SECTION TROISIÈME.

Des Quarrés latins à triple marche de la formule générale.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	&c.
2	3	1	5	6	4	8	9	7	&c.
3	1	2	6	4	5	9	7	8	&c.
4	5	6	7	8	9	&c.			
&c.									

§. 96. Ici il est évident, que le nombre n doit être necesſairement divisible par 3; nous mettrons donc partout $n=3m$, où m marquera le nombre des membres, dont chaque colonne tant horizontale que verticale est composée. Ainsi le cas le plus simple sera celui, où $m=1$ ou bien $n=3$ et le quarré latin, contenant un seul membre du quarré général à triple marche:

1	2	3
2	3	1
3	1	2

dont la construction a été suffisamment expliquée au §. 18. de la section première.

§. 97.

§. 97. La première question qui se présente ici, c'est de sçavoir, si tous les cas de ce quarré à triple marche admettent toujours des formules directrices ou non? Or je dois d'abord remarquer, que lorsque le quarré est composé de deux membres, il ne sçauroit jamais admettre de directrices, de sorte que le cas de $n=6$ doit encore être exclu dans cette espèce de quarrés simples. Verité de laquelle on se pourroit convaincre par la methode ordinaire de chercher les directrices, mais qui acquerra un dégré d'autant plus haut de certitude, qu'on en peut donner une démonstration très rigoureuse tirée de principes tout à fait différens de ceux, par lesquels nous avons prouvé l'impossibilité des cas précédens, où le nombre n étoit impairement pair, et qui ne sçauroient être appliqués dans cette section à cause de la multiplicité des cas différens qu'on y seroit obligé de considerer.

§. 98. Pour rendre cette démonstration plus claire et plus facile, je marquerai le premier membre du quar-

ré proposé à triple marche, sçavoir $\begin{smallmatrix}1&2&3\\2&3&1\\3&1&2\end{smallmatrix}$ par la lettre A, qui comprendra donc trois bandes horizontales et autant de verticales et la lettre a me marquera chaque nombre contenu dans ce petit quarré, c'est à dire ou 1 ou 2 ou 3. De la même manière j'exprimerai le second membre du quarré, sçavoir : $\begin{smallmatrix}4&5&6\\5&6&4\\6&4&5\end{smallmatrix}$ par la lettre B, et chacun des nombres, qu'il contient par b. Cela posé le quarré latin de deux membres, c'est à dire pour le cas de n=6 pourra être repréſenté de cette facon : $\begin{smallmatrix}A&B\\B&A\end{smallmatrix}$ où chacune des bandes tant horizontales que verticales renferme trois termes.

§. 99. Maintenant j'obſerve, que ſi ce quarré admettoit une directrice, elle devroit contenir trois a et trois b, dont les uns ſeroient tirés de la première verticale A B et les autres de la ſeconde verticale B A. Or puisque tous les termes d'une directrice doivent être tirés de différentes bandes horizontales et de différentes verticales, chaque terme, qu'on met dans la directrice, exclud une bande horizontale et une autre verticale. Ainſi, quand on veut prendre tous les trois a de la première verticale, puisqu'ils ſeroient pris de la lettre A, la première horizontale ſeroit d'abord exclüe, de même que la première verticale, et partant les trois b dévroient être tirés de la ſeconde partie de la ſeconde verticale, c'est à dire du membre A, le ſeul restant et qui ne contient du tout de b. Suppoſons donc qu'on tire de la première bande verticale deux *a* et un *b* c'est à dire trois termes, et il faudra que l'autre en donne autant ſçavoir un *a* et deux *b*. Or les deux a étant pris du membre A de la première horizontale et le b du membre B de la ſeconde horizontale, il est clair, que le terme restant de la première horizontale ne peut être que b et ceux de la ſeconde a a, la première verticale étant exclüe. Au lieu des termes manquans *a b b* nous obtiendrions a a b. D'où l'on voit déjà aſsés clairement, qu'en tirant de la première verticale un a et deux b, il ſeroit pareillement impoſsible de déduire de la ſeconde les termes restant a a b. Par conſequent il est démontré que le cas n=6 n'admet point de directrices.

