E560

1°. Si $n = 1$ fiet $a = 309 \pm 152$ et $s = 289 \pm 76$, qui valores iam nimis funt magni quam quos operi pretium fit euoluisse.

Exemplum 4.

§. 34 Sit $r = 25$ et $rr = 625 = 24^2 + 7^2$, ideoque $b = 24$ et $c = 7$. Iam esse debet $7f - 24g = \pm 2$, hincque erit $a = ff + gg$ et $s = 24f + 7g$. Casus simplicissimus dat $f = 10$ et $g = 3$, hinque $a = 109$ et $s = 261$; vnde si statuatur $s = 625n \pm 261$, reperietur generatim $a = 625nn \pm 522n + 109$. Euoluamus autem numerice casum $a = 109$, qui methodo vulgari molestissimos calculos requirit; cum ergo sit $s = 261$, ob $r = 25$ erit $p = 6525$ et $q = 261^2 + 2 = 68123$, ex quibus desiderati numeri maximi deducuntur,

$x = 6525\,(\frac{68123^2-1}{2}) = 15140424455100$

$y = 68123\,(\frac{68123^2-1}{2}) = 158070671986249.$

Exemplum 5.

§. 35. Sit $r = 29$ et $rr = 841 = 21^2 + 20^2$, ideoque $b = 21$ et $c = 20$, fierique debet $20f - 21g = \pm 2$, hincerit $a = ff + gg$ et $s = 21f + 20g$. Casu autem simplicissimo erit $f = 2$ et $g = 2$, hinc $a = 8$ et $s = 82$; statuatur ergo $s = 841n \pm 82$, fietque $a = 841nn \pm 164n + 8$, vnde autem numeri vehementer magni nascuntur.

Ex his igitur abunde perspicitur, quemadmodum, ope horum subsidiorum casus problematis Pelliani alioquin difficillimi satis expedite resolui queant.

THEO-

M
T
THEO-

MISCELLANEA ANALYTICA.

I.
Theorema a Cl. *Waring* sine demonstratione propositum.

Si n fuerit numerus primus, hoc productum continuum: $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1)$, vnitate auctum, semper diuidi potest per illum numerum primum n.

Demonstratio.

Quanquam illustris Geometra *de la Grange* iam geminam huius theorematis demonstrationem in nouis Actis Academiae regiae scientiarum borussicae dedit: Geometris haud ingratum fore arbitror, si etiam meam demonstrationem more mihi familiari communicauero. Proposito autem quocunque numero primo n, alio loco ostendi, quod quidem quilibet facile largietur, semper dari huiusmodi numeros, quorum singulae potestates, exponentem minorem quam $n-1$ habentes, per n diuisae, diuersa praebeant residua. Sit igitur a huiusmodi numerus, cuius singulae potestates

$$a^0,\ a^1,\ a^2,\ a^3,\ a^4,\ \ldots\ldots\ a^{n-2}$$

per n diuisae totidem diuersa residua producant, quorum numerus cum sit $n-1$, in his residuis omnes occurrent numeri $1, 2, 3, 4, \ldots\ n-1$, quibus exhaustis sequens potestas a^{n-1} iterum per n diuisa relinquet residuum $+1$,

$+1$, perinde ac prima a^0. Cum ergo poſt hanc haec formula $a^{n-1}-1$ demum per n ſit diuiſibilis, ob $n-1$ numerum parem, qui ſit $=2p$, ita vt $n=2p+1$, vel formula a^p-1, vel haec, a^p+1, per numerum primum n diuiſibilis ſit neceſſe eſt. Priore autem caſu a^p reſiduum daret $+1$, quod cum noſtrae hypotheſi aduerſetur, poſterior formula a^p+1 per n erit diuiſibilis, ſiue poteſtas a^p reſiduum dabit -1, ſeu $n-1$. His praemiſſis, quoniam ſingula reſidua 1, 2, 3, 4, ... $n-1$, oriuntur ex poteſtatibus a^0, a^1, a^2, etc. .... a^{n-2}, manifeſtum eſt, productum omnium eorum reſiduorum, ſcilicet productum propoſitum 1. 2. 3. .... $(n-1)$, ſi per n diuidatur, idem reſiduum eſſe relicturum, quod productum omnium earum poteſtatum $a^{0+1+2+3+....(n-2)}$, ſiue haec poteſtas: $a^{(n-1)(n-2):2}$ effet daturum. Cum autem ſit $n=2p+1$, erit $n-1=2p$ et $n-2=2p-1$, ideoque haec poteſtas fiet a^{2pp-p}, quae reducitur ad hanc: $a^{2p(p-1)+p}$, quae eſt productum ex his duabus poteſtatibus $a^{2p(p-1)}$ et a^p. Verum iam vidimus, poteſtatem a^{2p}, ſiue a^{n-1}, per n diuiſam, reſiduum dare $+1$, quod idem reſultabit ex omnibus eius poteſtatibus, cuiusmodi eſt $a^{2p(p-1)}$; at altera poteſtas a^p reſiduum relinquit -1, vnde ipſius poteſtatis a^{2pp-p} reſiduum erit -1. Sicque haec formula $a^{2pp-p}+1$ per numerum n erit diuiſibilis; ſubſtituto igitur producto 1. 2... $(n-1)$ in locum poteſtatis a^{2pp-p}, haec formula: 1. 2. 3... $(n-1)+1$, per numerum primum n erit diuiſibilis.

