DILVCIDATIONES SVPER ALIQVOT CASVS AEQVILIBRII DIFFICILIORES.

Auctore

L. EVLERO.

§. 1.

Etsi in Statica, vbi de aequilibrio potentiarum agitur, omnia iam penitus videntur explorata; praecipue quando vires vel punctis, vel corporibus rigidis sunt applicatae: tamen saepenumero eiusmodi occurrunt casus, quibus determinatio aequilibrii non mediocrem sagacitatem requirit. Talis casus se mihi nuper obtulit, cum forte quadrilaterum ex quatuor virgis rigidis formatum essem contemplatus, quae circa angulos libere moueri possent, ita vt inde innumerabiles species quadrilaterorum formari queant. Tum vero inter binas virgas eiusmodi elastra applicata consideraui, quae data vi sese contrahendi essent praedita; vnde quaestio est nata: qualis figura ab istis elastris quadrilatero induceretur. Haec igitur quaestio ita se habebat:

§. 2. *Si quatuor virgae rigidae* A B, B C, C D, D A, *ita inuicem iungantur, vt circa angulos libere gyrari queant; tum vero ipsis inter angulos elastra* $a\alpha$, $b\beta$, $c\gamma$, *et*

et $d\delta$, applicentur, quae datis viribus sese contrahendi sint praedita, inuenire speciem, quam quadrilaterum ab actione harum virium accipiet, vt in aequilibrio consistat.

§. 3. Hic facile intelligitur, statum aequilibrii non solum a viribus, quibus singula elastra concipiuntur praedita, pendere, sed etiam potissimum a punctis a, α, b, β, c, γ, d, δ, quibus singulis lateribus sunt applicata; vnde facile patet, solutionem huius Problematis non parum esse absconditam, cum adeo principia, ex quibus solutionem haurire opportet, vix satis sint perspecta. Ante autem quam solutionem huius Problematis suscipiam, casum faciliorem sum euoluturus, quo elastra in ipsis angulis applicata accipiuntur, vnde sequens problema nascitur:

Problema.

§. 4. *Si quadrilaterum* ABCD *ex quatuor virgis rigidis fuerit ita formatum, vt circa angulos libere moueri queat; tum vero intra angulos oppositos, secundum diagonales* AC et BD, *elastra fuerint applicata, quae datis viribus sese contrahendi polleant, inuenire statum aequilibrii huius quadrilateri.* Tab. I. Fig. 4.

Solutio.

§. 5. Sit p vis, qua elastrum AC se contrahere conatur, et vis elastri $BD = q$; sitque O intersectio ambarum diagonalium. Quia igitur punctum A sollicitatur a vi $= p$, in directione AO, haec vis resoluatur secundum directiones laterum AB et AD; vnde per principium fun-

damentale reperitur vis ſec. $AB = \frac{p \text{ ſin. } OAD}{\text{ſin. } BAD}$ et vis ſec. $AD = \frac{p \text{ ſin. } OAB}{\text{ſin. } BAD}$. Cum autem ſit

$$\text{ſin. } BAD : \text{ſin. } OAD = BD.OA : OD.AB \text{ et}$$
$$\text{ſin. } ABD : \text{ſin. } OAB = BD.OA : OB.AD,$$

erit

$$\text{vis ſec. } AB = \frac{p.OD.AB}{BD.OA} \text{ et vis ſec. } AD = \frac{p.OB.AD}{BD.OA}.$$

Simili modo vis q, qua punctum B ſecundum BO vrgetur, per reſolutionem dabit

$$\text{vim ſec. } BA = \frac{q.OC.AB}{AC.OB} \text{ et vim ſec. } BC = \frac{q.OA.BC}{AC.OB}.$$

Pari modo vis p, qua punctum C in directione CO trahitur, per reſolutionem dabit

$$\text{vim ſec. } CB = \frac{p.OD.BC}{BD.OC} \text{ et vim ſec. } CD = \frac{p.OB.CD}{BD.OC}.$$

