\tfrac{2g}{b'}} + \delta'\right)$$

vbi α et α', δ et δ' sunt constantes per integrationes ingressae, de quibus notandum est, priores α et α' esse quasi infinite paruas, propterea quod anguli z et z' perpetuo quam minimi manere debent.

§. 23. Hinc igitur erit

$$\frac{dd\theta}{2g\,dt^2} = \frac{A\,ddz + A'\,ddz'}{2g\,dt^2} = -\frac{Az}{b} - \frac{A'z'}{b'} \text{ et}$$

$$\frac{dd\Phi}{2g\,dt^2} = \frac{B\,ddz + B'\,ddz'}{2g\,dt^2} = -\frac{Bz}{b} - \frac{B'z'}{b'};$$

quare cum aequationes supra inuentae sint

$$\frac{e\,dd\theta + c\,dd\Phi}{2g\,dt^2} = -\theta \text{ et } \frac{kk\,dd\Phi}{2g\,dt^2} = -c\Phi + c\theta,$$

si hic valores modo inuenti substituantur, sequentes prodibunt aequationes:

I. —

I. $-\frac{Aez}{b}-\frac{A'ez'}{b'}-\frac{Bcz}{b}-\frac{B'cz'}{b'}=-Az-A'z'$ et

II. $-\frac{Bkkz}{b}-\frac{B'kkz'}{b'}=-c(B-A)z-c(B'-A')z'$.

§. 24. Iam quia anguli z et z' a ſe inuicem pendere non debent, in vtraque aequatione termini per z et z' affecti ſeorſim inter ſe aequari debent, vnde quatuor ſequentes aequationes reſultant:

1°. $\frac{Ae}{b}+\frac{Bc}{b}=A$;

2°. $\frac{A'e}{b'}+\frac{B'c}{b'}=A'$;

3°. $\frac{Bkk}{b}=c(B-A)$;

4°. $\frac{B'kk}{b'}=c(B'-A')$;

ex quibus conſtantes A, A', B, B', vna cum b et b' definiri debent.

§. 25. Harum aequationum prima diuidatur per tertiam, vt quantitas b eliminetur, ac reperietur

$$\frac{Ae+Bc}{Bkk}=\frac{A}{c(B-A)}.$$

Simili modo ſecunda per quartam diuiſa dabit

$$\frac{A'e+B'c}{B'kk}=\frac{A'}{c(B'-A')},$$

ex quibus relatio tam inter A et B quam inter A' et B' definiri debet; iis autem inuentis erit

$$b=\frac{Bkk}{c(B-A)} \text{ et } b'=\frac{B'kk}{c(B'-A')}.$$

§. 26. Prior autem illarum aequationum, litteras A et B continens, in ordinem redacta praebet

$$BBcc-AB(kk+cc-ce)-AAce=0,$$

pro qua aequatione reſoluenda ponamus

$$kk + cc - ce = 2cf,$$

vt habeamus aequationem:

$$BBcc = 2AB\,cf + AA\,ce,$$

cuius resolutio dat

$$Bc = Af \pm A\surd(ff + ce), \text{ siue}$$

$$\frac{B}{A} = \frac{f \pm \surd(ff + ce)}{c},$$

vnde si sumatur $A = c$, fiet $B = f \pm \surd(ff + ce)$.

§. 27. Simili modo altera aequatio, litteras A' et B' continens, in ordinem redacta fiet

$$B'B'cc - A'B'(kk + cc - ce) - A'A'ce = 0,$$

vnde si pariter statuamus $kk + cc - ce = 2cf$, deducitur $\frac{B'}{A'} = \frac{f \pm \surd(ff + ce)}{c}$, qui valores quia cum praecedentibus perfecte conueniunt, sola ambiguitas signi radicalis discrimen constituet; quamobrem si ponamus tam $A = c$ quam $A' = c$, pro litteris B et B' nanciscemur hos valores diuersos:

$$B = f + \surd(ff + ce) \text{ et } B' = f - \surd(ff + ce).$$

§. 28. Constitutis igitur valoribus litterarum A, B, A', B', in quibus notetur esse $f = \frac{kk + cc - ce}{2c}$, ambae quantitates insuper determinandae b et b' sequentes sortientur valores:

$$b = \frac{Bkk}{c(B - A)} = \frac{kk(f + \surd(ff + ce))}{c(f - c + \surd(ff + ce))} \text{ et}$$

$$b' = \frac{kk(f - \surd(ff + ce))}{c(f - c - \surd(ff + ce))},$$

quae expressiones facile reducuntur ad sequentes formas:

