Extraits de différentes Lettres de M. Euler à M. le Marquis de Condorcet.

L'INTÉGRALE de cette formule, $\frac{x^m - x^n}{lx} \cdot \frac{\partial x}{n}$, prise depuis $x = 0$ jusqu'à $x = 1$, est $= l\,\frac{m}{n}$. $\frac{3}{14}$ Nov. 1775.

L'intégrale de cette formule $\frac{x^{m-1}\partial x}{(1+x^n)\,lx}$, prise depuis $x = 0$ jusqu'à $x = \infty$ est $= l \,.\, \text{tang.}\, \frac{m\pi}{n}$, où π marque l'angle de 180 degrés.

Démonstration des deux Théorèmes précédens.

SOIT Q une fonction quelconque des deux variables x & y, & qu'on cherche la quantité Z, telle que $\left(\frac{\partial\partial Z}{\partial x \partial y}\right) = Q$, où il s'agit d'une double intégration; l'une où la seule x est prise pour variable, & l'autre où la seule y varie; la première devra être étendue depuis $x = 0$ jusqu'à $x = 1$, & l'autre depuis $y = 0$ jusqu'à $y = n$: par la nature de telles formules, on aura donc d'une double manière ou $Z = \int\partial x \int Q \partial y$, ou $Z = \int \partial y \int Q \partial x$. Maintenant, qu'on suppose $Q = x^y$, & on aura $\int Q \partial y = \frac{x^y}{lx} - \frac{1}{lx}$, afin que cette intégrale évanouisse lorsque $y = 0$. Soit donc à présent $y = n$, & nous aurons $\int Q \partial y = \frac{x^n - 1}{lx}$, & partant $Z = \int \frac{(x^n - 1)\partial x}{lx}$; ensuite nous aurons $\int Q \partial x = \frac{x^{y+1}}{y+1}$, qui évanouit lorsque $x = 0$; posant donc $x = 1$, il en résulte $\int Q \partial x = \frac{1}{y+1}$, & de-là, $Z = \int \frac{\partial y}{y+1} = l(y+1)$, (expression qui disparoît lorsque $x = 0$). Qu'on fasse donc $y = n$, & l'on aura $Z = l(n+1)$; par conséquent, il est 2 Fév. 1776.

certain que cette intégrale $\int \frac{\partial x (x^n - 1)}{l\, x}$, prise depuis $x = 0$ jusqu'à $x = 1$, est $l(n + 1)$.

Pour l'autre formule intégrale plus compliquée que je vous avois communiquée, j'avois supposé $Q = \frac{x^{m-y} + x^{m+y}}{(1 + x^{2m})x}$; de-là, prenant d'abord x constante à cause de

$$\int x^{m-y} \partial y = - \frac{x^{m-y}}{lx} \text{ \& de } \int x^{m+y} \partial y = \frac{x^{m+y}}{lx},$$

on aura $$\int Q \partial y = \frac{x^{m+y} - x^{m-y}}{(1 + x^{2m})\, x\, l x},$$

ce qui devient $= 0$ posant $y = 0$. Faisant donc $y = n$, on aura $$\int Q \partial y = \frac{x^{m+n} - x^{m-n}}{(1 + x^{2m})\, x\, l x},$$

& partant $$Z = \int \frac{(x^{m+n} - x^{m-n})\, \partial x}{(1 + x^{2m})\, x\, l x}.$$

L'autre intégration donne d'abord

$$\int Q \partial x = \int \frac{(x^{m-y} + x^{m+y})\, \partial x}{(1 + x^{2m})\, x},$$

dont l'intégrale doit être étendue depuis $x = 0$ jusqu'à $x = 1$; or pour ce cas, j'ai démontré autrefois que cette intégrale se réduit à cette forme, $\frac{\pi}{2m \operatorname{cof.} \frac{\pi y}{2m}}$; d'où nous tirons $Z = \int \frac{\pi \partial y}{2m \operatorname{cof.} \frac{\pi y}{2m}}$. Pour cette forme, posons $\frac{\pi y}{2m} = \varphi$ pour avoir $Z = \int \frac{\partial \varphi}{\operatorname{cof.} \varphi} = \int \frac{\partial \varphi}{\operatorname{fin.} (90^d + \varphi)}$; dont l'intégrale est $l. \operatorname{tang.} (45^d + \frac{1}{2}\varphi)$, & partant $Z = l. \operatorname{tang.} (45^d + \frac{\pi y}{4m})$, qui en effet s'évanouit prenant $y = 0$. Faisons donc $y = n$, & nous aurons $Z = l. \operatorname{tang.} (45^d + \frac{\pi n}{4m})$;

