DE REPRAESENTATIONE SVPERFICIEI SPHAERICAE SVPER PLANO.

Auctore

L. EVLERO.

§. 1.

Hic non tantum proiectiones opticas conſidero, quibus diuerſa puncta ſuperficiei ſphaericae in plano ita repraeſentantur, quemadmodum a ſpectatore in certo loco conſtituto cernuntur, dum ſingula puncta ab eo viſa ſecundum leges Perſpectiuae in planum proiiciuntur: Sed hic vocabulum Repraeſentationis in latiſſimo ſenſu accipio, ita vt ſingula ſuperficiei ſphaericae puncta ſecundum legem quamcunque in ſuperficie plana exhibeantur, ſicque ſingulis punctis in Sphaera certa puncta in plano reſpondeant, ac viciſſim, niſi forte eueniat, vt quorundam punctorum Sphaerae repraeſentatio fiat imaginaria.

§. 2. Referat igitur figura abc portionem ſuperficiei Sphaericae, cuius polus ſit in puncto b et circulus alc Aequator; primus autem Meridianus ſit ab, a quo longitudines ſingulorum punctorum Sphaerae computentur, more in Geographia recepto. Conſideretur nunc punctum quodcunque p in Meridiano bpl ſito, qui a primo Meridiano ba diſtet angulo abl, ſiue arcu Aequatoris $al = t$; latitudo vero iſtius loci ſit arcus $lp = u$, dum radium Sphaerae vnitate expreſſum aſſumimus. Nunc in tertia figura referat planum tabulae id planum, in Tab. I. Fig. 2. Fig. 3.

quo repraesentationem fieri oportet sitque P punctum illi loco p respondens, vnde ad axem vtcunque pro lubitu assumtum EF demittatur perpendiculum PX, et constituto abscissarum initio in puncto E vocetur abscissa $EX = x$ et applicata $XP = y$; et quia punctum P secundum legem quamcunque ex situ puncti p in Sphaera determinari assumimus, situs autem puncti p per binas variabiles t et u determinatur, praesentes coordinatae variabi- x et y tanquam Functiones quaecunque binarum illarum lium t et u spectari debebunt; vnde patet, hanc inuestigationem ad eam Analyseos partem esse referendam, in qua Functiones binarum variabilium tractantur.

Tab. I. Fig. 2. §. 3. Iam variabilitatem binarum quantitatum t et u in computum inducamus, sitque in Sphaera punctum q, cuius longitudo $= t$, at latitudo $= u + du$; r vero sit punctum, cuius longitudo sit $t + dt$, latitudo vero $l'r = u$, vnde completo parallelogrammo $pqrs$ loci s longitudo erit $t + dt$ et latitudo $= u + du$. Tum vero erunt quantitates elementares in Sphaera $pq = du$ et $ll' = dt$, vnde ex figura sphaerica fit elementum $pr = dt \cos. u$, at vero parallelogrammum $pqrs$ erit rectangulum, hincque diagonalis $ps = du^2 + dt^2 \cos. u^2$.

Fig. 3. §. 4. Nunc sphaerae punctis illis p, q, r, s respondeant in plano puncta P, Q, R, S,, vnde ad axem EF demittantur perpendicula PX, QU, RV et SW, et quia punctum Q ex P oritur, dum sola variabilis u elemento suo du augetur, coordinatae pro hoc puncto Q erunt

$$EU = x + du\left(\frac{dx}{du}\right) \text{ et } UQ = y + du\left(\frac{dy}{du}\right).$$

Simili modo quia punctum R ex P per variabilitatem solius P nascitur, pro hoc puncto erit abscissa $EV = x + dt\left(\frac{dx}{dt}\right)$ et applicata $VR = y + dt\left(\frac{dy}{dt}\right)$. Denique vero pro puncto S, quod ex variabilitate vtriusque t et u nascitur, erit abscissa

$$EW = x + du\left(\frac{dx}{du}\right) + dt\left(\frac{dx}{dt}\right)$$

et

et applicata

$$WS = y + du\left(\frac{dy}{du}\right) + dt\left(\frac{dy}{dt}\right).$$

Vnde patet fore $XU = du\left(\frac{dx}{du}\right)$, cui ergo aequale est interuallum $VW = du\left(\frac{dx}{du}\right)$. Simili modo erit

$$WS - VR = UQ - XP = du\left(\frac{dy}{du}\right).$$

Ex quo ſequitur fore elementum RS = elemento PQ, ſimilique modo $PR = QS$, ideoque quadrilaterum $PQRS$ parallelogrammum.