§. 100. Mais ſi, pour le cas n=9 ou m=3, nous marquons le troiſième membre du quarré général ſçavoir: $\begin{smallmatrix} 7 & 8 & 9 \\ 8 & 9 & 7 \\ 9 & 7 & 8 \end{smallmatrix}$ par la lettre C, et les trois nombres 7, 8, 9, qu'il contient par la lettre c, nous aurons à examiner le quarré $\begin{smallmatrix} A & B & C \\ B & C & A \\ C & A & B \end{smallmatrix}$ et la formule directrice, ſ'il y en a une, comprendra trois a, trois b et trois c. En prennant donc les trois a de la première verticale, la première verticale en ſera exclue et par conſequent on ne pourra prendre de la ſeconde verticale que les trois c, ce qui exclura la ſeconde horizontale, et parce qu'il reſte encore dans la troiſième verticale les trois b, on voit aiſément, que ce cas fournit des directrices: on en pourra même déduire par d'autres routes.

§. 101. En examinant de la même manière le cas de n=12 ou m=4 et deſignant le quatrième membre du quarré général $\begin{smallmatrix} 10 & 11 & 12 \\ 11 & 12 & 10 \\ 12 & 10 & 11 \end{smallmatrix}$ par la lettre D et les termes qu'il contient 10, 11, 12 par d, de ſorte que le quarré à examiner ſoit

$$\begin{matrix} A & B & C & D \\ B & C & D & A \\ C & D & A & B \\ D & A & B & C \end{matrix}$$

on

on verra, que de quelque manière qu'on tire les lettres minuſcules des bandes de ce quarré, il ne fournira jamais de directrices; et il ſemble qu'on puiſſe hardiment tirer la même concluſion pour tous les cas, où n est un nombre pair, de ſorte que cette ſection ne ſ'étend qu'aux multiples impairs de 3, comme 3, 9, 15, 21, &c.

§. 102. La belle démonſtration pour le cas de n=6 rapportée aux §. 98. et 99. m'engage à faire une digreſſion aux quarrés latins à quintuple marche, ou à ſeptuple ou à une autre marche quelconque en nombre impair, par rapport auxquels on pourra démontrer avec la même facilité, qu'aucun d'entre eux, qui ne renferme que deux membres, ne ſauroit jamais admettre de directrices. Car marquant pour le cas de n=10=2.5. les deux membres dont il eſt compoſé par A et B, et les cinq termes qu'ils contiennent par a et b, il ſ'agira de déduire du quarré $\begin{smallmatrix} A & B \\ B & A \end{smallmatrix}$ ou $\begin{smallmatrix} aaaaa & bbbbb \\ bbbbb & aaaaa \end{smallmatrix}$ une formule directrice, qui contienne, dans un ordre quelconque cinq *a* et cinq *b*.

§. 103. Donc ſi nous voulions prendre tous les cinq a de la première verticale, la première horizontale en ſeroit exclüe et il ne resteroit dans la ſeconde verticale que le terme A, qui ne renferme pas de *b*. En prennant de la première verticale quatre a et un b, la ſeconde verticale ne ſçauroit fournir qu'un b et quatre a; pendant qu'il nous faudroit un a et quatre b pour completter la directrice. Le même inconvenient ſe rencontre en tirant trois a et deux b de la première verticale; et au lieu des deux a et trois b qu'il nous faudroit encore, la ſeconde verticale ne fourniroit que deux b et trois a. D'où l'on voit, qu'il n'y a pas de directrices à en attendre, et la raiſon conſiste ouvertement en ce que le nombre des petites lettres est impair et il ſemble qu'on peut ſoutenir, que la même impoſsibilité ſubſiſte dans tous les cas, où le nombre des membres A, B, &c. est pair.

§. 104. Mais dans tous les cas, où le nombre des petites lettres est pair, cette impoſsibilité ceſſe entierement; Car ſuppoſons, qu'il ſ'agiſse d'un quarré à quadruple marche, qui renferme deux

deux membres A et B, dont chacun contienne ſa petite lettre a et b, quatreſois, ce qui ſeroit le cas de n=8; il faudra tirer du quarré $\frac{A\ B}{B\ A}$ une directrice, qui renferme, dans un ordre quelconque quatre a et quatre b, ce qui n'a pas la moindre difficulté. On n'a qu'à tirer de la première verticale deux a et deux b et puisque dans la ſeconde verticale le premier membre B fournit encore deux b et l'autre A deux a, la directrice ſera complette; Où l'on voit en même temps, que dans tous ces cas il faut toujours tirer de chaque colonne deux a et deux b; et ce raiſonnement a lieu pour tous les nombres pairs.

