

TRIGONOMETRIA SPHAERICA  
 VNIVERSA,  
 EX PRIMIS PRINCIPIIS BREVITER  
 ET  
 DILVCIDE DERIVATA.

Auctore  
 L. E V L E R O.

§. 1.

Tab. I. **P**ropositum fit triangulum sphaericum quodcunque, cuius anguli litteris maiusculis A, B, C, latera autem minusculis *a*, *b*, *c*, in figura adscriptis, designentur, ita vt iisdem litteris maiusculis eadem minusculae opponantur. Iam ex centro Sphaerae, cui litteram O tribuamus, per singulos angulos educantur rectae OC, O*a*, O*b*, quae in centro O angulum solidum constituent, cuius anguli plani metientur latera trianguli, eorum autem inclinationes mutuae angulos trianguli.

Fig. 8. §. 2. His praemissis capiatur OC ipsi radio Sphaerae aequalis = 1, vnde ad OC in vtroque plano CO*a* et CO*b* normaliter statuantur rectae Ca et C*b*; tum vero ex *b* ad Ca demittatur perpendicularum *bp*, quod simul ad

ad planum  $COa$  erit normale; praeterea vero ex  $p$  ad  $Oa$  normalis ducatur  $pq$ , ficque, ducta  $bq$ , ea etiam ad  $Oa$  erit normalis. Hoc modo tota figura, qua indigemus, erit constructa.

§. 3. Cum iam fit angulus  $COa$  lateri  $b$  aequalis, erit

$$Ca = \text{tang. } b \text{ et } Oa = \text{sec. } b = \frac{1}{\text{cof. } b}$$

Simili modo, ob angulum  $COb = a$ , erit

$$Cb = \text{tang. } a \text{ et } Ob = \text{sec. } a = \frac{1}{\text{cof. } a}$$

Porro autem, cum fit angulus

$$aOb = c \text{ et } Ob = \frac{1}{\text{cof. } a} \text{ erit}$$

$$bq = \frac{\text{fin. } c}{\text{cof. } a} \text{ et } Oq = \frac{\text{cof. } c}{\text{cof. } a}$$

Hinc pro reliquis figuræ lineis exprimendis, ob angulum

$$aCb = C, \text{ erit } bp = Cb \text{ fin. } C = \text{tang. } a \text{ fin. } C \text{ et}$$

$$Cp = Cb \text{ cof. } C = \text{tang. } a \text{ cof. } C,$$

unde porro colligitur

$$ap = Ca - Cp = \text{tang. } b - \text{tang. } a \text{ cof. } C,$$

et quia angulus  $CaO = 90^\circ - b$ , habebitur,

$$pq = ap \text{ cof. } b = \text{fin. } b - \text{tang. } a \text{ cof. } b \text{ cof. } C \text{ et}$$

$$aq = ap \text{ fin. } b = \frac{\text{fin. } b^2}{\text{cof. } b} - \text{tang. } a \text{ fin. } b \text{ cof. } C.$$

Quare, cum inuenerimus  $Oq = \frac{\text{cof. } c}{\text{cof. } a}$ , fiet

$$Oa = \frac{1}{\text{cof. } b} = \frac{\text{cof. } c}{\text{cof. } a} + \frac{\text{fin. } b^2}{\text{cof. } b} - \text{tang. } a \text{ fin. } b \text{ cof. } C,$$

ficque erit

$$\frac{\text{cof. } c}{\text{cof. } a} = \text{cof. } b + \text{tang. } a \text{ fin. } b \text{ cof. } C, \text{ siue}$$

$$\text{cof. } c = \text{cof. } a \text{ cof. } b + \text{fin. } a \text{ fin. } b \text{ cof. } C$$

§. 4. Cum iam angulus  $bq p$  praebeat inclinatio-  
nem plani  $a O b$  ad  $a O C$ , erit iste angulus  $bq p = A$ ,  
vnde ex triangulo  $b p q$  primo habebitur

$$\sin A = \frac{b p}{b q} = \frac{\sin. a \sin. C}{\sin. c}, \text{ siue } \frac{\sin. C}{\sin. c} = \frac{\sin. A}{\sin. a},$$

vnde iam sequitur, sinus angulorum nostri trianguli pro-  
portionales esse sinibus laterum oppositorum. Deinde ae-  
quatio

$$\cos. A = \frac{p q}{b q} = \frac{\cos. a \sin. b - \sin. a \cos. b \cos. C}{\sin. a},$$

cum binis praecedentibus coniuncta totam Doctrinam  
sphaericam complectitur, quod autem vberiore explicationem postulat, vnde singulas has tres aequationes magis  
euoluamus.