Corollarium 1.

Hinc facile plures aliae ſimiles formulae deduci poſſunt, quae ſingulae pariter per numerum primum

n erunt diuiſibiles, quas cum ipſa formula vnde ſunt natae, hic apponamus:

$$1.\,2.\,3.\,\ldots\ldots\,(n-1)+1$$
$$1\times 1.\,2.\,3.\,\ldots\ldots\,(n-2)-1$$
$$1.\,2\times 1.\,2.\,3.\,\ldots\ldots\,(n-3)+1$$
$$1.\,2.\,3\times 1.\,2.\,3.\,\ldots\ldots\,(n-4)-1 \text{ etc.}$$

In his autem formulis numerus n non eo vsque diminui debet, donec fiat $n=0$.

Corollarium 2.

Si porro habeatur progreſſio arithmetica n terminorum, cuius differentia neque ſit n, neque multiplum ipſius, in ea inerit vnus terminus per n diuiſibilis, quo excluſo productum reliquorum terminorum vnitate auctum ſemper erit diuiſibile per numerum n, ſiquidem fuerit numerus primus. Ita ſi ſit $n=7$ et formetur haec progreſſio arithmetica 7 terminorum: 2, 5, 8, 11, 14, 17, 20, reiecto termino 14 haec forma 2. 5. 8. 11. 17. 20 + 1 diuidi poterit per 7.

II. Problema.

Inuenire quatuor numeros integros tales, vt producta ex binis vnitate aucta fiant quadrata.

Solutio.

Problema hoc in Elementis meis Algebrae fuſius tractaui, methodus vero, qua ſum vſus, minus erat accommodata ad numeros integros inueniendos. Haec autem quaeſtio eo eſt difficilior, quod ſex conditionibus ſatisfieri oportet. Nunc igitur sequentem solutionem satis simplicem exhibeo. Sumtis pro lubitu duobus numeris m et n, vt fiat $mn + 1 = ll$, quatuor numeri quaesiti erunt:

$$\text{I. } m;\ \text{II. } n;\ \text{III. } m+n+2l;\ \text{IV. } 4l(l+m)(l+n),$$

quibus 6 conditiones praescriptae sequenti modo implentur:

1°. $mn + 1 = ll$.

2°. $m(m+n+2l) + 1 = (l+m)^2$.

3°. $n(m+n+2l) + 1 = (l+n)^2$.

4°. $4m.l(l+m)(l+n) + 1 = (2ll + 2lm - 1)^2$.

5°. $4n.l(l+m)(l+n) + 1 = (2ll + 2ln - 1)^2$

denique

6°. $4l(m+n+2l)(l+m)(l+n) + 1 = (4ll + 2lm + 2ln - 1)^2$.

Hic vero plurimum obseruasse iuuabit numerum l tam positiue quam negatiue accipi posse. Ita si sumatur $m = 3$ et $n = 8$, vt fiat $mn + 1 = 25$, ideoque $l = \pm 5$, casus $l = -5$ dabit hos quatuor numeros:

I. 3. II. 8. III. 1 et IV. 120.

Sin autem capiatur $l = +5$, numeri erunt

I. 3. II. 8. III. 21 et IV. 2080.

Analysis ad hanc solutionem perducens.

Cum tres priores numeri m, n et $m + n + 2l$, facillime inueniantur, ponatur quartus $= z$, atque his tribus conditionibus satisfieri debebit:

1°. $mz + 1 = \square$.

2°. $nz + 1 = \square$.

3°. $(m + n + 2l)z + 1 = \square$.