Denique vis q, qua punctum D verſus O trahitur, dat

$$\text{vim ſec. } DC = \frac{q.OA.CD}{AC.OD} \text{ et vim ſec. } DA = \frac{q.OC.AD}{AC.OD}$$

§. 6. Quod ſi iam iſtae vires, vtpote aequivalentes, elaſtrorum loco ſubſtituamus, ſingula latera quadrilateri a binis viribus contrariis ſollicitabuntur, quae ſequenti modo ſe habebunt:

$$\text{I. vis ſec. } AB = \frac{p.OD.AB}{BD.OA} - \frac{q.OC.AB}{AC.OB},$$
$$\text{II. vis ſec. } BC = \frac{q.OA.BC}{AC.OB} - \frac{p.OD.BC}{BD.OC},$$
$$\text{III. vis ſec. } CD = \frac{p.OB.CD}{BD.OC} - \frac{q.OA.CD}{AC.OD},$$
$$\text{IV. vis ſec. } DA = \frac{q.OC.AD}{AC.OD} - \frac{p.OB.AD}{BD.OA}.$$

§. 7. Manifeſtum autem eſt, quadrilaterum in aequilibrio eſſe non poſſe, niſi binae vires, quibus ſingula latera ſollicitantur, ſe mutuo deſtruant, vnde quatuor aequationes

tiones resultare debere videntur, quae autem omnes ad vnicam reuocantur, quae erit:

$$p.\,AC.\,OB.\,OD = q.\,AD.\,OA.\,OC,$$

ita vt esse debeat

$$p : q = BD.\,OA.\,OC : AC.\,OB.\,OD, \text{ siue}$$

$$p : q = \frac{OA.\,OC}{AC} : \frac{OB.\,OD}{BD},$$

quocirca, cum detur ratio $p : q$, solutio problematis nostri ad istud problema geometricum reducitur: *Vt datis quatuor lateribus* AB, BC, CD, DA, *tale quadrilaterum construatur, vt ductis diagonalibus* AC *et* BD, *quae se mutuo secent in puncto* O, *fiat*:

$$\frac{OA.\,OC}{AC} : \frac{OB.\,OD}{BD} = p : q;$$

in cuius solutione Geometrae vires suas exercere possunt.

Corollarium.

§. 8. Si latera opposita fuerint inter se aequalia, scilicet $AB = CD$ et $BC = AD$, quadrilaterum semper erit parallelogrammum, eiusque diagonales AC et BD sese in medio O intersecabunt, ita vt sit $OA = OC = \frac{1}{2}AC$ et $OB = OD = \frac{1}{2}BD$; vnde pro hoc casu prodibit haec proportio: $p : q = AC : BD$, ita vt diagonales eam ipsam rationem inter se tenere debeant, quam habent vires elastrorum AC et BD.

Scholion.

§. 9. Mirum hic non est, quod quatuor aequationes, ex quatuor lateribus deductae, eandem praebeant proportionem. Quia enim binae vires vtriusque elastri, quas

in angulos oppositos exercent, se mutuo tollunt, etiam omnes vires, in quas resoluuntur, se mutuo destruere debent; vnde pro solutione nostri problematis satis fuisset tantum binas vires, quibus vnicum latus AB urgetur, investigasse. Quemadmodum in hac solutione ad intersectiones binarum diagonalium O spectauimus, vnde resolutionem virium petiuimus, ita etiam alias solutiones concinnare licebit, quibus diagonales alio modo ad latera quadrilateri referantur.

Alia solutio eiusdem problematis.

