DE PROIECTIONE GEOGRAPHICA SVPERFICIEI SPHAERICAE.

Auctore
L. EVLERO.

§. 1.

Cum in superiori dissertatione omnes plane modos possibiles expendissem, quibus superficies sphaerica in plano ita repraesentari potest, vt singulae portiones minimae per figuras similes exhibeantur: inde quidem statim mapparum hydrographicarum *Mercatoris* constructio pariter atque Hemisphaeriorum polarium se prodebat; quemadmodum autem ambo Hemisphaeria, superius scilicet et inferius, vti quidem hodie construi solent cum meis formulis cohaereant, vix patebat, cum tamen ista repraesentatio eadem proprietate sit praedita. Hanc obrem accuratius inquirere constitui, quomodo etiam hic repraesentandi modus cum formulis generalibus ibi datis egregie consentiat, ex iisque luculenter deriuari queat.

§. 2. Formulae autem generales, quas pro huiusmodi constructionibus erueram ita se habent, vt si loci cuiuspiam in Sphaera distantia a polo fuerit $= v$ eiusque longitudo a certo Meridiano fixe computata $= t$, id punctum in plano per binas coordinatas orthogonales x et y ita determinari debeat, vt sit

$$x = \Delta : (l(\cot.\tfrac{1}{2}v + t\sqrt{-1})) + \Delta : (l(\cot.\tfrac{1}{2}v - t\sqrt{-1}))$$
$$y\sqrt{-1} = \Delta : (l(\cot.\tfrac{1}{2}v + t\sqrt{-1})) - \Delta : (l(\cot.\tfrac{1}{2}v - t\sqrt{-1}))$$

quas formulas quoque ita exhibere licet, vt sit

$$x = \Delta(\cot.\tfrac{1}{2}v(\cos.t + \sqrt{-1}\sin.t) + \Delta(\cot.\tfrac{1}{2}v(\cos.t - \sqrt{-1}\sin.t)$$

et cum sit

$$\frac{1}{\cot.\frac{1}{2}v(\cos t \pm \sqrt{-1}\sin.t)} = \tang.\tfrac{1}{2}v(\cos.t \mp \sqrt{-1}\sin.t)$$

hae formulae etiam ita exhiberi possunt:

$$x = \Delta : (\tang.\tfrac{1}{2}v(\cos.t + \sqrt{-1}\sin.t)) + \Delta : (\tang.\tfrac{1}{2}v(\cos.t - \sqrt{-1}\sin.t))$$
$$y\sqrt{-1} = \Delta : (\tang.\tfrac{1}{2}v(\cos.t + \sqrt{-1}\sin.t)) - \Delta : (\tang.\tfrac{1}{2}v(\cos.t - \sqrt{-1}\sin.t))$$

 vbi

vbi manifestum est, ex prioribus formulis, si character indefinitus functionis Δ omittatur, priores formulas praebere mappas hydrographicas, postremas vero constructionem Haemisphaerii siue borealis siue australis.

§. 3. Quo nunc facilius appareat, quomodo etiam reliquae proiectiones eidem principio innixae ex nostris formulis deduci queant, rationem istius proiectionis, quae vulgo stereographica vocari solet hic accuratius euoluam. Hoc autem modo superficies Sphaerae in planum Sphaeram tangens ita proieci solet, quemadmodum a spectatore in puncto contactui opposito constituto secundum regulas Perspectiuae cerneretur. Referat igitur circulus AMC Sphaeram, recta autem EF planum, quod Sphaeram in puncto C tangat; tum vero A sit punctum ipsi C oppositum in quo spectator sit constitutus. Iam sumto in Sphaera puncto quocunque M, si per id ex A producatur recta AMS, rectae EF occurrens in puncto F, erit S proiectio puncti M. Hinc si radius sphaerae ponatur $= 1$, vt sit diameter $AC = 2$, arcus vero CM statuatur $= z$, erit angulus $CAM = \frac{1}{2} z$, vnde fit interuallum

Tab. I. Fig. 5.

$$CS = 2 \text{ tang. } \tfrac{1}{2} z = \frac{2 \text{ sin. } z}{1 + \text{cos. } z} = 2 \sqrt{\frac{1 - \text{cos. } z}{1 + \text{cos. } z}}.$$

§. 4. Si ad AC ex M ducatur normalis MP erit $MP = \text{sin. } z$, ac si circulus circa axem AC conuerti concipiatur, punctum M describet circulum plano tangenti parallelum, cuius radius $= MP = \text{sin. } z$, qui ergo super plano itidem circulo referetur, cuius radius $= CS = \text{tag. } \frac{1}{2} z$, ita vt radius istius circuli in sphaera se habeat ad radium proiectionis, vt PM ad CS, hoc est vt $AP : AC$ vel vt AM ad AS. Anguli autem in circulo sphaerae radio CM descripto aequales erunt angulis in proiectione super plano.