Hinc ergo etiam harum trium formularum productum debebit

satis simpli-
ieris m et n,
erunt:
$m)(l+n)$,
odo implen-
$^lm-1)^2$.
$n-1)^2$
$+2ln-1)^2$.
m l tam po-
iatur $m = 3$
: ± 5, casus
cens.
$+ n + 2l$,
que his tri-
oductum de-
bebit

bebit esse quadratum; at calculo instituto hoc productum reperietur:

$$1 + 2(m+n+l)z + ((m+n+l)^2 - 1)zz$$
$$+ mn(m+n+2l)z^3 = \square,$$

cuius radix, vt tria priora membra tollantur, statuatur $1 + (m+n+l)z - \frac{1}{2}zz$, cuius quadratum est:

$$1 + 2(m+n+l)z + ((m+n+l)^2 - 1)zz$$
$$- (m+n+l)z^3 + \tfrac{1}{4}z^4$$

vnde nascitur haec aequatio

$$mn(m+n+2l) = -m - n - l + \tfrac{1}{4}z,$$
$$\text{siue } \tfrac{1}{4}z = m + n + l + mn(m+n+2l),$$
$$\text{siue } \tfrac{1}{4}z = (mn+1)(m+n+l) + lmn,$$

vel quia $mn + 1 = ll$ habebimus

$$ll(m+n+l) + lmn = l(ll + lm + ln + mn)$$
$$= l((l+m)(l+n)),$$

quo circa inuenimus

$$z = 4l((l+m)(l+n)).$$

Quanquam autem hic tantum productum ex tribus formulis $mz + 1$, $nz + 1$, $(m+n+2l)z + 1$ reddidimus quadratum: tamen quia pro z quasi praeter exspectationem prodiit numerus integer, vnde tres istae formulae inter se euadent primae, tuto concludere possumus, etiam singulas ternas formulas fieri quadrata, quorum radices adeo iam supra exhibuimus.

III.
Problema.

Inuenire numeros x et y, ut haec formula $\left(\frac{xx+1}{x}\right)^2 + \left(\frac{yy+1}{y}\right)^2$ *fiat quadratum.*

Solu-

Solutio.

Primo haec conditio sponte adimplebitur, si capiatur $y = \frac{x+1}{x-1}$, tum enim fiet $\frac{yy+1}{y} = \frac{2(xx+1)}{xx-1}$, vnde formula proposita abibit in hanc formam:

$$\frac{(xx+1)^2}{xx} + \frac{4(xx+1)^2}{(xx-1)^2} = \frac{(xx+1)^4}{xx(xx-1)^2},$$

quae formula iam per se est quadratum. Verum quia haec solutio tantum est specialis, quo generaliorem obtineamus statuamus

$$y = \frac{px-1}{x+p}, \text{ vnde fiet } \frac{yy+1}{y} = \frac{(pp+1)(xx+1)}{(x+p)(px-1)},$$

quare formula nostra euadet

$$\frac{(xx+1)^2}{xx} + \frac{(pp+1)^2(xx+1)^2}{(x+p)^2(px-1)^2},$$

quae per quadratum $(xx+1)^2$ diuisa abit in hanc:

$$\frac{1}{xx} + \frac{(pp+1)^2}{(x+p)^2(px-1)^2},$$

quae per quadratum $xx(x+p)^2(px-1)^2$ multiplicata dat $(x+p)^2(px-1)^2 + xx(pp+1)^2$ Haec iam formula quadratum effici debet, quae euoluta reducitur ad istam:

$$ppx^4 + 2p(pp-1)x^3 + 2(p^4-pp+1)xx$$
$$-2p(pp-1)x + pp,$$

cuius radix secundum praecepta cognita si statuatur

$$pxx + (pp-1)x + p,$$

elicietur iste valor: $x = \frac{4p}{pp-1}$, vbi ergo numerus p pro lubitu accipi potest; tum vero pro altero numero y habebimus vti assumsimus

$$y = \frac{px-1}{x+p} = \frac{3pp+1}{p(pp+3)}.$$

Hinc ergo si sumatur $p = 2$, fiet $x = \frac{8}{3}$ et $y = \frac{13}{14}$ et

$$\frac{xx+1}{x} = \frac{73}{24} \text{ et } \frac{yy+1}{y} = \frac{365}{182},$$

quorum quadratorum summa fit quadratum radicis $\frac{73.109}{2.12.91}$.

Pro-

bitur, si capiatur ... vnde formula ... rum quia haec ... m obtineamus ... in hanc: ... multiplicata ... iam formula ... tur ad istam: ... atuatur ... merus p pro ... numero y ha- ... et ... Pro-

IV.
Problema.

Inuenire duos numeros p et q, quorum summa sit quadratum, summa vero quadratorum biquadratum.

