leurs. Pour le cas, où n=9, écrivons les u dans leur ordre naturel

savoir u=1 2 3 4 5 6 7 8 9
et les v seront en vertu des regles v=1 3 2 7 9 8 4 6 5

d'où l'on voit plus évidemment, comment toutes les valeurs de v deviennent différentes par les variations de la lettre u.

Fin de la Section troisieme.

SEC-

SECTION QUATRIÈME.

Des Quarrés latins à quadruple marche de la forme générale.

1	2	3	4	5	6	7	8	&c.
2				6	—	—	—	
3	—	—	—	7	—	—	—	
4				8	—	—	—	
5	6	7	8	9	10	11	12	&c.
6				10	—	—	—	
7				11	—	—	—	
8	—	—	—	12	—	—	—	
&c.				&c.				

§. 120. Puisque, comme il est évident par la forme générale, cette section ne peut regarder que les quarrés, dont la racine n est divisible par 4, nous mettrons n=4 m et *m* marquera le nombre des membres, dont le quarré est composé, qui contiendront de chaque bande horizontale et verticale quatre ou bien en tout 16 termes. Donc si nous représentons de la maniere introduite au commencement de la section précédente, ces membres par les lettres A, B, C, &c. de sorte que

A=

$$A = \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & - & - & - \\ 3 & - & - & - \\ 4 & - & - & - \end{matrix}; \quad B = \begin{matrix} 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & - & - & - \\ 7 & - & - & - \\ 8 & - & - & - \end{matrix}; \quad C = \begin{matrix} 9 & 10 & 11 & 12 \\ 10 & - & - & - \\ 11 & - & - & - \\ 12 & - & - & - \end{matrix}; \text{ \&c.}$$

les différens que nous aurons à considérer seront compris dans les formes suivantes:

$$A; \quad \begin{matrix} A & B \\ B & A \end{matrix}; \quad \begin{matrix} A & B & C \\ B & C & A \\ C & A & B \end{matrix}; \quad \begin{matrix} A & B & C & D \\ B & C & D & A \\ C & D & A & B \\ D & A & B & C \end{matrix}; \text{ \&c.}$$

§. 121. Si nous voulions traiter ces quarrés sur le même pied, que dans les sections précédentes, nous tomberions dans des calculs très embarrassans. Il sera donc necessaire, d'employer une autre methode, qui pourra aussi être mise en usage lorsque les quarrés proposés seront de tout autre marche, au de là de la quadruple. C'est pourquoi je proposerai ici une methode, qui facilitera très considerablement ces recherches et par laquelle tous les objets seront representés d'une manière aussi claire que facile.

§. 122. D'abord en considérant un terme quelconque du quarré proposé, que nous indiquerons par la lettre x, il s'agit de découvrir le rapport que ce terme tient aux indices, le vertical=t, le

horizontal=u; où il est clair, qu'il faut avoir égard à quatre termes, dont les formules seront $4\lambda + 1$, $4\lambda + 2$, $4\lambda + 3$, $4\lambda + 4$. Conformément à ces quatre especes nous mettrons toujours $t = 4p + f$, $u = 4q + g$, $x = 4f + h$ où les nombres p, q, f seront toujours plus petits que m et les autres lettres f, g, h marqueront toujours un des quatre nombres 1, 2, 3, 4. Outre cela en considérant le quarré proposé on s'apercoivra aisément, qu'on aura toujours $f = p + q$; en observant, que lorsque le nombre x devient plus grand que $n = m$ on doit en retrancher le nombre n et l'exces marquera la juste valeur de la lettre f.

§. 123. Nous avons deja remarqué ci-dessus, que dans ce cas des quarrés à quadruple marche le premier membre A peut recevoir quatre formes differentes (voyés §. 16.) qu'il sera bon de mettre ici devant les yeux.

I.				II.				III.				IV.			
1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4
2	3	4	1	2	1	4	3	2	1	4	3	2	4	1	3
3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	2	1	3	1	4	2
4	1	2	3	4	3	2	1	4	3	1	2	4	3	2	1

de

de ces formes pour le premier membre, il ſera facile de tirer celles pour les membres ſuivans B, C, D, &c., en augmentant tous les termes, pour le ſecond B de 4, pour le troiſième C de 8, de 12, et ainſi de ſuite.

§. 124. Commençons par la première forme, dont la première horizontale repréſentera les valeurs de f pour la forme $4p+f$, pendant que la première verticale donne les valeurs des g pour la forme $u=4q+g$ et les termes mêmes de cette forme marqueront les valeurs de la lettre h pour la forme $x=4f+h$, en obſervant que $f=4p+q$. Cette ſignification pourra donc être repréſentée de cette manière

g \ f	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	2	3	4	1
3	3	4	1	2
4	4	1	2	3

où les termes du quarré marquent les nombres h pour toutes les valeurs de f et g.