§. 5. Nunc in sphaera concipiamus punctum m, ipsi M proximum, cui in proiectione respondeat punctum s, ita vt elemen-

elementum Mm exprimatur per spatiolum Ss, et quaeramus rationem inter haec duo elementa Mm et Ss. Ac primo quidem patet fore angulum $ASC = 90^\circ - \frac{1}{2}z = AsC$. At vero anguli AMm mensura est semissis arcus AM, vnde erit angulus $AMm = 90^\circ - \frac{1}{2}z$ ideoque aequalis angulo AsC; vnde sequitur triangulum $AMm \sim$ triangulo AsS, vnde erit $Mm:Ss = AM:AS$ hoc est $= AP:AC$; quae ergo ratio conuenit cum ea, quam inuenimus inter circulum in sphaera radio PM descriptum et circulum in plano radio CS descriptum; quamobrem haec ratio etiam aequalis erit ei, quam elementa similia in duobis his circulis inter se tenent. Atque hinc manifestum est, si in sphaera portio infinite parua circa elementum Mm descripta concipiatur, eius proiectionem ipsi fore similem, ita vt haec proiectio eidem legi sit adstricta, ex qua meas formulas generales elicueram.

§. 6. Referat vt ante circulus AGC sphaeram, cuius superficies proiicienda sit in planum EF, quod sphaeram in puncto C tangat, ac statuamus nunc alterum Terrae polum existere in puncto G. Vocemus arcum $CG = g$ et per praecedentia iste polus in plano exhibebitur in puncto H, vt sit $GH = 2 \text{ tag.} \frac{1}{2}g$. Iam vero consideremus punctum sphaerae quodcunque in M cuius distantia a polo sit $GM = v$, angulus vero $CGM = t$, qui ergo denotabit longitudinem loci M in Meridiano GC, atque ad triangulum sphaericum complendum ducatur arcus CM; quo facto, si in proiectione S sit punctum loco M respondens, erit $CS = 2 \text{ tag.} \frac{1}{2}CM$, angulus vero $ECS =$ angulo GCM. Ad locum igitur huius puncti S definiendum in triangulo sphaerico GCM quaeri oportet tam latus CM quam angulus GCM. Tab. I. Fig. 6.

§. 7. In triangulo autem sphaerico CGM dantur duo latera $CG = g$ et $GM = v$ cum angulo intercepto $CGM = t$, vnde per regulas Trigonometriae sphericae reperitur

$$\text{cof. } CM = \text{cof. } g \text{ cof. } v + \text{fin. } g \text{ fin. } v \text{ cof. } t$$

vnde

vnde cum fit

$$CS = 2\ \text{tag.}\ \tfrac{1}{2} CM = \frac{2\ \text{fin.}\ CM}{1 + \text{cof.}\ CM} = 2\sqrt{\frac{1 - \text{cof.}\ CM}{1 + \text{cof.}\ CM}}$$

ex poftrema formula ftatim habemus

$$CS = 2\sqrt{\frac{1 - \text{cof.}\ g\ \text{cof.}\ v - \text{fin.}\ g\ \text{fin.}\ v\ \text{cof.}\ t}{1 + \text{cof.}\ g\ \text{cof.}\ v + \text{fin.}\ g\ \text{fin.}\ v\ \text{cof.}\ t}}.$$

Praeterea vero reperitur $\text{tag.}\ GCM = \frac{\text{fin.}\ v\ \text{fin.}\ t}{\text{cof.}\ v\ \text{fin.}\ g - \text{fin.}\ v\ \text{cof.}\ g\ \text{cof.}\ t}$, quae ergo formula fimul exprimit in proiectione tangentem anguli ECS.

