

SECTION TROISIÈME.

Des Quarrés latins à triple marche
de la formule générale.

Salut &c.									
2	3	4	5	6	7	8	9	&c.	
2	3	1	5	6	4	8	9	7	&c.
3	1	2	6	4	5	9	7	8	&c.
4	5	6	7	8	9	&c.			
5	6	7	8	9					

§. 96. Ici il est évident, que le nombre n doit être nécessairement divisible par 3; nous mettrons donc partout $n=3m$, où m marquera le nombre des membres, dont chaque colonne tant horizontale que verticale est composée. Ainsi le cas le plus simple sera celui, où $m=1$ ou bien $n=3$ et le quarré latin, contenant un seul membre du quarré général à triple marche:

1	2	3		
2	3	1		
3	1	2		

dont la construction a été suffisamment expliquée au §. 18. de la section première.

§. 97.

§. 97. La première question qui se présente ici, c'est de scavoir, si tous les cas de ce quarré à triple marche admettent toujours des formules directrices ou non? Or je dois d'abord remarquer, que lorsque le quarré est composé de deux membres, il ne scauroit jamais admettre de directrices, de sorte que le cas de $n=6$ doit encore être exclu dans cette espèce de quarrés simples. Verité de laquelle on se pourroit convaincre par la méthode ordinaire de chercher les directrices, mais qui acquerra un degré d'autant plus haut de certitude, qu'on en peut donner une démonstration très rigoureuse tirée de principes tout à fait différens de ceux, par lesquels nous avons prouvé l'impossibilité des cas précédens, où le nombre n étoit impairement pair, et qui ne scauroient être appliqués dans cette section à cause de la multiplicité des cas différens qu'on y seroit obligé de considerer.

§. 98. Pour rendre cette démonstration plus claire et plus facile, je marquerai le premier membre du quarré

M 3

ré

ré proposé à triple marche, sçavoir par la lettre A, qui comprendra donc trois bandes horizontales et autant de verticales et la lettre a me marquera chaque nombre contenu dans ce petit quarré, c'est à dire ou 1 ou 2 ou 3. De la même manière j'exprimerai le second membre du quarré, sçavoir: par la lettre B, et chacun des nombres, qu'il contient par b. Cela posé le quarré latin de deux membres, c'est à dire pour le cas de $n=6$, pourra être représenté de cette façon: où chacune des bandes tant horizontales que verticales renferme trois termes.

§. 99. Maintenant j'observe, que si ce quarré admettoit une directrice, elle devroit contenir trois a et trois b, dont les uns seroient tirés de la première verticale A-B et les autres de la seconde verticale B-A. Or puisque tous les termes d'une directrice doivent être tirés de différentes bandes horizontales et de différentes verticales, chaque terme, qu'on met dans la directrice, exclut une bande horizontale et une autre

tre verticale. Ainsi, quand on veut prendre tous les trois a de la première verticale, puisqu'ils seroient pris de la lettre A, la première horizontale seroit d'abord exclue, de même que la première verticale, et partant les trois b dévroient être tirés de la seconde partie de la seconde verticale, c'est à dire du membre A, le seul restant et qui ne contient du tout de b. Supposons donc qu'on tire de la première bande verticale deux a et un b c'est à dire trois termes, et il faudra que l'autre en donne autant sçavoir un a et deux b. Or les deux a étant pris du membre A de la première horizontale et le b du membre B de la seconde horizontale, il est clair, que le terme restant de la première horizontale ne peut être que b et ceux de la seconde a, la première verticale étant exclue. Au lieu des termes manquans a b b nous obtiendrions a a b. D'où l'on voit déjà assés clairement, qu'en tirant de la première verticale un a et deux b, il seroit pareillement impossible de déduire de la seconde les termes restant a a b. Par consequent il est démontré que le cas $n=6$ n'admet point de directrices.

§. 100. Mais si, pour le cas $n=9$ ou $m=3$, nous marquons le troisième membre du quarré général sçavoir; $\begin{smallmatrix} 7 & 8 & 9 \\ 8 & 9 & 7 \\ 9 & 7 & 8 \end{smallmatrix}$ par la lettre C, et les trois nombres 7, 8, 9, qu'il contient par la lettre c, nous aurons à examiner le quarré $\begin{smallmatrix} A & B & C \\ B & C & A \\ C & A & B \end{smallmatrix}$ et la formule directrice, s'il y en a une, comprendra trois a, trois b et trois c. En prenant donc les trois a de la première verticale, la première verticale en sera exclue et par consequent on ne pourra prendre de la seconde verticale que les trois c, ce qui exclura la seconde horizontale, et parce qu'il reste encore dans la troisième verticale les trois b, on voit aisément, que ce cas fournit des directrices: on en pourra même déduire par d'autres routes.

§. 101. En examinant de la même manière le cas de $n=12$ ou $m=4$ et désignant le quatrième membre du quarré général $\begin{smallmatrix} 10 & 11 & 12 \\ 11 & 12 & 10 \\ 12 & 10 & 11 \end{smallmatrix}$ par la lettre D et les termes qu'il contient 10, 11, 12 par d, de sorte que le quarré à examiner soit

$$\begin{array}{cccc} A & B & C & D \\ B & C & D & A \\ C & D & A & B \\ D & A & B & C \end{array}$$

on

on verra, que de quelque manière qu'on tire les lettres minuscules des bandes de ce quarré, il ne fournira jamais de directrices; et il semble qu'on puisse hardiment tirer la même conclusion pour tous les cas, où n est un nombre pair, de sorte que cette section ne s'étend qu'aux multiples impairs de 3, comme 3, 9, 15, 21, &c.