### Euolutio primae formulae.

$$\frac{\sin. C}{\sin. c} = \frac{\sin. A}{\sin. a}.$$

§. 5. Cum tam litteras maiusculas  $A, B, C$ , quam  
minusculas  $a, b, c$ , inter se permutare liceat, si modo iis-  
dem litteris maiusculis eadem minusculae oppositae relin-  
quantur, erit etiam  $\frac{\sin. C}{\sin. c} = \frac{\sin. B}{\sin. b}$ , sicque prodibit haec ter-  
gemina aequatio:

$$\frac{\sin. A}{\sin. B} = \frac{\sin. B}{\sin. c} = \frac{\sin. C}{\sin. a}.$$

Deinde etiam notasse iuuabit sequentes aequalitates:

$$\sin. A \sin. b = \sin. B \sin. a$$

$$\sin. A \sin. c = \sin. C \sin. a$$

$$\sin. B \sin. c = \sin. C \sin. b.$$

Euolu-

### Euolutio formulae.

$$\cos. A \sin. c = \cos. a \sin. b - \sin. a \cos. b \cos. C$$

§. 6. Quia  $\sin. A \sin. c = \sin. C \sin. a$ , dividatur huius aequationis membrum prius per  $\sin. A \sin. c$ , posterius vero per  $\sin. C \sin. a$ , atque obtinebitur

$$\cot. A = \frac{\cos. a \sin. c - \sin. a \cos. b \cos. C}{\sin. a \sin. c}$$

unde iam ex datis binis lateribus  $a$  et  $b$ , cum angulo intercepto  $C$ , angulus  $A$  reperiri potest; similique modo ex iisdem datis colligetur angulus  $B$  per hanc formulam, ex illa, literas  $A$ ,  $B$ ,  $a$ ,  $b$  permutando, derivatam:

$$\cot. B = \frac{\cos. b \sin. a - \cos. a \sin. b \cos. C}{\sin. b \sin. c}$$

§. 7. Si porro eiusdem, quam hic consideramus, formulae primum terminum per  $\frac{\sin. C}{\sin. c}$ , secundum per  $\frac{\sin. B}{\sin. b}$ , tertium vero per  $\frac{\sin. A}{\sin. a}$  multiplicemus, orietur ista aequatio memorabilis:

$$\cos. A \sin. C = \cos. a \sin. B - \cos. b \sin. A \cos. C,$$

$$\cos. a = \frac{\cos. A \sin. C + \sin. A \cos. C \cos. b}{\sin. B} \text{ et}$$

litteris  $B$  et  $C$ , item  $b$  et  $c$  inter se permutandis erit

$$\cos. a = \frac{\cos. A \sin. B + \sin. A \cos. B \cos. c}{\sin. C}, \text{ siue}$$

$$\cos. a \sin. C = \cos. A \sin. B + \sin. A \cos. B \cos. c$$

quae a proposita aliter non discrepat, nisi quod literae maiusculae et minusculae inter se permutentur, insuper vero omnes cosinus, negativae accipiantur.

§. 8. Quod si iam huius postremae aequationis primum membrum per  $\sin. a \sin. C$ , posterius per  $\sin. A \sin. c$

diuidamus, orietur haec aequatio:

$$\cot. a = \frac{\cos. A \sin. B + \sin. A \cos. B \cos. c}{\sin. A \sin. c},$$

quae inferuit lateri  $a$  inueniendo, ex datis duobus angulis  $A, B$ , cum latere intercepto  $c$ ; tum vero ex iisdem datis etiam latus  $b$  definietur hac aequatione:

$$\cot. b = \frac{\cos. B \sin. A + \sin. B \cos. A \cos. c}{\sin. B \sin. c}.$$

§. 9. Praeterea vero ex eadem formula proposita casus alias difficillimus, quo ex datis tribus angulis latera postulantur, eruitur. Cum enim sit

$$\cos. A \sin. c = \cos. a \sin. b - \sin. a \cos. b \cos. C,$$

erit simili modo, literis  $A$  et  $B$  permutatis,

$$\cos. B \sin. c = \cos. b \sin. a - \sin. b \cos. a \cos. C.$$

Si posterior, ducta in  $\cos. C$ , ad priorem addatur, prodibit ista aequatio:

$$\sin. c (\cos. A + \cos. B \cos. C) = \cos. a \sin. b \sin. C^2;$$

at vero ob  $\sin. b \sin. C = \sin. B \sin. c$ , aequatio illa inducet hanc formam:

$$\cos. A + \cos. B \cos. C = \cos. a \sin. B \sin. C;$$

sive

$$\cos. A = -\cos. B \cos. C + \sin. C \cos. a.$$

Permutatis igitur literis  $A$  et  $C$ , manente  $B$ , fiet

$$\cos. C = -\cos. B \cos. A + \sin. B \sin. A \cos. c,$$

quae ex nostra tertia formula:

$$\cos. c = \cos. a \cos. b - \sin. a \sin. b \cos. C$$

nascitur, si litterae maiusculae et minusculae inter se permulentur, omnes autem cosinus negative accipiantur.