d'où il est clair que sous les conditions présentes, on aura

$$\int \frac{(x^{m+n-1} - x^{m-n-1})\,\partial x}{(1 + x^{2m})\,lx} \left\{ \begin{matrix} \text{depuis } x = 0 \\ \text{jusqu'à } x = 1 \end{matrix} \right\} = l.\,\text{tang.}\left(45^{\text{d}} + \frac{\pi n}{4m}\right).$$

Par ces deux exemples, on verra aisément que cette spéculation mérite toute l'attention des Géomètres. La première idée qui m'a conduit à cette recherche, étoit tirée d'un principe entièrement différent, que voici. J'avois considéré cette formule $\int \frac{(x-1)\,\partial x}{lx}$, où au lieu de lx j'ai écrit cette valeur $\frac{x^{\omega} - 1}{\omega}$, en supposant ω infiniment petit, ou bien $lx = i\,(x^{\frac{1}{i}} - 1)$, en prenant pour i un nombre infiniment grand. Qu'on pose à présent $x^{\frac{1}{i}} = z$, ou bien $x = z^{i}$, où il faut remarquer que les termes de l'intégration $x = 0$ & $x = 1$ se réduisent à $z = 0$ & à $z = 1$; cette valeur étant substituée, transforme notre formule en celle-ci, $\frac{(z^{i} - 1)\,z^{i-1}\,\partial z}{z - 1}$; or la fraction $\frac{z^{i} - 1}{z - 1}$ ou bien $\frac{1 - z^{i}}{1 - z}$, se réduit à la série $1 + z + z^{2} + z^{3} + \ldots + z^{i-1}$, qui étant multipliée & intégrée, donne

$$\frac{z^{i}}{i} + \frac{z^{i+1}}{i+1} + \frac{z^{i+2}}{i+2} + \frac{z^{i+3}}{i+3} + \ldots + \frac{z^{2i-1}}{2i-1},$$

& posant $z = 1$, la valeur cherchée sera

$$\frac{1}{i} + \frac{1}{i+1} + \frac{1}{i+2} + \frac{1}{i+3} + \frac{1}{i+4} + \ldots + \frac{1}{2i-1},$$

dont la valeur est $l\,2$, de sorte que $\int \frac{(x-1)\,\partial x}{lx} \left\{ \begin{matrix} \text{depuis } x = 0 \\ \text{jusqu'à } x = 1 \end{matrix} \right\}$ est $= l\,2$.

Pour démontrer la somme de la série trouvée qu'on appellera A, on n'a qu'à remarquer que

$$A = 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5} + \ldots\ldots$$

$$\ldots + \frac{1}{i-1} + \frac{1}{i} + \frac{1}{i+1} + \frac{1}{i+2} + \frac{1}{i+3} + \ldots$$

$$\ldots + \frac{1}{2i-1} - (1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5} + \ldots$$

$$\ldots + \frac{1}{1-i}),$$

où, parce que la série supérieure contient deux fois plus de termes que l'inférieure, on n'a qu'à soustraire chaque terme de la dernière de la supérieure alternativement, & l'on aura

$$A = 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{9} + \tfrac{1}{10} + \ldots$$

$$\ldots + \frac{1}{i-1} + \frac{1}{i} + \frac{1}{i-1} \ldots + \frac{1}{2i-1}$$

$$- 1 - \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{5} - \&c.$$

ou bien

$$A = 1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{7} - \tfrac{1}{8} + \&c. = l2.$$

Autre Théorème.