Solutio.

Hoc Problema, a *Leibnizio* olim propositum, eo magis est notatu dignum, quod minimi numeri sint vehementer magni, siquidem positiui desiderentur. Quamuis autem hoc problema iam passim occurrat solutum, tamen haec solutio attentione non indigna videtur. Ponamus autem $p+q = B^2$ et $pp+qq = A^4$. Iam a duplo posterioris aequationis $2pp + 2qq = 2A^4$, subtrahatur quadratum prioris $pp + 2pq + qq = B^4$ et residuum erit

$$pp - 2pq + qq = 2A^4 - B^4, \text{ ideoque}$$
$$p - q = \sqrt{(2A^4 - B^4)},$$

sicque totum negotium huc reducitur, vt formula $2A^4 - B^4$ quadratum reddatur. Vt autem ambo numeri p et q prodeant positiui necesse est vt sit $B > A$. Statuamus igitur

$$\sqrt{(2A^4 - B^4)} = yy + 2xy - xx,$$

quod eueniet si capiatur

$$A^2 = xx + yy \text{ et } B^2 = xx + 2xy - yy,$$

quas ergo binas formulas denuo ad quadrata redigi oportet. Cum autem posterior sit $(x+y)^2 - 2yy$, pro vtraque conditione faciamus $y = 2abcd$; tum vero pro priore $x = aabb - ccdd$, pro posteriore autem $x+y = aacc + 2bbdd$, sic enim fiet

$$A = aabb + ccdd \text{ et } B = aacc - 2bbdd.$$

Quia

Quia autem habemus

$$x = aabb - ccdd \text{ et } y = 2abcd,$$

erit hinc

$$x + y = aabb - ccdd + 2abcd = aacc + 2bbdd,$$

vnde deducimus

$$aa = \frac{2abcd - dd(2bb + cc)}{cc - bb},$$

vnde radicem extrahendo reperimus

$$a = \frac{bcd \pm \sqrt{bbccdd - dd(2bb + cc)(cc - bb)}}{cc - bb},$$

vnde per euolutionem fit $\frac{a}{d} = \frac{bc \pm \sqrt{(2b^4 - c^4)}}{cc - bb}$, vel per conuerfionem $\frac{d}{a} = \frac{bc \pm \sqrt{(2b^4 - c^4)}}{2bb + cc}$. Hoc igitur modo refolutionem formulae $\sqrt{(2A^4 - B^4)}$ reduximus ad refolutionem alius formulae prorfus fimilis $\sqrt{(2b^4 - c^4)}$, vnde fi vnicus cafus conftet, quo talis formula rationalis euadit inde continuo alius cafus concludi poterit. Cum igitur hoc primo eueniat fumendo $b = 1$ et $c = 1$, erit $\frac{a}{d} = \frac{1 \pm 1}{0}$, feu ex pofteriori forma $\frac{d}{a} = \frac{1 \pm 1}{3}$. Sumatur ergo $\frac{d}{a} = \frac{2}{3}$, fiue $a = 3$ et $d = 2$, fietque $x = 5$ et $y = 12$, tum vero $A = 13$ et $B = 1$, atque hinc:

$$yy + 2xy - xx = (x + y)^2 - 2xx = 239,$$

quae eft radix quadrata formulae $2 \cdot 13^4 - 1$. Quia autem hic $B < A$, hinc nulla folutio idonea fequitur. Hoc autem cafu reperto faciamus nunc $b = 13$ et $c = 1$, fietque $\sqrt{(2b^4 - c^4)} = 239$, ficque porro nancifcimur $\frac{a}{d} = \frac{13 \pm 239}{-168}$, vnde ob fignum ambiguum binae folutiones oriuntur: vel $\frac{a}{d} = -\frac{3}{2}$, vel $\frac{a}{d} = \frac{113}{84}$. Ex priore ergo cafu habemus $a = 3$, $b = 13$, $c = 1$ et $d = -2$, vnde colligimus $x = 1521 - 4 = 1517$ et $y = -156$, tum vero $A = 1525$ et $B = -1343$. Quia autem huius litterae B tantum quadratum et biquadratum

dratur minor tam p +2bbdd, vnde c = 1 A, B, colligi l per conuer- refolutionem em alius for- nicus cafus fuerit de continuo 1+δz primo eue- α, β, γ feu ex po- fiue a = 3 A = 13 et = 239, Quia autem Hoc autem vbi to = 1, fietque Q, R, tur. II oriuntur: vel a fola abemus a = 3, littera = 1521 − 4 quoniar B = − 1343. non in m et biqua- Eule. dratum

dratum occurrit, fumi poterit $B = 1343$, qui valor cum minor fit quam $A = 1525$, nullam folutionem defideratam praebet.

