PROBLEMATIS CVIVSDAM PAPPI ALEXANDRINI CONSTRVCTIO.

Auctore

L. EVLERO.

Theorema.

Si a terminis rectae cuiuscunque A B ad circuli cuiuscunque punctum quoduis P ducantur rectae A P et B P, circulum secantes in A et B, tum vero puncta F et G ita capiantur, vt sit Tab. I. Fig. 1.

$$AF = \frac{AP.Aa}{AB} \text{ et } BG = \frac{BP.Bb}{AB},$$

tum semper erit

$$FP.Ff = GP.Gg = AF.BG.$$

Demonstratio.

Repraesentetur positio rectae A B cum punctis F et G respectu centri illius circuli O, ac ponatur $AO = a$, $BO = b$, radius circuli $Om = On = r$ et $AB = c$; tum vero sit $FO = f$, $GO = g$, eritque $AP.Aa = An.Am$. Est vero $An = a + r$ et $Am = a - r$, ideoque

$$AP.Aa = aa - rr.$$

Simili

Simili modo erit

$$BP.Bb = B\nu . B\mu = (b+r)(b-r),$$

siue

$$BP.Bb = bb - rr.$$

Eodem modo colligitur fore

$$FP.Ff = ff - rr \text{ et } GP.Gg = gg - rr.$$

Sumtis igitur

$$AF = \frac{aa - rr}{c} \text{ et } BG = \frac{bb - rr}{c},$$

demonstrandum est fore

$$ff - rr = gg - rr = \frac{(aa - rr)(bb - rr)}{cc},$$

quem in finem sequens Lemma in subsidium erit vocandum.

Lemma.

Tab. I. Fig. 2. Si ex trianguli AOB puncto O ad lateris oppositi AB punctum datum F ducatur recta OF, erit

$$FO^2 = \frac{AO^2 . BF + BO^2 . AF}{AB} - AF.BF.$$

Demonstratio.

Demisso ex E in AB perpendiculo $O\Pi$ erit

$$AO^2 = A\Pi^2 + \Pi O^2 = (AF + F\Pi)^2 + FO^2 - F\Pi^2,$$

siue

$$AO^2 = AF^2 + FO^2 + 2\,AF.F\Pi;$$

eodemque modo erit

$$BO^2 = BF^2 + FO^2 - 2\,BF.F\Pi.$$

Si prior harum aequationum ducta in BF ad alteram in AF ductam addatur, prodibit

AO².

$$AO^2.BF+BO^2.AF=BF(AF^2+FO^2)+AF(BF^2+FO^2)$$

siue

$$AO^2.BF+BO^2.AF=FO^2.AB+BF.AF.AB,$$

vnde

$$FO^2=\frac{AO^2.BF+BO^2AF}{AB}-AF.BF.\quad \text{Q. E. D.}$$

Continuatio prioris demonstrationis.

Ponatur $AF=\frac{aa-rr}{c}=\alpha$, $BG=\frac{bb-rr}{c}=\beta$, eritque Tab. I. Fig. 1.

$$aa=\alpha c+rr \text{ et } bb=\beta c+rr.$$

Iam ex Lemmate erit

$$cff=aa(c-\alpha)+bb\alpha-\alpha c(c-\alpha),$$

et si loco aa et bb substituantur valores modo dati, habebitur

$$cff=crr+\alpha\beta c, \text{ siue } ff-rr=\alpha\beta.$$

Cum porro sit

$$GO^2=\frac{BO^2.AF+AO^2.BF}{AB}-AF.BF,$$

eodem modo demonstratur fore

$$cgg=crr+\alpha\beta c, \text{ siue } gg-rr=\alpha\beta$$

hincque

$$ff-rr=gg-rr=\frac{(aa-rr)(bb-rr)}{cc}.\quad \text{Q. E. D.}$$

Hinc sequens formari potest

Theorema.

Si ex trianguli ABC puncto O ad basin AB duae ducantur rectae inter se aequales OF et OG, erit $AO^2-AB.AF=BO^2-AB.BG$. Fig. 2.

 Demon-

Demonstratio.

Demisso ex vertice O perpendiculo $O\Pi$, erit

$$F\Pi = G\Pi = \tfrac{1}{2} FG.$$

Cum igitur sit

$$AO^2 = AF^2 + FO^2 + 2\,AF.F\Pi, \text{ siue}$$

$$AO^2 = AF^2 + FO^2 + AF.FG, \text{ erit}$$

$$AO^2 = FO^2 + AF.AG.$$

Simili modo erit $BO^2 = FO^2 + BF.BG$. Ex priore fit

$$FO^2 = AO^2 - AF.AG, \text{ vnde}$$

$$FO^2 - AF.BG = AO^2 - AB.AF.$$

Ex altera fit

$$FO^2 = BO^2 - BE.BG, \text{ consequenter}$$

$$FO^2 - AF.BG = BO^2 - AB.BG,$$

vnde sequitur

$$AO^2 - AB.AF = BO^2 - AB.BG. \quad \text{Q. E. D.}$$

Corollarium.