§. 102. La belle démonstration pour le cas de $n=6$ rapportée aux §. 98. et 99. m'engage à faire une digression aux quarrés latins à quintuple marche, ou à septuple ou à une autre marche quelconque en nombre impair, par rapport auxquels on pourra démontrer avec la même facilité, qu'aucun d'entre eux, qui ne renferme que deux membres, ne fauroit jamais admettre de directrices. Car marquant pour le cas de $n=10=2 \cdot 5$, les deux membres dont il est composé par A et B, et les cinq termes qu'ils contiennent par a et b, il s'agira de déduire du quarré $\begin{smallmatrix} A & B \\ B & A \end{smallmatrix}$ ou $\begin{smallmatrix} a & a & a & a & a \\ b & b & b & b & b \end{smallmatrix}$ une formule directrice, qui contienne, dans un ordre quelconque cinq a et cinq b.

§. 103. Donc si nous voulions prendre tous les cinq a de la première verticale, la première horizontale en seroit exclue et il ne resteroit dans la seconde verticale que le terme A, qui ne renferme pas de b. En prennant de la première verticale quatre a et un b, la seconde verticale ne scauroit fournir qu'un b et quatre a; pendant qu'il nous faudroit un a et quatre b pour completer la directrice. Le même inconvenienc se rencontre en tirant trois a et deux b de la première verticale, et au lieu des deux a et trois b qu'il nous faudroit encore, la seconde verticale ne fourniroit que deux b et trois a. D'où l'on voit, qu'il n'y a pas de directrices à en attendre, et la raison consiste ouvertement en ce que le nombre des petites lettres est impair et il semble qu'on peut soutenir, que la même impossibilité subsiste dans tous les cas, où le nombre des membres A, B, &c. est pair.

§. 104. Mais dans tous les cas, où le nombre des petites lettres est pair, cette impossibilité cesse entierement; Car supposons, qu'il s'agisse d'un quartré à quadruple marche, qui renferme deux

deux membres A et B, dont chacun contienne sa petite lettre a et b, quatrois, ce qui feroit le cas de $n=8$; il faudra tirer du quartré A^B une directrice, qui renferme dans un ordre quelconque quatre a et quatre b, ce qui n'a pas la moindre difficulté. On n'a qu'à tirer de la première verticale deux a et deux b et puisque dans la seconde verticale le premier membre B fournit encore deux b et l'autre A deux a, la directrice sera complete; Où l'on voit en même temps, que dans tous ces cas il faut toujours tirer de chaque colonne deux a et deux b; et ce raisonnement a lieu pour tous les nombres pairs,

§. 105. Revenons à notre quartré à triple marche, et pour en chercher les directrices considérons un terme quelconque a, qui répond à l'indice vertical t et à l'horizontal u; et en comparant ce terme à la somme de ses indices $t+u$, on observera bientot, qu'il y a un double rapport entre eux; l'un: $x=t+u-1$ et l'autre: $x=t+u-4$, dont la différence dépend de la divisibilité des nombres t et u par 3. Or ces nombres se reduisent à trois espèces,

que

que nous pourrons représenter par $3^{\lambda} + 1, 3^{\lambda} + 2, 3^{\lambda} + 3$, ou bien simplement par 1, 2, 3 qui pourront également marquer les trois espèces. Ensuite à cause de l'ambiguité des Nombres 1 et 4 dans les deux expressions de x nous mettrons $x=t+u-w$. Cela posé la table suivante servira à déterminer le rapport entre x et ses indices et les valeurs de w pour toutes les espèces de la valeur de t et u .

si	$\left\{ \begin{array}{c ccccc ccc} t & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 3 & 3 & 3 \\ u & 1 & 2 & 3 & 1 & 2 & 3 & 1 & 2 & 3 \end{array} \right.$
on aura	$\left\{ \begin{array}{c cccccc} w & 1 & 1 & 1 & 1 & 4 & 1 & 4 \\ x & 1 & 2 & 3 & 2 & 3 & 1 & 3 \end{array} \right.$

d'où l'on voit qu'il y a $w=4$, quand l'un ou l'autre des indices t et u est 3 et ni l'un ni l'autre = 1.

§. 106. Ayant donc trouvé $x=t+u-w$, on en tire reciprocement $u=x-t+w$, d'où l'on pourra trouver l'indice horizontal u de chaque terme x et de l'indice vertical, qui lui répond, et de là on pourra assigner la vraie valeur de u pour toutes les valeurs de t et x , comme on peut voir par cette table:

fi

si	$\left\{ \begin{array}{c ccccc ccc} x & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 3 & 3 & 3 \\ t & 1 & 2 & 3 & 1 & 2 & 3 & 1 & 2 & 3 \end{array} \right.$
on aura	$w=1 \quad 4 \quad 4 \quad 1 \quad 4 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1$

Il y a conséquemment trois cas, où $w=4$, que nous représenterons séparément en sorte:

si	$\left\{ \begin{array}{c ccccc ccc} x & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 3 & 3 & 3 \\ t & 2 & 3 & 3 & 1 & 2 & 3 & 1 & 2 & 3 \end{array} \right.$
on aura	$w=4 \quad 1 \quad 1 \quad 4 \quad 1 \quad 4 \quad 4 \quad 4$

§. 107. Cette dernière tablette sera d'un grand secours en examinant si une formule proposée est directrice ou non. Car on n'a qu'à écrire cette formule, ou bien la série de x et celle de t l'une sous l'autre et à en déduire selon cette petite table les valeurs de u , et quand on les trouve toutes différentes entre elles, c'est une marque sûre, que la formule proposée est effectivement directrice. Pour éclaircir cela par un exemple prenons:

pour le cas n=9 cette progression pour: 1 3 5 7 9 2 4 6 8 et en lui soustrayant la série des termes 1 2 3 4 5 6 7 8 9 moyennant la règle rapportée on aura 1 2 6 4 5 9 7 8 3

qui, renfermant toutes les valeurs différentes, fait voir, que la progression arith-

arithmétique 1 3 5 7 9 2 4 6 8 est en effet directrice.