§. 8. Nunc in proiectione ex puncto S ad rectam fixam EF, quippe in quam cadit polus H, ducamus perpendiculum SX, ac vocemus coordinatas $CX = x$ et $XS = y$; et cum fit

$$CS = \frac{2\ \text{fin.}\ CM}{1 + \text{cof.}\ CM} \text{ erit } x = \frac{2\ \text{fin.}\ CM\ \text{cof.}\ GCM}{1 + \text{cof.}\ CM} \text{ et } y = \frac{2\ \text{fin.}\ CM\ \text{fin.}\ GCM}{1 + \text{cof.}\ CM},$$

vnde patet fore

$$\frac{y}{x} = \text{tag.}\ GCM = \frac{\text{fin.}\ v\ \text{fin.}\ t}{\text{cof.}\ v\ \text{fin.}\ g - \text{cof.}\ g\ \text{fin.}\ v\ \text{cof.}\ t}.$$

Praeterea vero ex iam inuentis erit

$$xx + yy = CS^2 = \frac{4(1 - \text{cof.}\ g\ \text{cof.}\ v - \text{fin.}\ g\ \text{fin.}\ v\ \text{cof.}\ t)}{1 + \text{cof.}\ g\ \text{cof.}\ v + \text{fin.}\ g\ \text{fin.}\ v\ \text{cof.}\ t}$$

ex quibus duabus aequationibus ambas coordinatas x et y feorfim definire licebit.

§. 9. Facilius autem earum valores directe fequenti modo reperire licebit. Cum fit

$$\text{fin.}\ t : \text{fin.}\ CM = \text{fin.}\ GCM : \text{fin.}\ v \text{ erit}$$

$$\text{fin.}\ CM.\ \text{fin.}\ GCM = \text{fin.}\ t\ \text{fin.}\ v,$$

quo valore introducto fiet

$$\text{tag.}\ GCM = \frac{\text{fin.}\ CM.\ \text{fin.}\ GCM}{\text{fin.}\ g\ \text{cof.}\ v - \text{cof.}\ g\ \text{fin.}\ v\ \text{cof.}\ t} = \frac{\text{fin.}\ GCM}{\text{cof.}\ GCM}$$

vnde fit $\text{fin.}\ CM\ \text{cof.}\ GCM = \text{fin.}\ g\ \text{cof.}\ v - \text{cof.}\ g\ \text{fin.}\ v\ \text{cof.}\ t$ ex quibus valoribus ftatim colligimus

$$x = \frac{2(\text{fin.}\ g\ \text{cof.}\ v - \text{cof.}\ g\ \text{fin.}\ v\ \text{cof.}\ t)}{1 + \text{cof.}\ CM} \text{ et } y = \frac{2\ \text{fin.}\ t\ \text{fin.}\ v}{1 + \text{cof.}\ CM}.$$

Quia igitur inuenimus $\text{cof.}\ CM = \text{cof.}\ g\ \text{cof.}\ v + \text{fin.}\ g\ \text{fin.}\ v\ \text{cof.}\ t$ binas coordinatas x et y ita habebimus expreffas

$$x = \frac{2(\text{fin.}\ g\ \text{cof.}\ v - \text{cof.}\ g\ \text{fin.}\ v\ \text{cof.}\ t)}{1 + \text{cof.}\ g\ \text{cof.}\ v + \text{fin.}\ g\ \text{fin.}\ v\ \text{cof.}\ t} \text{ et } y = \frac{2\ \text{fin.}\ t\ \text{fin.}\ v}{1 + \text{cof.}\ g\ \text{cof.}\ v + \text{fin.}\ g\ \text{fin.}\ v\ \text{cof.}\ t}.$$

§. 10.

§. 10. Quod si ergo hic ponamus $v = 0$, locus poli H in proiectione prodire debet; tum autem reperietur

$$x = \frac{2 \sin. g}{1 + \cos. g} = 2 \text{ tag. } \tfrac{1}{2} g = CH.$$

At vero fit $y = 0$. Hinc igitur etiam locum alterius poli in proiectione assignare poterimus, ponendo $v = 180°$; tum autem reperietur $x = -\frac{2 \sin. g}{1 - \cos. g}$ et $y = 0$. Vnde si ex altera parte alter polus statuatur in K, erit interuallum

$$CK = \frac{2 \sin. g}{1 - \cos. g} = 2 \cot. \tfrac{1}{2} g.$$

Tum vero si capiamus $CE = CF = 2$, erit EF diameter circuli, quo referetur Hemisphaerium totum circa centrum C descriptum, cuius ergo diameter erit $EF = 4$, hoc est duplo maior quam diameter sphaerae.

