SPECVLATIONES
CIRCA QVASDAM INSIGNES PROPRIETATES NVMERORVM.

Auctore

L. EVLERO.

§. 1.

Nullum eſt dubium, quin multitudo omnium fractionum diuerſarum, quae inter terminos o et 1 conſtitui poſſunt, ſit infinita; vnde cum multitudo omnium numerorum integrorum etiam ſit infinita, manifeſtum eſt, multitudinem omnium plane fractionum adhuc infinities eſſe maiorem; quandoquidem inter binos numeros, vnitate differentes, innumerabiles fractiones diuerſae admitti debent. Hic autem aſſumitur, denominatores fractionum in infinitum augeri poſſe: at ſi terminus praeſcribatur, quem numeratores ſuperare non debeant, tum vtique numerus fractionum, quas inter terminos o et 1 conſtituere licet, erit determinatus. Quantus autem iſte numerus ſit futurus, pro quouis limite, qui denominatoribus praeſcribitur, quaeſtio quidem primo intuitu non ita difficilis videtur; verum ſi rem attentius conſideremus, tantae difficultates occurrunt, vt perfecta iſtius quaeſtionis ſolutio vix adhuc ſperari poſſe videatur.

§. 2.

§. 2. Quoniam enim fractiones, de quibus hic quaeritur, omnes inter se diuersae esse debent, ex quolibet denominatore aliae fractiones formari nequeunt, nisi quarum numeratores non solum sint denominatore minores, sed etiam ad eundem primi, quia alioquin ad formam simpliciorem, ideoque ad denominatores minores reduci possent. Ita cum factio $\frac{15}{24}$ reducatur ad $\frac{5}{8}$, ista fractio pro denominatore $= 24$ non amplius numerari poterit, quoniam pro denominatore 8 iam est numerata. Totum igitur negotium huc redit, vt pro quolibet denominatore, qui sit $= D$, multitudo numerorum ipso minorum, et qui cum eo nullum habeant diuisorem communem, assignetur, quippe qui soli pro numeratoribus accipi possunt. Ita pro denominatore 24 alii numeratores admitti nequeunt, praeter 1, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, quorum multitudo est tantum 8, cuius ratio in compositione numeri 24 est sita. Si enim denominator D esset numerus primus, tum vtique omnes numeri ipso minores, quorum multitudo est $D - 1$, idoneos praeberent numeratores. Quo plures autem denominator D habuerit diuisores, eo magis multitudo numeratorum restringitur.

§. 3. Hinc igitur ista quaestio nascitur: vt, proposito quocunque numero D, multitudo numerorum ipso minorum, ad eumque simul primorum, assignetur. Quod quo facilius praestari possit, denotet character πD multitudinem istam numerorum ipso D minorum, et qui cum eo nullum habeant diuisorem communem. Ac primo quidem manifestum est, si fuerit D numerus primus, fore $\pi D = D - 1$. Ante autem quam numeros compositos examinemus, valores huius characteris π D pro omnibus numeris centenario non maioribus apponamus:

$\pi\ 1 = 0$	$\pi\ 21 = 12$	$\pi\ 41 = 40$	$\pi\ 61 = 60$	$\pi\ 81 = 54$
$\pi\ 2 = 1$	$\pi\ 22 = 10$	$\pi\ 42 = 12$	$\pi\ 62 = 30$	$\pi\ 82 = 40$
$\pi\ 3 = 2$	$\pi\ 23 = 22$	$\pi\ 43 = 42$	$\pi\ 63 = 36$	$\pi\ 83 = 82$
$\pi\ 4 = 2$	$\pi\ 24 = 8$	$\pi\ 44 = 20$	$\pi\ 64 = 32$	$\pi\ 84 = 24$
$\pi\ 5 = 4$	$\pi\ 25 = 20$	$\pi\ 45 = 24$	$\pi\ 65 = 48$	$\pi\ 85 = 64$
$\pi\ 6 = 2$	$\pi\ 26 = 12$	$\pi\ 46 = 22$	$\pi\ 66 = 20$	$\pi\ 86 = 42$
$\pi\ 7 = 6$	$\pi\ 27 = 18$	$\pi\ 47 = 46$	$\pi\ 67 = 66$	$\pi\ 87 = 56$
$\pi\ 8 = 4$	$\pi\ 28 = 12$	$\pi\ 48 = 16$	$\pi\ 68 = 32$	$\pi\ 88 = 40$
$\pi\ 9 = 6$	$\pi\ 29 = 28$	$\pi\ 49 = 42$	$\pi\ 69 = 44$	$\pi\ 89 = 88$
$\pi\ 10 = 4$	$\pi\ 30 = 8$	$\pi\ 50 = 20$	$\pi\ 70 = 24$	$\pi\ 90 = 24$
$\pi\ 11 = 10$	$\pi\ 31 = 30$	$\pi\ 51 = 32$	$\pi\ 71 = 70$	$\pi\ 91 = 72$
$\pi\ 12 = 4$	$\pi\ 32 = 16$	$\pi\ 52 = 24$	$\pi\ 72 = 24$	$\pi\ 92 = 44$
$\pi\ 13 = 12$	$\pi\ 33 = 20$	$\pi\ 53 = 52$	$\pi\ 73 = 72$	$\pi\ 93 = 60$
$\pi\ 14 = 6$	$\pi\ 34 = 16$	$\pi\ 54 = 18$	$\pi\ 74 = 36$	$\pi\ 94 = 46$
$\pi\ 15 = 8$	$\pi\ 35 = 24$	$\pi\ 55 = 40$	$\pi\ 75 = 40$	$\pi\ 95 = 72$
$\pi\ 16 = 8$	$\pi\ 36 = 12$	$\pi\ 56 = 24$	$\pi\ 76 = 36$	$\pi\ 96 = 32$
$\pi\ 17 = 16$	$\pi\ 37 = 36$	$\pi\ 57 = 36$	$\pi\ 77 = 60$	$\pi\ 97 = 96$
$\pi\ 18 = 6$	$\pi\ 38 = 18$	$\pi\ 58 = 28$	$\pi\ 78 = 24$	$\pi\ 98 = 42$
$\pi\ 19 = 18$	$\pi\ 39 = 24$	$\pi\ 59 = 58$	$\pi\ 79 = 78$	$\pi\ 99 = 60$
$\pi\ 20 = 8$	$\pi\ 40 = 16$	$\pi\ 60 = 16$	$\pi\ 80 = 32$	$\pi\ 100 = 40$

§. 4. Ex hac igitur tabula patet, denominatorem 2 vnicam praebere fractionem, scilicet $\frac{1}{2}$ inter 0 et 1; denominatorem vero 3 dare 2; at 4 dare has duas fractiones: $\frac{1}{3}$ et $\frac{3}{4}$; et ita porro. Vnde si denominatores non vltra 10 continuare velimus, numerus omnium fractionum erit 31; sin autem continuemus vsque ad 20, numerus est 127; vsque

vsque ad 30 progrediendo summa fractionum prodit 277, vti sequens tabella declarat.

Max. denom.	Num. fract.
10	31
20	127
30	277
40	489
50	773
60	1101
70	1493
80	1975
90	2489
100	3043

§. 5. Quod si omnes plane fractiones admittere vellemus, pro denominatore maximo $= 10$ numerus omnium fractionum foret $1 + 2 + 3 + 4 \ldots\ldots + 9 = 45$. Hinc igitur excludi debent eae, quae reductionem admittunt. Primo igitur excludendae erunt fractiones $\frac{2}{4}, \frac{3}{6}, \frac{4}{8}, \frac{5}{10}$, quippe $= \frac{1}{2}$; tum vero istae: $\frac{2}{6}$ et $\frac{3}{9}$, quippe $= \frac{1}{3}$; itemque $\frac{4}{6}$ et $\frac{6}{9}$ vtpote $= \frac{2}{3}$; praeterea $\frac{2}{8}$ et $\frac{6}{8}$; ac denique $\frac{2}{10}, \frac{4}{10}, \frac{6}{10}, \frac{8}{10}$, quarum omnium numerus est 14, qui a 45 subtractus rerelinquit 31. Pro maioribus autem denominatoribus, quos admittere voluerimus, haec enumeratio nimis fiet prolixa, quae quomodo nihilo minus institui possit, videamus.