§. 108. Or ayant trouvé une seule directrice, on pourra, par des méthodes semblables à celles, dont nous avons fait usage dans les sections précédentes, en déduire un grand nombre d'autres formules également directrices. Car posant, que pour une nouvelle directrice le terme X réponde à l'indice vertical T et à l'indice horizontal U , puisque nous avons tantôt $x=t+u-w$, on voit que les deux indices t et u sont permutables, de sorte que prenant $T=u$ et $U=t$, on aura $X=x$. Ainsi dans l'exemple précédent, ayant devant les yeux les valeurs de u qu'on n'a qu'à les ranger dans leur ordre naturel et de souscrire à chacun son nombre x de cette manière

$$\begin{aligned} T &= f \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6 \ 7 \ 8 \ 9 \\ X &= 1 \ 3 \ 8 \ 7 \ 9 \ 5 \ 4 \ 6 \ 2 \end{aligned}$$

et cette formule sera sûrement une nouvelle directrice, puisque tous les U , étant les mêmes que les t , ont des valeurs différentes.

§. 109.

§. 109. On pourra aussi, comme dans les sections précédentes, échanger entre elles les deux lettres t et x , en prenant $T=x$ et $X=t$, d'où l'on tirera, comme ci-dessus, une nouvelle directrice renversée. Ainsi la formule proposée ci-dessus: 1 3 5 7 9 2 4 6 8 fournit par le renversement cette nouvelle directrice 1 6 2 7 3 8 4 9 5, et celle que nous avions tirée de la proposée par l'autre règle: 1 3 8 7 9 5 4 6 2 amène la suivante renversée: 1 9 2 7 6 8 4 3 5.

§. 110. Ayant en vertu de cette règle où $T=x$ et $X=t$, pour U la formule $X-T+w=t-x+w$, puisque ces expressions varient par toutes les valeurs, pendant que t et x subissent les variations nécessaires, il s'en suit, que prenant $T=t$ on pourra mettre $X=t-x+w$, et c'est en quoi consiste la seconde règle, qui ne diffère de celles des sections précédentes que par rapport à la signification auxquelles sera ici toujours = 1, excepté les trois cas rapportés au §. 106. Il convient pour lesquels il faut prendre $w=4$. Moyennant ces deux règles, dès qu'on aura trouvé quelques directrices par les

me-

méthodes ordinaires, on en pourra déduire plusieurs autres.

§. 111. Mais ici on découvrira bien-tôt une grande variété dans les formules, qu'on veut transformer par ces règles. Il y en a qui demeurent inaltérables par l'une et l'autre. Telle est : 1 3 2 7 9 8 4 6 5, qui est la diagonale du carré proposé ; elle se reproduit tant par la première que par la seconde de nos règles. Ensuite il y a aussi des formules, qui par l'une ou l'autre de ces règles ne produisent qu'une seule nouvelle directrice. Telle est par exemple la progression arithmétique décroissante de l'unité 1 9 8 7 6 5 4 3 2, qui par la première règle se reproduit elle-même, pendant que la seconde fournit celle-ci 1 6 5 7 3 2 4 9 8, qui se reproduit par le renversement.

§. 112. Développons la progression arithmétique proposée 1 3 5 7 9 2 4 6 8, qui à l'aide de nos deux règles fournit, comme on va voir, quatre nouvelles directrices.

Pro-

Voilà donc avec les précédentes sept directrices pour le cas de $n=9$, qui ont toutes cette belle propriété, que leurs termes suivent le même ordre par rapport à leur divisibilité par 3. Or il est facile d'en trouver encore d'autres qui à cet égard suivent la même loi, que nous allons mettre conjointement devant les yeux.

1	6	8	7	3	5	4	9	2
1	9	5	7	6	2	4	9	8
1	6	5	7	3	2	4	8	9
1	6	8	7	3	5	4	9	2
1	9	2	7	6	8	4	3	5
1	9	5	7	6	2	4	9	8
1	9	8	7	6	5	4	3	2

dont nous avions trouvé toutes, excepté les deux suivantes :

1	6	8	7	3	5	4	9	2
1	9	5	7	6	2	4	9	8

CIV^e DEEL.

N

qui

qui se reproduisent l'une l'autre tant par la première que par la seconde règle. — Il est important d'avoir rapporté ces 9 formules, qui tiennent le même ordre par rapport aux termes divisibles par 3. Car nous verrons dans la suivante, que pour former un carré magique complet on peut employer 2 et même 3 de semblables directrices pour les différents expolans à l'égard de nos trois espèces de nombres; d'où l'on voit que ces neuf formules sont capables de produire un nombre prodigieux de carrés différens.

S. 113. Mais il y a aussi quantité de directrices qui de cette manière fournissent jusqu'à une douzaine de nouvelles, comme on peut voir par la suivante choisie au hazard:

महाराष्ट्र विधान सभा

These checks further reduce the number of false alarms due to noise or clutter.