§. 11. Vt nunc in hac proiectione Aequatorem designemus, sumamus $v = 90°$, atque x et y fient coordinatae Aequatoris in proiectione; tum autem erit

$$x = \frac{2 \cos. g}{1 + \sin. g \cos. t} \text{ et } y = \frac{2 \sin. t}{1 + \sin. g \cos. t}.$$

Supra autem iam vidimus esse $xx + yy = \frac{4(1 - \sin. g \cos. t)}{1 + \sin. g \cos. t}$, hinc concludimus fore

$$\frac{x}{xx + yy} = \frac{\cos. g \cos. t}{2(1 - \sin. g \cos. t)}, \text{ vnde fit } \cos. t = \frac{2x}{2x \sin. g - (xx + yy) \cos. g}$$

qui valor substitutus in aequatione pro x praebet

$$4x \sin. g - (xx + yy) \cos. g = -4 \cos. g$$

vnde fit $xx + yy = \frac{4(x \sin. g + \cos. g)}{\cos. g}$, vnde colligimus hanc aequationem: $yy + (2 \text{ tag. } g - x)^2 = \frac{4}{\cos. g^2}$. Hinc patet, Aequatorem in proiectione fore circulum radio $= \frac{2}{\cos. g}$ descriptum. Ad centrum autem huius circuli inueniendum capiatur interuallum $CI = 2 \text{ tag. } g$, vt fiat $IX = 2 \text{ tag. } g - x$, et cum fieri debeat $XS^2 + IX^2 = \frac{4}{\cos. g^2}$, patet fore $IS = \frac{2}{\cos. g}$ hoc est quantitati constanti. Erit ergo hoc ipsum punctum I centrum circuli Aequatorem referentis, existente $CI = 2 \text{ tag. } g$. Quare ex Tab. I. Fig. 6.

C erigatur perpendiculum $CD = 2$, et cum hinc fiat recta $ID = \frac{2}{\cos. g}$, patet Aequatorem descriptum iri, si ex centro I et radio ID circulus delineetur.

§. 12. Definiamus nunc quoque omnes circulos Aequatori parallelos in nostra proiectione, atque vt calculos taediosos euitemus statuamus breuitatis gratia $a = 2 \sin. g \cos. \alpha$, $b = 2 \cos. g \sin. \alpha$, $c = 1 + \cos. g \cos. \alpha$ et $d = \sin. g \sin. \alpha$ et $e = 4 - 4 \cos. g \cos. \alpha$, vbi α scripsimus loco v, vt distantia Paralleli a polo sit $= \alpha$, quo facto nostrae aequationes ita se habebunt: $x = \frac{a - b \cos. t}{c + d \cos. t}$ et $xx + yy = \frac{e - 4 d \cos. t}{c + d \cos. t}$, ex quarum priore colligitur $\cos. t = \frac{a - cx}{b + dx}$, qui valor in altera substitutus praebet $xx + yy = \frac{d(e + 4c)x + be - 4ad}{bc + ad}$. Restitutis vero valoribus assumtis erit $xx + yy = \frac{4(x \sin. g + \cos. g - \cos. \alpha)}{\cos. g + \cos. \alpha}$, quae aequatio reducta ad hanc formam

$$yy + \left(\frac{2 \sin. g}{\cos. g + \cos. \alpha} - x\right)^2 = \frac{4 \sin. \alpha^2}{(\cos. g + \cos. \alpha)^2}$$

monstrat, proiectionem Paralleli propositi esse circulum, cuius radius $= \frac{2 \sin. \alpha}{\cos. g + \cos. \alpha}$, centrum autem in ipso axe EF esse situm puta in puncto L ita vt sit $CL = \frac{2 \sin. g}{\cos. g + \cos. \alpha}$.

§. 13. Inuestigemus nunc etiam proiectionem omnium Meridianorum; ac primo quidem cum sumto $t = 0$ ipsa recta HK referet Meridianum principalem, a quo reliquos computemus, ponamus declinationem Meridiani quaesiti ab hoc principali esse $= \beta$, vt sit $t = \beta$, et aequationes nostrae erunt

Tab. I. Fig. 6.