§. 125. De là on conſtruira aiſément un

un autre quarré, qui repréſentera les valeurs de la lettre g, qui répondent aux valeurs de la lettre f et h et un troiſième pour les valeurs de f qui répondent aux valeurs de g et h.

h \ f	1	2	3	4
1	1	4	3	2
2	2	1	4	3
3	3	2	1	4
4	4	3	2	1

g \ h	1	2	3	4
1	1	4	3	2
2	2	1	4	3
3	3	2	1	4
4	4	3	2	1

Ces figures peuvent ſ'appliquer très commodement, pour juger des formules directrices, dont la nature exige, qu'à toutes les valeurs de $t=4p+f$ répondent autant de différentes valeurs de la lettre $x=4f+h$, et en ſecond lieu que les valeurs de l'indice $u=4q+g$ ſoyent auſſi différentes entre elles.

§. 126. Ayant exprimé les valeurs des nombres t, u, x par deux membres, il ſera bon de remarquer pour la commodité des explications ſuivantes, que la première est pour ainſi dire la *Caractéristique*, qui marque le plus proche multiple de 4 au deſſous, et l'autre la *Mantiſſe* qui indique la forme d'un

d'un nombre proposé par rapport à la divisibilité par 4. Ainsi pour les nombres du premier membre A, qui sont 1, 2, 3, 4, la caractéristique sera O; pour ceux du second membre B, qui sont 5, 6, 7, 8, la caractéristique sera 4; pour ceux du troisième C, sçavoir: 9, 10, 11, 12, elle sera 8, et ainsi de suite. Au reste il est évident, que la caractéristique de x est toujours égale à la somme des caractéristiques de t et u, de sorte que, n'ayant égard qu'aux caractéristiques, on aura toujours $x=t+u$ et partant $u=x-t$.

§. 127. Donc, puisque dans tous les cas les caractéristiques ne sont sujettes à aucune difficulté, nous pourrons nous en passer entièrement, et partant nous n'aurons qu'à regarder les mantisses f, g, h, qui forment les formes de t, u, x, ou ce qui reste après la division par 4, et par cette raison nous pourrons bien nous passer aussi des lettres f, g, h, au lieu des quelles nous nous servirons uniquement des t, u et x, comme nous avons fait dans les sections précédentes, ce qui facilitera considérablement nos recherches. Cependant nous ajouterons encore à ces trois lettres t, u, x une quatrième v, qui se rapporte de la même manière aux lettres x et t, que u se rapporte aux lettres t et x, de sorte qu'en ne regardant que les caractéristiques on aura $v=t-x$ au lieu que nous avions $u=x-t$, d'où l'on voit, que la caractéristique de v sera toujours le negatif de celle de u, ou bien son complement au nombre $n=4m$; et la somme des caractéristiques de ces deux lettres sera toujours ou o ou n.

§. 128. Maintenant il sera facile de représenter par des figures convenables comment chacune de ces quatre lettres est déterminée par deux autres; Car d'abord, en regardant les lettres t et u comme connües, la forme du nombre x sera déterminée par la figure première, de laquelle on formera facilement la seconde pour les valeurs de u lorsque t et x sont connües;

1re figure.
Pour les valeurs de x

u \ t	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	2	3	4	1
3	3	4	1	2
4	4	1	2	3

2de figure.
Pour les valeurs de u

x \ t	1	2	3	4
1	1	4	3	2
2	2	1	4	3
3	3	2	1	4
4	4	3	2	1

De cette figure on tire ensuite aisément la troisième pour les valeurs de v par t et x, puisque n'aura qu'à en changer les indices t et x; ou bien, en laissant ceux-ci on n'aura qu'à changer les colonnes horizontales et verticales, comme on peut voir par cette figure.

3me figure.
Pour les valeurs de v

x \ t	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	4	1	2	3
3	3	4	1	2
4	2	3	4	1

§. 129. De la première de ces trois figures il est d'abord clair, qu'en transposant les lettres t et u la figure demeure la même. Donc, quand on aura trouvé une formule directrice quelconque, dans laquelle à l'indice vertical t il repond le terme x, on en pourra d'abord déduire une autre, dans laquelle, en marquant par X le terme qui repond à l'indice vertical T, on n'a qu'à prendre T=u et X=x, et alors, en nommant U l'indice horizontal de cette nouvelle formule, on aura U=t. Car il est clair, que pendant que les deux lettres T et X varient par toutes les valeurs, ausi la lettre U passera par les mêmes variations. Il ne s'agit donc, que de ranger les différentes valeurs de u=T selon leur ordre naturel.