CC D E F G H I J K L M N O P Q R S T U V W X Y Z

tant chaque terme de la première de 3. Et en considérant avec attention la forme du quarré proposé on peut même soupçonner, que si un terme quelconque de la directrice proposée est de la forme $3^{\alpha} + 1$, celui pour l'exposant 2 sera de la forme $3^{\alpha} + 2$, et celui de l'exposant 3 de la forme $3^{\alpha} + 3$. Ensuite, que si un terme de la proposée pour l'exposant 1 a la forme $3^{\alpha} + 2$, le correspondant de la directrice pour l'exposant 2 aura la forme $3^{\alpha} + 3$ et celui de l'exposant 3 la forme $3^{\alpha} + 1$. Enfin que si le terme de la proposée est de la forme $3^{\alpha} + 3$, celui de l'exposant 2 sera $3^{\alpha+1}$ et celui pour l'exposant 3 de la forme $3^{\alpha} + 2$. Cette conjecture, qu'il sera bon de représenter pour plus de clarté dans la table suivante, nous a encouragé à étudier la directrice proposée pour l'exposant 3 qui a la forme $3^{\alpha} + 3$. Pour les exposants 1 et 2, nous avons mis au tableau ci-dessous les termes de la directrice proposée pour l'exposant 3. Il se démontre alors que ce tableau peut même être rigoureusement démontré de la manière suivante: si on suppose que $\beta = \gamma$, il suffit de montrer que si $\alpha = \beta$, alors $\gamma = \beta$.

§. 115.