§. 5. Cum igitur rectangulum elementare in Sphaera $pqrs$ in plano per parallelogrammum $PQRS$ repraeſentetur, comparemus primo latera inter ſe, et cum ſit $pq = du$ et $pr = dt \cos u$ in plano habebimus

$$PQ = du\sqrt{\left(\frac{dx}{du}\right)^2 + \left(\frac{dy}{du}\right)^2} \text{ et } PR = dt\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}.$$

Tum vero in plano elementum PQ exhibebit directionem Meridiani eiusque particulam incremento du reſpondentem: At elementum PR referet directionem Paralleli eiusque particulam incremento $dt \cos u$ reſpondentem. Quod ſi ergo functiones x et y ita eſſent comparatae, vt foret

$$du = du\sqrt{\left(\frac{dx}{du}\right)^2 + \left(\frac{dy}{du}\right)^2} \text{ et } dt \cos u = dt\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right) + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$$

tum tam Meridiani quam Paralleli in plano eandem obtinerent quantitatem quam habent in Sphaera. Interim tamen eo maius diſcrimen intercederet, quo magis anguli in plano ab angulis rectis eſſent diſcrepaturi.

§. 6. Quaeramus igitur primo poſitionem, quam directio Meridiani PQ et Paralleli PR reſpectu coordinatarum x et y tenet. Ac primo quidem ſecundum figuram elementum Meridiani PQ ad axem noſtrum EF ſub angulo inclinatur, cuius tangens eſt $\left(\frac{dy}{du}\right) : \left(\frac{dx}{du}\right)$. Simili modo directio Paralleli PR ad axem noſtrum EF inclinatur ſub angulo cuius tangens eſt $\left(\frac{dy}{dt}\right) : \left(\frac{dx}{dt}\right)$. Horum ergo angulorum differentia dabit angulum

QPR, ſub quo Parallelus ad Meridianum inclinatur, cuius ergo tangens erit

$$\frac{\left(\frac{dx}{dt}\right)\left(\frac{dy}{du}\right)-\left(\frac{dx}{du}\right)\left(\frac{dy}{dt}\right)}{\left(\frac{dx}{du}\right)\left(\frac{dx}{dt}\right)+\left(\frac{dy}{du}\right)\left(\frac{dy}{dt}\right)}.$$

Quamobrem ſi hic angulus debeat eſſe rectus, quemadmodum in Sphaera, neceſſe eſt vt fiat

$\left(\frac{dx}{du}\right)\left(\frac{dx}{dt}\right)=-\left(\frac{dy}{du}\right)\left(\frac{dy}{dt}\right)$ ſiue $\left(\frac{dy}{du}\right):\left(\frac{dx}{du}\right)=-\left(\frac{dx}{dt}\right):\left(\frac{dy}{dt}\right)$.

§. 7. Quod ſi ergo deſideraretur, vt figura in plano PQRS perfecte ſimilis et aequalis fieret figurae in Sphaera $pqrs$, tribus ſequentibus conditionibus ſatisfieri oporteret. Primo ſcilicet vt fieret PQ $= pq$, 2°.) PR $= pr$ ac 3°.) angulus QPR $= qpr = 90°$. Ad hoc ergo poſtularentur tres ſequentes aequationes:

I. $\sqrt{\left(\frac{dx}{du}\right)^2+\left(\frac{dy}{du}\right)^2}=1$ ſiue $\left(\frac{dx}{du}\right)^2+\left(\frac{dy}{du}\right)^2=1$

II. $\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}=\cos u$ ſiue $\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2=\cos u^2$

III. $\left(\frac{dy}{du}\right):\left(\frac{dx}{du}\right)=-\left(\frac{dx}{dt}\right):\left(\frac{dy}{dt}\right)$.

Vnde ſi ſtatuamus $\left(\frac{dy}{du}\right):\left(\frac{dx}{du}\right)=\operatorname{tang}\Phi$, per tertiam conditionem eſſe deberet $\left(\frac{dy}{dt}\right):\left(\frac{dx}{dt}\right)=-\cot\Phi$, ideoque

$\left(\frac{dy}{du}\right)=\left(\frac{dx}{du}\right)\operatorname{tang}\Phi$ et $\left(\frac{dy}{dt}\right)=-\left(\frac{dx}{dt}\right)\cot\Phi$,

qui valores in binis aequationibus praecedentibus ſubſtituti praeberent

$\left(\frac{dx}{du}\right)^2=\cos\Phi^2$ et $\left(\frac{dx}{dt}\right)^2=\sin\Phi^2\cdot\cos u^2$.

Manifeſtum autem eſt, his tribus conditionibus iunctim ſumtis nullo modo ſatisfieri poſſe, quandoquidem certum eſt, ſuperficiem ſphaericam nequaquam accurate in plano repraeſentari poſſe.

§. 8. Quo autem formulas differentiales ex calculo expellamus, faciamus ſequentes ſubſtitutiones

$\left(\frac{dx}{du}\right)=p$, $\left(\frac{dx}{dt}\right)=q$, $\left(\frac{dy}{du}\right)=r$ et $\left(\frac{dy}{dt}\right)=s$

ac primo quidem hinc fiet

$dx=p\,du+q\,dt$ et $dy=r\,du+s\,dt$

hic-

hicque ante omnia requiritur vt istae binae formulae integrabiles euadant, id quod eueniet, si p, q, r, s tales fuerint functiones binarum variabilium t et u, vt sit

$$\left(\frac{dp}{dt}\right)=\left(\frac{dq}{du}\right) \text{ et } \left(\frac{dr}{dt}\right)=\left(\frac{ds}{du}\right).$$

Praeterea vero valores supra inuenti ita exprimentur, vt sit

$$PQ = du\sqrt{pp+rr} \text{ et } PR = dt\sqrt{qq+ss}.$$

Tum vero anguli, quo elementum PQ ad axem inclinatur, tangens erit $=\frac{r}{p}$; at vero anguli, sub quo elementum PR ad axem inclinatur, tangens $=\frac{s}{q}$; denique anguli QPR tangens erit $\frac{qr-ps}{pq+rs}$.