Euolu-

## Euolutio formulae.

$$\cos. c = \cos. a \cos. b + \sin. a \sin. b \cos. C.$$

§. 10. Hic statim evidens est, hanc formulam duplicem usum praestare, alterum, quo ex datis lateribus  $a, b, c$  anguli sunt definiendi, quod fit ope huius formulae

$$\cos. C = \frac{\cos. c - \cos. a \cos. b}{\sin. a \sin. b},$$

alterum vero, quando ex binis lateribus  $a$  et  $b$ , cum angulo intercepto  $C$ , tertium latus  $c$  quaeritur, quod fit ope huius formulae:

$$\cos. c = \cos. a \cos. b + \sin. a \sin. b \cos. C.$$

§. 11. Nunc igitur hunc usum etiam ad angulos transferre poterimus, quoniam modo iuuenimus

$$\cos. C = -\cos. A \cos. B + \sin. A \sin. B \cos. c.$$

Hinc enim statim, si dentur duo anguli  $A, B$ , cum latere intercepto  $c$  determinatur tertius angulus  $C$ . Deinde vero, si dentur omnes tres anguli trianguli sphaerici, quodvis latus, veluti  $c$ , hoc modo definitur:

$$\cos. c = \frac{\cos. C + \cos. A \cos. B}{\sin. A \sin. B}$$

§. 12. Cum igitur tota Trigonometria Sphaerica tribus aequationibus supra inuentis innitatur, permutatio angulorum et laterum generaliter locum habet, si modo omnes cosinus negative accipiantur. In prima enim formula:

$$\frac{\sin. C}{\sin. c} = \frac{\sin. B}{\sin. b} = \frac{\sin. A}{\sin. a}$$

K 3

haec

haec permutabilitas per se est manifesta, quia nulli cosinus occurrunt, deinde ista permutabilitas pro ambabus reliquis formulis iam est euicta, unde sequens Theorema insigne nascitur:

### Theorema.

*Proposito quocunque triangulo sphaerico, cuius anguli sint A, B, C, et latera a, b, c, semper aliud triangulum analogum exhiberi potest, cuius anguli sint complementa laterum illius ad duos rectos, latera vero complementa angulorum ad duos rectos. Hoc enim modo omnes sinus manent iidem, omnes vero cosinus euadunt negatiui, ideoque etiam tangentibus et cotangentibus. Constat autem tale triangulum formari ex Polis trium laterum trianguli propositi.*

§ 13. Ad usum ergo practicum omnia praecepta sub quatuor formis repraesentari possunt, quarum binae adeo ita arte colligantur, ut altera ex altera formetur, dum litterae maiusculae et minusculae inter se permutantur, cosinibus negatiue sumtis, ita ut sufficiat duas tantum formas memoriae mandasse. Has igitur quatuor formas cum omnibus variationibus, quas transpositione litterarum recipere possunt, ante oculos exponamus.

### Forma prima.

§ 14. Haec forma duos inuoluit casus, quorum altero ex datis tribus lateribus quidam angulus, altero vero

vero ex datis duobus lateribus, cum angulo intercepto, tertium latus inuenitur.

$$\begin{array}{l} \text{cos. } A = \frac{\text{cos. } a - \text{cos. } b \text{ cos. } c}{\text{sin. } b \text{ sin. } c} \\ \text{cos. } B = \frac{\text{cos. } b - \text{cos. } a \text{ cos. } c}{\text{sin. } a \text{ sin. } c} \\ \text{cos. } C = \frac{\text{cos. } c - \text{cos. } a \text{ cos. } b}{\text{sin. } a \text{ sin. } b} \end{array} \left| \begin{array}{l} \text{cos. } a = \text{cos. } b \text{ cos. } c + \text{sin. } b \text{ sin. } c \text{ cos. } A \\ \text{cos. } b = \text{cos. } a \text{ cos. } c + \text{sin. } a \text{ sin. } c \text{ cos. } B \\ \text{cos. } c = \text{cos. } a \text{ cos. } b + \text{sin. } a \text{ sin. } b \text{ cos. } C \end{array} \right.$$

Forma secunda.