§. 115. Soit dans la directrice proposée pour l'exposant 1 un terme quelconque x , qui répond à l'indice vertical t et à l'indice horizontal u , en sorte que $u = x - t + w$. Soit ensuite, dans la directrice pour l'exposant 2, x' un terme qui répond au même indice vertical t mais à l'indice vertical u' , en sorte que $u' = x - t + w$. Enfin soit dans la directrice pour l'exposant 3 un terme x'' répondant au même indice vertical t et à l'indice horizontal $u'' = x'' - t + w$. Où il faut remarquer que les indices horizontaux u, u', u'' doivent être tirés de la même formule expliquée ci-dessus. Cela posé il faut d'abord démontrer, qu'en pendant que l'indice u varie par toutes les valeurs (et c'est en quoi consiste la nature des directrices), aussi les deux autres indices u' et u'' varient par toutes les valeurs. Or cela paraîtra clairement par la table ci-jointe, qui représente tous les cas possibles par rapport aux deux valeurs données t et x , où nous avons mis pour abréger $\alpha + \beta = \gamma$. On voit que si $t = 0$, alors $u = x$, $u' = x - 1$, $u'' = x - 2$; et si $t = 1$, alors $u = x - 1$, $u' = x - 2$, $u'' = x - 3$; et si $t = 2$, alors $u = x - 2$, $u' = x - 3$, $u'' = x - 4$; et si $t = 3$, alors $u = x - 3$, $u' = x - 4$, $u'' = x - 5$; et si $t = 4$, alors $u = x - 4$, $u' = x - 5$, $u'' = x - 6$; et si $t = 5$, alors $u = x - 5$, $u' = x - 6$, $u'' = x - 7$; et si $t = 6$, alors $u = x - 6$, $u' = x - 7$, $u'' = x - 8$; et si $t = 7$, alors $u = x - 7$, $u' = x - 8$, $u'' = x - 9$; et si $t = 8$, alors $u = x - 8$, $u' = x - 9$, $u'' = x - 10$; et si $t = 9$, alors $u = x - 9$, $u' = x - 10$, $u'' = x - 11$; et si $t = 10$, alors $u = x - 10$, $u' = x - 11$, $u'' = x - 12$; et si $t = 11$, alors $u = x - 11$, $u' = x - 12$, $u'' = x - 13$; et si $t = 12$, alors $u = x - 12$, $u' = x - 13$, $u'' = x - 14$; et si $t = 13$, alors $u = x - 13$, $u' = x - 14$, $u'' = x - 15$; et si $t = 14$, alors $u = x - 14$, $u' = x - 15$, $u'' = x - 16$; et si $t = 15$, alors $u = x - 15$, $u' = x - 16$, $u'' = x - 17$; et si $t = 16$, alors $u = x - 16$, $u' = x - 17$, $u'' = x - 18$; et si $t = 17$, alors $u = x - 17$, $u' = x - 18$, $u'' = x - 19$; et si $t = 18$, alors $u = x - 18$, $u' = x - 19$, $u'' = x - 20$; et si $t = 19$, alors $u = x - 19$, $u' = x - 20$, $u'' = x - 21$; et si $t = 20$, alors $u = x - 20$, $u' = x - 21$, $u'' = x - 22$; et si $t = 21$, alors $u = x - 21$, $u' = x - 22$, $u'' = x - 23$; et si $t = 22$, alors $u = x - 22$, $u' = x - 23$, $u'' = x - 24$; et si $t = 23$, alors $u = x - 23$, $u' = x - 24$, $u'' = x - 25$; et si $t = 24$, alors $u = x - 24$, $u' = x - 25$, $u'' = x - 26$; et si $t = 25$, alors $u = x - 25$, $u' = x - 26$, $u'' = x - 27$; et si $t = 26$, alors $u = x - 26$, $u' = x - 27$, $u'' = x - 28$; et si $t = 27$, alors $u = x - 27$, $u' = x - 28$, $u'' = x - 29$; et si $t = 28$, alors $u = x - 28$, $u' = x - 29$, $u'' = x - 30$; et si $t = 29$, alors $u = x - 29$, $u' = x - 30$, $u'' = x - 31$; et si $t = 30$, alors $u = x - 30$, $u' = x - 31$, $u'' = x - 32$; et si $t = 31$, alors $u = x - 31$, $u' = x - 32$, $u'' = x - 33$; et si $t = 32$, alors $u = x - 32$, $u' = x - 33$, $u'' = x - 34$; et si $t = 33$, alors $u = x - 33$, $u' = x - 34$, $u'' = x - 35$; et si $t = 34$, alors $u = x - 34$, $u' = x - 35$, $u'' = x - 36$; et si $t = 35$, alors $u = x - 35$, $u' = x - 36$, $u'' = x - 37$; et si $t = 36$, alors $u = x - 36$, $u' = x - 37$, $u'' = x - 38$; et si $t = 37$, alors $u = x - 37$, $u' = x - 38$, $u'' = x - 39$; et si $t = 38$, alors $u = x - 38$, $u' = x - 39$, $u'' = x - 40$; et si $t = 39$, alors $u = x - 39$, $u' = x - 40$, $u'' = x - 41$; et si $t = 40$, alors $u = x - 40$, $u' = x - 41$, $u'' = x - 42$; et si $t = 41$, alors $u = x - 41$, $u' = x - 42$, $u'' = x - 43$; et si $t = 42$, alors $u = x - 42$, $u' = x - 43$, $u'' = x - 44$; et si $t = 43$, alors $u = x - 43$, $u' = x - 44$, $u'' = x - 45$; et si $t = 44$, alors $u = x - 44$, $u' = x - 45$, $u'' = x - 46$; et si $t = 45$, alors $u = x - 45$, $u' = x - 46$, $u'' = x - 47$; et si $t = 46$, alors $u = x - 46$, $u' = x - 47$, $u'' = x - 48$; et si $t = 47$, alors $u = x - 47$, $u' = x - 48$, $u'' = x - 49$; et si $t = 48$, alors $u = x - 48$, $u' = x - 49$, $u'' = x - 50$; et si $t = 49$, alors $u = x - 49$, $u' = x - 50$, $u'' = x - 51$; et si $t = 50$, alors $u = x - 50$, $u' = x - 51$, $u'' = x - 52$; et si $t = 51$, alors $u = x - 51$, $u' = x - 52$, $u'' = x - 53$; et si $t = 52$, alors $u = x - 52$, $u' = x - 53$, $u'' = x - 54$; et si $t = 53$, alors $u = x - 53$, $u' = x - 54$, $u'' = x - 55$; et si $t = 54$, alors $u = x - 54$, $u' = x - 55$, $u'' = x - 56$; et si $t = 55$, alors $u = x - 55$, $u' = x - 56$, $u'' = x - 57$; et si $t = 56$, alors $u = x - 56$, $u' = x - 57$, $u'' = x - 58$; et si $t = 57$, alors $u = x - 57$, $u' = x - 58$, $u'' = x - 59$; et si $t = 58$, alors $u = x - 58$, $u' = x - 59$, $u'' = x - 60$; et si $t = 59$, alors $u = x - 59$, $u' = x - 60$, $u'' = x - 61$; et si $t = 60$, alors $u = x - 60$, $u' = x - 61$, $u'' = x - 62$; et si $t = 61$, alors $u = x - 61$, $u' = x - 62$, $u'' = x - 63$; et si $t = 62$, alors $u = x - 62$, $u' = x - 63$, $u'' = x - 64$; et si $t = 63$, alors $u = x - 63$, $u' = x - 64$, $u'' = x - 65$; et si $t = 64$, alors $u = x - 64$, $u' = x - 65$, $u'' = x - 66$; et si $t = 65$, alors $u = x - 65$, $u' = x - 66$, $u'' = x - 67$; et si $t = 66$, alors $u = x - 66$, $u' = x - 67$, $u'' = x - 68$; et si $t = 67$, alors $u = x - 67$, $u' = x - 68$, $u'' = x - 69$; et si $t = 68$, alors $u = x - 68$, $u' = x - 69$, $u'' = x - 70$; et si $t = 69$, alors $u = x - 69$, $u' = x - 70$, $u'' = x - 71$; et si $t = 70$, alors $u = x - 70$, $u' = x - 71$, $u'' = x - 72$; et si $t = 71$, alors $u = x - 71$, $u' = x - 72$, $u'' = x - 73$; et si $t = 72$, alors $u = x - 72$, $u' = x - 73$, $u'' = x - 74$; et si $t = 73$, alors $u = x - 73$, $u' = x - 74$, $u'' = x - 75$; et si $t = 74$, alors $u = x - 74$, $u' = x - 75$, $u'' = x - 76$; et si $t = 75$, alors $u = x - 75$, $u' = x - 76$, $u'' = x - 77$; et si $t = 76$, alors $u = x - 76$, $u' = x - 77$, $u'' = x - 78$; et si $t = 77$, alors $u = x - 77$, $u' = x - 78$, $u'' = x - 79$; et si $t = 78$, alors $u = x - 78$, $u' = x - 79$, $u'' = x - 80$; et si $t = 79$, alors $u = x - 79$, $u' = x - 80$, $u'' = x - 81$; et si $t = 80$, alors $u = x - 80$, $u' = x - 81$, $u'' = x - 82$; et si $t = 81$, alors $u = x - 81$, $u' = x - 82$, $u'' = x - 83$; et si $t = 82$, alors $u = x - 82$, $u' = x - 83$, $u'' = x - 84$; et si $t = 83$, alors $u = x - 83$, $u' = x - 84$, $u'' = x - 85$; et si $t = 84$, alors $u = x - 84$, $u' = x - 85$, $u'' = x - 86$; et si $t = 85$, alors $u = x - 85$, $u' = x - 86$, $u'' = x - 87$; et si $t = 86$, alors $u = x - 86$, $u' = x - 87$, $u'' = x - 88$; et si $t = 87$, alors $u = x - 87$, $u' = x - 88$, $u'' = x - 89$; et si $t = 88$, alors $u = x - 