§. 6. Sit igitur D maximus denominator, quem admittimus, ac numerus omnium plane fractionum foret

$$= 1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + (D - 1) = \frac{DD - D}{2}.$$

 Hinc

Hinc iam excludi debent omnes fractiones, quarum valor est $\frac{1}{2}$, praeter ipsum $\frac{1}{2}$. Hunc in finem diuidatur D per 2, et quotus, siue verus, siue proxime minor sit $=\alpha$, ac manifestum est, numerum fractionum excludendarum fore $=\alpha-1$. Deinde pro fractionibus $\frac{1}{3}$ et $\frac{2}{3}$ sit $\frac{D}{3}=\beta$, denotante β vel verum, vel vero proxime minorem, eritque numerus fractionum excludendarum $=2(\beta-1)=(\beta-1)\pi:3$. Simili modo si ponamus $\frac{D}{4}=\gamma$; tum vero porro $\frac{D}{5}=\delta$, $\frac{D}{6}=\varepsilon$, etc., quamdiu scilicet isti quoti prodeunt vnitate maiores, numeri fractionum hinc excludendarum erunt

$$(\gamma-1)\pi:4,\ (\delta-1)\pi:5,\ (\varepsilon-1)\pi:6 \text{ etc.}$$

quibus igitur ablatis remanebit multitudo fractionum quaesita:

$$\frac{DD-D}{2}-(\alpha-1)\pi 2-(\beta-1)\pi 3-(\gamma-1)\pi 4-(\delta-1)\pi 5-\text{etc.}$$

Ita si fuerit $D=20$, habebimus

$$\frac{20}{2}=\alpha=10,\ \frac{20}{3}=\beta=6,\ \frac{20}{4}=\gamma=5,\ \frac{20}{5}=\delta=4,$$
$$\frac{20}{6}=\varepsilon=3,\ \frac{20}{7}=\zeta=2,\ \frac{20}{8}=\eta=2,$$
$$\frac{20}{9}=\theta=2,\ \frac{20}{10}=\iota=2.$$

Hinc igitur, ob $\frac{DD-D}{2}=190$, multitudo fractionum diversarum erit

$$190-9.1-5.2-4.2-3.4-2.2-1.6-1.4-1.6-1.4$$
$$=190-63=127$$

vti supra inuenimus.

§. 7. Totius igitur huius inuestigationis cardo in eo versatur, quomodo, proposito quocunque numero D, inveniri debeat valor characteris πD. Ac primo quidem iam supra annotauimus, si fuerit D numerus primus, tum

fore

fore $\pi D = D - 1$. Verum si D fuerit numerus compositus, determinatio characteris πD non parum ardua deprehenditur; pendebit enim a factoribus, ex quibus numerus D componitur.

§. 8. Denotet igitur p numerum primum quemcunque, vt sit $\pi p = p - 1$, et quaeramus valorem πp^2; vbi quidem statim patet, non omnes numeros ipso minores, quorum multitudo est $pp - 1$, ad cum esse primos, sed inde excludi debere illos, qui per p sunt diuisibiles, qui sunt: p, $2p$, $3p$, $4p$, etc. . . . $(p-1)p$. Horum autem multitudo est $p - 1$, qui ergo numerus a $pp-1$ subtractus relinquit $p(p-1)$ ita vt sit $\pi pp = (p-1)p$. Simili modo, si fuerit $D = p^3$, multitudo numerorum ipso minorum est $p^3 - 1$, vnde excludi debent ii, qui per p, sunt diuisibiles, qui sunt

$$p,\ 2p,\ 3p,\ 4p, \text{ etc. } \ldots p(pp-1),$$

quorum multitudo cum sit $pp - 1$, erit

$$\pi p^3 = p^3 - 1 - (pp-1) = p^3 - pp = (p-1)pp.$$

Ex quo iam facile perspicitur, pro potestate quacunque in genere fore $\pi p^n = (p-1)p^{n-1}$.