§. 15. Haec forma etiam duos casus continet, quorum altero ex datis tribus angulis aliquod latus, altero vero ex datis duobus angulis, cum latere intercepto, tertius angulus quaeritur:

$$\begin{array}{l} \text{cos. } a = \frac{\text{cos. } A + \text{cos. } B \text{ cos. } C}{\text{sin. } B \text{ sin. } C} \\ \text{cos. } b = \frac{\text{cos. } B + \text{cos. } A \text{ cos. } C}{\text{sin. } A \text{ sin. } C} \\ \text{cos. } c = \frac{\text{cos. } C + \text{cos. } A \text{ cos. } B}{\text{sin. } A \text{ sin. } B} \end{array} \left| \begin{array}{l} \text{cos. } A = -\text{cos. } B \text{ cos. } C + \text{sin. } B \text{ sin. } C \text{ cos. } a \\ \text{cos. } B = -\text{cos. } A \text{ cos. } C + \text{sin. } A \text{ sin. } C \text{ cos. } b \\ \text{cos. } C = -\text{cos. } A \text{ cos. } B + \text{sin. } A \text{ sin. } B \text{ cos. } c \end{array} \right.$$

Forma tertia.

§. 16. Haec forma eum casum complectitur, quo ex duobus lateribus, cum angulo intercepto, duo reliqui anguli determinantur, quae formulae cum suis variationibus ita se habebunt:

$$\begin{array}{l} \text{cot. } A = \frac{\text{cos. } a \text{ sin. } b - \text{sin. } a \text{ cos. } b \text{ cos. } C}{\text{sin. } a \text{ sin. } C} \\ \text{cot. } B = \frac{\text{cos. } b \text{ sin. } c - \text{sin. } b \text{ cos. } c \text{ cos. } A}{\text{sin. } b \text{ sin. } A} \\ \text{cot. } C = \frac{\text{cos. } c \text{ sin. } a - \text{sin. } c \text{ cos. } a \text{ cos. } B}{\text{sin. } c \text{ sin. } B} \end{array} \left| \begin{array}{l} \text{cot. } B = \frac{\text{sin. } a \text{ cos. } b - \text{cos. } a \text{ sin. } b \text{ cos. } C}{\text{sin. } b \text{ sin. } C} \\ \text{cot. } C = \frac{\text{sin. } b \text{ cos. } c - \text{cos. } b \text{ sin. } c \text{ cos. } A}{\text{sin. } a \text{ sin. } A} \\ \text{cot. } A = \frac{\text{sin. } c \text{ cos. } a - \text{cos. } c \text{ sin. } a \text{ cos. } B}{\text{sin. } a \text{ sin. } B} \end{array} \right.$$

Forma

### Forma quarta.

§. 17. Haec forma respicit casum, quo ex duobus angulis, cum laterè intercepto, bina reliqua latera definiuntur, quae formulae cum variationibus ita se habent:

$$\begin{array}{l} \cot. a = \frac{\cos. A \sin. B + \sin. A \cos. B \cos. c}{\sin. A \sin. c} \\ \cot. b = \frac{\cos. B \sin. C + \sin. B \cos. C \cos. a}{\sin. B \sin. a} \\ \cot. c = \frac{\cos. C \sin. A + \sin. C \cos. A \cos. b}{\sin. C \sin. b} \end{array} \left| \begin{array}{l} \cot. b = \frac{\sin. A \cos. B + \cos. A \sin. B \cos. c}{\sin. B \sin. c} \\ \cot. c = \frac{\sin. B \cos. C + \cos. B \sin. C \cos. a}{\sin. C \sin. a} \\ \cot. a = \frac{\sin. C \cos. A + \cos. C \sin. A \cos. b}{\sin. A \sin. b} \end{array} \right.$$

§. 18. Haec simplicitas eo magis est notatu digna, quod resolutio triangulorum rectangulorum adeo sex formulas a se inuicem prorsus diuersas requirat. Quod si enim angulus C fuerit rectus, ideoque c hypothenufa et a et b ambo catheti, sex formulae requisitae sunt sequentes:

$$\begin{array}{l} \cos. c = \cos. a \cos. b \\ \cos. c = \cot. A \cot. B \\ \sin. a = \sin. c \sin. A \text{ siue } \sin. b = \sin. c \sin. B \\ \tan. b = \tan. c \cos. A \text{ --- } \tan. a = \tan. c \cos. B \\ \tan. a = \tan. A \sin. b \text{ --- } \tan. b = \tan. B \sin. a \\ \cos. A = \cos. a \sin. B \text{ --- } \cos. B = \cos. b \sin. A \end{array}$$

quae formulae ex superioribus sponte deriuantur, posito  
 $\cos. C = 0$  et  $\sin. C = 1$ .

§. 19. Quo autem logarithmi in usum vocari queant, ex formis superioribus aliae eius indolis sunt deriuandae, quae ex factoribus consistunt, id quod per certas transformationes obtineri potest, quibus ad semisses tam angulo-

angulorum quam laterum deducimus. Has autem transformationes sequentibus modis succincte instituire licet.