§. 9. His igitur denominationibus introductis ad repraesentationem perfectam requirerentur tres sequentes conditiones:

$$\text{I. } pp+rr=1;\ \text{II. } qq+ss=\text{cos. } u^2;\ \text{III. } \frac{r}{p}=-\frac{q}{s}.$$

Hinc ergo, si fiat $\frac{r}{p}=\text{tang. } \Phi$, erit $\frac{s}{q}=-\text{cot. } \Phi$, ita vt sit

$$r = p \text{ tang. } \Phi \text{ et } s = -q \text{ cot. } \Phi,$$

vnde binae priores conditiones dant

$$pp = \text{cos. } \Phi^2 \text{ et } qq = \text{sin. } \Phi^2 \text{ cos. } u^2,$$

atque hinc deducimus

$$p = \text{cos. } \Phi \text{ et } q = -\text{sin. } \Phi \text{ cos. } u$$

hincque porro

$$r = \text{sin. } \Phi \text{ et } s = \text{cos. } \Phi \text{ cos. } u.$$

His igitur valoribus substitutis integrabiles reddi debent hae duae formulae:

$$dx = du \text{ cos. } \Phi - dt \text{ sin. } \Phi \text{ cos. } u \text{ et}$$

$$dy = du \text{ sin. } \Phi + dt \text{ cos. } \Phi \text{ cos. } u$$

ad quod cum requiratur vt sit

$$\frac{dp}{dt}=\frac{dq}{du} \text{ et } \frac{dr}{dt}=\frac{ds}{du},$$

orientur hae duae aequationes

$$\text{I. } -\left(\frac{d\Phi}{dt}\right)\text{sin. } \Phi = \text{sin. } u \text{ sin. } \Phi - \left(\frac{d\Phi}{du}\right)\text{cos. } u \text{ cos. } \Phi$$

$$\text{II. } \left(\frac{d\Phi}{dt}\right)\text{cos. } \Phi = -\text{sin. } u \text{ cos. } \Phi - \left(\frac{d\Phi}{du}\right)\text{cos. } u \text{ sin. } \Phi.$$

Hinc

Hinc igitur I. $\sin. \Phi +$ II. $\cos. \Phi$ praebet $o = \left(\frac{d\Phi}{du}\right) \cos. u$, vnde $\left(\frac{d\Phi}{du}\right) = o$, sicque angulus Φ tantum a variabili t pendere deberet: at vero haec combinatio: II. $\cos. \Phi -$ I. $\sin. \Phi$ dat $\left(\frac{d\Phi}{dt}\right) = -\sin. u$, ideoque pendere deberet ab u; quod cum praecedenti conclusioni contradicat, etiam per calculum euictum est, talem repraesentationem perfectam locum habere non posse.

§. 10. Cum igitur repraesentatio perfecta penitus excludatur, vtique dispatitatem in repraesentatione admittere cogimur, qua figura in plano descripta a figura sphaerica aberret. Prouti igitur talem aberrationem a veritate concedere voluerimus, repraesentationem ad scopum quouis casu propositum accommodare licebit; quare cum conditiones, quibus satisfacere desideramus, infinitis modis variari queant, casus nonnullos praecipuos in sequentibus euoluamus. Ante omnia autem assumemus, angulum, quem Meridiani cum Parallelis constituunt, vbique rectum esse debere; quandoquidem, si angulos obliquos admittere vellemus, repraesentatio maxime inepta esset proditura, quocirca in sequentibus perpetuo assumemus angulum Q P R esse rectum ideoque $\frac{r}{p} = -\frac{q}{s}$.

§. 11. Hanc igitur proprietatem, qua in repraesentatione omnes Paralleli Meridianos normaliter traiicere debent, in genere accuratius euoluamus. Hunc in finem iterum introducamus angulum Φ, vt sit $r = p$ tag. Φ ideoque $s = -q \cot. \Phi$. Quibus valoribus loco r et s substitutis sequentes duae formulae differentiales integrabiles reddi debebunt

$$dx = p\,du + q\,dt \quad \text{et} \quad dy = p\,du \text{ tag. } \Phi - q\,dt \cot. \Phi.$$

§. 12. Quo iam has formulas ad maiorem vniformitatem perducamus, loco p et q binas nouas variabiles m et n introducamus, ponendo $p = m \cos. \Phi$ et $q = n \sin. \Phi$, vnde euadet $r = m \sin. \Phi$ et $s = -n \cos. \Phi$, atque ambae formulae integrabiles

les reddendae erunt

$$dx = m\,du \operatorname{cof.} \Phi + n\,dt \operatorname{fin.} \Phi \text{ et } dy = m\,du \operatorname{fin.} \Phi - n\,dt \operatorname{cof.} \Phi.$$

Sicque totum negotium huc reducitur, vt inquiratur, cuiusmodi functiones m et n accipi debeant, vt istae duae formulae integrabiles reddantur; vbi imprimis respiciendum erit ad eam conditionem, quam insuper quouis casu adimplere voluerimus.