§. 105. Revenons à nôtre quarré à triple marche, et pour en chercher les directrices conſidérons un terme quelconque a, qui reponde à l'indice vertical t et à l'horizontal u, et en comparant ce terme à la ſomme de ſes indices t + u, on obſervera bientot, qu'il y a un double rapport entre eux; l'un: x=t + u−1 et l'autre: x=t + u−4, dont la différence dépend de la diviſibilité des nombres t et u par 3. Or ces nombres ſe reduiſent à trois espèces,

que

que nous pourrons repréſenter par $3\lambda+1$, $3\lambda+2$, $3\lambda+3$, ou bien ſimplement par 1, 2, 3 qui pourront également marquer les trois eſpèces. Enſuite à cauſe de l'ambiguité des Nombres 1 et 4 dans les deux expreſſions de x nous mettrons $x=t+u-w$. Cela poſé la table ſuivante ſervira à déterminer le rapport entre x et ſes indices et les valeurs de w pour toutes les eſpèces de la valeur de t et u.

ſi	t=	1	1	1	2	2	2	3	3	3
	u=	1	2	3	1	2	3	1	2	3
on aura	w=	1	1	1	1	1	4	1	4	4
	x=	1	2	3	2	3	1	3	1	2

d'où l'on voit qu'il y a $w=4$, quand l'un ou l'autre des indices t et u eſt 3 et ni l'un ni l'autre=1.

§. 106. Ayant donc trouvé $x=t+u-w$, on en tire reciproquement $u=x-t+w$, d'où l'on pourra trouver l'indice horizontal u de chaque terme x et de l'indice vertical, qui lui repond, et de-là on pourra aſſigner la vraye valeur de u pour toutes les valeurs de t et x, comme on peut voir par cette table:

ſi

ſi	x=	1	1	1	2	2	2	3	3	3
	t=	1	2	3	1	2	3	1	2	3
on aura	w=	1	4	4	1	1	4	1	1	1

Il y a conſéquemment trois cas, où $w=4$, que nous repréſenterons ſéparement enſorte

$w=4$ ſi

x=	1	1	2
t=	2	3	3

§. 107. Cette dernière tablette ſera d'un grand ſecours en examinant ſi une formule propoſée eſt directrice ou non. Car on n'a qu'à écrire cette formule, ou bien la ſérie de x et celle de t l'une ſous l'autre et à en déduire ſelon cette petite table les valeurs de u, et quand on les trouve toutes différentes entre elles, c'eſt une marque ſure, que la formule propoſée eſt effectivement directrice. Pour éclaircir cela par un exemple prennons

pour le cas n=9 cette progreſſion pour x: 1 3 5 7 9 2 4 6 8
et en lui ſouſcrivant la ſérie des t: 1 2 3 4 5 6 7 8 9
moyennant la regle rapportée

on aura u=1 2 6 4 5 9 7 8 3

qui, renfermant toutes les valeurs différentes, fait voir, que la progreſſion

arith-

arithmétique 1 3 5 7 9 2 4 6 8 est en effet directrice.

§. 108. Or ayant trouvé une seule directrice, on pourra, par des méthodes semblables à celles, dont nous avons fait usage dans les sections précédentes, en déduire un grand nombres d'autres formules également directrices. Car posant, que pour une nouvelle directrice le terme X reponde à l'indice vertical T et à l'indice horizontal U, puisque nous avions tantot $x=t+u-w$, on voit que les deux indices t et u sont permutables, de sorte que prennant T=u et U=t on aura X=x. Ainsi dans l'exemple précedent, ayant devant les yeux les valeurs de u on n'a qu'à les ranger dans leur ordre naturel et de souscrire à chacun son nombre x de cette maniere:

T=	1	2	3	4	5	6	7	8	9
X=	1	3	8	7	9	5	4	6	2

et cette formule sera surement une nouvelle directrice, puisque tous les U, étant les mêmes que les t, ont des valeurs différentes.

§. 109.