### Transformatio prima.

§. 20. Haec transformatio ex primae formae hac formula:

$$\text{cof. } A = \frac{\text{cof. } a - \text{cof. } b \text{ cof. } c}{\sin. b \sin. c},$$

commodissime deriuatur. Hinc enim primo sequitur:

$$1 - \text{cof. } A = \frac{\text{cof. } (b - c) - \text{cof. } a}{\sin. b \sin. c}$$

$$1 + \text{cof. } A = \frac{\text{cof. } a - \text{cof. } (b + c)}{\sin. b \sin. c}.$$

Hinc cum sit

$$\frac{1 - \text{cof. } A}{1 + \text{cof. } A} = \text{tang. } \frac{1}{2} A^2, \text{ erit}$$

$$\text{tang. } \frac{1}{2} A^2 = \frac{\text{cof. } (b - c) - \text{cof. } a}{\text{cof. } a - \text{cof. } (b + c)},$$

constat autem esse

$$\text{cof. } p - \text{cof. } q = 2 \sin. \frac{q - p}{2} \sin. \frac{p + q}{2},$$

Vnde habebimus

$$\text{tang. } \frac{1}{2} A = \sqrt{\frac{\sin. \frac{a - b + c}{2} \sin. \frac{a + b - c}{2}}{\sin. \frac{b + c - a}{2} \sin. \frac{a + b + c}{2}}}.$$

### Transformatio secunda.

§. 21. Haec petitur ex formae prioris formula

$$\text{cof. } a = \frac{\text{cof. } A + \text{cof. } B \text{ cof. } C}{\sin. B \sin. C},$$

vnde deducitur

$$1 - \text{cof. } a = \frac{-\text{cof. } (B + C) - \text{cof. } A}{\sin. B \sin. C}$$

$$1 + \text{cof. } a = \frac{\text{cof. } A + \text{cof. } (B - C)}{\sin. B \sin. C},$$

ficque erit

$$\text{tang. } \frac{1}{2} a^2 = - \frac{\text{cof. } (B + C) + \text{cof. } A}{\text{cof. } (B - C) + \text{cof. } A}$$

Cum iam sit

$$\text{cof. } p + \text{cof. } q = 2 \text{ cof. } \frac{p-q}{2} \text{ cof. } \frac{p+q}{2}, \text{ erit}$$

$$\text{tang. } \frac{1}{2} a = \sqrt{\frac{-\text{cof. } \frac{B+C-A}{2} \text{ cof. } \frac{B+C+A}{2}}{\text{cof. } \frac{B+A-C}{2} \text{ cof. } \frac{A+C-B}{2}}}$$

### Transformatio tertia.

§. 22. Hanc transformationem etiam ex prima forma expedire licet, combinandis his duabus formulis:

$$\text{cof. } a - \text{cof. } b \text{ cof. } c = \text{fin. } b \text{ fin. } c \text{ cof. } A,$$

$$\text{cof. } b - \text{cof. } a \text{ cof. } c = \text{fin. } a \text{ fin. } c \text{ cof. } B;$$

quarum illa per hanc diuisa praebet,

$$\frac{\text{cof. } a - \text{cof. } b \text{ cof. } c}{\text{cof. } b - \text{cof. } a \text{ cof. } c} = \frac{\text{fin. } b \text{ cof. } A}{\text{fin. } a \text{ cof. } B} = \frac{\text{fin. } B \text{ cof. } A}{\text{fin. } A \text{ cof. } B}$$

Addatur vtrinqve vnitas, fietque

$$(\text{cof. } a + \text{cof. } b) (1 - \text{cof. } c) = \frac{\text{fin. } (A + B)}{\text{fin. } A \text{ cof. } B},$$

subtrahatur vtrinqve vnitas, prodibit

$$(\text{cof. } a - \text{cof. } b) (1 + \text{cof. } c) = \frac{\text{fin. } (B - A)}{\text{fin. } A \text{ cof. } B},$$

quae aequatio per priorem diuisa dat

$$\frac{\text{cof. } a - \text{cof. } b}{\text{cof. } a + \text{cof. } b} \cdot \text{cot. } \frac{1}{2} c^2 = \frac{\text{fin. } (B - A)}{\text{fin. } (B + A)}$$

Constat autem esse

$$\frac{\text{cof. } p - \text{cof. } q}{\text{cof. } p + \text{cof. } q} = \text{tang. } \frac{q+p}{2} \text{ tang. } \frac{q-p}{2},$$

vnde colligitur:

$$\text{tang. } \frac{b-a}{2} \cdot \text{tang. } \frac{b+a}{2} \cdot \text{cot. } \frac{1}{2} c^2 = \frac{\text{fin. } (B - A)}{\text{fin. } (B + A)}$$