Hypothesis I.

Qua omnes Meridiani ad nostrum axem E F normales, Paralleli vero E I paralleli statuuntur.

§. 13. Cum angulus Φ metiatur inclinationem elementi P Q ad axem E F, quoniam assumsimus tag. $\Phi = \frac{r}{p}$, elementum vero P Q directionem Meridiani indicat, angulus iste Φ pro hac Hypothesi erit rectus, vnde ambae formulae differentiales erunt $dx = n\,dt$ et $dy = m\,du$, quae cum esse debeant integrabiles, id infinitis modis effici poterit, dummodo pro m functio quaecunque ipsius u, pro n vero functio ipsius t accipiatur; quamobrem insuper pluribus conditionibus, quae desiderari possunt, satisfieri poterit.

§. 14. Primum igitur effici poterit, vt omnes gradus longitudinis inter se fiant aequales, quandoquidem nulla ratio suadet, vt in his gradibus inaequalitas statuatur. Quod si ergo noster axis E F Aequatorem referat, ita vt abscissa E X repraesentet, arcum Aequatoris $al = t$, statui oportebit $x = t$, ideoque n vnitati vel alii quantitati constanti pro lubitu accipiendae aequale, tum vero pro applicata quaecunque functio ipsius ω accipi poterit.

§. 15. In hac ergo Hypothesi quadrilaterum P Q R S non solum erit parallelogrammum rectangulum, vti in Sphaera, sed etiam punctum Q in ipsa applicata X P producta erit situm, ita vt futurum sit $PQ = dy$ et $PR = dx = dt$. Quod si ergo sumeremus $y = u$, quoniam u denotat latitudinem loci, si $dx = dt$ referat gradum longitudinis, et $dy = du$ gradum lati- Tab. I. Fig. 4.

tudinis, hoc casu foret $dy = dx$. Verum talis repraesentatio omni vsu caritura et regiones Terrae vehementer distortas esset exhibitura.

§. 16. Pro applicata autem y talem functionem latitudinis u assumi conueniet, vt scopo cuipiam, quem nobis proponimus satisfiat. Ac primo quidem hic occurrit ista conditio, vt parallelogrammum in plano P Q R S simile reddatur parallelogrammo in Sphaera $p\,q\,r\,s$, quandoquidem hoc modo omnes saltem portiunculae minimae in superficie sphaerica similimodo in plano exhibebuntur. Atque haec est ipsa illa conditio, quae in Mappis Hydrographicis ab inuentore *Mercatoriis* dictis, obseruari solet, quoniam talis repraesentatio nauigantibus maxima commoda suppeditat, quem ergo repraesentandi modum breuiter accuratius euoluamus.

I. De Mappis Hydrographicis Mercatoris.

§. 16. Quoniam igitur hic requiritur, vt rectangulum P Q R S simile fiat rectangulo $p\,q\,r\,s$, vbi est $PQ = du$ et $PR = dt \cos. u$, ob $dx = dt$ fieri dedet $dy : dt = du : dt \cos. u$, vnde colligitur $dy = \frac{du}{\cos. u}$, hincque integrando erit $y = l \tan g. (45^\circ + \frac{1}{2}u)$, Latitudini scilicet quae in sphaera angulo denotatur, in hac repraesentatione respondebit applicata y, logarithmo hyperbolico tangentis anguli $45^\circ + \frac{1}{2}u$ aequalis; ex qua formula pro singulis latitudinibus u valores ipsius y computari et in tabula referri solent.

§. 17. Scilicet cum hic omnes Paralleli Aequatori aequales referantur, qui tamen in Sphaera continuo fiunt minores, gradus cuiusque Meridiani, qui in Sphaera sunt aequales in hac repraesentatione tanto maiores accipi oportet, quanto maiores hic gradus cuiusque Paralleli sunt quam super Sphaera. Hocque modo in Meridianis gradus latitudinis continuo magis augentur, quo maior fuerit latitudo, idque in eadem ratione, qua cosinus latitudinis diminuitur. Ita si du denotet gradum in in Meridiano super Sphaera, in his Mappis quantitas huius gradus est $\frac{du}{cos. u}$; vnde sub latitudine 60° gradus Meridiani duplo maior est quam in superficie sphaerica; at sub polo adeo crescit in infinitum, quam ob caussam istas mappas non vsque ad polos extendere licet.

§. 18. Maximum autem commodum, quod istae Mappae nauigantibus praestant, in eo consistit, quod curuae Loxodromicae, quae in Sphaera omnes Meridianos sub eodem angulo traiiciunt, in hac repraesentatione per lineas rectas exhibentur, quae scilicet omnes Meridianos, qui hic inter se sunt paralleli, sub eodem angulo intersecant.