Tab. I. Fig. 5. §. 10. Producantur bina latera opposita ad concursum vsque in E et F, et consideretur primo vis p, qua punctum C in directione CA vrgetur, quae directio ad triangulum CFD referatur, vnde colligetur

$$\text{vis } CB = \frac{p.AD.CF}{AC.DF} \text{ et vis } CD = \frac{p.AF.CD}{AC.DF}.$$

Sin autem eadem directio CA referatur ad triangulum CBE, reperietur vis secundum $CB = \frac{p.AE.CB}{AC.BE}$, et vis secundum $CD = \frac{p.AB.CE}{AC.BE}$. Deinde vis q, qua punctum B versus D trahitur, referatur ad triangulum CBE, indeque reperietur vis $BC = \frac{q.DE.BC}{BD.CE}$, quam iam sufficit inuenisse, cum habeamus binas vires, qua latus BC vrgetur, scilicet

$$\text{vim } BC = \frac{q.DE.BC}{BD.CE} - \frac{p.AD.CF}{AC.DF},$$

quae ad nihilum reducta praebet hanc aequationem:

$$q.AC.BC.DE.DF = p.AD.BD.CE.CF.$$

Sin autem posterior vis secundum CB sumatur, prodibit haec aequatio:

$q.AC.$

$q \cdot AC.BE.DE = p \cdot BD.AE.CE$, ſiue

$p : q = AC.BE.DE : BD.AE.CE$, ſiue

$p : q = \frac{AC.DE}{CE} : \frac{BD.AE}{BE}$,

quae autem proportio variis modis variari poteſt, propter eximias relationes, quibus lineae huius figurae inter ſe comparari poſſunt.

§. 11. Quia haec proportio prorſus conuenit cum ante inuenta, ex ea quoque ſolutio problematis geometrici ante memorati deduci poterit. Ceterum quia hic duplex expreſſio pro vi ſecundum CB eſt reperta, inde iſta aequalitas deriuatur:

$\frac{AE.CB}{AC.BE} = \frac{AD.CF}{AC.DF}$, ita vt ſit

$AE.CB.DF = AD.BE.CF$, ſiue

$\frac{CB.DF}{CF} = \frac{AD.BE}{AE}$.

quae eſt egregia proprietas geometrica huius figurae. Ceterum plures aliae proprietates ex hac figura deduci poſſunt.

§. 12. Huius autem problematis ſolutio parum confert ad problema principale initio propoſitum reſoluendum. In poſteriori enim ſtatim licuit vires elaſtrorum ſecundum directiones laterum quadrilateri reſoluere, id quod in priore problemate, vbi elaſtra non in ipſis angulis figurae ſunt applicata, per ſolitas virium reſolutiones praeſtari non poteſt. Hanc ob rem ſequens Lemma ſtaticum, vix adhuc cognitum, ſum propoſiturus, cuius, vſus in huiusmodi inueſtigationibus maximi momenti eſſe poterit.

Lemma

Lemma ſtaticum.

§. 13. *Vim corpori rigido applicatam ſecundum ternas directiones datas reſoluere.*

Solutio.

Tab. I. Fig. 6. Sit virgae rigidae A B applicata vis A ſecundum directionem $a\,\alpha$ trahens, quam reſoluere oporteat in ternas vires, quae ſecundum directiones datas A B, A D et B D agant; vbi quidem omnes has directiones in eodem plano ſitas aſſumo. Occurrat directio vis applicatae directioni A D in puncto α, et ducta recta a D vis A ſecundum $a\,\alpha$ reſoluatur primo ſecundum directiones a A et a D, vnde deducitur vis ſecundum $a\,A = \frac{A.\,\alpha\,D.\,A\,a}{A\,D.\,a\,\alpha}$ et vis ſecundum $a\,D = \frac{A.\,A\,\alpha.\,a\,D}{A\,D.\,a\,\alpha}$, quae vocetur $= T$, haecque vis puncto D concipiatur applicata, quae iam reſolui poterit ſecundum directiones B D et A D, quia haec vis T ſecundum a D trahit. Hinc ergo naſcitur:

$$\text{vis ſec. } B\,D = \frac{T.\,A\,a.\,B\,D}{A\,B.\,a\,D} \text{ et vis ſec. } A\,D. = T\,\frac{a\,B.\,A\,D}{A\,B.\,a\,D},$$

hinc loco T ſubſtituto valore reperietur

$$\text{vis ſec. } B\,D = \frac{A.\,A\,a.\,A\,\alpha.\,B\,D}{a\,\alpha.\,A\,B.\,A\,D} \text{ et vis ſec. } A\,D = \frac{A.\,A\,\alpha.\,a\,B}{a\,\alpha.\,A\,B},$$