§. 9. Sit nunc q alius numerus primus a p diversus, et quaeramus valorem πpq. Primo igitur multitudo numerorum ipso pq minorum est $pq - 1$, vnde ergo excludi debent omnes illi, qui sunt diuisibiles tam per p quam per q. Iam vero multipla ipsius p erunt

$$p,\ 2p,\ 3p,\ 4p, \ldots\ldots p(q-1)$$

quorum multitudo est $q - 1$. Eodem modo multitudo

multi-

multiplorum ipſius q erit $p-1$, quae cum omnia a prioribus ſint diuerſa, multitudo numerorum excludendorum erit $p+q-2$, ita vt hinc prodeat

$$\pi pq = pq-1-(p+q-2) = pq-p-q-1 = (p-1)(q-1);$$

vnde hoc egregium nacti ſumus Theorema: Si fuerint p et q numeri primi diuerſi, ſemper erit

$$\pi : pq = (p-1)(q-1).$$

Eodem autem modo oſtendi poterit, ſi praeterea r et s ſint numeri primi ab illis diuerſi, fore

$$\pi pqr = (p-1)(q-1)(r-1) \text{ et}$$
$$\pi pqrs = (p-1)(q-1)(r-1)(s-1).$$

§. 10. Inueſtigemus nunc valorem huius formulae: πppq, vbi omnium numerorum ppq minorum multitudo eſt $ppq-1$, vnde ergo primo excludi debent omnia multipla ipſius p, quorum multitudo eſt $pq-1$; tum vero numerorum per q diuiſibilium multitudo eſt $pp-1$, inter quos autem occurrunt numeri

$$pq,\ 2pq,\ 3pq, \text{ etc. } \ldots\ldots pq(p-1),$$

qui inſuper per p ſunt diuiſibiles, quos, quia iam excluſimus, ex hoc poſtremo ordine tolli oportet, ita vt hic tantum remaneant $pp-1-(p-1) = pp-p$, quamobrem hinc obtinebimus

$$\pi ppq = ppq-1-(pq-1)-(pp-p) = (p-1)(q-1)p.$$

Quare cum ſit

$$p(p-1) = \pi pp \text{ et } q-1 = \pi : q,$$

hinc naſcitur iſtud theorema: Si p et q fuerint numeri primi diuerſi, tum erit

$$\pi ppq = \pi pp \cdot \pi q = p(p-1)(q-1).$$

§. 11.

§. 11. Simili modo haud difficulter intelligetur fore

$$\pi p^n q = \pi p^n \pi q = p^{n-1}(p-1)(q-1).$$

Nam quia multitudo numerorum minorum est $p^n q - 1$, hinc primo excludantur omnia multipla ipsius q, quorum numerus est $p^n - 1$, et remanebit multitudo $p^n q - p^n$. Praeterea vero etiam excludamus omnes numeros per p diuisibiles, quorum multitudo est $p^{n-1} q - 1$, et remanet $p^n q - p^n - p^{n-1} q + 1$. Huc autem insuper addi debent omnes termini per $p q$ diuisibiles, quorum multitudo est $p^{n-1} - 1$, vnde colligitur

$$\pi p^n q = p^n q - p^n - p^{n-1} q + p^{n-1}$$
$$= p^{n-1}(p q - p - q + 1) = p^{n-1}(p-1)(q-1).$$

§. 12. Haud dissimili modo, si numerus D fuerit productum ex duabus potestatibus quibuscunque numerorum primorum p et q diuersorum, ita vt sit $D = p^\alpha q^\beta$, tum erit

$$\pi p^\alpha q^\beta = p^{\alpha-1} q^{\beta-1}(p-1)(q-1);$$

hincque generaliter, si litterae p, q, r, s denotent numeros primos inter se diuersos, erit

$$\pi p^\alpha q^\beta r^\gamma s^\delta = p^{\alpha-1} q^{\beta-1} r^{\gamma-1} s^{\delta-1}(p-1)(q-1)(r-1)(s-1)$$

ex quo intelligitur, fore quoque

$$\pi p^\alpha q^\beta r^\gamma s^\delta = \pi p^\alpha . \pi q^\beta . \pi r^\gamma . \pi s^\delta.$$

Quamobrem, si modo valores characteris π D inuenti fuerint pro omnibus potestatibus numerorum primorum, tum ex iis omnium plane numerorum valores characteris π expedite assignari posse manifestum est.