§. 109. On pourra aussi, comme dans les sections précédentes, échanger entre elles les deux lettres t et x, en prennant T=x et X=t, d'où l'on tirera, comme ci-dessus, une nouvelle directrice *renversée*. Ainsi la formule proposée ci-dessus 1 3 5 7 9 2 4 6 8 fournira par le renversement cette nouvelle directrice 1 6 2 7 3 8 4 9 5, et celle que nous avions tirée de la proposée par l'autre regle: 1 3 8 7 9 5 4 6 2 amène la suivante renversée: 1 9 2 7 6 8 4 3 5.

§. 110. Ayant en vertu de cette regle où T=x et X=t, pour U la formule $X-T+w=t-x+w$, puisque ces expressions varient par toutes les valeurs, pendant que t et x subsistent les variations necessaires, il s'en suit, que prennant T=t on pourra mettre $X=t-x+w$, et c'est en quoi consiste la seconde regle, qui ne differe de celles des sections précedentes que par rapport à la signification w, qui sera ici toujours=1, excepté les trois cas rapportés au §. 106. sçavoir $\begin{matrix} x \\ t \end{matrix}\Big|\begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix}\Big|\begin{matrix} 3 \\ 3 \end{matrix}$ pour lesquels il faut prendre w=4. Moyennant ces deux regles, dès qu'on aura trouvé quelques directrices par les

me-

methodes ordinaires, on en pourra déduire pluſieures autres.

§. 111. Mais ici on découvrira bientôt une grande variété dans les formules, qu'on veut transformer par ces regles. Il y en a qui demeurent inalterables par l'une et l'autre. Telle est 1 3 2 7 9 8 4 6 5, qui est la diagonale du quarré propoſé; elle ſe reproduit tant par la première que par la ſeconde de nos regles. Enſuite il y a auſſi des formules, qui par l'une ou l'autre de ces regles ne produiſent qu'une ſeule nouvelle directrice. Telle est par exemple la progreſſion arithmétique décroiſſante de l'unité 1 9 8 7 6 5 4 3 2, qui par la première regle ſe reproduit elle même, pendant que la ſeconde fournit celle-ci 1 6 5 7 3 2 4 9 8, qui ſe reproduit par le renverſement.

§. 112. Developpons la progreſſion arithmétique propoſée 1 3 5 7 9 2 4 6 8, qui à l'aide de nos deux regles fournit, comme on va voir, quatre nouvelles directrices

Pro-

Propoſée 1 3 5 7 9 2 4 6 8
Renverſée 1 9 2 7 3 8 4 6 5

1re regle 1 3 8 7 9 5 4 6 2
2de regle 1 6 8 7 3 5 4 9 2

Voila donc avec les précédentes ſept directrices pour le cas de n=9, qui ont toutes cette belle propriété, que leurs termes ſuivent le même ordre par rapport à leur diviſibilité par 3. Or il eſt facile d'en trouver encore d'autres qui à cet égard ſuivent la même loix, que nous allons mettre conjointement devant les yeux

1 3 8 7 9 5 4 6 2
1 3 5 7 9 2 4 6 8
1 6 2 7 3 8 4 9 5
1 6 5 7 3 2 4 9 8
1 6 8 7 3 5 4 9 2
1 9 2 7 6 8 4 3 5
1 9 5 7 6 2 4 9 8
1 9 8 7 6 5 4 3 2

dont nous avions trouvé toutes, excepté les deux ſuivantes:

1 6 8 7 3 5 4 9 2
1 9 5 7 6 2 4 9 8

qui se reproduisent l'une l'autre tant par la premiere que par la seconde regle. — Il est important d'avoir rapporté ces 9 formules, qui tiennent le même ordre par rapport aux termes divisibles par 3. Car nous verrons dans la suivante, que pour former un quarré magique complet on peut employer 2 et même 3 de semblables directrices pour les différens exposans a l'egard de nos trois especes de nombres; d'où l'on voit que ces neuf formules sont capables de produire un nombre prodigieux de quarrés differens.