ſicque ternae vires quaeſitae vi A aequiualentes erunt:

I. vis ſec. $B\,A = \frac{A.\,\alpha\,D.\,A\,a}{A\,D.\,a\,\alpha}$,

II. vis ſec. $A\,D = \frac{A.\,A\,\alpha.\,a\,B}{A\,B.\,a\,\alpha}$,

III. vis ſec. $B\,D = \frac{A.\,a\,A.\,A\,\alpha.\,B\,D}{A\,B.\,A\,D.\,a\,\alpha}$.

§. 14.

Corollarium.

§. 14. Eodem modo, si vis A, virgae A D in α applicata, secundum αa ageret, ea secundum easdem ternas directiones A D, A B et B D resoluta dabit has vires ex prioribus natas, quoniam ibi tantum literas a et α, item B et D permutari oportet:

I. vis sec. D A $= \frac{A\,a\,B.\,A\,\alpha}{A\,B.\,a\,\alpha}$,

II. vis sec. A B $= \frac{A.\,A\,a.\,\alpha\,D}{A\,D.\,a\,\alpha}$,

III. vis sec. D B $= \frac{A.\,A\,\alpha.\,A\,a.\,D\,B}{A\,D.\,A\,B.\,a\,\alpha}$,

quae vires illis sunt aequales et contrariae, id quod mirum non est, quoniam posterior vis A priori etiam aequalis est et contraria.

Corollarium 2.

§. 15. Hinc si B D etiam fuerit virga rigida perinde ac latera A B et A D, intra quae applicatum sit elastrum $a\,\alpha$, vi sese contrahendi A praeditum, omnes vires hinc ortae se mutuo destruunt, et triangulum, ex his tribus virgis formatum, A B D, erit in aequilibrio. Hoc autem tantum locum habet, si B D fuerit virga rigida; nisi enim talis sit, hic duae vires occurrunt inter se aequales $= \frac{A.\,A\,a.\,A\,\alpha.\,B\,D}{A\,B.\,A\,D.\,a\,\alpha}$, quarum altera punctum B versus D, altera vero punctum D versus B vrgetur; vnde deducimus sequens theorema maximum nobis vsum praestaturum.

Theorema staticum.

§. 16. *Si intra duas virgas rigidas* A B *et* A D, *in* A *iunctas, vicunque applicatum fuerit elastrum* $a\,\alpha$, *vi sese contra-*

contrahendi = A *praeditum, eius loco substitui potest elastrum intra terminos* B *et* D *applicatum, cuius vis sese contrahendi sit* $= \frac{A.\,A\,a.\,A\,\alpha.\,B\,D}{A\,B.\,A\,D.\,a\,\alpha}$. Atque huius theorematis ope problematis initio propositi, et quod difficillimum merito erat visum, solutio iam facile obtineri potest.

Solutio problematis initio propositi.