Quotius igitur fuerit

$$AO^2 - AB.AF = BO^2 - AB.BG = \Delta,$$

binae rectae FO et GO erunt inter se aequales, simulque erit $FO^2 - AF.BG = \Delta$. Quod si ergo capiatur

$$AF = \frac{AO^2 - \Delta}{AB} \text{ et } BG = \frac{BO^2 - \Delta}{AB}$$

erit $FO = GO$. At in praecedente Theoremate erat

$$AF = \frac{aa - rr}{c} \text{ et } BG = \frac{bb - rr}{c}, \text{ vnde}$$

$$\Delta = rr, \; AF = \frac{AO^2 - rr}{AB}, \; BG = \frac{BO^2 - rr}{AB} \text{ et}$$

$$FO^2 - rr = AF.BG.$$

Proble-

Problema.

Circulo dato, centro O descripto, triangulum abc inscribere, cuius tria latera ab, ac, bc, producta, per data tria puncta C, B, A, transeant. Tab. I. Fig. 3.

Constructio.

Sint A, B, C, tria puncta data, quorum distantiae a centro circuli O sint $AO = a$, $BO = b$, $CO = c$, radio circuli existente $= 1$. Iam ex puncto B capiatur interuallum $BF = \frac{bb - 1}{AB}$ eritque $FO^2 - 1 = \frac{BF(aa - 1)}{AB}$. Tum iuncta recta FC, super ea capiatur interuallum

$$FK = \frac{FO^2 - 1}{FC} = \frac{BF(aa - 1)}{AB.FC}, \text{ eritque}$$

$$KO^2 - 1 = \frac{FK(cc - 1)}{FC}.$$

Iam ex centro O talis ducatur radius Om, vt sit cosinus anguli $KOm = \frac{cos. BFC}{KO}$. Tum bisecetur angulus BFC recta FS, cui ex puncto m parallela agatur recta mb, eritque b unus angulorum trianguli quaesiti, ad quem si ex puncto A ducatur recta AB, ea producta circulum in C secabit. Ex hoc puncto C ad B ducatur recta CB circulum secans in a; tum vero latus ba productum per tertium punctum datum C transibit, eritque abc triangulum quaesitum.

Corollarium 1.

Sint duo punctorum datorum A et C infinite distantia in rectis ABA, CBC se mutuo in B decussantibus. Ex B ducatur recta Bca, resecans a circulo arcum ca; cui in peripheria insistant anguli, angulo CBA Fig. 4.

aequa-

aequales, tum ductis ex a rectis $a\,b$ ipsi C B C, et $b\,c$ ipsi A B A parallelis, erit $a\,b\,c$ triangulum quaesitum.

Corollarium 2.

Tab. I. Fig. 5. Cadant omnia tria puncta data ad distantias infinitas in rectis O A, O B, O C; tum rectae O A parallela agatur recta $b\,c$ ad distantiam a centro O X = cos. B O C; tum ductis rectis $b\,a$ ipsi O C et $c\,a$ ipsi O B parallelis habebitur triangulum quaesitum.

Scholion 1.

Ceterum hic probe notandum est, constructionem supra datam duas solutiones suppeditare, prout angulus K O m dextrorsum siue sinistrorsum accipitur. Praeterea vero, cum tria puncta A, B, C, inter se sint permutabilia, sex diuersis modis constructio hic data institui potest, qui ergo omnes easdem binas solutiones praebere debent, cuius rei tamen nulla ratio patet.

Scholion 2.

Fig. 6. Hoc Problema etiam pro sphaera resolui potest, ita vt circulo minori in sphaera descripto triangulum sphaericum $a\,b\,c$ inscribi debeat, ita comparatum, vt eius latera producta $a\,b$, $a\,c$, $b\,c$, transeant per data tria puncta in sphaerae superficie, C, B, A. Concipiatur enim planum, sphaeram in centro circuli O tangens, super quo triangulum planum modo praescripto iam sit constructum; eiusque translatio ad superficiem sphaerae erit facillima, cum omnes anguli circa centrum in superficie tam plani quam sphaerae sint iidem, distantiae vero punctorum datorum A, B, C et angulorum trianguli a, b, c a centro O in tangentes abeant.

SOLV-