§. 113. Mais il y a aussi quantité de directrices qui de cette manière fournissent jusqu'à une douzaine de nouvelles, comme on peut voir par la suivante choisie au hazard:

Proposée		1	8	6	7	9	2	5	4
Renversée		1	7	2	9	8	4	3	6
2de regle	2	1	5	2	8	7	9	4	6
	4	1	5	2	8	7	3	6	9
1re regle	4	1	4	2	8	3	9	6	5	7
	8	1	3	6	9	2	7	5	4	8
2de regle	2	1	8	2	9	6	7	5	4	3
	4	1	3	7	8	4	9	6	5	2
1re regle	2	1	3	9	8	7	5	6	2	4
	4	1	9	2	5	8	7	3	4	6
2de regle	2	1	3	4	9	8	2	5	7	6
	4	1	6	2	3	7	9	8	5	4

et partant douze, dont aucune ne nous a été connüe auparavant.

§. 114. Après ces regles, pour l'invention des directrices pour l'exposant 1, il reste encore à voir, comment il faut en déduire des directrices pour les autres exposans, ou bien, de quelle manière il faut construire les systèmes complets. Pour cet effet j'observe en général, qu'ayant trouvé pour un exposant quelconque a la directrice a b c d e &c. on en tirera, en vertu de la forme du quarré latin, la directrice pour l'exposant a + 3, en augmen-

tant chaque terme de la première de 3. Et en considérant avec attention la forme du quarré proposé on peut même soupçonner, que si un terme quelconque de la directrice proposée est de la forme $3\alpha + 1$, celui pour l'exposant 2 sera de la forme $3\alpha + 2$, et celui de l'exposant 3 de la forme $3\alpha + 3$. Ensuite, que si un terme de la proposée pour l'exposant 1 a la forme $3\alpha + 2$, le correspondant de la directrice pour l'exposant 2 aura la forme $3\alpha + 3$ et celui de l'exposant 3 la forme $3\alpha + 1$. Enfin que si le terme de la proposée est de la forme $3\alpha + 3$, celui de l'exposant 2 sera $3\alpha + 1$ et celui pour l'exposant 3 de la forme $3\alpha + 2$. Cette conjecture, qu'il sera bon de représenter pour plus de clarté dans la table suivante

forme du terme	Pour les exposans 1	2	3
$3\alpha+1$	$3\alpha+2$	$3\alpha+3$	$3\alpha+1$
$3\alpha+2$	$3\alpha+3$	$3\alpha+1$	$3\alpha+2$
$3\alpha+3$	$3\alpha+1$	$3\alpha+2$	$3\alpha+3$

peut même être rigoureusement démontrée de la manière suivante.

§. 115.

§. 115. Soit dans la directrice proposée pour l'exposant 1 un terme quelconque x, qui repond à l'indice vertical t et à l'indice horizontal u, en sorte que $u = x - t + w$. Soit ensuite, dans la directrice pour l'exposant 2, x' un terme qui repond au même indice vertical t mais à l'indice vertical u', en sorte que $u' = x' - t + w$. Enfin soit dans la directrice pour l'exposant 3 un terme x'' repondant au même indice vertical t et à l'indice horizontal $u'' = x'' - t + w$. Où il faut remarquer que les indices horizontaux u, u', u'' doivent être tirés de la même formule expliquée ci-dessus. Cela posé il faudra démontrer, que pendant que l'indice u varie par toutes les valeurs (et c'est en quoi consiste la nature des directrices) aussi les deux autres indices u' et u'' varient par toutes les valeurs. Or cela paroîtra clairement par la table ci-jointe, qui représente tous les cas possibles par rapport aux deux valeurs données t et x, où nous avons mis pour abréger $\alpha + \beta = \gamma$

N 3 $t =$

$t = 3\beta +$	1	2	3	1	2	3	1	2	3
$x = 3\alpha +$	1	2	3	2	3	1	3	1	2
$u = 3\alpha +$	1	1	1	2	2	2	3	3	3
$x' = 3\alpha +$	2	3	1	3	1	2	1	2	3
$u' = 3\gamma +$	2	2	2	3	3	3	1	1	1
$x'' = 3\alpha +$	3	1	2	1	2	3	2	3	1
$u'' = 3\gamma +$	3	3	3	1	1	1	2	2	2