Confideremus ergo alterum cafum, quo $\frac{a}{d} = \frac{113}{84}$, vnde noftrae quaternae litterae erunt $a = 113$, $b = 13$, $c = 1$ et $d = 84$, ex quibus fi colligantur valores x, y et A, B, erit $B > A$, hincque enormes illi numeri pro p et q colliguntur problemati fatisfacientes.

Problema 4.

Si formula $1 + Az + Bzz + Cz^3 + Dz^4 + \text{etc.}$ *fuerit productum ex factoribus* $1 + \alpha z$, $1 + \beta z$, $1 + \gamma z$, $1 + \delta z$, *etc. inuenire fummam poteftatum omnium litterum* $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, *etc.*

Solutio.

Summas iftas quas quaerimus ita defignemus:

$$P = \alpha + \beta + \gamma + \delta + \text{etc.}$$
$$Q = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 + \text{etc.}$$
$$R = \alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 + \delta^3 + \text{etc.}$$
$$S = \alpha^4 + \beta^4 + \gamma^4 + \delta^4 + \text{etc.}$$

vbi totum negotium huc redit, vt valores litterarum P, Q, R, S, etc. per litteras A, B, C, D, etc. determinentur. Hic autem ante omnia obferuari conuenit, litteram P a fola littera A pendere, quippe cui eft aequalis; deinde littera Q tantum a duabus litteris A et B pendere poteft, quoniam producta ex ternis litteris $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, etc. non ingrediuntur in compofitionem quadratorum. Eodem

 modo

modo littera R tantum pendebit a tribus litteris A, B, etc. at littera S inuoluet has tantum quatuor: A, B, C et D; et ita simili modo de sequentibus.

1°. His praenotatis littera P eodem modo reperietur, ac si formula esset tantum $1 + Az$ et litterae reliquae B, C, D, E, euanescerent; hoc autem casu vnicus factor locum habet, qui sit $1 + az$, ita vt sit $P = a$. Iam posito hoc factore $1 + az = 0$, siue $z = -\frac{1}{a}$, ipsa formula euanescere debet, eritque idcirco $1 - \frac{A}{a} = 0$ siue $a - A = 0$, vnde fit $a = P = A$, vti quidem notissimum est.

2°. Littera autem Q eundem valorem sortietur ac si formula nostra foret $1 + Az + Bzz$, reliquis terminis euanescentibus. Haec autem formula duos habet factores, qui sint $1 + az$ et $1 + bz$; hincque erit $P = a + b$ et $Q = a^2 + b^2$. Fiat nunc $1 + az = 0$, siue $z = -\frac{1}{a}$, et hoc casu ipsa nostra formula debet euanescere, eritque:

$$1 - \frac{A}{a} + \frac{B}{a^2} = 0$$

siue $a^2 - Aa + B = 0$. Eodem modo ex altero factore $1 + bz$ orietur haec aequatio: $b^2 - Ab + B = 0$. Addantur hae duae aequationes et loco $a^2 + b^2$ scribendo Q et P loco $a + b$ orietur haec aequatio: $Q - AP + 2B = 0$, vnde colligitur $Q = AP - 2B$.

3°. Verus porro valor ipsius R deducetur ex formula $1 + Az + Bz^2 + Cz^3$, cuius tres factores sint

$$(1 + az)(1 + bz)(1 + cz)$$

ita vt habeamus

$$P = a + b + c;\quad Q = a^2 + b^2 + c^2 \quad\text{et}\quad R = a^3 + b^3 + c^3.$$

Quem-

Que prim itteris A, B, etc. A, B, C et D;
siue facto modo reperie- litterae reliquae u vnicus factor = a. Iam po-
quae , ipsa formula siue a − A = 0, n est.
collig :m fortietur ac eliquis terminis habet factores,
hincq P = a + b et z = −1/a, et hoc eritque.
Quod reduc altero factore B = 0. Addan- cribendo Q et P + 2B = 0,
quae ucetur ex for- factores sint
Hinc testat a³ + b³ + c³.
Quem-

libet horum factorum redigamus ad nihilum et ex primo fiet $z = \frac{1}{a}$, vnde ipsa formula praebebit