$$b = \frac{kk(e + f + \surd(ff + ce))}{2cf + ce - cc},$$

seu

seu quia posuimus $2cf = kk + cc - ce$, erit nunc

$$h = (e + f + \sqrt{(ff + ce)}.$$

Simili modo, signum radicale mutando, erit

$$h' = e + f - \sqrt{(ff + ce)}.$$

§. 29. His igitur valoribus inuentis, cum sit vt supra vidimus

$$z = \alpha \sin. (t \sqrt{\tfrac{2g}{h}} + \delta) \text{ et } z' = \alpha' \sin. (t \sqrt{\tfrac{2g}{h'}} + \delta'),$$

retentis litteris h et h', quippe quarum valores iam constant, ad quoduis tempus t, ab initio elapsum, in minutis secundis expressum, ambo anguli θ et Φ sequenti modo determinabuntur:

$$\theta = \alpha c \sin. (t \sqrt{\tfrac{2g}{h}} + \delta) + \alpha' c \sin. (t \sqrt{\tfrac{2g}{h'}} + \delta') \text{ et}$$
$$\Phi = \alpha (f + \sqrt{(ff + ce)}) \sin. (t \sqrt{\tfrac{2g}{h}} + \delta)$$
$$+ \alpha' (f - \sqrt{(ff + ce)}) \sin. (t \sqrt{\tfrac{2g}{h'}} + \delta').$$

His autem angulis cognitis, status penduli nostri ad quoduis tempus, ideoque etiam eius motus perfecte innotescet.

§. 30. Iam obseruauimus constantes per integrationes ingressas esse α, α', δ, δ', quas ergo ex statu initiali penduli, vbi erat $t = 0$, determinari oportet. Quoniam igitur assumsimus, pendulum in statu aequilibrii esse versatum, necesse est, vt facto $t = 0$ ambo anguli θ et Φ euanescant, vnde nascuntur hac duae determinationes:

1°. $0 = \alpha c \sin. \delta + \alpha' c \sin. \delta'$, siue
$0 = \alpha \sin. \delta + \alpha' \sin. \delta'$ et

2°. $0 = \alpha (f + \sqrt{(ff + ce)}) \sin. \delta$
$+ \alpha' (f - \sqrt{(ff + ce)}) \sin. \delta'$.

Quia autem ex priore est $\alpha' \sin.\delta' = -\alpha \sin.\delta$, hoc valore substituto fiet $2\alpha \sin.\delta \sqrt{(ff+ce)}$, vnde sequitur fore vel $\alpha = 0$, vel $\delta = 0$; at vero α euanescere nequit, quia alioquin pendulum nullum motum esset accepturum: erit ergo $\sin.\delta = 0$, ideoque $\delta = 0$, quamobrem nostrae expressiones erunt iam multo simpliciores

$$\theta = \alpha c \sin. t \sqrt{\tfrac{2g}{b}} + \alpha' c \sin. t \sqrt{\tfrac{2g}{b'}}, \text{ et}$$

$$\Phi = \alpha (f + \sqrt{(ff+ce)}) \sin. t \sqrt{\tfrac{2g}{b}}$$
$$+ \alpha' (f - \sqrt{(ff+ce)}) \sin. t \sqrt{\tfrac{2g}{b'}}.$$

§. 31. Deinde vero assumsimus initio, centro gravitatis celeritatem imprimi $= n$, quare cum ista celeritas in genere sit $= \frac{dy}{dt} = \frac{e\,d\theta + c\,d\Phi}{dt}$, posito $t = 0$ ista expressio fieri debet $= n$; reperitur vero

$$\tfrac{d\theta}{dt} = \alpha c \sqrt{\tfrac{2g}{b}} \cos. t \sqrt{\tfrac{2g}{b}} + \alpha' c \sqrt{\tfrac{2g}{b'}} \cos. t \sqrt{\tfrac{2g}{b'}};$$

deinde erit simili modo

$$\tfrac{d\Phi}{dt} = \alpha B \sqrt{\tfrac{2g}{b}} \cos. t \sqrt{\tfrac{2g}{b}} + \alpha' B' \sqrt{\tfrac{2g}{b'}} \cos. t \sqrt{\tfrac{2g}{b'}},$$

vbi retinuimus litteras B et B' loco valorum

$$f + \sqrt{(ff+ce)} \text{ et } f - \sqrt{(ff+ce)}.$$

His igitur valoribus adhibitis, posito $t = 0$, ista conditio motus impressi dabit hanc aequationem:

$$n = \alpha c \sqrt{\tfrac{2g}{b}} (e + B) + \alpha' c \sqrt{\tfrac{2g}{b'}} (e + B');$$

quia igitur erat

$$b = e + f + \sqrt{(ff+ce)} = e + B,$$

similique modo $b' = e + B'$, ista aequatio hanc induet formam simpliciorem:

$$n = \alpha c \sqrt{2gb} + \alpha' c \sqrt{2gb'}$$

§. 32.