EN prenant les lettres α, β, γ, δ, &c. pour marquer les coëfficiens d'un binome élevé à l'exposant n, de sorte que

$$(1 + x)^n = 1 + \alpha x + \beta x^2 + \gamma x^3 + \delta x^4 + \&c.$$

on aura toujours

$$1 + \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 + \&c. = \tfrac{2}{1} \cdot \tfrac{6}{2} \cdot \tfrac{10}{3} \cdot \tfrac{14}{4} \ldots \frac{4n-2}{n},$$

par exemple, si $n = 6$, on aura $\alpha = 6$, $\beta = 15$, $\gamma = 20$, $\delta = 15$, $\epsilon = 6$, $\zeta = 1$, & les suivans $= 0$; & partant on aura

$$1 + 6^2 + 15^2 + 20^2 + 15^2 + 6^2 + 1 = \tfrac{2}{1} \cdot \tfrac{6}{2} \cdot \tfrac{10}{3} \cdot \tfrac{14}{4} \cdot \tfrac{18}{5} \cdot \tfrac{22}{6},$$

dont la démonstration directe me paroît extrêmement difficile.

Démonstration de ce Théorème.

12/13 Sept. 1776.

EN supposant

$$(1 + z)^n = 1 + (\tfrac{n}{1})z + (\tfrac{n}{2})z^2 + (\tfrac{n}{3})z^3 + \&c;$$

d'où l'on voit que $(\frac{n}{0}) = 1$, aussi-bien que $(\frac{n}{n})$, &

de-là il s'ensuit, que $(\frac{n}{p}) = (\frac{n}{n-p})$; outre cela, il est clair que la valeur de la formule $(\frac{n}{p})$ est toujours égale à zéro, tant dans les cas où p est un nombre négatif, que dans ceux où il est un nombre plus grand que n, ce qui s'entend des nombres entiers; ensuite, on sait que la valeur développée de ce caractère $(\frac{n}{p})$ est $= \frac{n}{1} \cdot \frac{n-1}{2} \cdot \frac{n-2}{3} \cdot \frac{n-3}{4} \cdots \frac{n-p+1}{p}$. Cela posé, si nous passons aux coëfficiens de la puissance suivante $(1+z)^{n+1}$, on sait qu'on aura $(\frac{n+1}{p+1}) = (\frac{n}{p}) + (\frac{n}{p+1})$; de sorte que réciproquement $(\frac{n}{p+1}) + (\frac{n}{p+2}) = (\frac{n+1}{p+2})$; ajoutons ces deux équations ensemble, & nous aurons

$$(\frac{n}{p}) + 2(\frac{n}{p+1}) + (\frac{n}{p+2}) = (\frac{n+1}{p+1}) + (\frac{n+1}{p+2}) = (\frac{n+2}{p+2});$$

de la même manière, nous aurons

$$(\frac{n}{p+1}) + 2(\frac{n}{p+2}) + (\frac{n}{p+3}) = (\frac{n+2}{p+3});$$

cette équation ajoutée à la précédente, donne

$$(\frac{n}{p}) + 3(\frac{n}{p+1}) + 3(\frac{n}{p+2}) + (\frac{n}{p+3}) = (\frac{n+2}{p+2}) + (\frac{n+2}{p+3}) = (\frac{n+3}{p+3});$$

ensuite

$$(\frac{n}{p+1}) + 3(\frac{n}{p+2}) + 3(\frac{n}{p+3}) + (\frac{n}{p+4}) = (\frac{n+3}{p+4}),$$

qui, encore ajoutée à la précédente, donne

$$(\frac{n}{p}) + 4(\frac{n}{p+1}) + 6(\frac{n}{p+2}) + 4(\frac{n}{p+3}) + (\frac{n}{p+4}) = (\frac{n+3}{p+3}) + (\frac{n+3}{p+4}) = (\frac{n+4}{p+4}),$$

& de-là il est aisé à conclure qu'on aura en général

$$(\frac{n}{p}) + (\frac{m}{1}) \cdot (\frac{n}{p+1}) + (\frac{m}{2}) \cdot (\frac{n}{p+2}) + (\frac{m}{3}) \cdot (\frac{n}{p+3}) + \&c. = (\frac{n+m}{p+m}).$$