§. 23. Iam in subsidium vocemus ex proprietate primaria hanc formulam:

$$\frac{\sin. b}{\sin. a} = \frac{\sin. B}{\sin. A}, \text{ vnde deducimus}$$

$$\frac{\sin. b - \sin. a}{\sin. b + \sin. a} = \frac{\sin. B - \sin. A}{\sin. B + \sin. A},$$

quae reducitur ad hanc formam:

$$\text{tang. } \frac{b-a}{2} \cot. \frac{b+a}{2} = \text{tang. } \frac{B-A}{2} \cot. \frac{B+A}{2}.$$

Quod si iam aequationem ante inuentam per hanc multiplicemus, prodibit ista:

$$\left( \text{tang. } \frac{b-a}{2} \right)^2 \cot. \frac{1}{2} c^2 = \frac{(\sin. \frac{B-A}{2})^2}{(\sin. \frac{B+A}{2})^2},$$

sive extracta radice

$$\text{tang. } \frac{b-a}{2} \cot. \frac{1}{2} c = \frac{\sin. \frac{B-A}{2}}{\sin. \frac{B+A}{2}}.$$

At vero prior formula per posteriorem diuisa dat

$$\text{tang. } \frac{b+a}{2} \cot. \frac{1}{2} c = \frac{\cot. \frac{B-A}{2}}{\cot. \frac{B+A}{2}}.$$

His igitur formulis resolvitur casus, quo dantur duo anguli A et B cum latere intercepto c, et quaeruntur ambo latera a et b, quod fit ope harum formularum:

$$\text{tang. } \frac{b-a}{2} = \text{tang. } \frac{1}{2} c \cdot \frac{\sin. \frac{B-A}{2}}{\sin. \frac{B+A}{2}}$$

$$\text{tang. } \frac{b+a}{2} = \text{tang. } \frac{1}{2} c \cdot \frac{\cot. \frac{B-A}{2}}{\cot. \frac{B+A}{2}}$$

### Transformatio quarta.

§. 24. Haec simili modo deducitur ex his formulis:

$$\begin{aligned} \cos. A + \cos. B \cos. C &= \sin. B \sin. C \cos. a \\ \cos. B + \cos. A \cos. C &= \sin. A \sin. C \cos. b \end{aligned}$$

quarum illa per hanc diuisa praebet

$$\frac{\cos. A + \cos. B \cos. C}{\cos. B + \cos. A \cos. C} = \frac{\sin. B \cos. a}{\sin. A \cos. b} = \frac{\sin. b \cos. a}{\sin. a \cos. b}$$

Vnde unitatem tam addendo quam subtrahendo sequentes nouae deriuantur aequationes:

$$\begin{aligned} (\cos. A + \cos. B) (1 + \cos. C) &= \frac{\sin. (a + b)}{\sin. a \cos. b} \\ (\cos. A - \cos. B) (1 - \cos. C) &= \frac{\sin. (b - a)}{\sin. a \cos. b} \end{aligned}$$

et diuidendo illam per hanc nanciscimur:

$$\begin{aligned} \frac{\cos. A + \cos. B}{\cos. A - \cos. B} \cot. \frac{1}{2} C &= \frac{\sin. (a + b)}{\sin. (b - a)}, \text{ siue} \\ \text{tang. } \frac{B - A}{2} \cdot \text{tang. } \frac{B + A}{2} &= \cot. \frac{1}{2} C \cdot \frac{\sin. (b - a)}{\sin. (b + a)} \end{aligned}$$

quae aequatio, multiplicata et diuisa per istam:

$$\text{tang. } \frac{B - A}{2} \cdot \cot. \frac{B + A}{2} = \text{tang. } \frac{b - a}{2} \cot. \frac{b + a}{2}$$

producit

$$\begin{aligned} \text{tang. } \frac{B - A}{2} &= \cot. \frac{1}{2} C \cdot \frac{\sin. \frac{b - a}{2}}{\sin. \frac{b + a}{2}} \\ \text{tang. } \frac{B + A}{2} &= \cot. \frac{1}{2} C \cdot \frac{\cos. \frac{b - a}{2}}{\cos. \frac{b + a}{2}} \end{aligned}$$

quae formulae valent pro casu, quo dantur duo latera cum angulo intercepto.

§ 25. Quoniam praecedentium formarum omnes variationes apposuimus, etiam hos quatuor casus cum omnibus

nibus variationibus conspectui exponamus.