§. 17. Cum hic quatuor occurrant elastra $a\,\alpha$, $b\,\beta$, $c\,\gamma$, $d\,\delta$, sint vires, quibus ea se contrahere conantur, singulatim A, B, C, D, et ex theoremate praemisso loco elastri $a\,\alpha$ substituatur elastrum B D, cuius vis sit $\frac{A.\,A\,a.\,A\,\alpha.\,B\,D}{A\,B.\,A\,D.\,a\,\alpha}$. Deinde simili modo loco elastri $b\,\beta$ substituatur elastrum A C, cuius vis sit $= \frac{B.\,B\,b.\,B\,\beta.\,C\,A}{B\,C.\,B\,A.\,b\,\beta}$. Porro loco elastri $c\,\gamma$, cuius vis = C, substitui poterit elastrum B D, cuius vis $= \frac{C.\,C\,\gamma.\,C\,c.\,B\,D}{C\,D.\,B\,C.\,c\,\gamma}$. Denique loco elastri $d\,\delta$, cuius vis = D, substitui potest elastrum A C, cuius vis $= \frac{D.\,D\,\delta.\,D\,d.\,A\,C}{A\,D.\,C\,D.\,d\,\delta}$. Cum igitur bina noua elastra, tam pro directione A C quam B D inuenta, in vnum coalescere concipi queant, quatuor elastra proposita reducentur ad bina noua elastra, quorum alterum intra angulos A et C erit applicatum et vi sese contrahendi pollens

$$= \frac{B.\,B\,b.\,B\,\beta.\,C\,A}{A\,B.\,C\,B.\,b\,\beta} + \frac{D.\,D\,\delta.\,D\,d.\,A\,C}{A\,D.\,C\,D.\,d\,\delta}.$$

Similique modo vis elastri intra B et D erit

$$\frac{A.\,A\,a.\,A\,\alpha.\,B\,D}{B\,A.\,D\,A.\,a\,\alpha} + \frac{C.\,C\,c.\,C\,\gamma.\,B\,D}{B\,C.\,D\,C.\,c\,\gamma}.$$

Hoc igitur modo problema initio propositum reductum est

eſt ad problema §. 4. ſolutum, vbi p et q nunc denotabunt vires elaſtrorum A C et B D. Cum igitur ibi eſſet inuentum

$$p \cdot \frac{OB \cdot OD}{BD} = q \cdot \frac{OA \cdot OC}{AC},$$

ſi loco p et q iſtos valores ſcribamus, habebimus ſequentem ſolutionem noſtri problematis:

$$\frac{B \cdot B\,b \cdot B\,\beta \cdot AC \cdot OB \cdot OD}{AB \cdot CB \cdot DB \cdot b\,\beta} + \frac{D \cdot D\,d \cdot D\,\delta \cdot AC \cdot OB \cdot OD}{AD \cdot CD \cdot BD \cdot d\,\delta}$$
$$= \frac{A \cdot A\,a \cdot A\,\alpha \cdot BD \cdot OA \cdot OC}{BA \cdot DA \cdot CA \cdot a\,\alpha} + \frac{C \cdot C\,c \cdot C\,\gamma \cdot BD \cdot OA \cdot OC}{BC \cdot DC \cdot AC \cdot c\,\gamma},$$

quae aequatio reducitur ad hanc formam:

$$\frac{OB \cdot OD}{BD^2}\left(\frac{B \cdot B\,b \cdot B\,\beta}{AB \cdot CB \cdot b\,\beta} + \frac{D \cdot D\,d \cdot D\,\delta}{AD \cdot CD \cdot d\,\delta}\right)$$
$$= \frac{OA \cdot OC}{AC^2}\left(\frac{A \cdot A\,a \cdot A\,\alpha}{BA \cdot DA \cdot a\,\alpha} + \frac{C \cdot C\,c \cdot C\,\gamma}{BC \cdot DC \cdot c\,\gamma}\right).$$

Corollarium.

§. 18. Quod ſi ergo bina latera oppoſita fuerint aequalia, ſcilicet $BC = AD$ et $CD = AB$, vt quadrilaterum fiat parallelogrammum, quia tum eſt

$$OA = OC = \tfrac{1}{2}AC \text{ et } OB = OD = \tfrac{1}{2}BD,$$

aequatio ſolutionem noſtri problematis continens erit

$$\frac{B \cdot B\,b \cdot B\,\beta}{b\,\beta} + \frac{D \cdot D\,d \cdot D\,\delta}{d\,\delta} = \frac{A \cdot A\,a \cdot A\,\alpha}{a\,\alpha} + \frac{C \cdot C\,c \cdot C\,\gamma}{c\,\gamma},$$