$$x = \frac{2(\sin. g \cos. v - \cos. \beta \cos. g \sin. v)}{1 + \cos. g \cos. v + \cos. \beta \sin. g \sin. v}$$

$$y = \frac{2 \sin. \beta \sin. v}{1 + \cos. g \cos. v + \cos. \beta \sin. g \sin. v} \text{ et}$$

$$xx + yy = \frac{4(1 - \cos. g \cos. v - \cos. \beta \sin. g \sin. v)}{1 + \cos. g \cos. v + \cos. \beta \sin. g \sin. v}$$

ex quibus aequationibus quantitatem v eliminare oportet. Hunc in finem consideremus formulam

$$\frac{y}{x} = \frac{\sin. \beta \sin. v}{\sin. g \cos. v - \cos. \beta \cos. g \sin. v} = \frac{\sin. \beta \tang. v}{\sin. g - \cos. \beta \cos. g \tang. v}$$

ex qua colligitur $\tang. v = \frac{y \sin. g}{y \cos. \beta \cos. g + x \tang. \beta}$.

§. 14.

§. 14. Quo nunc facilius hoc valore in reliquis aequationibus vti queamus, formemus hanc aequationem:

$$4 - xx - yy = \frac{8 \cos. g \cos. v + 8 \cos. \beta \sin. g \sin. v}{1 + \cos. g \cos. v + \cos. \beta \sin. g \sin. v}$$

quae per y diuiſa praebet

$$\frac{4 - xx - yy}{y} = \frac{4 \cos. g \cos. v + 4 \cos. \beta \sin. g \sin. v}{\sin. \beta \sin. v} = \frac{4 \cos. g + 4 \cos. \beta \sin. g \tang. v}{\sin. \beta \tang. v}$$

in qua loco tang. v valorem ante inuentum ſcribamus, vnde fiet

$$\frac{4 - xx - yy}{y} = \frac{4 y \cos. \beta + 4 x \sin. \beta \cos. g}{y \sin. \beta \sin. g}$$

ex qua deducimus

$$xx + yy = 4 - \frac{4 y \cos. \beta - 4 x \sin. \beta \cos. g}{\sin. \beta \sin. g}$$

quae aequatio itidem eſt pro circulo; vnde tuto concludere poſſumus, omnes circulos maximos in ſphaera ductos etiam per arcus circulares exprimi, vel adeo per lineas rectas.

§. 15. Quo nunc tam centrum quam radium cuiusque Meridiani pro noſtra proiectione aſſignemus, aequationem inventam in hanc formam transfundamus: Tab. I. Fig. 8.

$$\left(\frac{2 \cos g}{\sin. g} + x\right)^2 + \left(\frac{2 \cos. \beta}{\sin. \beta \sin. g} + y\right)^2 = \frac{4}{\sin. \beta^2 \sin. g^2}.$$

Sint igitur puncta H et K poli in proiectione, ita vt ſit

$$CH = 2 \tang. \tfrac{1}{2} g = \frac{2 \sin. g}{1 + \cos. g} \quad \text{et} \quad CK = 2 \cot. \tfrac{1}{2} g = \frac{2 \sin. g}{1 - \cos. g}$$

ideoque totum interuallum $HK = \frac{4}{\sin. g}$ eiusque ſemiſſis $= \frac{2}{\sin. g}$ quod medium in punctum O incidat, eritque $CO = \frac{2 \cos. g}{\sin. g}$; hinc ſumto $CX = x$ erit $OX = \frac{2 \cos. g}{\sin. g} + x$. Ex O erigatur perpendiculum $= \frac{2 \cos. \beta}{\sin. \beta \sin. g}$, ſumtaque XL ipſi ON aequali erit $LS = \frac{2 \cos. \beta}{\sin. \beta \sin. g} + y$, quocirca eſſe oportet OX^2 (ſiue LN^2) $+ LS^2 = NS^2 = \frac{4}{\sin. \beta^2 \sin. g^2}$, ideoque $NS = \frac{2}{\sin. \beta \sin. g}$. Vnde patet, punctum N eſſe centrum Meridiani deſcribendi, radium vero $= \frac{2}{\sin. \beta \sin. g}$, qui radius praeciſe aequalis erit rectae NH, quod egregie cum natura rei conuenit; quandoquidem omnes Meridiani etiam in proiectione per polos N et H tranſire debent.

Com-

Comparatio huius proiectionis cum formulis generalibus.