$$\text{tang. } \frac{1}{2} A = \sqrt{\frac{\text{fin. } \frac{a+b-c}{2} \text{ fin. } \frac{a+c-b}{2}}{\text{fin. } \frac{b+c-a}{2} \text{ fin. } \frac{a+b+c}{2}}}$$

$$\text{tang. } \frac{1}{2} B = \sqrt{\frac{\text{fin. } \frac{b+c-a}{2} \text{ fin. } \frac{a+b-c}{2}}{\text{fin. } \frac{a+c-b}{2} \text{ fin. } \frac{a+b+c}{2}}}$$

$$\text{tang. } \frac{1}{2} C = \sqrt{\frac{\text{fin. } \frac{a+c-b}{2} \text{ fin. } \frac{b+c-a}{2}}{\text{fin. } \frac{a+b-c}{2} \text{ fin. } \frac{a+b+c}{2}}}$$

$$\text{tang. } \frac{1}{2} a = \sqrt{\frac{-\text{cof. } \frac{B+C-A}{2} \text{ cof. } \frac{A+B+C}{2}}{\text{cof. } \frac{A+B-C}{2} \text{ cof. } \frac{A+C-B}{2}}}$$

$$\text{tang. } \frac{1}{2} b = \sqrt{\frac{-\text{cof. } \frac{A+C-B}{2} \text{ cof. } \frac{A+B+C}{2}}{\text{cof. } \frac{B+C-A}{2} \text{ cof. } \frac{A+B-C}{2}}}$$

$$\text{tang. } \frac{1}{2} c = \sqrt{\frac{-\text{cof. } \frac{A+B-C}{2} \text{ cof. } \frac{A+B+C}{2}}{\text{cof. } \frac{A+C-B}{2} \text{ cof. } \frac{B+C-A}{2}}}$$

$$\text{tang. } \frac{b-a}{2} = \text{tang. } \frac{1}{2} c \frac{\text{fin. } \frac{B-A}{2}}{\text{fin. } \frac{B+A}{2}} \quad \text{tang. } \frac{b+a}{2} = \text{tang. } \frac{1}{2} c \frac{\text{cof. } \frac{B-A}{2}}{\text{cof. } \frac{B+A}{2}}$$

$$\text{tang. } \frac{c-b}{2} = \text{tang. } \frac{1}{2} a \frac{\text{fin. } \frac{C-B}{2}}{\text{fin. } \frac{C+B}{2}} \quad \text{tang. } \frac{c+b}{2} = \text{tang. } \frac{1}{2} a \frac{\text{cof. } \frac{C-B}{2}}{\text{cof. } \frac{C+B}{2}}$$

$$\text{tang. } \frac{a-c}{2} = \text{tang. } \frac{1}{2} b \frac{\text{fin. } \frac{A-C}{2}}{\text{fin. } \frac{A+C}{2}} \quad \text{tang. } \frac{a+c}{2} = \text{tang. } \frac{1}{2} b \frac{\text{cof. } \frac{A-C}{2}}{\text{cof. } \frac{A+C}{2}}$$

$$\text{tang. } \frac{B-A}{2} = \text{cot. } \frac{1}{2} C \frac{\text{fin. } \frac{B-A}{2}}{\text{fin. } \frac{B+A}{2}} \quad \text{tang. } \frac{B+A}{2} = \text{cot. } \frac{1}{2} C \frac{\text{cof. } \frac{B-A}{2}}{\text{cof. } \frac{B+A}{2}}$$

$$\text{tang. } \frac{C-B}{2} = \text{cot. } \frac{1}{2} A \frac{\text{fin. } \frac{C-B}{2}}{\text{fin. } \frac{C+B}{2}} \quad \text{tang. } \frac{C+B}{2} = \text{cot. } \frac{1}{2} A \frac{\text{cof. } \frac{C-B}{2}}{\text{cof. } \frac{C+B}{2}}$$

$$\text{tang. } \frac{A-C}{2} = \text{cot. } \frac{1}{2} B \frac{\text{fin. } \frac{A-C}{2}}{\text{fin. } \frac{A+C}{2}} \quad \text{tang. } \frac{A+C}{2} = \text{cot. } \frac{1}{2} B \frac{\text{cof. } \frac{A-C}{2}}{\text{cof. } \frac{A+C}{2}}$$

L 3

§. 26.

§. 26. Ex his postremis formulis iam facile expeditur casus, quem nondum attigimus, quo dantur duo latera cum angulis oppositis, et vel tertium latus vel tertius angulus quaeritur, quorum utrumque duplici modo fieri potest. Has ergo formulas cum variationibus apponamus.