$$1 - \frac{A}{a} + \frac{B}{a^2} - \frac{C}{a^3} = 0,$$

siue $a^3 - Aa^2 + Ba - C = 0$. Simili modo bini reliqui factores dabunt

$$b^3 - Ab^2 + Bb - C = 0 \quad\text{et}\quad c^3 - Ac^2 + Bc - C = 0,$$

quae tres aequationes iunctae dabunt

$$R - AQ + BP - 3C = 0,\ \text{vnde}\ R = AQ - BP + 3C.$$

4°. Pari modo littera S ex hac formula:

$$1 + Az + Bz^2 + Cz^3 + Dz^4$$

colligitur, cuius quatuor factores sint

$$(1 + az)(1 + bz)(1 + cz)(1 + dz)$$

hincque

$$P = a + b + c + d,\qquad Q = a^2 + b^2 + c^2 + d^2,$$
$$R = a^3 + b^3 + c^3 + d^3 \ \text{et}\ S = a^4 + b^4 + c^4 + d^4.$$

Quod si nunc singuli factores seorsim nihilo aequentur et reductio fiat vt ante, orientur inde 4 sequentes aequationes:

$$a^4 - Aa^3 + Ba^2 - Ca + D = 0$$
$$b^4 - Ab^3 + Bb^2 - Cb + D = 0$$
$$c^4 - Ac^3 + Bc^2 - Cc + D = 0$$
$$d^4 - Ad^3 + Bd^2 - Cd + D = 0$$

quae additae hanc formulam suppeditant:

$$S - AR + BQ - CP + 4D = 0,\ \text{hincque}$$
$$S = AR - BQ + CP - 4D.$$

Hinc iam facile intelligitur, quomodo etiam superiores potestates, scilicet T, U, V, etc. ex praecedentibus forman-

tur

tur, quem in finem singulos hos valores ordine apponamus:

$$P = A,$$
$$Q = AP - 2B,$$
$$R = AQ - BP + 3C,$$
$$S = AR - BQ + CP - 4D,$$
$$T = AS - BR + CQ - DP + 5E,$$
$$U = AT - BS + CR - DQ + EP - 6F,$$
etc. etc.

Problema 5.

§. 8. *Inuenire adeo quinque numeros huius indolis, vt producta ex binis vnitate aucta fiant quadrata.*

Solutio.

Problema hoc vires analyseos diophanteae superare censeri deberet, nisi casu quodam singulari solutio possibilis redderetur. In primo autem problemate iam exhibuimus quatuor huiusmodi numeros, eosque adeo integros, qui his conditionibus gaudent, scilicet sumtis pro lubitu duobus numeris m et n, ita vt fiat $mn + 1 = ll$, quatuor numeri satisfacientes ita se habebunt:

$$a = m;\ b = n;\ c = m + n + 2l;\ \text{et}\ d = 4l((l+m)(l+n)).$$

Nunc igitur praesens quaestio huc redit, vt quaeratur quintus numerus z, qui cum istis quatuor conditionibus praescriptis satisfaciat; requiritur ergo vt sequentes quatuor formulae singulae reddantur quadrata:

$$1 + az = \square;\ 1 + bz = \square;\ 1 + cz = \square;\ 1 + dz = \square;$$

quibus si singulis satisfieri deberet insuperabilia obstacula occurrerent. Hic autem vti supra feliciter vsu venit, vt si modo

m ... pponamus:
ef
tij
pc
it.
N
vt ... huius indolis,
ata.
vb
z^2 ... eae superare
itio possibilis
vn ... exhibuimus
gros, qui his
ibitu duobus
tuor nume-
Vc
per ... $)(l+n))$.
de ... atur quintus
praescriptis
sicc ... or formulae
nisi
$dz = \square$;
qua ... a obstacula
venit, vt si
modo

modo productum harum quatuor formularum quadratum efficiatur etiam singulae seorsim quadrata sint futura. Multiplicentur igitur hae quatuor formulae in se inuicem, ac ponatur breuitatis gratia productum:

$$1 + pz + qzz + rz^3 + sz^4$$

ita vt sit

$$p = a + b + c + d;\ q = ab + ac + ad + bc + bd + cd;$$
$$r = abc + abd + acd + bcd\ \text{et}\ s = abcd.$$