§. 32. Praeterea vero assumsimus, toti pendulo initio quoque motum angularem esse impressum, cuius celeritas sit $=\nu$. Quia igitur in genere [illegible] $\frac{d\Phi}{dt}$, necesse est vt posito $t=0$ fiat $\frac{d\Phi}{dt}=\nu$, vnde nascitur ista aequatio:

$$\nu = \alpha B \sqrt{\tfrac{2g}{b}} + \alpha' B' \sqrt{\tfrac{2g}{b'}},$$

vnde deducimus:

$$\alpha' \sqrt{\tfrac{2g}{b'}} = \tfrac{\nu}{B'} - \tfrac{\alpha B}{B'} \sqrt{\tfrac{2g}{b}},$$

qui valor in aequatione praecedente, vbi adhuc inerant litterae B et B', substitutus dabit:

$$n = \alpha c e \sqrt{\tfrac{2g}{b}} \tfrac{(B'-B)}{B'} + \tfrac{\nu c(e+B')}{B'}.$$

Quia igitur est

$$B'-B = -2\sqrt{(ff+ce)} \text{ et } e+B' = b', \text{ erit}$$

$$n = -\tfrac{2\alpha c e}{B'} \sqrt{\tfrac{2g}{b}(ff+ce)} + \tfrac{\nu c b'}{B'},$$

ex qua aequatione reperimus:

$$\alpha \sqrt{\tfrac{2g}{b}} = \frac{\nu b'}{2e\sqrt{(ff+ce)}} - \frac{nB'}{2ce\sqrt{(ff+ce)}},$$

quo valore substituto fiet

$$\alpha' \sqrt{\tfrac{2g}{b'}} = \tfrac{\nu}{B'} - \frac{B\nu b'}{2B'e\sqrt{(ff+ce)}} + \frac{nB}{2ce\sqrt{(ff+ce)}}, \text{ siue}$$

$$\alpha' \sqrt{\tfrac{2g}{b'}} = \frac{-\nu b}{2e\sqrt{(ff+ce)}} + \frac{nB}{2ce\sqrt{(ff+ce)}},$$

sicque omnes quatuor constantes α et α', δ et δ', ex statu initiali determinauimus. Vnde pro quouis tempore futuro t tam status penduli quam eius motus assignari poterit.

De

De motu regulari quem pendulum propofitum recipere poteft.

§. 33. Quamdiu ambo finus illorum angulorum: $t\sqrt{\frac{2g}{b}}+\delta$ et $t\sqrt{\frac{2g}{b'}}+\delta'$, in formulas noftras ingrediuntur, quas quidem hic in genere, fine vllo refpectu ad certum ftatum initialem habito, fumus confideraturi, motus penduli pro mixto haberi debet ex duobus motibus fimplicioribus, quorum vterque ex vno illorum angulorum oriri eft cenfendus. Ex quo intelligitur, tum demum motum penduli pro fimplici haberi poffe, quando vnicus tantum illorum finuum in calculum ingreditur, id quod euenit, quando fuerit vel $\alpha = 0$ vel $\alpha' = 0$; tum enim totus penduli motus fimilis erit motui penduli fimplicis, quod omnes fuas ofcillationes ifochronas peragit.

§. 34. Euoluamus igitur primo cafum, quo $\alpha' = 0$, atque ad quoduis tempus t bini anguli θ et Φ fequenti modo exprimentur:

$$\theta = \alpha c \,\text{fin.}\, (t\sqrt{\tfrac{2g}{b}}+\delta) \text{ et}$$

$$\Phi = \alpha(f+\sqrt{(ff+ce)})\,\text{fin.}\,(t\sqrt{\tfrac{2g}{b}}+\delta),$$

ex quibus colligitur differentiando:

$$\frac{d\theta}{dt} = \alpha c\sqrt{\tfrac{2g}{b}}\,\text{cof.}\,(t\sqrt{\tfrac{2g}{b}}+\delta) \text{ et}$$

$$\frac{d\Phi}{dt} = \alpha\sqrt{\tfrac{2g}{b}}(f+\sqrt{(ff+ce)})\,\text{cof.}\, t\sqrt{(\tfrac{2g}{b}+\delta)}$$

vbi $\frac{d\theta}{dt}$ et $\frac{d\Phi}{dt}$ celeritates angulares exprimunt, quibus pendulum tam circa punctum O, quam circa punctum c gyratur.