§. 19. Ita si in Sphaera linea ap referat curuam Loxodromicam, quae Meridianos traiiciat sub angulo $= \zeta$, eiusque longitudo vocetur $ap = z$ erit $du : dz = cos. \zeta : 1$ ideoque $dz = \frac{du}{cos. \zeta}$ hincque $z = \frac{u}{cos. \zeta}$. Quod si iam isti lineae ap in plano respondeat linea EP, quoniam angulus EPX itidem est $= \zeta$, euidens est hanc lineam EP fore rectam, eiusque longitudinem $\frac{y}{cos. \zeta}$; vnde ex cognita quantitate lineae EP vicissim vera longitudo viae a naue percursae, scilicet linea ap, concludi poterit, cum sit $ap : EP = u : y$: haec autem ratio $u : y$ vt cognita spectari potest.

§. 20. Quem ad modum autem curuae Loxodromicae hoc modo in plano simplicissime per lineas rectas exhibentur, ita e contrario circuli maximi in Sphaera ducti hic per lineas maxime transcendentes repraesentabuntur. Sit enim ap arcus circuli maximi ad Aequatorem in a inclinati sub angulo $l a p = \theta$, erit vti constat $tang. u = tang. \theta sin. t$, vnde naturam curuae EP illi arcui respondentis definiri poterit per formulas $x = t$ et $y = l tang. (45^{\circ} + \frac{1}{2} u)$.

§. 21. Ad naturam igitur huius curuae EP inuestigandam denotet e numerum, cuius logarithmus hyperbolicus $= 1$,

 eritque

eritque $e^y = \text{tang.}\,(45^\circ + \frac{1}{2}u) = \frac{1 + \text{tang.}\,\frac{1}{2}u}{1 - \text{tang.}\,\frac{1}{2}u}$, hincque tang. $\frac{1}{2}u = \frac{e^y - 1}{e^y + 1}$, ex quo porro colligitur tang. $u = \frac{e^{2y} - 1}{2e^y}$, qui valor in aequatione ſuperiore ſubſtitutus ob $t = x$ praebebit hanc aequationem inter x et y: $\frac{e^{2y} - 1}{2e^y} = \text{tang.}\,\theta\,\text{ſin.}\,x$, qua natura huius curuae EP exprimitur; vnde patet, ſi longitudo x fuerit quam minima, tum fore etiam y minimum, ideoque $e^y = 1 + y$ et $e^{2y} = + 2y$; vnde ob ſin. $x = x$ erit $\frac{y}{1+y} = x\,\text{tang.}\,\theta$, ipsoque $\frac{y}{x} = \text{tang}\,\theta$; vnde patet curuam in E ad Aequatorem etiam ſub angulo θ inclinari. Tum vero ſumto $x = 90^\circ$, applicata y fiet maxima atque $\frac{e^{2y} - 1}{2e^y} = \text{tang.}\,\theta$ vnde deducitur

$$e^y = \text{tang.}\,\theta \pm \sqrt{\text{tang.}\,\theta^2 + 1} = \frac{\text{ſin.}\,\theta + 1}{\text{coſ.}\,\theta} = \sqrt{\frac{1 + \text{ſin.}\,\theta}{1 - \text{ſin.}\,\theta}}$$

quae expruſſio porro reducitur ad cot. $(45^\circ - \frac{1}{2}\theta)$, ſicque erit $e^y = \text{cot.}\,(45^\circ - \frac{1}{2}\theta)$ hinque

$$y = l\,\text{cot.}\,(45^\circ - \tfrac{1}{2}\theta) = l\,\text{tang.}\,(45^\circ + \tfrac{1}{2}\theta).$$

Ex quo intelligitur, hanc curuam maxime eſſe tranſcendentem.

2°.) De Mappis veram quantitatem cuiusque regionis exhibentibus.

§. 22. Maneant, vti in hac Hypotheſi aſſumſimus, omnes Meridiani inter ſe paralleli, gradus autem in Aequatore omnes inter ſe aequales, quibus igitur etiam gradus in omnibus Parallelis aequabuntur, ita vt ſit $x = t$; et nunc requiritur, vt area rectanguli PQRS $= dx\,dy$ aequalis reddatur areae rectanguli $pqrs$ in Sphaera $= du\,dt\,\text{coſ.}\,u$. Fiat igitur $dy = du\,\text{coſ.}\,u$ eritque integrando $y = \text{ſin.}\,u$, vnde conſtructio huiusmodi repraeſentationis erit facillima, quia ſingulae applicatae aequales ſumi debent

debent finibus latitudinum quibus respondent. Gradus autem in quolibet Meridiano ab Aequatore discedendo continuo diminuentur et sub polo plane euanescent; polus autem referetur per lineam rectam Aequatori EF parallelam ab eoque distantem interuallo fin. $u = 1$, hoc est radio Sphaerae aequali.