§. 13. Si quis autem ope horum Theorematum pro numeris quantumuis magnis iſtos valores inueſtigare voluerit, promtiſſime ſcopum obtinebit, ſi numerum propoſitum D in factores inter ſe primos reſoluat, ſiue ii ſint numeri primi, nec ne. Namque ſi fuerit $D = PQRS$ etc. atque hi factores P, Q R, S nullos habeant diuiſores communes, tum ſemper erit

$$\pi PQRS = \pi P . \pi Q . \pi R . \pi S.$$

Veluti ſi proponatur iſte numerus: $D = 360$, ob $360 = 9.40$ erit $\pi 360 = \pi 9 . \pi 40 = 6 . 16 = 96$.

§. 14. Quod ſi vero progreſſionem iſtorum numerorum, qui in tabula ſupra data exhibentur, contemplemur, quae eſt 0, 1, 2, 2, 4, 2, 6, 4, 6. 4, 10, 4, etc. nullum plane ordinem in eius terminis obſeruare licet; cum tamen in progreſſione numerorum, cuius ſinguli termini exhibent ſummas diuiſorum numerorum naturalium, inſignem ordinem mihi detegere contigerit. Multo minus ergo, ſi ex illis numeris talis ſeries formetur:

$$1 . x^2 + 2 x^3 + 2 x^4 + 4 x^5 + 2 x^{10} + \text{etc.}$$

cuius terminus generalis noſtro ſignandi modo eſt $x^n \pi n$, eius indoles, vel adeo ſumma, vllo modo per quantitates cognitas, ſiue algebraicas ſiue tranſcendentes, exprimi poſſe videtur. Quocirca vtique maxime operae pretium foret, in naturam huius progreſſionis inquirere, quandoquidem hinc ſcientia numerorum haud contemnendis incrementis locupletari poſſet.

§. 15. Ex formula autem generali §. 12. data multo facilior regula deduci poteſt, cuius ope pro quocunque

que numero propofito N valor characteris πN affignari poteft, quam in fequente Problemate exponamus.

Problema.

Propofito numero quocunque N inuenire multitudinem omnium numerorum ipfo minorum ad eumque primorum.

Solutio.

§. 16. Quicunque fuerit numerus N, femper tali forma repraefentari poteft, vt fit $N = p^\alpha q^\beta r^\gamma s^\delta$ etc. exiftentibus p, q, r, s numeris primis. Inuenimus autem tum fore

$$\pi N = p^{\alpha-1} q^{\beta-1} r^{\gamma-1} s^{\delta-1} (p-1)(q-1)(r-1)(s-1).$$

Hinc igitur erit

$$\frac{\pi N}{N} = \frac{(p-1)(q-1)(r-1)(s-1)}{pqrs},$$

vnde fequitur fore

$$\pi N = \frac{N(p-1)(q-1)(r-1)(s-1)}{pqrs};$$

ita vt iam non amplius opus fit exponentes $\alpha\ \beta\ \gamma$ noffe, fed fufficit omnes numeros primos p, q, r, s diuerfos indagaffe, per quos numerus propofitus N eft diuifibilis; quibus cognitis multitudo numerorum, minorum quam N et qui fimul ad eum funt primi, erit

$$\pi N = \frac{N(p-1)(q-1)(r-1)(s-1)}{pqrs}.$$

§. 17. Ita fi v. gr. propofitus fuerit ifte numerus: $N = 9450$, numeri primi, per quos hunc numerum diuidere licet, funt 2, 3, 5, 7, quandoquidem per nullos alios diuifionem admittit; hinc igitur erit

$$\pi\, 9450 = \frac{9450 . 1 . 2 . 4 . 6}{2 . 3 . 5 . 7} = 2160.$$

§. 18. Quod si ergo N vnicum habeat diuisorem primum p, id quod euenit, quando N vel ipsi p aequatur, vel cuipiam eius potestati; tum igitur semper erit $\pi N = \frac{N(p-1)}{p}$. Scilicet si fuerit $N = p$, erit $\pi N = p - 1$; at si fuerit $N = p^n$, tum erit $\pi N = p^{n-1}(p-1)$, vti supra inuenimus. Sin autem N duos tantum admittat diuisores primos p et q, tum erit $\pi N = \frac{N(p-1)(q-1)}{pq}$. Ita si N alios non habeat diuisores, praeter 2 et 3, erit $\pi N = \frac{N}{3}$. Tales autem numeri vsque ad centum sunt

6, 12, 18, 24, 36, 48, 54, 72, 96.