Nunc statuatur radix quadrata istius formulae

$$1 + \tfrac{1}{2}pz + (\tfrac{1}{2}q - \tfrac{1}{8}pp)zz,$$

vt eius quadratum fiat

$$1 + pz + qz^2 + p(\tfrac{1}{2}q - \tfrac{1}{8}pp)z^3 + (\tfrac{1}{2}q - \tfrac{1}{8}pp)^2 z^4,$$

vbi cum tres priores termini sponte se tollant, reliqui per z^3 diuisi suppeditabunt hanc aequalitatem:

$$r + sz = p(\tfrac{1}{2}q - \tfrac{1}{8}pp) + (\tfrac{1}{2}q - \tfrac{1}{8}pp)^2 z$$

vnde colligimus quintum numerum quaesitum:

$$z = \frac{r - p(\tfrac{1}{2}q - \tfrac{1}{8}pp)}{(\tfrac{1}{2}q - \tfrac{1}{8}pp)^2 - s}.$$

Verum si indolem 4 numerorum datorum accuratius perpendamus, reperiemus semper fore $\tfrac{1}{2}q - \tfrac{1}{8}pp = -\frac{1-s}{2}$, vnde denominator inuentae fractionis euadet:

$$(\tfrac{1}{2}q - \tfrac{1}{8}pp)^2 - s = \frac{(s-1)^2}{4},$$

sicque commode euenit vt hic denominator fiat quadratum; nisi enim hoc contigisset, singulae formulae:

$$1 + az;\ 1 + bz;\ 1 + cz;\ 1 + dz;$$

quadrata fieri non potuissent. Quod si etiam in numeratore istum

iſtum valorem loco $(\frac{1}{2}q-\frac{1}{4}pp)$ ſubſtituamus, fiet $z=\frac{4r+2p(s+1)}{(s-1)^2}$. Hoc autem numero z inuento omnino decem ſequentibus conditionibus ſatisfiet:

$$\text{I}^\circ.\ ab+1=\square;\quad \text{II}^\circ.\ ac+1=\square;$$
$$\text{III}^\circ.\ ad+1=\square;\quad \text{IV}^\circ.\ bc+1=\square;$$
$$\text{V}^\circ.\ bd+1=\square;\quad \text{VI}^\circ.\ cd+1=\square;$$
$$\text{VII}^\circ.\ az+1=\square;\quad \text{VIII}^\circ.\ bz+1=\square;$$
$$\text{IX}^\circ.\ cz+1=\square;\quad \text{X}^\circ.\ dz+1=\square.$$

Corollarium.

Quod autem ſemper ſit $\frac{1}{2}q-\frac{1}{4}pp=\frac{-s-1}{2}$, ſequenti modo oſtendi poteſt. Ponatur breuitatis gratia $m+n+l=f$ et $l(l+m)(l+n)=k$, ita vt ſit $k=fll+lmn$, et cum ſit $a=m$; $b=n$; $c=f+l$; et $d=4k$, habebimus

$$a+b+c=2f,\ \text{ergo}\ p=2f+4k;$$

deinde quia

$$q=(a+b+c)d+(a+b)c+ab,$$

fiet nunc

$$q=8fk+(m+n)^2+2l(m+n)+mn,$$

quae expreſſio ob $mn=ll-1$ abit in hanc: $q=8fk+ff-1$; tum vero erit $s=4mnk(f+l)$, hinc erit

$$1+q+s=8fk+ff+4mnk(f+l)$$

quod an aequale ſit ipſi $\frac{1}{4}pp$ videamus. At eſt

$$\tfrac{1}{4}p\vartheta=ff+4fk+4kk,$$

hisque valoribus inter ſe aequatis habebimus

$$8fk+ff+4mnk(f+l)=ff+4fk+4kk,\ \text{ſiue}$$
$$4fk+4mnk(f+l)=4kk$$

quae

et $z=\frac{4r+2p(s+1)}{(s-1)^2}$.
:cem ſequentibus
$=\square$;
$=\square$;
$=\square$;
$1=\square$;
$=\square$.
$=\frac{-s-1}{2}$, ſequenti
atia $m+n+l=f$
$+lmn$, et cum
bebimus
k;
b,
mn,
$q=8fk+ff-1$;
$l)$
t eſt
us
$+4kk$, ſiue
quae

quae aequatio per $4k$ diuiſa dat

$$f+mn(f+l)=k=fll+lmn,\ \text{ſiue}$$
$$f+fmn=4ll,\ \text{ob}\ mn+1=ll$$

per hypotheſin, quae aequatio cum ſit identica, illa: $1+q+s=\frac{1}{4}pp$ neceſſario eſt vera, vnde ſequitur quod aſſumſimus $\frac{1}{2}q-\frac{1}{4}pp=\frac{-s-1}{2}$.

Exemplum 1.

