SECTION CINQUIÈME.

De la Transformation des Quarrés tant ſimples que complets.

§. 140. Ayant vu que toutes méthodes, que nous avons expoſé jusqu'ici, ne ſçauroient fournir aucun quarré magique pour le cas de $n=6$, et que la même concluſion ſemble ſ'étendre à tous les nombres impairement pairs de n; on pourroit croire, que ſi de tels quarrés ſont posſibles, les quarrés latins, qui leur ſervent de baſe, ne ſuivant aucun des ordres, que nous venons de conſidérer, ſeroient tout à fait irreguliers. Il faudroit donc examiner tous les cas posſibles de tels quarrés latins pour le cas de $n=6$ dont le nombre est ſans doute extrêmement grand. Et comme outre cela la formation des quarrés irreguliers n'est pas ſi aiſée, je vais rapporter une méthode, par le moyen de laquelle on peut transformer facilement en pluſieures formes différentes tous les quarrés reguliers et examiner enſuite ſ'ils admettent des directrices ou non.

§. 141.

§. 141. Cette méthode tient à ce principe: *que ſi dans un quarré latin propoſé deux nombres a et b ſe trouvent dans les angles d'un parallelogramme rectangle de la manière que cette figure les repréſente:*

a - - - - - b

b - - - - - a

on pourra échanger entre elles ces deux lettres, en écrivant a au lieu de b, et b au lieu de a; dont la raiſon est évidente; car on voit bien que non obſtant cette transpoſition toutes les colonnes horizontales et verticales renferment encore les mêmes nombres. Il est donc évident que par ce principe on ſera en état de transformer chaque quarré propoſé en pluſieures autres formes différentes, qui auront par rapport aux formules directrices des propriétés tout à fait particulières.

§. 142. Conſidérons par exemple le quarré latin à ſimple marche de 36 caſes ſuivant:

1	2	3	4	5	6
2	3	4	5	6	1
3	4	5	6	1	2
4	5	6	1	2	3
5	6	1	2	3	4
6	1	2	3	4	5

qui, comme nous avons démontré dans la section 1. §. 20. n'admet aucune directrice. Transposons de la manière rapportée les deux nombres marqués 3 et 6 disposés en parallélogramme et nous obtiendrons le quarré qui suit:

1	2	3	4	5	6
2	6	4	5	3	1
3	4	5	6	1	2
4	5	6	1	2	3
5	3	1	2	6	4
6	1	2	3	4	5

qui malgré la conformité apparente diffère si essentiellement du quarré proposé, qu'on en peut déduire un grand nombre de directrices pour tous les six exposans, quoique l'autre n'en a fourni aucune. Les voici:

1	6	5	2	4	3	4	3	2	5	1	6
1	6	5	3	2	4	4	3	2	6	5	1
1	4	6	2	3	5	4	1	3	5	6	2
1	4	2	5	6	3	4	1	5	2	3	6
1	5	4	3	6	2	4	2	1	6	3	5
1	5	2	3	6	4	4	2	5	3	6	1
1	3	4	6	2	5	4	6	1	3	5	2
1	3	6	5	4	2	4	6	3	2	1	5
2	4	3	1	6	5	5	7	6	4	3	2
2	3	5	1	4	6	5	6	2	4	1	3
2	3	6	4	1	5	5	6	3	1	4	2
2	1	5	4	6	3	5	4	2	1	3	6
3	2	4	1	6	5	6	5	1	4	3	2
3	6	2	1	5	4	6	3	5	4	2	1
3	6	1	4	2	5	6	3	4	1	5	2
3	5	2	4	6	1	6	2	5	1	3	4

§. 143. Après avoir trouvé toutes ces directrices, il ne reste qu'à examiner, si l'on en peut former un système complet moyennant lequel on puisse completter le quarré simple proposé. Or en considérant attentivement les directrices pour les exposans 2, 3, 5, 6, on verra, que de quelque manière qu'on les veuille combiner, elles ne fournissent dans la quatrième bande verticale que les deux nombre 1 et 4, de sorte que ces deux nombres se trouveroient necessairement deux fois dans la même bande du système complet, dont

dont l'impossibilité absolüe saute aux yeux. Nous pouvons donc hardiment assurer, que le quarré simple proposé ne sçauroit fournir une solution du Problème.