§. 16. Hic igitur quaeritur, cuius modi forma functioni Δ tribui debeat, vt proiectio modo descripta inde sequatur. Ac primo patet, potestates prima altiores in ea occurrere non posse, quia alioquin multipla angulorum t et v ingrederentur; deinde vero haec functio debebit esse fractio, quoniam formulae pro x et y inuentae sunt fractiones. Hanc ob caussam functioni $\Delta : z$ talem formam generalem tribuamus $\frac{a+bz}{c+dz}$: at vero pro z sumamus formam postremam supra expositam, qua erat $z = \text{tang.}\,\frac{1}{2}v\,(\text{cos.}\,t \pm \sqrt{-1}\,\text{sin.}\,t)$

ita vt nostra functio euadat

$$\frac{a + b\,\text{tang.}\,\frac{1}{2}v\,(\text{cos.}\,t + \sqrt{-1}\,\text{sin.}\,t)}{c + d\,\text{tang.}\,\frac{1}{2}v\,(\text{cos.}\,t \pm \sqrt{-1}\,\text{sin.}\,t)}$$

quae, loco tang. $\frac{1}{2}v$ scribendo $\frac{\text{sin.}\,v}{1+\text{cos.}\,v}$ induet hanc formam:

$$\frac{a(1+\text{cos.}\,v) + b\,\text{sin.}\,v\,(\text{cos.}\,t \pm \sqrt{-1}\,\text{sin.}\,t)}{c(1+\text{cos.}\,v) + a\,\text{sin.}\,v\,(\text{cos.}\,t \pm \sqrt{-1}\,\text{sin.}\,t)}.$$

§. 17. Pro calculi commodo loco huius formae vtamur hac concinniore: $\frac{P \pm Q\sqrt{-1}}{R \pm S\sqrt{-1}}$ vt sit

$$P = a(1+\text{cos.}\,v) + b\,\text{sin.}\,v\,\text{cos.}\,t;\quad Q = b\,\text{sin.}\,v\,\text{sin.}\,t$$

$$R = c(1+\text{cos.}\,v) + d\,\text{sin.}\,v\,\text{cos.}\,t;\quad S = d\,\text{sin.}\,v\,\text{sin.}\,t$$

Hinc autem coordinatae x et y ita prodibunt determinatae:

$$x = \frac{P+Q\sqrt{-1}}{R+S\sqrt{-1}} + \frac{P-Q\sqrt{-1}}{R-S\sqrt{-1}} \text{ et}$$

$$y\sqrt{-1} = \frac{P+Q\sqrt{-1}}{R+S\sqrt{-1}} - \frac{P-Q\sqrt{-1}}{R-S\sqrt{-1}}$$

vnde colligimus

$$x = \frac{2PR+2QS}{RR+SS} \text{ et } y = \frac{2QR-2PS}{RR+SS}.$$

§. 18. Quod si iam loco P, Q, R, S valores assumtos restituamus, pro denominatore communi reperiemus

$$RR+SS = cc(1+\text{cos.}\,v)^2 + 2cd(1+\text{cos.}\,v)\,\text{sin.}\,v\,\text{cos.}\,t + dd\,\text{sin.}\,v^2$$
$$= (1+\text{cos.}\,v)(cc(1+\text{cos.}\,v) + 2cd\,\text{sin.}\,v\,\text{cos.}\,t + dd(1-\text{cos.}\,v)).$$

Tum

Tum vero pro numeratore ipſius x fiet

$$PR+QS=(1+\text{cof.}\,v)(ac(1+\text{cof.}\,v)+(bc+ad)\,\text{fin.}\,v\,\text{cof.}\,t+bd(1-\text{cof.}\,v)).$$

denique pro numeratore ipſius y

$$QR-PS=(1+\text{cof.}\,v)(bc-ad)\,\text{fin.}\,v\,\text{fin.}\,t$$

ſicque pro coordinatis nanciſcimur has expreſſiones:

$$x=\frac{2ac(1+\text{cof.}\,v)+2(bc+ad)\,\text{fin.}\,v\,\text{cof.}\,t+2bd(1-\text{cof.}\,v)}{cc(1+\text{cof.}\,v)+2cd\,\text{fin.}\,v\,\text{cof.}\,t+da(1-\text{cof.}\,v)}$$

$$y=\frac{2(bc-ad)\,\text{fin.}\,v\,\text{fin.}\,t}{cc(1+\text{cof.}\,v)+2cd\,\text{fin.}\,v\,\text{cof.}\,t+dd(1-\text{cof.}\,v)}.$$