§. 35.

§. 35. Quando ergo hae postremae expressiones euanescunt, tum totum pendulum ad statum quietis erit redactum, quod quia in maximis excursionibus contingit, inde nouae oscillationes computari solent; haec igitur momenta euenient, quando cos. $(t\sqrt{\frac{2g}{b}}+\delta)=0$, hoc est quando angulus ipse $t\sqrt{\frac{2g}{b}}+\delta$ vel recto, vel tribus rectis aequalis euadit. Ponamus igitur $t\sqrt{\frac{2g}{b}}+\delta=90=\frac{\pi}{2}$, et pendulum in istum statum perueniet elapso tempore $t=(90-\delta)\sqrt{\frac{b}{2g}}$; dehinc vero iterum in talem statum perueniet elapso tempore $t=(270-\delta)\sqrt{\frac{b}{2g}}$. Sicque interuallum inter haec duo momenta, cui tempus vnius oscillationis aequale reputari solet, erit $=180\sqrt{\frac{b}{2g}}=\pi\sqrt{\frac{b}{2g}}$, quod hoc modo in minutis secundis exprimetur; vnde patet, has oscillationes isochronas fore pendulo simplici longitudinis $=b$.

§. 36. Nostrum ergo pendulum eiusmodi motum regularem recipere potest, qui conueniat cum motu penduli simplicis, cuius longitudo $=b$. Vidimus autem hanc longitudinem b ita per elementa, quibus pendulum nostrum constituitur, determinari, vt sit

$$b=e+f+\sqrt{(ff+ce)},$$

existente $f=\frac{kk+cc-ce}{2c}$. Reuera autem nostrum pendulam in pendulum simplex abibit, quando fit $kk=0$; quoniam tum tota penduli massa in centro grauitatis g colligitur; tum vero insuper punctum O in ipsum punctum a incidit, quandoquidem tum nostrum pendulum longitudinis $cg = c$ circa punctum fixum c oscillationes peraget; facto autem $kk = 0$ et $e = 0$ erit $f = \frac{1}{2}c$, hincque $h = c$, id quod egregie conuenit cum veritate. Tum vero etiam in genere notari meretur casus, quo $kk = 0$, siue tota penduli massa in centro grauitatis g vnita; tum enim erit $f = \frac{c-e}{2}$, hincque $\sqrt{(ff + ce)} = \frac{c+e}{2}$, vnde fit $h = c + e$; quare cum sit $Oc = e$ et $cg = c$, ideoque $Og = c + e = h$, pendulum perinde oscillationes peraget, quasi ex puncto O esset suspensum.

§. 37. Euidens autem est, figuram fulcri MAN plurimum conferre ad motum istum penduli oscillatorium, id quod operae pretium erit accuratius contemplari. Primo igitur sumamus superficiem fulcri esse planam et horizontalem, cui axis cylindricus penduli incumbat; erit igitur radius $AO = a = \infty$; et quia b est radius axis, erit etiam distantia $Oc = e = \infty$, vnde angulus θ necessario euanescere debet, ita vt spatium $e\theta$, quod interuallum Ac indicat, maneat finitum adeoque quam minimum; tum igitur erit

$$f = -\tfrac{1}{2}e + \tfrac{1}{2}c + \tfrac{kk}{2c}, \text{ hincque}$$
$$ff = \tfrac{1}{4}ee - \tfrac{1}{2}ce - \tfrac{ekk}{2c}, \text{ ideoque}$$
$$ff + ce = \tfrac{1}{4}ee + \tfrac{1}{2}ce - \tfrac{ekk}{2c} \text{ et}$$
$$\sqrt{(ff + ce)} = \tfrac{1}{2}e + \tfrac{1}{2}c - \tfrac{kk}{2c},$$

hinc igitur colligitur $h = c + e$, quae longitudo cum sit infinita, patet, super fulcro plano axem penduli ita de loco dimoueri posse, vt nullae oscillationes oriantur.