De cette table il est evident, que toutes les fois que $u = 3\gamma + 1$, on aura $u' = 3\alpha + 2$ et $u'' = 3\gamma + 3$. De la même maniere, lorsque $u = 3\gamma + 2$, on aura $u' = 3\gamma + 3$ et $u'' = 3\gamma + 1$. Enfin lorsque $u = 3\gamma + 2$, on aura $u' = 3\gamma + 1$ et $u'' = 3\gamma + 2$. D'où l'on voit, que, puisque u varie par toutes les valeurs, ainsi tant les u' que les u'' doivent varier par toutes les valeurs et partant la regle donnée ci-dessus nous fournit de chaque directrice pour l'exposant 1 deux autres directrices pour les exposans 2 et 3, des quelles on peut former les directrices pour les exposans 4, 5, 6, en ajoutant 3 à chaque terme des trois premières, et celles pour les exposans 7, 8, 9, en faisant la même chose vis à vis des trois précédentes.

§. 116.

§. 116. De cette maniere la formation d'un système complet de directrices, d'une seule proposée pour l'exposant 1 du quarré latin fondamental n'aura plus la moindre difficulté. Reprenons, pour en donner un exemple, pour le cas $n = 9$, la directrice qui va en progression arithmétique 1 3 5 7 9 2 4 6 8 et le système complet sera:

1	3	5	7	9	2	4	6	8
2	1	6	8	7	3	5	4	9
3	2	4	9	8	1	6	5	7
4	6	8	1	3	5	7	9	2
5	4	9	2	1	6	8	7	3
6	5	7	3	2	4	9	8	1
7	9	2	4	6	8	1	3	5
8	7	3	5	4	9	2	1	6
9	8	1	6	5	7	3	2	4

et le quarré complet qui resulte de ce système aura la forme suivante:

1'	2'	3'	4'	5'	6'	7'	8'	9'
2''	3''	4''	5''	6''	4''	8''	9''	7''
3'	1'	2'	6'	4'	5'	9'	7'	8'
4'	5''	6''	7'	8'	9''	1''	2''	3'
5'	6''	4'	8''	9'	7'	2''	3''	1''
6''	4'	5'	9''	7'	8'	3''	1''	2'
7'	8''	9'	1'	2''	3'	4'	5'	6''
8'	9''	7''	2'	3'	1'	5'	6''	4'
9''	7'	8'	3''	1'	2'	6'	4'	5

§. 117. Dans ce quarré nous avons tiré les trois premières directrices pour les exposans 1, 2, 3, de la même formule. Mais on auroit pu employer des directrices différentes, pourvû que leurs termes suivissent le même ordre par rapport à la divisibilité par 3. Ayant donc rapporté ci-dessus neuf formules directrices differentes, qui suivent toutes la même loix, on en pourroit former 729 quarrés complets tous différens entre eux. Pour éclaircir cela par un exemple reprennons

pour l'exposant		la directrice								
1				1	3	5	7	9	2	4	6	8
2	celle-ci			1	3	8	7	9	5	4	6	2
3				1	6	8	7	3	5	4	9	2

et le système complet de directrices sera

1	3	5	7	9	2	4	6	8
2	1	9	8	7	6	5	4	3
3	5	7	9	2	4	6	8	1
4	6	8	1	3	5	7	9	2
5	4	3	2	1	9	8	7	6
6	8	1	3	5	7	9	2	4
7	9	2	4	6	8	1	3	5
8	7	6	5	4	3	2	1	9
9	2	4	6	8	1	3	5	7

d'où l'on construit le quarré complet que voici:

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	3	1	5	6	4	8	9	7
3	1	2	6	4	5	9	7	8
4	5	6	7	8	9	1	2	3
5	6	4	8	9	7	2	3	1
6	4	5	9	7	8	3	1	2
7	8	9	1	2	3	4	5	6
8	9	7	2	3	1	5	6	4
9	7	8	3	1	2	6	4	5

§. 118. Ici nous avons profité de la belle liaison qui se trouve parmi les neuf formules rapportées ci-dessus; mais en employant une autre formule directrice quelconque, il n'est pas difficile de découvrir toutes les autres formules, qui ont la même propriété par rapport à la divisibilité par 3. Prennons par exemple la directrice suivante choisie au hazard 1 3 8 6 7 9 2 5 4 et soucrivons à chaque terme en forme d'exposans tant la valeur de $u=x-t+w$, que les autres de la même espece de cette manière