$\text{tang. } \frac{1}{2} c = \text{tang. } \frac{b-a}{2} \frac{\text{fin. } \frac{B+A}{2}}{\text{fin. } \frac{B-A}{2}}$	$\text{tang. } \frac{1}{2} c = \text{tang. } \frac{b+a}{2} \frac{\text{cof. } \frac{B+A}{2}}{\text{cof. } \frac{B-A}{2}}$						
$\text{tang. } \frac{1}{2} a = \text{tang. } \frac{c-b}{2} \frac{\text{fin. } \frac{C+B}{2}}{\text{fin. } \frac{C-B}{2}}$	$\text{tang. } \frac{1}{2} a = \text{tang. } \frac{c+b}{2} \frac{\text{cof. } \frac{C+B}{2}}{\text{cof. } \frac{C-B}{2}}$						
$\text{tang. } \frac{1}{2} b = \text{tang. } \frac{a-c}{2} \frac{\text{fin. } \frac{A+C}{2}}{\text{fin. } \frac{A-C}{2}}$	$\text{tang. } \frac{1}{2} b = \text{tang. } \frac{a+c}{2} \frac{\text{cof. } \frac{A+C}{2}}{\text{cof. } \frac{A-C}{2}}$						
<table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="width: 50%; padding: 5px;"> <math display="block">\text{cot. } \frac{1}{2} C = \text{tang. } \frac{B-A}{2} \frac{\text{fin. } \frac{b+a}{2}}{\text{fin. } \frac{b-a}{2}}</math> </td> <td style="width: 50%; padding: 5px;"> <math display="block">\text{cot. } \frac{1}{2} C = \text{tang. } \frac{B+A}{2} \frac{\text{cof. } \frac{b+a}{2}}{\text{cof. } \frac{b-a}{2}}</math> </td> </tr> <tr> <td style="padding: 5px;"> <math display="block">\text{cot. } \frac{1}{2} A = \text{tang. } \frac{C-B}{2} \frac{\text{fin. } \frac{c+b}{2}}{\text{fin. } \frac{c-b}{2}}</math> </td> <td style="padding: 5px;"> <math display="block">\text{cot. } \frac{1}{2} A = \text{tang. } \frac{C+B}{2} \frac{\text{cof. } \frac{c+b}{2}}{\text{cof. } \frac{c-b}{2}}</math> </td> </tr> <tr> <td style="padding: 5px;"> <math display="block">\text{cot. } \frac{1}{2} B = \text{tang. } \frac{A-C}{2} \frac{\text{fin. } \frac{a+c}{2}}{\text{fin. } \frac{a-c}{2}}</math> </td> <td style="padding: 5px;"> <math display="block">\text{cot. } \frac{1}{2} B = \text{tang. } \frac{A+C}{2} \frac{\text{cof. } \frac{a+c}{2}}{\text{cof. } \frac{a-c}{2}}</math> </td> </tr> </table>		$\text{cot. } \frac{1}{2} C = \text{tang. } \frac{B-A}{2} \frac{\text{fin. } \frac{b+a}{2}}{\text{fin. } \frac{b-a}{2}}$	$\text{cot. } \frac{1}{2} C = \text{tang. } \frac{B+A}{2} \frac{\text{cof. } \frac{b+a}{2}}{\text{cof. } \frac{b-a}{2}}$	$\text{cot. } \frac{1}{2} A = \text{tang. } \frac{C-B}{2} \frac{\text{fin. } \frac{c+b}{2}}{\text{fin. } \frac{c-b}{2}}$	$\text{cot. } \frac{1}{2} A = \text{tang. } \frac{C+B}{2} \frac{\text{cof. } \frac{c+b}{2}}{\text{cof. } \frac{c-b}{2}}$	$\text{cot. } \frac{1}{2} B = \text{tang. } \frac{A-C}{2} \frac{\text{fin. } \frac{a+c}{2}}{\text{fin. } \frac{a-c}{2}}$	$\text{cot. } \frac{1}{2} B = \text{tang. } \frac{A+C}{2} \frac{\text{cof. } \frac{a+c}{2}}{\text{cof. } \frac{a-c}{2}}$
$\text{cot. } \frac{1}{2} C = \text{tang. } \frac{B-A}{2} \frac{\text{fin. } \frac{b+a}{2}}{\text{fin. } \frac{b-a}{2}}$	$\text{cot. } \frac{1}{2} C = \text{tang. } \frac{B+A}{2} \frac{\text{cof. } \frac{b+a}{2}}{\text{cof. } \frac{b-a}{2}}$						
$\text{cot. } \frac{1}{2} A = \text{tang. } \frac{C-B}{2} \frac{\text{fin. } \frac{c+b}{2}}{\text{fin. } \frac{c-b}{2}}$	$\text{cot. } \frac{1}{2} A = \text{tang. } \frac{C+B}{2} \frac{\text{cof. } \frac{c+b}{2}}{\text{cof. } \frac{c-b}{2}}$						
$\text{cot. } \frac{1}{2} B = \text{tang. } \frac{A-C}{2} \frac{\text{fin. } \frac{a+c}{2}}{\text{fin. } \frac{a-c}{2}}$	$\text{cot. } \frac{1}{2} B = \text{tang. } \frac{A+C}{2} \frac{\text{cof. } \frac{a+c}{2}}{\text{cof. } \frac{a-c}{2}}$						

Hoc igitur modo praefens tractatio tanquam systema completum totius Trigonometriae sphaericae spectari potest.