§. 38. Quoniam autem quantitas radicalis $\sqrt{(ff + ce)}$ etiam signum negatiuum inuoluit, si eius valorem

lorem negatiuum capiamus, orietur pro eodem casu fulcri plani $b = \frac{kk}{c}$; vnde patet, nisi tota penduli massa in centro grauitatis sit collecta, tale pendulum fulcro plano incumbens etiam oscillari posse ad similitudinem penduli simplicis, cuius longitudo $= \frac{kk}{c}$. Pro hoc autem casu $e = \infty$ et $b = \frac{kk}{c}$, motus nostri penduli his formulis exprimetur:

$$\theta = \alpha c \sin. \left(\frac{t}{k} \sqrt{2gc} + \delta\right) \text{ et}$$

$$\Phi = \alpha \left(\frac{kk}{c} - e\right) \sin. \left(\frac{t}{k} \sqrt{2gc} + \delta\right),$$

vnde patet, α tam exiguum assumi debere, vt adhuc αe maneat quam minimum. Sumamus igitur $\alpha e = -\beta$, siue $\alpha = -\frac{\beta}{e}$, vnde erit

$$e\theta = -\beta c \sin. \left(\frac{t}{k} \sqrt{2gc} + \delta\right) \text{ et}$$

$$\Phi = \beta \sin. \left(\frac{t}{k} \sqrt{2gc} + \delta\right).$$

Hic scilicet, dum pendulum in excursione maxima versabitur, axis cylindricus super fulcro plano retrocessit per spatium $ac = e\theta = \beta c$, vbi cum recta cg a situ verticali declinet angulo β, euidens est centrum grauitatis in ipsam verticalem principalem incidere; ex quo intelligitur, pendulum ad talem motum oscillatorium componi posse, dum axis cylindricus extra verticalem principalem remouetur, centrum grauitatis autem in ipsa hac recta in g retinetur; tum enim, si fuerit dimissum, cum recta cg ad situm verticalem appropinquat; axis cylindricus super fulcro versus A accedet, atque adeo vltra A procedet, qui motus reciprocus conformis erit pendulo longitudinis $\frac{kk}{c}$. Tab. IV. Fig. 6

 §. 29.

§. 29. Eodem modo res se habet si fuerit $\alpha = 0$, tum enim nostrum pendulum pariter motum regularem recipiet, et ambo anguli θ et Φ sequentes mutationes subibunt:

$$\theta = \alpha' c \text{ fin. } (t \sqrt{\tfrac{2g}{b'}} + \delta') \text{ et}$$

$$\Phi = \alpha' (f - \sqrt{(ff + ce)}) \text{ fin. } (t \sqrt{\tfrac{2g}{b'}} + \delta'),$$

hicque motus reciprocus congruet cum motu oscillatorio penduli simplicis, cuius longitudo $= b'$. Vidimus autem esse $b' = e + f - \sqrt{(ff + ce)}$, existente $f = \frac{kk + cc - ce}{2c}$. Caeterum phoenomena hinc oriunda, quando fulcrum planum statuitur, iam ante commemorauimus, vbi formulam radicalem $\sqrt{(ff + ce)}$ negatiuam assumsimus.

§. 40. Antequam etiam motus irregulares perpendamus, casus supra memoratus, quo axis cylindricus penduli fulcro plano extra punctum A incumbit, dum centrum grauitatis g in ipsa recta verticali A g detinetur, quandam illustrationem postulat, quoniam ex formulis inuentis sequitur, centrum grauitatis g perpetuo in recta verticali A g esse versaturum, dum interea axis cylindricus hinc atque hinc a puncto A motu reciproco digredietur et oscillationes peraget pendulo simplici longitudinis $= \frac{kk}{c}$ conformes, id quod experientiae contrarium videbitur, dum potius centrum grauitatis g circa axem cylindricum immotum oscillationes peragere deprehendetur. Verum iste effectus manifesto frictioni erit tribuendus, qua axis cylindricus non sine difficultate super fulcro progredi potest. Verum in tota hac analysi frictionem penitus e medio sustulimus, ita vt axis cylindricus liberrime super

fulcro

fulcro moueri queat; ſublata enim frictione, quia tam pondus penduli quam preſſio in fulcrum in directione verticali agunt, hae duae vires, ipſi centro grauitatis applicatae, nullum motum lateralem generare poſſunt, ſed centrum grauitatis perpetuo in eadem recta verticali perſiſtere debet

De motibus irregularibus, quos pendulum propoſitum recipere poteſt.

§. 41. Quando neutra conſtantium α et α' euaneſcit, motus orietur maxime irregularis: inuoluet enim duplicem motum oſcillatorium, quorum alter reſpondebit pendulo ſimplici longitudinis $= b$, et periodos ſuas abſoluet tempore $t = \pi \sqrt{\frac{b}{2g}}$; alter vero motus reſpondebit pendulo longitudinis $= b'$, cuius periodi abſoluentur tempore $t = \pi \sqrt{\frac{b'}{2g}}$. Quare ex hac permiſtione, pro diuerſitate quantitatum b et b', inprimis autem pro ratione tam inter coëfficientes α et α', quam inter angulos δ et δ', immenſa varietas locum habere poterit, cuius omnes diuerſas agitationes nullo modo recenſere vel enumerare licebit.