$x=$	1	3	8	6	7	9	2	5	4
$u=$	1	2	9	3	8	4	5	7	6

et à preſent tout revient à tirer de là des formules ſimples, où non ſeulement tous les termes mêmes mais auſſi leurs expoſans ſont differens, tels ſont

$$\begin{array}{cccccccccc} 1^1 & 6^5 & 2^3 & 3^9 & 7^6 & 9^4 & 8^2 & 5^7 & 4^8 & 0 \\ 1^1 & 6^5 & 8^9 & 9^6 & 4^3 & 3^7 & 5^8 & 2^4 & 7^2 & \end{array}$$

d'où l'on peut déduire de formules nouvelles de la même eſpèce; qui, étant jointes à la propoſée, peuvent ſervir à conſtruire 37 nouveaux quarrés complets.

§. 119. Avant que de finir cette ſection j'ajouterai encore une demonſtration de la premiere regle du *renverſement*, ſuppoſée jusqu'ici gratuitement comme vraye. Cette demonſtration eſt d'autant plus neceſſaire, qu'il y a quantité de quarrés latins, où ce renverſement eſt réellement incapable de fournir de directrices. Il s'agit donc de faire voir, que lorsque le nombre u, qui eſt $=x-t+w$, varie par toutes les valeurs, pendant que t et x ſubiſſent les variations qui leur conviennent, auſſi cette formule $t-x+w$, que je nommerai v, reçoive auſſi toutes les valeurs differentes. — Pour cet effet il

il faut avoir égard à toutes les differentes eſpèces, que les deux nombres t et x peuvent renfermer, comme nous avons fait voir dans la démonſtration du Theoreme précedent (§. §. 114. et 115.) relativement aux directrices qui répondent aux expoſans 2 et 3 et comme cette table explique

$t=3\beta+$	1	2	3	1	2	3	1	2	3
$x=3\alpha+$	1	2	3	2	3	1	3	1	2
$u=3\gamma+$	1	1	1	2	2	2	3	3	3
$v=3\gamma+$	1	1	1	3	3	3	2	2	2

d'où il eſt clair, que, lorsque u eſt de la forme $3\gamma+1$, v ſera de la forme $-3\gamma+1$ et partant la ſomme ſera $=2$; c'eſt à dire, que dans ce cas $u=3\gamma+1$ le nombre v ſera le complément de n à 2 ou bien à $n+2$, n etant la racine du quarré dont il s'agit. Or dans les deux autres cas $u=3\gamma+2$ ou $u=3\gamma+3$ on aura $v=-3\gamma+3$ ou $v=-3\gamma+2$ et partant dans l'un ou l'autre $u+v=5$ ou bien $n+5$; c'eſt à dire que dans ces deux cas v eſt le complément de u à 5 ou bien de u à $n+5$. Il eſt donc décidé, qu'en faiſant varier u le nombre v paſera auſſi par toutes les valeurs.

leurs. Pour le cas, où n=9, écrivons les u dans leur ordre naturel

savoir u=1 2 3 4 5 6 7 8 9
et les v seront en vertu des regles v=1 3 2 7 9 8 4 6 5

d'où l'on voit plus évidemment, comment toutes les valeurs de v deviennent différentes par les variations de la lettre u.

Fin de la Section troisieme.

SEC-

SECTION QUATRIEME.

Des Quarrés latins à quadruple marche de la forme générale.

	1	2	3	4	5	6	7	8 &c.
	2	—	—	—	6	—	—	—
	3	—	—	—	7	—	—	—
	4	—	—	—	8	—	—	—
	5	6	7	8	9	10	11	12 &c.
	6	—	—	—	10	—	—	—
	7	—	—	—	11	—	—	—
	8	—	—	—	12	—	—	—
	&c.				&c.			

§. 120. Puisque, comme il est évident par la forme générale, cette section ne peut regarder que les quarrés, dont la racine n est divisible par 4, nous mettrons n=4 m et *m* marquera le nombre des membres, dont le quarré est composé, qui contiendront de chaque bande horizontale et verticale quatre ou bien en tout 16 termes. Donc si nous représentons de la maniere introduite au commencement de la section précédente, ces membres par les lettres A, B, C, &c. de sorte que

A=