88$, $u' = x - 89$, $u'' = x - 90$; et si $t = 89$, alors $u = x - 89$, $u' = x - 90$, $u'' = x - 91$; et si $t = 90$, alors $u = x - 90$, $u' = x - 91$, $u'' = x - 92$; et si $t = 91$, alors $u = x - 91$, $u' = x - 92$, $u'' = x - 93$; et si $t = 92$, alors $u = x - 92$, $u' = x - 93$, $u'' = x - 94$; et si $t = 93$, alors $u = x - 93$, $u' = x - 94$, $u'' = x - 95$; et si $t = 94$, alors $u = x - 94$, $u' = x - 95$, $u'' = x - 96$; et si $t = 95$, alors $u = x - 95$, $u' = x - 96$, $u'' = x - 97$; et si $t = 96$, alors $u = x - 96$, $u' = x - 97$, $u'' = x - 98$; et si $t = 97$, alors $u = x - 97$, $u' = x - 98$, $u'' = x - 99$; et si $t = 98$, alors $u = x - 98$, $u' = x - 99$, $u'' = x - 100$; et si $t = 99$, alors $u = x - 99$, $u' = x - 100$, $u'' = x - 101$; et si $t = 100$, alors $u = x - 100$, $u' = x - 101$, $u'' = x - 102$; et si $t = 101$, alors $u = x - 101$, $u' = x - 102$, $u'' = x - 103$; et si $t = 102$, alors $u = x - 102$, $u' = x - 103$, $u'' = x - 104$; et si $t = 103$, alors $u = x - 103$, $u' = x - 104$, $u'' = x - 105$; et si $t = 104$, alors $u = x - 104$, $u' = x - 105$, $u'' = x - 106$; et si $t = 105$, alors $u = x - 105$, $u' = x - 106$, $u'' = x - 107$; et si $t = 106$, alors $u = x - 106$, $u' = x - 107$, $u'' = x - 108$; et si $t = 107$, alors $u = x - 107$, $u' = x - 108$, $u'' = x - 109$; et si $t = 108$, alors $u = x - 108$, $u' = x - 109$, $u'' = x - 110$; et si $t = 109$, alors $u = x - 109$, $u' = x - 110$, $u'' = x - 111$; et si $t = 110$, alors $u = x - 110$, $u' = x - 111$, $u'' = x - 112$; et si $t = 111$, alors $u = x - 111$, $u' = x - 112$, $u'' = x - 113$; et si $t = 112$, alors $u = x - 112$, $u' = x - 113$, $u'' = x - 114$; et si $t = 113$, alors $u = x - 113$, $u' = x - 114$, $u'' = x - 115$; et si $t = 114$, alors $u = x - 114$, $u' = x - 115$, $u'' = x - 116$; et si $t = 115$, alors $u = x - 115$, $u' = x - 116$, $u'' = x - 117$; et si $t = 116$, alors $u = x - 116$, $u' = x - 117$, $u'' = x - 118$; et si $t = 117$, alors $u = x - 117$, $u' = x - 118$, $u'' = x - 119$; et si $t = 118$, alors $u = x - 118$, $u' = x - 119$, $u'' = x - 120$; et si $t = 119$, alors $u = x - 119$, $u' = x - 120$, $u'' = x - 121$; et si $t = 120$, alors $u = x - 120$, $u' = x - 121$, $u'' = x - 122$; et si $t = 121$, alors $u = x - 121$, $u' = x - 122$, $u'' = x - 123$; et si $t = 122$, alors $u = x - 122$, $u' = x - 123$, $u'' = x - 124$; et si $t = 123$, alors $u = x - 123$, $u' = x - 124$, $u'' = x - 125$; et si $t = 124$, alors $u = x - 124$, $u' = x - 125$, $u'' = x - 126$; et si $t = 125$, alors $u = x - 125$, $u' = x - 126$, $u'' = x - 127$; et si $t = 126$, alors $u = x - 126$, $u' = x - 127$, $u'' = x - 128$; et si $t = 127$, alors $u = x - 127$, $u' = x - 128$, $u'' = x - 129$; et si $t = 128$, alors $u = x - 128$, $u' = x - 129$, $u'' = x - 130$; et si $t = 129$, alors $u = x - 129$, $u' = x - 130$, $u'' = x - 131$; et si $t = 130$, alors $u = x - 130$, $u' = x - 131$, $u'' = x - 132$; et si $t = 131$, alors $u = x - 131$, $u' = x - 132$, $u'' = x - 133$; et si $t = 132$, alors $u = x - 132$, $u' = x - 133$, $u'' = x - 134$; et si $t = 133$, alors $u = x - 133$, $u' = x - 134$, $u'' = x - 135$; et si $t = 134$, alors $u = x - 134$, $u' = x - 135$, $u'' = x - 136$; et si $t = 135$, alors $u = x - 135$, $u' = x - 136$, $u'' = x - 137$; et si $t = 136$, alors $u = x - 136$, $u' = x - 137$, $u'' = x - 138$; et si $t = 137$, alors $u = x - 137$, $u' = x - 138$, $u'' = x - 139$; et si $t = 138$, alors $u = x - 138$, $u' = x - 139$, $u'' = x - 140$; et si $t = 139$, alors $u = x - 139$, $u' = x - 140$, $u'' = x - 141$; et si $t = 140$, alors $u = x - 140$, $u' = x - 141$, $u'' = x - 142$; et si $t = 141$, alors $u = x - 141$, $u' = x - 142$, $u'' = x - 143$; et si $t = 142$, alors $u = x - 142$, $u' = x - 143$, $u'' = x - 144$; et si $t = 143$, alors $u = x - 143$, $u' = x - 144$, $u'' = x - 145$; et si $t = 144$, alors $u = x - 144$, $u' = x - 145$, $u'' = x - 146$; et si $t = 145$, alors $u = x - 145$, $u' = x - 146$, $u'' = x - 147$; et si $t = 146$, alors $u = x - 146$, $u' = x - 147$, $u'' = x - 148$; et si $t = 147$, alors $u = x - 147$, $u' = x - 148$, $u'' = x - 149$; et si $t = 148$, alors $u = x - 148$, $u' = x - 149$, $u'' = x - 150$; et si $t = 149$, alors $u = x - 149$, $u' = x - 150$, $u'' = x - 151$; et si $t = 150$, alors $u = x - 150$, $u' = x - 151$, $u'' = x - 152$; et si $t = 151$, alors $u = x - 151$, $u' = x - 152$, $u'' = x - 153$; et si $t = 152$, alors $u = x - 152$, $u' = x - 153$, $u'' = x - 154$; et si $t = 153$, alors $u = x - 153$, $u' = x - 154$, $u'' = x - 155$; et si $t = 154$, alors $u = x - 154$, $u' = x - 155$, $u'' = x - 156$; et si $t = 155$, alors $u = x - 155$, $u' = x - 156$, $u'' = x - 157$; et si $t = 156$, alors $u = x - 156$, $u' = x - 157$, $u'' = x - 158$; et si $t = 157$, alors $u = x - 157$, $u' = x - 158$, $u'' = x - 159$; et si $t = 158$, alors $u = x - 158$, $u' = x - 159$, $u'' = x - 160$; et si $t = 159$, alors $u = x - 159$, $u' = x - 160$, $u'' = x - 161$; et si $t = 160$, alors $u = x - 160$, $u' = x - 161$, $u'' = x - 162$; et si $t = 161$, alors $u = x - 161$, $u' = x - 162$, $u'' = x - 163$; et si $t = 162$, alors $u = x - 162$, $u' = x - 163$, $u'' = x - 164$; et si $t = 163$, alors $u = x - 163$, $u' = x - 164$, $u'' = x - 165$; et si $t = 164$, alors $u = x - 164$, $u' = x - 165$, $u'' = x - 166$; et si $t = 165$, alors $u = x - 165$, $u' = x - 166$, $u'' = x - 167$; et si $t = 166$, alors $u = x - 166$, $u' = x - 167$, $u'' = x - 168$; et si $t = 167$, alors $u = x - 167$, $u' = x - 168$, $u'' = x - 169$; et si $t = 168$, alors $u = x - 168$, $u' = x - 169$, $u'' = x - 170$; et si $t = 169$, alors $u = x - 169$, $u' = x - 170$, $u'' = x - 171$; et si $t = 170$, alors $u = x - 170$, $u' = x - 171$, $u'' = x - 172$; et si $t = 171$, alors $u = x - 171$, $u' = x - 172$, $u'' = x - 173$; et si $t = 172$, alors $u = x - 172$, $u' = x - 173$, $u'' = x - 174$; et si $t = 173$, alors $u = x - 173$, $u' = x - 174$, $u'' = x - 175$; et si $t = 174$, alors $u = x - 174$, $u' = x - 175$, $u'' = x - 176$; et si $t = 175$, alors $u = x - 175$, $u' = x - 176$, $u'' = x - 177$; et si $t = 176$, alors $u = x - 176$, $u' = x - 177$, $u'' = x - 178$; et si $t = 177$, alors $u = x - 177$, $u' = x - 178$, $u'' = x - 179$; et si $t = 178$, alors $u = x - 178$, $u' = x - 179$, $u'' = x - 180$; et si $t = 179$, alors $u = x - 179$, $u' = x - 180$, $u'' = x - 181$; et si $t = 180$, alors $u = x - 180$, $u' = x - 181$, $u'' = x - 182$; et si $t = 181$, alors $u = x - 181$, $u' = x - 182$, $u'' = x - 183$; et si $t = 182$, alors $u = x - 182$, $u' = x - 183$, $u'' = x - 184$; et si $t = 183$, alors $u = x - 183$, $u' = x - 184$, $u'' = x - 185$; et si $t = 184$, alors $u = x - 184$, $u' = x - 185$, $u'' = x - 186$; et si $t = 185$, alors $u = x - 185$, $u' = x - 186$, $u'' = x - 187$; et si $t = 186$, alors $u = x - 186$, <