Sumamus $m=1$ et $n=3$, eritque $l=2$, vnde quatuor numeri priores erunt $a=1$; $b=3$; $c=8$; $d=120$ hinc ergo colligimus:

$$p=132;\ q=1475;\ r=4224\ \text{et}\ s=2880;$$

ex quibus valoribus deducimus:

$$z=\frac{4\cdot 4224+264\cdot 2881}{(2879)^2};$$

quae fractio reducitur ad hanc $\frac{777480}{8288641}$, atque hinc decem conditiones praeſcriptae ſequenti modo adimplentur:

$$1^\circ.\ ab+1=2^2;\quad 2^\circ.\ ac+1=3^2;$$
$$3^\circ.\ ad+1=11^2;\quad 4^\circ.\ bc+1=5^2;$$
$$5^\circ.\ bd+1=19^2;\quad 6^\circ.\ cd+1=31^2;$$
$$7^\circ.\ az+1=\frac{(3011)^2}{(2879)^2};\quad 8^\circ.\ bz+1=\frac{(3259)^2}{(2879)^2};$$
$$9^\circ.\ cz+1=\frac{(3809)^2}{2879^2};\quad 10^\circ.\ dz+1=\frac{10079^2}{2879^2}.$$

Exemplum 2.

Cum numerus z hinc prodierit tam vehementer magnus, euoluamus ſequentem caſum in fractionibus, quandoquidem fractiones admittere nunc ſumus coacti. Sumatur

igitur

igitur $m = \frac{1}{2}$; $n = \frac{5}{2}$, vt fit $l = \frac{3}{2}$, vnde quatuor numeri priores erunt

$$a = \tfrac{1}{2};\ b = \tfrac{5}{2};\ c = 6 \text{ et } d = 48;$$

vnde porro deducimus:

$$p = 57;\ q = 451\tfrac{1}{4};\ r = 931\tfrac{1}{2} \text{ et } s = 360;$$

ex his ergo deducitur:

$$z = \frac{4 \cdot 931\frac{1}{2} + 114 \cdot 361}{359^2} = \frac{44880}{359^2} = \frac{44880}{128881}$$

qui numeri multo funt minores quam praecedentes.

VARIAE

iatuor numeri

360;

.80
881
edentes.

VARIAE

VARIAE OBSERVATIONES
CIRCA ANGVLOS
IN PROGRESSIONE GEOMETRICA PROGREDIENTES.

§. 1.

Cum pleraeque infignes proprietates, quae adhuc circa angulos, fiue arcus, eorumque finus, cofinus, tangentes, cotangentes, fecantes et cofecantes funt inueftigatae, ex confideratione arcuum in arithmetica progreffione crefcentium fint deriuatae: non minus notatu dignae videntur illae proprietates, quas ex confideratione arcuum in geometrica progreffione procedentium deducere licet; imprimis cum earum veritas plerumque multo magis abfcondita videatur, quocirca hoc loco plures eiusmodi proprietates euoluere conftitui.

§. 2. Primum fontem ad huiusmodi fpeculationes nobis aperit notiffima formula: $\text{fin.}\, 2\Phi = 2\, \text{fin.}\, \Phi . \text{cof.}\, \Phi$ vnde, fi s denotet arcum fiue angulum quemcunque, erit

$\text{fin.}\, s = 2\, \text{fin.}\, \frac{1}{2}s . \text{cof.}\, \frac{1}{2}s$; tum vero fimili modo erit
$\text{fin.}\, \frac{1}{2}s = 2\, \text{fin.}\, \frac{1}{4}s . \text{cof.}\, \frac{1}{4}s$, qui valor ibi fubftitutus praebet
$\text{fin.}\, s = 4\, \text{fin.}\, \frac{1}{4}s . \text{cof.}\, \frac{1}{2}s\, \text{cof.}\, \frac{1}{4}s$. Deinde quia porro eft
$\text{fin.}\, \frac{1}{4}s = 2\, \text{fin.}\, \frac{1}{8}s . \text{cof.}\, \frac{1}{8}s$, hoc valore fubftituto erit
$\text{fin.}\, s = 8\, \text{fin.}\, \frac{1}{8}s . \text{cof.}\, \frac{1}{2}s . \text{cof.}\, \frac{1}{4}s . \text{cof.}\, \frac{1}{8}s$. Pari modo progrediendo eft

$$\text{fin.}\, s = 16\, \text{fin.}\, \tfrac{1}{16}s . \text{cof.}\, \tfrac{1}{2}s . \text{cof.}\, \tfrac{1}{4}s . \text{cof.}\, \tfrac{1}{8}s . \text{cof.}\, \tfrac{1}{16}s$$