§. 19. Haec ipsa autem regula facilis nos manuducit ad aliam demonstrationem multo simpliciorem. Ponamus enim numerum N diuisores primos inter se diuersos habere p, q et r, ac praeterea nullos alios; et quoniam multitudo omnium numerorum ipso non maiorum est $= N$, qui ergo numerus vtrique diuisibilis erit per p, q et r, inde primo excludi debent omnes, qui per p sunt diuisibiles, quorum multitudo cum sit $\frac{N}{p}$, his deletis reliquorum multitudo erit $N - \frac{N}{p} = \frac{N(p-1)}{p}$; vnde iam excludamus omnes, qui sunt per q diuisibiles, quorum multitudo cum sit $\frac{N(p-1)}{pq}$, remanebunt adhuc $\frac{N(p-1)(q-1)}{pq}$. Hinc igitur insuper excludi debent ii, qui sunt per r diuisibiles, quorum multitudo cum sit pars $\frac{1}{r}$ istius numeri, iis deletis numerus reliquorum erit $\frac{N(p-1)(q-1)(r-1)}{pqr}$; hocque modo solide demonstrata est nostra regula.

§. 20. Interim tamen etiam haec regula nullum subsidium nobis suppeditat, ad naturam progressionis, quam numeri πN constituunt, et quae est:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12
0 1 2 2 4 2 6 4 6 4 10 4

explorandam. Verum si potestates quantitatis indefinitae x adiungamus, ac statuamus

$$s = 1\,x^2 + 2\,x^3 + 2\,x^4 + 4\,x^5 + 2\,x^6 + 6\,x^7 + 4\,x^8 + 6\,x^9 + 4\,x^{10} + \text{etc.}$$

ex hac serie sequentem formare possumus:

$$\frac{\int s\,dx}{x} = \frac{xx}{2} + \frac{2\,x^3}{3} + \frac{x^4}{2} + \frac{4\,x^5}{5} + \frac{x^6}{3} + \frac{6\,x^7}{7} + \frac{x^8}{2} + \frac{2\,x^9}{3} + \frac{2\,x^{10}}{5} + \text{etc.}$$

vbi omnes coefficientes in formula $\frac{(p-1)(q-1)(r-1)}{pqr}$ continentur.

§. 21. Omnes enim eae potestates ipsius x eundem habebunt coefficientem $\frac{1}{2}$, quarum exponentes solum diuisorem primum admittunt, ideoque sunt potestates binarii, scilicet

$$x^2,\ x^4,\ x^8,\ x^{16},\ x^{32},\ x^{64},\ \text{etc.}$$

Deinde omnes potestates, quarum exponentes sunt dignitates ternarii, quae sunt x^3, x^9, x^{27}, omnes habent evndem coefficientem $\frac{2}{3}$. Simili modo $\frac{4}{5}$ erit communis coefficiens potestatum x^5, x^{25}, x^{125}, etc. At vero $\frac{1}{3} = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}$ communis erit coefficiens omnium potestatum, quarum exponentes tantum hos duos numeros primos 2 et 3 inuoluunt, quae sunt x^6, x^{12}, x^{18}, x^{24}, x^{36}, etc. Eodemque modo res se habet de reliquis exponentibus, qui vel binos tantum, vel ternos, vel quaternos numeros primos inuoluunt. Quo plures autem numeri primi in exponentibus occurrunt, eo copiosiores erunt series potestatum, quae communi gaudent coefficiente.

§. 22. Cum igitur in his ordinibus series ſimpliciſſimae ſint eae, quarum exponentes progreſſionem geometricam conſtituunt, cuiusmodi eſt $x + x^2 + x^4 + x^8 + x^{16} +$ etc. quoniam huius ſeriei nullo adhuc modo ſumma definiri, vel ſaltem ad formulam quampiam integralem reduci potuit, multo minus ſperare licet, vnquam certum ordinem in hac ſerie generali detectum iri, vnde ſaltem ſequentes termini per praecedentes determinari queant; quod merito eo magis mirum videbitur, quod cuiusque poteſtatis x^n coefficiens tam facile aſſignari poteſt.

DE