§. 42. Quae quo facilius, mente ſaltem, percipi queant, ambos valores litterarum b et b' accuratius ex primis elementis, quibus ſtatus penduli continetur, euoluamus. Cum igitur breuitatis gratia poſuerimus

$$f = \frac{kk + cc - ce}{2c}, \text{ erit } f + e = \frac{kk + cc + ce}{2c},$$

tum vero

$$\sqrt{(ff + ce)} = \frac{1}{2c}\sqrt{k^4 + 2ckk(c-e) + cc(c+e)^2},$$

 quare

quare cum sit

$$b = e + f + \sqrt{(ff + ce)} \text{ et } b' = e + f - \sqrt{(ff + ce)},$$

hi ambo valores euoluti erunt:

$$b = \frac{kk + cc + ce}{2c} + \frac{1}{2c}\sqrt{k^4 + 2ckk(c-e) + cc(c+e)^2} \text{ et}$$

$$b' = \frac{kk + cc + ce}{2c} - \frac{1}{2c}\sqrt{k^4 + 2ckk(c-e) + cc(c+e)^2}.$$

§. 43. His duobus valoribus constitutis, quoniam supra vidimus esse etiam $b = e + B$ et $b' = e + B'$, erit vicissim $B = b - e$ et $B' = b' - e$. Hinc igitur ambo anguli θ et Φ, pro quouis tempore t sequenti modo determinabuntur:

$$\theta = \alpha c \sin.(t\sqrt{\tfrac{2g}{b}} + \delta) + \alpha' c \sin.(t\sqrt{\tfrac{2g}{b'}} + \delta') \text{ et}$$

$$\Phi = \alpha(b-e)\sin.(t\sqrt{\tfrac{2g}{b}} + \delta) + \alpha'(b'-e)\sin.(t\sqrt{\tfrac{2g}{b'}} + \delta'),$$

ex quibus formulis etiam ambae celeritates angulares, scilicet $\frac{d\theta}{dt}$ et $\frac{d\Phi}{dt}$, quibus ipsi anguli θ et Φ post tempus $= t$ promouebuntur, assignari poterunt; erit enim:

$$\frac{d\theta}{dt} = \alpha c\sqrt{\tfrac{2g}{b}}\cos.(t\sqrt{\tfrac{2g}{b}} + \delta) + \alpha' c\sqrt{\tfrac{2g}{b'}}\cos.(t\sqrt{\tfrac{2g}{b'}} + \delta') \text{ et}$$

$$\frac{d\Phi}{dt} = \alpha(b-e)\sqrt{\tfrac{2g}{b}}\cos.(t\sqrt{\tfrac{2g}{b}} + \delta)$$

$$+ \alpha'(b'-e)\sqrt{\tfrac{2g}{b'}}\cos.(t\sqrt{\tfrac{2g}{b'}} + \delta'),$$

quibus elementis vniuersus penduli motus perfecte determinatur, ita vt nihil amplius desiderari possit.

§. 44. Saepenumero, imprimis quando centrum fulcri O ad insignem distantiam constituitur, vel adeo infra fulcrum cadit, id quod euenit quando curuatura fulcri MAN euadit conuexa, e re erit ipsum angulum θ ex calculo expellere, eiusque loco arcum Cc, per quem centrum axis cylindrici c e situ naturali C iam est digressum

greſſum in calculum introducere. Ponamus igitur iſtum arcum $C c = s$, et cum ſit interuallum $O C = O c = e$, erit iſte arcus $s = e\theta$, qui quo concinnius in calculum inferatur, loco αe et $\alpha' e$, ſcribamus litteras β et β', vt ſit $\alpha = \frac{\beta}{e}$ $\alpha' = \frac{\beta'}{e}$, atque hinc tam iſte arcus $C c = s$, quam obliquitas penduli, ſeu angulus $C b c = \Phi$, ſequenti modo definientur:

$$s = \beta c\,\text{ſin.}\,(t\sqrt{\tfrac{2g}{b}} + \delta) + \beta' c\,\text{ſin.}\,(t\sqrt{\tfrac{2g}{b'}} + \delta') \text{ et}$$

$$\Phi = \frac{\beta(b-e)}{e}\,\text{ſin.}\,(t\sqrt{\tfrac{2g}{b}} + \delta) + \frac{\beta'(b'-e)}{e}\,\text{ſin.}\,(t\sqrt{\tfrac{2g}{b'}} + \delta'),$$

mutationes autem momentaneae ſiue celeritates erunt:

$$\frac{ds}{dt} = \beta c\sqrt{\tfrac{2g}{b}}\,\text{coſ.}\,(t\sqrt{\tfrac{2g}{b}} + \delta) + \beta' c\sqrt{\tfrac{2g}{b'}}\,\text{coſ.}\,(t\sqrt{\tfrac{2g}{b'}} + \delta') \text{ et}$$