$t = 3\beta +$	1	2	3	1	2	3	1	2	3
$x = 3\alpha +$	1	2	3	2	3	1	3	1	2
$y = 3\gamma +$	1	2	3	1	2	3	1	2	3
$z = 3\epsilon +$	2	3	1	3	1	2	1	2	3
$u = 3\eta +$	2	2	2	3	3	3	2	2	2
$v = 3\delta +$	3	1	2	1	2	3	2	3	1
$w = 3\tau +$	3	1	2	1	2	3	2	3	1
$u = 3\eta + 2$	3	1	2	1	2	3	2	3	1
$v = 3\delta + 2$	1	3	3	1	1	1	2	2	2
$w = 3\tau + 2$	1	3	3	1	1	1	2	2	2

Dès cette table il est évident, que toutes les fois que $t = 3\beta + 1$, on aura $u = 3\alpha + 2$ et $v = 3\gamma + 3$. De la même manière, lorsque $t = 3\beta + 2$, on aura $u = 3\alpha + 3$ et $v = 3\gamma + 2$. Enfin lorsque $t = 3\beta + 3$, on attribuera $u = 3\alpha + 1$ et $v = 3\gamma + 2$. D'où l'on voit, que, puisque t varie par toutes les valeurs, aussi bien que les autres u et v doivent varier par toutes les valeurs et partant la règle donnée ci-dessus, nous fournit de chaque directrice pour l'exposant 1 deux autres directrices pour les exposants suivants 2 et 3, des quelles on peut former les directrices pour les exposants 4, 5, 6, en ajoutant 3 à chaque terme des trois premières, et celles pour les exposants 7, 8, 9, en faisant la même chose vis à vis des trois précédentes.

§. 116.