Voilà donc une progression bien générale, dont chaque terme est le produit de deux coëfficiens de puissances différentes du binome, dont le terme général peut être exprimé par la formule $\left(\frac{m}{x}\right)\cdot\left(\frac{n}{p+x}\right)$, où mettant pour x successivement les nombres $0, 1, 2, 3, 4$, &c. jusqu'à ce qu'on parvienne à des termes évanouissans, la somme de toute cette progression sera infailliblement $= \left(\frac{n+m}{p+m}\right) = \left(\frac{n+m}{n-p}\right)$. C'est de-là que résulte le Théorème que je vous ai communiqué, en faisant $m = n$, & $p = 0$, de sorte qu'il est un cas infiniment plus particulier, que la série que je viens de sommer ici. Dans ce cas, on aura cette sommation,

$$1^2 + \left(\frac{n}{1}\right)^2 + \left(\frac{n}{2}\right)^2 + \left(\frac{n}{3}\right)^2 + \&c. = \left(\frac{2n}{n}\right);$$

or cette formule développée donne

$$\frac{2n}{1}\cdot\frac{2n-1}{2}\cdot\frac{2n-2}{3}\cdot\frac{2n-3}{4}\cdots\frac{n+1}{n},$$

ce qui, comme il est aisé à démontrer, est égal à

$$\frac{2}{1}\cdot\frac{6}{2}\cdot\frac{10}{3}\cdot\frac{14}{4}\cdots\cdots\frac{4n-2}{n}.$$

Il est fort remarquable que cette sommation a aussi lieu, lors même que les exposans m & n sont des fractions quelconques, pourvu que par la voie d'interpolation, on puisse assigner la juste valeur de $\left(\frac{m+n}{m+p}\right)$; & si le développement n'a pas lieu dans ce cas, il faut recourir à des formules intégrales : or posant pour abréger $l\frac{1}{x} = u$, on aura toujours

$$\left(\frac{m+n}{m+p}\right) = \frac{\int u^{m+n}\partial x}{\int u^{m+p}\partial x\cdot\int u^{n-p}\partial x}\left\{\begin{matrix}\text{de } x = 0\\ \text{à } x = 1\end{matrix}\right\}:$$

or, si λ marque un nombre entier positif quelconque, on sait qu'il y aura $\int u^{\lambda}\partial x = 1\cdot2\cdot3\cdot4\cdots\lambda$, & de-là on tirera

$$\int u^{\lambda+1}\partial x = (\lambda+1)\int u^{\lambda}\partial x,$$

$$\int u^{\lambda+2}\partial x = (\lambda+1)\cdot(\lambda+2)\int u^{\lambda}\partial x, \text{ \&c.}$$

& cette

& cette réduction aura toujours lieu, quelque nombre qu'on prenne pour λ. Prenant donc $\lambda = -\frac{1}{2}$, j'ai démontré autrefois qu'on aura $\int \frac{\partial x}{\sqrt{u}} = \pi$, & $\int \partial x \sqrt{u} = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$, π désignant la circonférence d'un cercle, dont le diamètre $= 1$. Maintenant, si l'on met $m = n\ \frac{1}{2}\ \partial p = 0$, puisque les coëfficiens de $(1 + z)^{\frac{1}{2}}$ sont

$$1 + \frac{1}{2} - \frac{1.1}{2.4} + \frac{1.1.3}{2.4.6} - \frac{1.1.3.5}{2.4.6.8} + \&c,$$

nous en tirons cette série des carrés,

$$1^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1.1}{2.4}\right)^2 + \left(\frac{1.1.3}{2.4.6}\right)^2 + \&c,$$

dont la somme sera $\frac{\int u \partial x}{\int \partial x \sqrt{u} \int \partial x \sqrt{u}} = \frac{4}{\pi}$, à cause de $\int u \partial x = 1$ & $\int \partial x \sqrt{u} = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$, ce qui s'accorde parfaitement avec la somme qu'on trouve par la voie de l'approximation.

J'AI cru pouvoir joindre ici une autre Démonstration de deux des Théorèmes précédens, quoique la méthode qui y est employée soit fort inférieure à celle de M. Euler; mais il peut être quelquefois utile de voir comment différentes routes peuvent conduire aux mêmes vérités. D'ailleurs M. Euler ayant daigné honorer ces recherches de son approbation, c'est lui donner une marque de mon respect que de les rendre publiques.

Soit la fonction $\int \frac{x^m}{lx}\ \frac{\partial x}{x}$, & qu'on l'intègre en série par la méthode des intégrations par parties, on aura

$$\int \frac{x^m}{lx}\ \frac{\partial x}{x} = x^m\ \frac{1}{m\,lx} + \frac{1}{m^2\,lx^2} + \frac{2}{m^3\,lx^3} + \frac{2.3}{m^4\,lx^4} \ldots$$

Ainsi la valeur de cette intégrale, prise depuis $x = B$ jusqu'à $x = A$, sera