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{\beta(b-e)}{e}\sqrt{\tfrac{2g}{b}}\,\text{coſ.}(t\sqrt{\tfrac{2g}{b}} + \delta) + \frac{\beta'(b'-e)}{e}\sqrt{\tfrac{2g}{b'}}\,\text{coſ.}(t\sqrt{\tfrac{2g}{b'}} + \delta'),$$

vbi notetur, vt totus motus intra limites infinite paruos includatur, pro litteris β et β' fractiones infinite paruas ſtatui debere.

§. 45. Hinc operae pretium erit caſum, quo fulcrum ſuperne eſt conuexum, ſeorſim perpendere. Sit igitur M A N figura fulcri ſuperne conuexi, cuius centrum ſit in O, eiusque profunditas infra centrum axis cylindrici C, nempe interuallum $O C = i$. Elapſo autem tempore t ſit centrum axis cylindrici in c, ita vt confecerit arcum $C c = s$; tum vero poſita penduli obliquitate, ſeu angulo $C b c = \Phi$, et interuallo $c g = c$, praecedentes formulae ad hunc caſum accommodabuntur, ſi vbique loco e ſcribatur $-i$; tum igitur primo ambae quantitates b et b', ſequenti modo exprimentur: Tab. V. Fig. 1.

$b =$

$$b = \frac{kk + cc - ci}{2c} + \frac{1}{2c} \sqrt{(k^4 + 2ckk(c+i) + cc(c-i)^2} \text{ et}$$

$$b' = \frac{kk + cc - ci}{2c} - \frac{1}{2c} \sqrt{k^4 + 2ckk(c+i) + cc(c-i)^2}.$$

§. 46. Pro motibus autem omnibus possibilibus huius penduli definiendis habebimus sequentes formulas:

$$s = \beta c \,\text{fin.}\left(t \sqrt{\tfrac{2g}{b}} + \delta\right) + \beta' c \,\text{fin.}\left(t \sqrt{\tfrac{2g}{b'}} + \delta'\right) \text{ et}$$

$$\Phi = -\frac{\beta(b+i)}{i} \text{fin.}\left(t \sqrt{\tfrac{2g}{b}} + \delta\right) - \frac{\beta'(b'+i)}{i} \text{fin.}\left(t \sqrt{\tfrac{2g}{b'}} + \delta'\right);$$

pro celeritatibus autem valebunt hae expressiones:

$$\frac{ds}{dt} = \beta c \sqrt{\tfrac{2g}{b}} \,\text{cof.}\left(t \sqrt{\tfrac{2g}{b}} + \delta\right) + \beta' c \sqrt{\tfrac{2g}{b'}} \,\text{cof.}\left(t \sqrt{\tfrac{2g}{b'}} + \delta'\right) \text{ et}$$

$$\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{\beta(b+i)}{i} \sqrt{\tfrac{2g}{b}} \,\text{cof.}\left(t \sqrt{\tfrac{2g}{b}} + \delta\right)$$
$$- \frac{\beta'(b'+i)}{i} \sqrt{\tfrac{2g}{b'}} \,\text{cof.}\left(t \sqrt{\tfrac{2g}{b'}} + \delta'\right).$$

§. 47. Circa omnes autem has formulas probe obferuari conuenit, eas fubfiftere non poffe, nifi ambae quantitates b et b' fuerint pofitiuae, quia alioquin formulae noftrae euaderent imaginariae; quando autem hoc vfu venit, id indicio erit, tale pendulum fuper fulcro plane nullum motum ofcillatorium recipere poffe, fed poft motum impreffum de fulcro effe delapfurum, id quod imprimis erit metuendum circa quantitatem b' in pofteriori cafu fulcri fuperne conuexi.

Appendix de motu vacillatorio fiue nutatorio,

quo cunae agitari folent.

§. 48. De hoc motu iam pridem tractationem in medium attuli, vbi imprimis motum reciprocum cunarum

rum super pauimento plano horizontali sum contemplatus, atque in longitudinem penduli simplicis inquisiui, quod suas oscillationes paribus temporibus absolueret. Euidens autem est praesentem tractationem ad istum casum reduci, si tota penduli massa supra fulcrum existere statuatur, ita vt nulla eius pars infra fulcrum porrigatur.