§. 116. De cette manière la formation d'un système complet de directrices, d'une seule proposée pour l'exposant 1 du quarré latin fondamental n'aura plus la moindre difficulté! Reprenons, pour en donner un exemple, pour le cas $n=9$, la directrice qui va en progression arithmétique 1 3 5 7 9 2 4 6 8 et le système complet sera:

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	3	4	5	6	7	8	9	1
3	1	2	6	4	5	9	7	8
4	5	6	7	8	3	1	2	3
5	6	4	8	9	7	2	3	1
6	4	5	2	9	7	8	1	3
7	8	9	1	3	4	5	6	7
8	9	7	2	3	1	5	6	4
9	7	8	3	1	2	6	4	5

N 4 §. 117.

6. 117. Dans ce quarré nous avons tiré les trois premières directrices pour les exposans 1, 2, 3, de la même formule. Mais on auroit pu employer des directrices différentes, pourvu que leurs termes suivissent le même ordre par rapport à la divisibilité par 3. Ayant donc rapporté ci-dessus neuf formules directrices différentes, qui suivent toutes la même loix, on en pourroit former 729 quarrés complets tous différens entre eux. Pour éclaircir cela par un exemple repprennons

et le système complet de directrices sera

d'où l'on construit le carré complet que voici:

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	3	1	5	6	4	8	9	7
3	1	2	6	4	5	9	7	8
4	5	6	7	8	9	1	2	3
5	6	4	8	9	7	2	3	1
6	4	5	3	9	7	8	3	1
7	8	9	1	2	3	4	5	6
8	9	7	5	2	3	1	5	4
9	7	8	3	1	2	6	4	5

S. 118. Ici nous avons profité de la belle liaison qui se trouve parmi les neuf formules rapportées ci-dessus ; mais en employant une autre formule directrice quelconque, il n'est pas difficile de découvrir toutes les autres formules, qui ont la même propriété par rapport à la divisibilité par 3. Prennons

par exemple la directrice suivante choisie au hazard 1 3 8 6 7 9 2 5 4 et soustrayons à chaque terme en forme d'explosifs tant la valeur de $u = x - t + w$, que les autres de la même espèce.

de cette manière ~~5~~¹ 2 3 4 5 6 7 8 9
231 ~~5~~¹ 2 3 4 5 6 7 8 9

150 W. 1st N.Y. 1st 8th 6th Grd 8th 2nd 5th 4th

11⁰ 2¹.3° 4³ 11¹ 5⁸ 7⁴
0⁶ 5⁶ 0⁵ 1² 8² 3⁴

N 5

1

et à présent tout revient à tirer de la des formules simples, où non seulement tous les termes mêmes mais aussi leurs exposants sont différents, tels sont

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & 6 & 2 & 3 & 7 & 9 & 8 & 5 & 4 \\ 1 & 5 & 8 & 9 & 4 & 3 & 1 & 5 & 2 \end{array}$$

d'où l'on peut déduire de formules nouvelles de la même espèce, qui, étant jointes à la proposée, peuvent servir à construire 27 nouveaux quarrés complets.

Ayant que de finir cette légation j'ajouteraï encore une démonstration de la première règle du *renversement*, supposée jusqu'ici gratuitement comme vraie. Cette démonstration est d'autant plus nécessaire, qu'il y a quantité de quarrés latins, où ce renversement est réellement incapable de fournir de directrices. Il s'agit donc de faire voir, que lorsque le nombre u , qui est $=x-t+w$, varie par toutes les valeurs, pendant que t et x subissent les variations qui leur conviennent, aussi cette formule $t-x+w$, que je nommerai v , reçoive aussi toutes les valeurs différentes. — Pour cet effet

il

il faut avoir égard à toutes les différentes espèces, que les deux nombres t et x peuvent renfermer, comme nous avons fait voir dans la démonstration du Théorème précédent (§. §. 114. et 115.) relativement aux directrices qui répondent aux exposants 2 et 3 et comme cette table explique.

$t=3\beta+$	1	2	3	1	2	3	1	2	3
$x=3\alpha+$	1	2	3	2	3	1	3	1	2
$u=3\gamma+$	1	1	1	2	2	2	3	3	3
$v=3\gamma+$	1	1	1	3	3	3	2	2	2

d'où il est clair, que, lorsque u est de la forme $3\gamma+1$, v sera de la forme $-3\gamma+1$ et partant la somme sera = 2; c'est à dire, que dans ce cas $u=3\gamma+1$ le nombre v sera le complément de n à 2 ou bien à $n+2$, n étant la racine du quarré dont il s'agit. Or dans les deux autres cas $u=3\gamma+2$ ou $u=3\gamma+3$ on aura $v=-3\gamma+3$ ou $v=-3\gamma+2$ et partant dans l'un ou l'autre $u+v=5$, ou bien $n+5$; c'est à dire que dans ces deux cas v est le complément de u à 5 ou bien de u à $n+5$. Il est donc décidé, qu'en faisant varier u le nombre v passera aussi par toutes les valeurs.

leurs. Pour le cas où $n=9$, écrivons les u dans leur ordre naturel.

Savoir et les v seront en vertu des regles v=132798405

d'où l'on voit plus évidemment, comment toutes les valeurs de v deviennent différentes par les variations de la lettre u .

Fin de la Section troisième

-SEC-

SECTION QUATRIÈME.

Des Quarrés latins à quadruple marche
de la forme générale.

жидкости ¹¹ и потягом ¹² II. — &c. — &c. — &c.

§. 120. Puisque, comme il est évident par la forme générale, cette section ne peut regarder que les quarrés, dont la racine n'est divisible par 4, nous mettrons $n=4$ et m marquera le nombre des membres, dont le carré est composé, qui contiendront de chaque bande horizontale et verticale quatre ou bien en tout 16 termes. Donc si nous représentons de la manière introduite au commencement de la section précédente, ces membres par les lettres A, B, C, &c., de sorte que

A-