§. 23. Quod si ergo tota superficies Terrae hoc modo repraesentetur, mappa referet parallelogramum, cuius longitudo erit peripheriae totius Aequatoris $= 2\pi$ aequalis; latitudo autem vtrinque ab Aequatore ad distantiam $= 1$ extenditur, vnde area totius rectanguli erit $= 4\pi$, quae aequatur areae totius superficiei sphaericae. In talibus igitur mappis omnes Terrae regiones vera quantitate exhibebuntur, quanquam earum figura plurimum a veritate aberret. Semper enim area cuiusque regionis hoc modo in plano repraesentatae aequalis erit areae eiusdem regionis in superficie Terrae; vnde tales mappae inseruient diuersis Terrae regionibus secundum veram quantitatem inter se comparandis, quod commodissime praestabitur per gradus vel milliaria quadrata, dum singulis gradibus Aequatoris quindecim milliaria germanica tribuuntur.

Hypothesis II.

Qua regiones minimae in Terra per similes figuras in plano exhibentur.

§. 24. Quo similitudo ista obseruetur ante omnia necesse est, vt vbique Meridiani ad Parallelos normales statuantur, quam ob rem ambae formulae differentiales, quas integrabiles reddi oportet, erunt vti iam supra §. 12. sunt inuentae. Tab. I. Fig. 3.

$$dx = m\,du\,\mathrm{cos}.\,\Phi + n\,dt\,\mathrm{sin}.\,\Phi \text{ et}$$
$$dy = m\,du\,\mathrm{sin}.\,\Phi - n\,dt\,\mathrm{cos}.\,\Phi$$

hinc autem fiunt elementa

$PQ = du\sqrt{pp + rr} = m\,du$ et $PR = dt\sqrt{qq + ss} = n\,dt$, angulus vero QPR has formulas iam redditus est rectus.

§. 25. Cum igitur rectangulum PQRS simile esse debeat rectangulo $pqrs$, necesse est vt fiat $PQ:PR = pq:pr$ hoc est $m:n = 1:\cos. u$, ideoque $n = m \cos. u$, quare binae nostrae formulae differentiales erunt:

$$dx = m\,du \cos.\Phi + m\,dt \cos. u \sin.\Phi \text{ et}$$
$$dy = m\,du \sin.\Phi - m\,dt \cos. u \cos.\Phi.$$

§. 26. Totum ergo negotium huc reducitur, vt indicetur, quales functiones ipsarum t et u pro m et Φ assumi debeant, vt ambae istae formulae integrabiles reddantur. Quoniam autem supra posuimus $p = m \cos.\Phi$ et $r = m \sin.\Phi$, breuitatis gratia has litteras p et r introducamus, vt habeamus has duas aequationes:

$$dx = p\,du + r\,dt \cos. u \text{ et}$$
$$dy = r\,du - p\,dt \cos. u$$

et iam quaeritur, quales functiones ipsarum t et u pro litteris p et r accipi debeant, vt ambae istae formulae integrabiles euadant, vbi quidem statim casus Mapparum Hydrographicarum se offert, quippe quo sumi debet $p = 0$ et $r = \frac{1}{\cos. u}$. Alios autem casus hic diuinando non tam facile elicere licet.

§. 27. Ex notis autem integrabilitatis conditionibus requiritur vt sit

$$\left(\frac{dp}{dt}\right) = d.\left(\frac{r \cos. u}{du}\right) = -r \sin. u + \cos. u \frac{dr}{du} \text{ et}$$
$$\left(\frac{dr}{dt}\right) = -d.\left(\frac{p \cos. u}{du}\right) = p \sin. u - \cos. u \frac{dp}{du},$$

ex quarum posteriore fit $\frac{dp}{du} = p \operatorname{tang.} u - \frac{dr}{dt \cos. u}$. Quare cum sit $dp = du\left(\frac{dp}{du}\right) + dt\left(\frac{dp}{dt}\right)$, hinc nascitur ista noua conditio:

$$dp = p\,du \operatorname{tang.} u - \frac{dr}{dt} \cdot \frac{du}{\cos. u} - r\,dt \sin. u + \frac{dr}{du} dt \cos u$$

quae per $\cos. u$ multiplicata, et termino p ad alteram partem partem translato fit

$$dp \cos. u - p\,du \sin. u = -r\,dt \sin. u \cos. u + \left(\frac{dr}{du}\right) dt \cos. u^2 - \left(\frac{dr}{dt}\right) du$$

vbi, quia membrum sinistrum sponte est integrabile, etiam dextrum

dextrum ad integrabilitatem perduci debet, quaerendo scilicet pro r idoneam functionem ipsarum t et u.

§. 28. Hanc ob rem etiam viam inire oportet has formulas resoluendi. Postquam autem difficultates probe perpendissem, duplex se mihi obtulit methodus hoc negotium conficiendi, quarum altera suppeditat innumerabiles solutiones particulares, altera vero me ad solutionem generalissimam perduxit. Has igitur ambas methodos, quibus Analysi circa functiones duarum variabilium versanti insignia incrementa afferi videntur, hic accuratius euoluam.