§. 130. En second lieu il ne sera pas difficile de demontrer: *qu'ayant trouvé une formule directrice entre les lettres t et x, on en puisse toujours déduire une autre entre T et X en prennant T=x et X=t.* Car on voit par la troisième figure que l'indice horizontal u sera dans ce cas=v, et partant il ne s'agit que de démontrer que, pendant que les valeurs de u varient par tous les nombres depuis 1 jusqu'à 4, ausi celles de v subiront les mêmes changemens. Pressons pour cet effet une nouvelle figure, qui nous marque la somme des deux lettres u et v par les données t et x

		t			
		1	2	3	4
x	1	2	6	6	6
	2	6	2	6	6
	3	6	6	2	6
	4	6	6	6	2

d'où il est clair, que puisque les caractéristiques de u et de v se détruisent, on aura toujours $u + v = 2$, ou bien $u + v = 6$, dont le premier aura lieu toutes les fois que $u = 1$ ou bien $u = 4\lambda + 1$; dans tous les autres cas il y aura $u + v = 6$, ou bien $u + v = n + 6$.

§. 131. Developpons ces cas différens. — D'abord en prennant $u = 4\lambda + 1$ on aura $v = -4\lambda + 1$ ou bien, en y ajoutant n on aura $v = 4(m - \lambda) + 1$; d'où l'on voit que, pendant que la lettre u reçoit toutes les valeurs de la forme 1, la lettre v reçévra aussi toutes les valeurs. En second lieu, en prennant $u = 4\lambda + 2$ on aura $v = 4(m - \lambda) + 4$; ou bien v sera le complément de u à 6 ou à $n + 6$; donc pendant que u varie par toutes les valeurs de la forme 2, la lettre v passera par celles de la forme 4. Et si u passe par celles de la forme 3, v reçévra les valeurs de la même forme.

Enfin pendant que u prend toutes les valeurs de la forme 4, v prendra celles de la forme 2. D'où il est clair qu'en général, si u passe par toutes les variations, aussi $v = U$ les subit de même; par conséquent le renversement des formules directrices a lieu dans tous ces cas sans la moindre restriction.

§. 132. De cette double transformation de chaque formule directrice on peut déduire plusieures autres. Car étant parvenu aux valeurs $T = x$, $X = t$, $U = v$, en changeant suivant la première transformation les lettres T et U, on aura cette nouvelle transformée: $T = v$, $X = t$, $U = x$, et de la en changeant suivant l'autre transformation les lettres T et X on aura cette nouvelle: $T = t$, $X = v$, $U = u$; qui répond à celle que nous avons trouvé dans les sections précédentes par nôtre seconde regle.

§. 133. Quoique nous ayons trouvé encore d'autres transformations, il suffira de mettre en usage les deux, qui répondent à celles des autres sections; vu

vû que par la combinaiſon de ces deux regles on peut déduire de chaque directrice propoſée jusqu'à douze nouvelles. C'est pourquoi nous les mettrons ici devant les yeux: *Ayant une directrice quelconque, dans laquelle il repond à l'indice vertical t le terme x, en mettant pour la nouvelle directrice l'indice vertical T et le terme qui lui repond=X, on aura toujours*

par la première regle T=x et X=t

par la ſeconde regle T=t et X=v

où le nombre v doit être déterminé par la troiſième figure donnée ci-desſus, et que nous allons repêter ici, puisque c'est de cette ſeule forme que dépendent toutes les transformations qu'on voudra faire.

figure

Pour les valeurs de v

x \ t	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	4	1	2	3
3	3	4	1	2
4	2	3	4	1

§. 134. Après avoir trouvé toutes les directrices pour l'expoſant 1, ou du moins

moins une grande partie, il est clair, qu'en ajoutant à chaque terme d'une telle directrice ou 4, ou 8, ou 12, &c. on aura les directrices pour les expoſans 5, 9, 13, et ainſi de ſuite; et partant il ne reste qu'à faire voir, comment on peut trouver des directrices pour les expoſans 2, 3, 4, 6, 7, &c., à fin qu'on en puiſse tirer un ſystème entier de directrices, après quoi, comme on a vu jusqu'à préſent, il n'est plus difficile de conſtruire le quarré complet.

§. 135. Soit pour le terme x dans la directrice pour l'expoſant 1, l'indice horizontal=u. Dans la directrice pour l'expoſant 2 ſoit l'indice horizontal du terme x',=u'; Dans celle pour l'expoſant 3 ſoyent le terme=x'' et l'indice u'', et ainſi des autres x''' et u''', x^{iv} et u^{iv}, &c. Celà poſé le premier membre A nous montre les relations ſuivantes entre ces différentes valeurs de x

$$x = 1, 2, 3, 4,$$
$$x' = 2, 3, 4, 1,$$
$$x'' = 3, 4, 1, 2,$$
$$x''' = 4, 1, 2, 3,$$

Il faudra donc démontrer, que pendant que la lettre u varie par toutes les valeurs, ainsi les lettres u', u'', u''' subiront les mêmes variations.