§. 144. J'ai examiné par cette méthode un très grand nombre de quarrés transformés semblables sans en rencontrer un seul, qui n'ait eu le même inconvenient, de ne fournir aucun systême de directrices, dont l'une ou l'autre bande verticale ne renfermat un nombre deux fois, et je n'ai pas hésité d'en conclure, qu'on ne sçauroit produire aucun quarré complet de 36 cases, et que la même impossibilité s'étende aux cas de n=10, n=14 et en général à tous les nombres impairement pairs. Car ayant trouvé une méthode de transformer un quarré magique quelconque en plusieures (même jusqu'à 24) formes différentes: s'il se trouvoit un seul quarré complet pour le cas de n=6 il y en auroit certainement plusieures autres, dont les quarrés latins fondamentaux seroient tous différens entre eux. Or ayant examiné un nombre très considerable de tels quarrés, il me paroît impossible, que tous les cas mentionnés me fussent échappés.

§. 145. Ce raisonnement pourra être porté à un beaucoup plus haut dégré de certitude par la transformation générale que nous allons exposer, moyennant laquelle chaque quarré latin proposé peut être transformé en plusieurs autres, qui ont tous *la même* propriété par rapport aux directrices; de sorte que si le quarré proposé n'admet point de directrices, aussi tous les quarrés transformés seront de la même nature, et en cas que le quarré proposé en admet un systême complet, aussi tous ceux, qui en ont été déduits fourniront des quarrés magiques complets.

§. 146. Pour cette *transformation générale* on n'a qu'à changer la signification des nombres, dont le quarré latin est composé, en substituant à leur place d'autres nombres dans un ordre quelconque, et en reduisant ensuite le nouveau quarré suivant l'ordre que nous avons observé jusqu'ici, c'est à dire que les nombres de la première bande

tant

tant horizontale que verticale se suivent dans leur ordre naturel. De cette manière on obtiendra toujours un nouveau quarré doué des mêmes propriétés par rapport aux directrices, parce qu'on n'a qu'à apporter les mêmes changemens dans les directrices du quarré proposé. Par la on voit que cette méthode doit être d'autant plus fertile dans la production de nouveaux quarrés, que le nombre n est grand; Car pour les cas de n=2, 3, 4 il n'y a aucun changement à attendre. Pour le cas n=5 la variation pourroit monter jusqu'à trois et pour le cas de n=6 le nombre doit être d'autant plus considerable, que l'ordre de six nombres peut reçevoir jusqu'à 720 variations, dont il y a pourtant plusieures qui reviendront à la même forme.

§. 147. Pour mieux éclaircir la manière et l'usage de ces transformations, nous allons prendre pour exemple le dernier quarré de 6 qui a été si fertile en directrices: d'où en changeant les nombres à volonté d'une manière quelconque p. e. en écrivant 4, 6, 1, 3, 2, 5, au lieu de 1, 2, 3, 4, 5, 6, nous

nous obtiendrons le quarré suivant.

4	6	1	3	2	5
6	5	3	2	1	4
1	3	2	5	4	6
3	2	5	4	6	1
2	1	4	6	5	3
5	4	6	1	3	2

qui, en reduisant en ordre les bandes tant horizontales que verticales recevra cette forme ordinaire:

1	2	3	4	5	6
2	4	1	5	6	3
3	5	2	6	4	1
4	1	6	2	3	5
5	6	4	3	1	2
6	3	5	1	2	4

Si nous traitions de la même manière tous les quarrés latins de 36 cases, à simple ou à double ou à triple marche, qui, comme nous avons démontré, n'admettent aucune directrice, nous obtiendrons un grand nombre d'autres quarrés semblables, qui n'en feroient pas plus susceptibles; de sorte, qu'il suffira d'en avoir examiné un seul, pour porter un jugement sur la nature de tous les autres.

§. 148. De la il est clair, que s'il existoit un seul quarré magique complet de 36 cases on en pourroit déduire plusieures autres moyennant ces transformations, qui satisferoient également aux conditions du probléme. Or ayant examiné un grand nombre de tels quarrés, sans avoir rencontré un seul, il est plus que probable, qu'il n'y en ait aucun; Car le nombre des latins

ne ſçauroit être ſi énorme, que la quantité de ceux que j'ai examiné n'en devroit avoir fourni un qui admet des directrices, ſ'il y en avoit; vû que le cas $n=2$ et $n=3$ ne fournit qu'un ſeul, le cas de $n=4$ quatre, le cas de $n=5$ cinquante ſix, d'après un dénombrement exact, d'où l'on voit que le nombre des variations pour le cas de $n=6$ ne ſçauroit être ſi prodigieux, que le nombre de 50 ou 60, que je pourrois avoir examiné n'en fût qu'une petite partie. J'obſerve encore à cette occaſion que le parfait dénombrement de tous les cas poſſibles de variations ſemblables ſeroient un objet digne de l'attention des Géomètres, d'autant plus que tous les principes connus dans la doctrine des combinaiſons n'y ſçauroient prêter le moindre ſecours.