Methodus particularis resoluendi aequationes differentiales:

$$dx = p\,du + r\,dt \cos u, \quad dy = r\,du - p\,dt \cos u.$$

§. 29. Quoniam ambae functiones p et r vtramque variabilem u et t inuoluunt, vtramque producto ex functione ipsius u in functionem ipsius t aequalem statuamus. Sit igitur $p = \mathrm{UT}$ et $r = \mathrm{V}\Theta$, existentibus U et V functionibus solius u, T vero et Θ functionibus solius t, sicque habebimus has duas formulas differentiales integrabiles reddendas:

$$\text{I. } dx = \mathrm{UT}\,du + \mathrm{V}\Theta\,dt \cos u$$

$$\text{II. } dy = \mathrm{V}\Theta\,du - \mathrm{UT}\,dt \cos u.$$

§. 30. Hinc iam duplici modo tam valor ipsius x quam ipsius y per formulas integrales exhiberi poterit. Si enim quantitas t vt constans spectatur, ideoque posteriora membra euanescant, ex prioribus colligetur:

$$x = \mathrm{T}\int \mathrm{U}\,du \text{ et } y = \Theta \int \mathrm{V}\,du$$

sin autem quantitas u pro constante habeatur, ex posterioribus membris fiet:

$$x = \mathrm{V} \cos u \int \Theta\,dt \text{ et } y = -\mathrm{U} \cos u \int \mathrm{T}\,dt$$

atque

atque hi gemini vtriusque valores inter ſe aequales eſſe debent, vnde pro x hanc adipiſcimur aequationem:

$$\mathrm{T}\int \mathrm{U}\, du = \mathrm{V}\,\mathrm{coſ}.\, u \int \Theta\, dt \quad \text{ſiue} \quad \int \frac{\mathrm{U}\, du}{\mathrm{V}\,\mathrm{coſ}.\, u} = \int \frac{\Theta\, dt}{\mathrm{T}}$$

pro y autem erit

$$\Theta \int \mathrm{V}\, du = -\mathrm{U}\,\mathrm{coſ}.\, u \int \mathrm{T}\, dt \quad \text{ſiue} \quad \int \frac{\mathrm{V}\, du}{\mathrm{U}\,\mathrm{coſ}.\, u} = -\int \frac{\mathrm{T}\, dt}{\Theta}.$$

Ex quibus duabus conditionibus indolem functionum U et V T et Θ elici oportet.

§. 31. Cum igitur eſſe debeat $\int \frac{\mathrm{U}\, du}{\mathrm{V}\,\mathrm{coſ}.\, u} = \int \frac{\Theta\, dt}{\mathrm{T}}$, manifeſtum eſt, has duas fractiones quantitati conſtanti eſſe debere aequales, quandoquidem ambae variabiles t et u neutiquam a ſe inuicem pendent. Sit igitur α iſta quantitas conſtans, eritque

$$\int \mathrm{U}\, du = \alpha\, \mathrm{V}\,\mathrm{coſ}.\, u \quad \text{et} \quad \int \Theta\, dt = \alpha\, \mathrm{T}.$$

Simili modo cum ſit $\int \frac{\mathrm{V}\, du}{\mathrm{U}\,\mathrm{coſ}.\, u} = -\int \frac{\mathrm{T}\, dt}{\Theta}$, vtraque fractio aequetur quantitati conſtanti β, indeque fiet

$$\int \mathrm{V}\, du = \beta\, \mathrm{U}\,\mathrm{coſ}.\, u \quad \text{et} \quad \int \mathrm{T}\, dt = -\beta\, \Theta.$$

Hocque modo formulae integrales ad quantitates abſolutas reducuntur, vnde valores ipſarum x et y ita ſine ſigno ſummatorio exprimentur:

$$x = \alpha\, \mathrm{T}\, \mathrm{V}\,\mathrm{coſ}.\, u \quad \text{et} \quad y = \beta\, \Theta\, \mathrm{U}\,\mathrm{coſ}.\, u.$$

§. 32. Statuamus breuitatis gratia $\mathrm{U}\,\mathrm{coſ}.\, u = \mathrm{P}$ et $\mathrm{V}\,\mathrm{coſ}.\, u = \mathrm{Q}$, ita vt ſit $\mathrm{U} = \frac{\mathrm{P}}{\mathrm{coſ}.\, u}$ et $\mathrm{V} = \frac{\mathrm{Q}}{\mathrm{coſ}.\, u}$, vnde quatuor noſtrae formulae erunt:

$$\int \Theta\, dt = \alpha\, \mathrm{T} \quad \text{et} \quad \int \mathrm{T}\, dt = -\beta\, \Theta$$

$$\int \frac{\mathrm{P}\, du}{\mathrm{coſ}.\, u} = \alpha\, \mathrm{Q} \quad \text{et} \quad \int \frac{\mathrm{Q}\, du}{\mathrm{coſ}.\, u} = \beta\, \mathrm{P}.$$