§. 19. Quod ſi iam has formulas cum iis comparemus, quas ſupra inuenimus, quae erant

$$x=\frac{2\,\text{fin.}\,g\,\text{cof.}\,v-2\,\text{cof.}\,g\,\text{fin.}\,v\,\text{cof.}\,t}{1+\text{cof.}\,g\,\text{cof.}\,v+\text{fin.}\,g\,\text{fin.}\,v\,\text{cof.}\,t}\quad\text{et}\quad y=\frac{2\,\text{fin.}\,t\,\text{fin.}\,v}{1+\text{cof.}\,g\,\text{cof.}\,v+\text{fin.}\,g\,\text{fin.}\,v\,\text{cof.}\,t}$$

egregium iam conſenſum deprehendimus: at facile erit conſtantes a, b, c, d ita aſſumere, vt conſenſus fiat perfectus. Primo igitur vt denominatorem ad identitatem perducamus, requiritur, vt ſit $cc+dd=1$, $cc-dd=\text{cof.}\,g$ et $2cd=\text{fin.}\,g$. Ex duabus prioribus fit

$$cc=\frac{1+\text{cof.}\,g}{2}=\text{cof.}\,\tfrac{1}{2}g^2\quad\text{et}\quad dd=\frac{1-\text{cof.}\,g}{2}=\text{fin.}\,\tfrac{1}{2}g^2$$

vnde fit $c=\text{cof.}\,\frac{1}{2}g$ et $d=\text{fin.}\,\frac{1}{2}g$, quibus valoribus iam tertiae conditioni ſatisfit; fiet enim

$$2cd=2\,\text{fin.}\,\tfrac{1}{2}g\,\text{cof.}\,\tfrac{1}{2}g=\text{fin.}\,g.$$

Pro numeratore ipſius x perfectus conſenſus poſtulat, vt fiat

$$ac+bd=0,\quad ac-bd=\text{fin.}\,g,\quad bc+ad=-\text{cof.}\,g$$

vbi ſi loco c et d valores modo inuentos ſcribamus, fiet

$$a\,\text{cof.}\,\tfrac{1}{2}g+b\,\text{fin.}\,\tfrac{1}{2}g=0,\quad a\,\text{cof.}\,\tfrac{1}{2}g-b\,\text{fin.}\,\tfrac{1}{2}=\text{fin.}\,g,$$
$$b\,\text{cof.}\,\tfrac{1}{2}g+a\,\text{fin.}\,\tfrac{1}{2}g=-\text{cof.}\,g.$$

Ex binis prioribus fit

$$a=\frac{\text{fin.}\,g}{2\,\text{cof.}\,\frac{1}{2}g}=\text{fin.}\,\tfrac{1}{2}g,\quad\text{porro}\quad b=-\frac{2\,\text{fin.}\,g}{2\,\text{fin.}\,\frac{1}{2}g}=-\text{cof.}\,\tfrac{1}{2}g$$

hisque valoribus etiam tertiae conditioni ſponte ſatisfit. Tantum igi-

igitur superest, vt etiam videamus, an isti valores cum numeratore ipsius y conueniant, quo requiritur, vt sit $bc - ad = 1$; est vero $bc = -\cos.\frac{1}{2}g^2$ et $ad = \sin.\frac{1}{2}g^2$ vnde fit $bc - ad = -1$. Probe autem notandum est, ambas coordinatas tam positiue quam negatiue sumi posse, ita vt hic perfecta identitas agnosci debeat.

§. 20. His valoribus inuentis manifestum est, formulas nostras generales perducturas fuisse ad hanc proiectionem stereographicam, si pro functione $\Delta : z$ assumsissemus statim hanc formam:

$$\frac{\sin.\frac{1}{2}g - z\cos.\frac{1}{2}g}{\cos.\frac{1}{2}g + z\sin.\frac{1}{2}g} \text{ siue } \frac{\tang.\frac{1}{2}g - z}{1 + z\tang.\frac{1}{2}g}.$$

Ceterum hic obseruari conueniet, istum casum ad vsus practicos, quos in Geographia postulamus maxime esse accommodatum, quandoquidem veram figuram regionum terrestrium non admodum detorquet. Imprimis autem notari meretur, quod in hac proiectione non solum omnes Meridiani et Paralleli circulis vel adeo lineis rectis exhibeantur, sed etiam omnes circuli maximi in Sphaera descripti etiam per arcus circulares vel adeo lineas rectas exprimantur, dum e contrario aliae Hypothefes, quae pro functione Δ fingi possent, his commodis penitus essent cariturae.

DE