§. 149. En examinant pluſieurs de tels quarrés formés au hazard, j'ai remarqué une différence étonnante par rapport aux directrices: j'en rencontrois tantôt, qui n'en fourniſſoient aucune, tantôt, qui ne donnoient aucune pour deux exposans mais deux pour chacun des autres. Entre autres je

ſuis tombé auſſi ſur un quarré qui me paroît mériter une attention particuliere, puisqu'il m'a fourni quatre directrices pour chaque exposant, et même telles, qui ſembloient promettre un ſyſtême complet: c'est pourquoi je vais rapporter ici le quarré qui me les a fourni:

Quarré.

1	2	3	4	5	6
2	1	5	6	3	4
3	4	1	2	6	5
4	5	6	1	2	3
5	6	4	3	1	2
6	3	2	5	4	1

Directrices.

1	4	6	5	3	2	3	2	6	5	1	4	5	1	2	4	6	3
1	5	2	3	6	4	3	1	4	5	2	6	5	2	1	6	4	3
1	6	5	2	4	3	3	6	5	4	2	1	5	4	2	1	3	6
1	3	4	6	2	5	3	6	2	1	5	4	5	4	3	6	2	1
2	4	6	3	5	1	4	1	3	5	6	2	6	1	4	2	5	3
2	5	1	3	4	6	4	3	1	6	5	2	6	5	1	4	3	2
2	6	3	1	4	5	4	2	5	3	6	1	6	2	4	1	3	5
2	3	6	4	1	5	4	3	5	2	1	6	6	5	3	2	1	4

Toutes ces directrices ont la belle propriété, que chacune d'elles a ſa renverſée parmi les autres. Mais pour en former un ſyſtême complet, on n'en ſçauroit combiner que quatre et cela des deux manières ſuivantes:

1	5	2	3	6	4
2	6	3	1	4	5
3	1	4	5	2	6
4	3	1	6	5	2

1	3	4	6	2	5
2	5	1	3	4	6
3	6	2	1	5	4
4	1	3	5	6	2

et il est clair que des directrices pour les exposans suivans 5 et 6 il ne s'accorde aucune pour completer le systême.

§. 150. On pourroit appliquer de semblables transformations aux vrays quarrés magiques ou complets; mais il seroit superflu d'en construire d'autres par le changement des nombres. Il y a au contraire une autre espèce de transformation, qui leur est particulière, puisque dans tout quarré magique les nombres latins et grecs peuvent être échangés entre eux, d'où l'on obtient toujours un nouveau quarré entièrement différent. Ainsi en prennant pour exemple le quarré complet de 25 cases suivant

1^1	2^1	3^4	4^1	5^2
2^2	3^1	4^1	5^4	1^1
3^1	4^2	5^1	1^1	2^4
4^4	5^1	1^2	2^1	3^1
5^1	1^4	2^1	3^2	4^1

on en tirera par le changement des nombres mentionné le quarré suivant:

1^1	5^2	4^1	3^4	2^1
2^2	1^1	5^4	4^1	3^1
3^1	2^4	1^1	5^1	4^2
4^4	3^1	2^1	1^2	5^1
5^1	4^1	3^2	2^1	1^4

qui, étant mis en ordre, reprendra sa forme primitive; mais aussi ce changement n'est il qu'un cas très particulier de la transformation générale que nous allons proposer.