§. 49. Referat igitur arcus circuli M A N figuram pauimenti, super quo cunae sint agitandae, cuius punctum imum sit in A et centrum curuedinis in O, et quod ante axem penduli cylindricum vocauimus, hic imprimis corpus cunarum constituet, cuius centrum in statu aequilibrii reperiatur in C; vbi euidens est, radium curvaturae baseos cunarum minorem esse debere radio A O, siquidem pauimentum superne fuerit concauum. Ponatur igitur, vt ante, distantia $OC = e$, et quia totum corpus super pauimentum existit, ponamus in situ aequilibrii centrum grauitatis totius corporis cadere in punctum G, infra centrum motus C, interuallo $Cg = c$ situm; si enim supra C reperiretur, facile intelligere licet, nullum motum reciprocum oriri posse. Tab. V. Fig. 2.

§. 50. Tempore iam elapso t peruenerit centrum curuedinis cunarum in punctum c, percurso arcu $Cc = s$, ita vt ex puncto O per c ducta recta Oc pauimento in ipso puncto contactus occurrat; nunc vero centrum grauitatis totius corporis reperiatur in puncto g, existente $cg = c$, quae recta, retro producta, verticali A O occurrat in h et angulus $Chc = \phi$ indicabit obliquitatem cunarum, quarum corpus in figura perperam per totum circulum est designatum; sufficit enim vt basis, quae pauimento in-

 sistit,

ſiſtit, curuaturam habeat ex centro c deſcriptam, quandoquidem hic oſcillationes ſeu vacillationes tantum infinite paruas conſideramus; hoc eo magis notaſſe iuuabit, quia alioquin centrum grauitatis G aegre infra C incideret. Denique vero totum momentum inertiae corporis cunarum ſit, vt ſupra poſuimus, $= Mkk$, deſignante M pondus totius corporis, cuius quidem ratio iterum ex calculo eſt egreſſa.

§. 51. Hoc ſtatu cunarum conſtituto nunc quidem manifeſtum eſt, infinities plures motus reciprocos locum inuenire poſſe, quam olim aſſignaueram, vbi ſcilicet totam inueſtigationem ad oſcillationes tantum regulares reſtrinxeram; praeterea vero, quia ibi pauimentum planum aſſumſeram, praeſens euolutio huius argumenti non ſolum multo eſt generalior, ſed etiam omnes motus poſſibiles in ſe complectitur.

§. 52. Ad ſtatum igitur cunarum propoſitarum rite cognoſcendum totum negotium ad tria elementa reducitur, quorum primum eſt diſtantia centrorum ipſius pauimenti O et cunarum C, quam ponimus $OC = e$; ſecundum elementum eſt profunditas centri grauitatis G infra centrum motus C, quam ponimus $GC = cg = c$; tertium vero elementum eſt quadratum kk, per quod tota maſſa multiplicata praebet momentum inertiae totius corporis reſpectu centri grauitatis G vel g.

§. 53. Quodſi iam via a centro motus deſcripta Cc ponatur $= s$ et obliquitas cunarum, ſeu angulus

Chc

$Cbc = \Phi$, poſtquam ex ternis elementis cognitis eruti fuerint hi duo valores:

$$b = \frac{kk + cc + ce}{2c} + \frac{1}{2c}\sqrt{(k^4 + 2ckk(c-e) + cc(c+e)^2)} \text{ et}$$
$$b' = \frac{kk + cc + ce}{2c} - \frac{1}{2c}\sqrt{(k^4 + 2ckk(c-e) + cc(c+e)^2}$$

ad datum quoduis tempus t binae litterae s et Φ ſequenti modo determinabuntur:

$$s = \beta c \text{ ſin.} (t\sqrt{\tfrac{2g}{b}} + \delta) + \beta' c \text{ ſin.} (t\sqrt{\tfrac{2g}{b'}} + \delta') \text{ et}$$
$$\Phi = \beta \frac{(b-e)}{e} \text{ ſin.} (t\sqrt{\tfrac{2g}{b}} + \delta) + \beta' \frac{(b'-e)}{e} \text{ ſin.} (t\sqrt{\tfrac{2g}{b'}} + \delta').$$

Sin autem pauimentum fuerit conuexum, loco e ſcribi debet $-i$, vnde formulae exſurgent §. 46 allegatae. Caeterum hic eadem ſunt obſeruanda, quae ſupra fuſius ſunt expoſita.