§. 136. Considérons pour cet effet les figures tirées de la seconde donnée ci-dessus, qui exprime les valeurs de u par t et x; elles seront représentées de la manière suivante

Pour u

x \ t	1	2	3	4
1	1	4	3	2
2	2	1	4	3
3	3	2	1	4
4	4	3	2	1

Pour u'

x' \ t	1	2	3	4
2	2	1	4	3
3	3	2	1	4
4	4	3	2	1
1	1	4	3	2

Pour u''

x'' \ t	1	2	3	4
1	3	2	1	4
2	4	3	2	1
3	1	4	3	2
4	2	1	4	3

Pour u'''

x''' \ t	1	2	3	4
1	4	3	2	1
2	1	4	3	2
3	2	1	4	3
4	3	2	1	4

En comparant la seconde de ces figures avec la première, on voit qu'il y a partout $u'=u+1$, ou $u'=u-3$, dont le dernier a lieu lorsque $u=4$; dans tous

tous les autres cas il y a $u'=u+1$. Ensuite en comparant la troisième figure avec la première on aura ou $u''=u+2$ ou $u''=u-2$, dont le dernier cas a lieu lorsque $u'=3$ ou $=4$. Enfin la comparaison de la quatrième figure déclare, qu'on aura $u'''=u-3$ dans tous les cas, excepté celui de $u=1$, pour lequel il devient $u'''=u+3$. Il est donc décidé, qu'en donnant à u toutes les valeurs convenables, les lettres u', u'', u''' passeront par les mêmes variations.

§. 137. On voit donc clairement de quelle manière d'une directrice quelconque pour l'exposant 1, on peut former un système complet de directrices et un quarré complet. Mais de ce que nous avons dit dans les sections précédentes, on comprend aussi facilement, que pour former les directrices des exposans 2, 3, 4, on peut employer différentes directrices pour l'exposant 1, pourvu que leurs termes suivent le même ordre par rapport à la divisibilité par 4, ce qui est une source très féconde, qui multiplie considérablement le nombre de tous les quarrés complets par rapport à toutes les différentes

tes directrices trouvées pour l'exposant 1.

§. 138. Après ces recherches générales pour tous les quarrés divisibles par 4, nous allons considérer quelques cas particuliers. Or d'abord quand le quarré proposé ne contient qu'un seul membre A, qui est un quarré à simple marche, nous avons démontré dans la première section, qu'il n'est pas susceptible de directrices. C'est pourquoi nous nous bornerons à rapporter le cas de n=8, où le quarré renferme deux membres A et B, dont la forme est

1	2	3	4	5	6	7	8
2	3	4	1	6	7	8	5
3	4	1	2	7	8	5	6
4	1	2	3	8	5	6	7
5	6	7	8	1	2	3	4
6	7	8	5	2	3	4	1
7	8	5	6	3	4	1	2
8	5	6	7	4	1	2	3

Ce quarré fournira apparemment 48 directrices pour l'exposant 1 en l'examinant suivant les regles données ci-dessus: je vais en rapporter celles que j'ai trouvées par la première methode enseignée §. 11. et suiv. qui sont

1	3	7	5	8	4	2	6		1	4	7	6	8	4	2	5
1	3	7	5	4	8	6	2		1	4	7	6	2	5	8	3
1	3	8	6	4	2	5	7		1	4	8	7	3	5	6	2
1	3	8	6	7	5	2	4		1	4	8	7	3	2	6	5
1	3	5	7	8	4	2	6		1	4	5	8	6	3	2	7
1	3	5	7	2	8	6	4		1	4	5	8	2	7	6	3
1	3	6	8	7	5	4	2		1	4	6	5	8	7	3	2
1	3	6	8	2	4	5	7		1	4	6	5	3	2	8	7

des quelles on pourra trouver aisément le reste, en y appliquant les regles tant de fois repétées.

§. 139. Nous ne nous arreterons pas à developper les quarrés magiques que ce cas peut fournir, puisque tous les principes ont été suffisamment expliquées et démontrées; et les trois autres cas de la forme du premier membre A n'ayant plus la moindre difficulté, en les traitant de la même manière que la première forme, il seroit superflu de pousser plus loin ces recherches. Nous finirons donc cette section par la remarque: que le cas que nous venons d'y examiner ne sçauroit avoir lieu lorsque le nombre des membres A, B, C, &c. est 3, ou 5 ou peut être tout autre nombre impair quelconque.

Fin de la Section Quatrième.

SEC-