§. 151. Remarquons, que, comme chaque terme d'un quarré complet contient deux nombres, dont l'un a été nommé le nombre *latin* et l'autre le *grec*: aussi la case que ce terme occupe est déterminée par deux nombres, dont l'un est l'indice horizontal et l'autre le vertical. Chaque terme avec la case qu'il occupe est donc déterminée par quatre nombres a, b, c, d, dont le premier a soit l'indice horizontal, b l'indice vertical, c le nombre latin et d le nombre grec, et tous ces quatre nombres a, b, c, d, seront *permutables*. De cette manière les termes du dernier quarré de 25 cases pourront être representés de la manière suivante:

1	1	1	1	1	2	2	5	1	3	3	4	1	4	4	2	1	5	5	2
2	1	2	2	2	2	3	1	2	3	4	5	2	4	5	4	2	5	1	3
3	1	3	3	3	2	4	2	3	3	5	1	3	4	1	5	3	5	2	4
4	1	4	4	4	2	5	3	4	3	1	2	4	4	2	1	4	5	3	5
5	1	5	5	5	2	1	4	5	3	2	3	5	4	3	2	5	5	4	1

Pour peu qu'on reflechisse sur ces quaternaires on s'apperçevra aisément que tous

tous les quatre nombres peuvent être échangés entre eux de toutes les manières possibles, et je n'ai pas besoin d'ajouter que le nombre des variations est de 24, qui à la verité ne produiront pas toutes de nouveaux quarrés, mais pourtant une bonne quantité et d'autant plus que le nombre n est grand.

§. 152. J'avois observé ci-dessus, qu'un parfait dénombrement de toutes les variations possibles des quarrés latins seroit une question très importante, mais qui me paroissoit extrêmement difficile et presque impossible dès que le nombre n surpassoit 5. Pour approcher de cette énumération il faudroit commencer par cette question:

En combien de manières différentes, la première bande horizontale étant donnée, peut on varier la seconde bande horizontale pour chaque nombre proposé n?

La solution est contenue dans la table suivante:

n	nombre des variations		
1	0		
2	1		
3	1 = 1		
4	3 = 2		
5	11 = 4	3	
6	53 = 4	11	+ 2. 1
7	309 = 5	53	+ 3. 3
8	2119 = 6	309	+ 4. 11
9	16687 = 7	2119	+ 5. 53
10	148329 = 8	16687	+ 6. 309
&c.		&c.	+ 7. 2119

De là il est clair que ces nombres constituent une progression ou espèce de série recurrente, dont chaque terme est determiné par les deux précédens, mais dont l'échelle de relation est variable. Ainsi si l'on met les lettres P, Q, R, S pour les nombres des variations, qui repondent aux nombres n, n + 1, n + 2, n + 3, on aura toujours $R = nQ + (n-1)P$ et $S = (n+1)R + nQ$. On peut trouver de la une formule indépendente de n, par laquelle chaque terme S peut être exprimé par les trois précédens P, Q, R. Car la pénultième équation, donnant $R - Q = (n-1)(Q + P)$, il y aura $n - 1 = \frac{R-Q}{P+Q}$; d'où l'on voit que $R - Q$ est toujours divisible par $P - Q$. De la même manière on

duire immediatement de la série; du moins les réflexions suivantes nous approcheront d'avantage de la verité de l'assertion que $Q = n P - \frac{P+1}{n}$. Car si Q est le nombre des variations pour un cas quelconque de n, soit impair ou pair, et R le nombre des variations pour le cas suivant où le nombre des termes est $n+1$, il y auroit en vertu de l'expression rapportée

$$n Q = (n n - 1) P + 1 \text{ et } (n+1) R = (n n + 2 n) Q - 1$$

où le signe supérieur a lieu, si n est un nombre impair, l'inferieur, s'il est pair. Or la somme de ces deux expressions fournit cette équation:

$$(n+1) R + n Q = (n n + 2 n) Q + (n n - 1) P,$$

qui se reduit à

$$(n+1) R = (n n + n) Q + (n n - 1) P,$$

d'où l'on tire en divisant par $(n+1)$ la valeur de $R = n Q + (n-1) P$, qui convient parfaitement avec celle que nous avons déduit ci-dessus de la nature de la série.

Voila ce que j'ai cru devoir ajouter par rapport au dénombrement des variations, qui peuvent avoir lieu dans les quarrés simples fondamentaux, en laissant aux Géomètres, à voir s'il y a des moyens pour achever l'énumeration

on de tous les cas possibles, ce qui paroit fournir un vaste champ pour des recherches nouvelles et interessantes. Je mets fin ici aux miennes sur une question, qui quoique en elle même de peu d'utilité nous a conduit à des observations assés importantes tant pour la doctrine des combinaisons que pour la Théorie générale des quarrés magiques.