Iam priores formulae vtriusque ordinis differentiatae dant $\Theta = \frac{\alpha\, d\mathrm{T}}{dt}$, $\mathrm{P} = \frac{\alpha\, d\mathrm{Q}\,\mathrm{coſ}.\, u}{du}$, qui valores in poſterioribus ſubſtituti praebent

$$\int \mathrm{T}\, dt = -\frac{\alpha\beta\, d\mathrm{T}}{dt} \quad \text{et} \quad \int \frac{\mathrm{Q}\, du}{\mathrm{coſ}.\, u} = \frac{\alpha\beta\, d\mathrm{Q}\,\mathrm{coſ}.\, u}{du}.$$

Quae

Quae aequationes denuo differentiatae sumendis elementis dt et du constantibus praebent sequentes aequationes:

$$T = -\frac{\alpha\beta\, d\, dT}{dt^2} \quad \text{et} \quad Q = \frac{\alpha\beta\, d\, dQ\, \text{cos}.\, u^2}{du^2} - \frac{\alpha\beta\, dQ\, \text{sin}.\, u\, \text{cos}.\, u}{du}$$

sicque ad binas aequationes differentiales secundi gradus sumus deducti, a quarum integratione tota solutio pendet.

§. 34. Incipiamus a priore aequatione $T = -\frac{\alpha\beta\, d\, dT}{dt^2}$ quae ducta in $2\, dT$ et integrata praebet $TT = -\frac{\alpha\beta\, dT^2}{dt^2} + A$ vnde colligitur $dt^2 = \frac{\alpha\beta\, dT^2}{A - TT}$. Simili modo altera aequatio

$$Q = \frac{\alpha\beta\, d\, dQ\, \text{cos}.\, u^2}{du^2} - \frac{\alpha\beta\, dQ\, \text{sin}.\, u\, \text{cos}.\, u}{du}$$

ducta in $2\, dQ$ et integrata praebet $QQ = \frac{\alpha\beta\, dQ^2\, \text{cos}.\, u^2}{du^2} + B$, vnde colligitur $\frac{du^2}{\text{cos}.\, u^2} = \frac{\alpha\beta\, dQ^2}{QQ - B}$. Pro harum autem integratione vlteriori duos casus distingui oportet, prouti quantitas $\alpha\beta$ fuerit vel positiua vel negatiua.

Casus prior

quo est $\alpha\beta = +\lambda\lambda$

ideoque $\beta = \frac{\lambda\lambda}{\alpha}$.

§. 35. Hoc ergo casu habebimus $dt^2 = \frac{\lambda\lambda\, dT^2}{A - TT}$, vbi, cum A debeat esse quantitas positiua, ponamus $A = aa$ eritque $dt = \frac{\lambda\, dT}{\sqrt{(aa - TT)}}$, cuius integrale manifesto est $t + \delta = \lambda A\, \text{sin}.\, \frac{T}{a}$; vicissim ergo colligitur $T = a\, \text{sin}.\, (\frac{t + \delta}{\lambda})$, vnde cum sit

$dT = \frac{a\, dt}{\lambda}\, \text{cos}.\, (\frac{t + \delta}{\lambda})$ ob $\Theta = \frac{\alpha\, dT}{dt}$ erit nunc

$\Theta = \frac{\alpha a}{\lambda}\, \text{cos}.\, (\frac{t + \delta}{\lambda})$.

§. 36. Altera vero aequatio integranda, ob $\alpha\beta = \lambda\lambda$ erit $\frac{du}{\text{cos}.\, u} = \frac{\lambda\, dQ}{\sqrt{(QQ - B)}}$, quae integrata dat

$$l\, \text{tang}.\, (45^\circ + \tfrac{1}{2}u) + \lambda\, l\varepsilon = \lambda\, l(Q + \sqrt{QQ - B}).$$

Quo autem hanc formulam commodius euoluere queamus, vocemus $\text{tang}.\, (45^\circ + \frac{1}{2}u) = s$, et cum sit $l s = \int \frac{du}{\text{cos}.\, u}$ erit $\frac{ds}{s} = \frac{du}{\text{cos}.\, u}$

ideoque $ds = \frac{s\,du}{\cos. u}$. Cum igitur sit
$l\varepsilon^\lambda s = \lambda l(Q + \sqrt{QQ - B})$ erit $\varepsilon^\lambda s = (Q + \sqrt{QQ - B})^\lambda$

ideoque $Q + \sqrt{QQ - B} = \varepsilon s^{\frac{1}{\lambda}}$, vbi breuitatis gratia faciamus $\frac{1}{\lambda} = \nu$, et facta euolutione prodibit $Q = \frac{1}{2}\varepsilon s^\nu + \frac{B s^{-\nu}}{2\varepsilon}$, hincque fit $dQ = \frac{1}{2}\nu\varepsilon s^{\nu-1} ds - \frac{\nu B}{2\varepsilon} s^{-\nu-1} ds$, quae aequatio ob $ds = \frac{s\,du}{\cos. u}$ abit in hanc

$$dQ = \frac{\frac{1}{2}\nu\varepsilon s^\nu du}{\cos. u} - \frac{\nu B}{2\varepsilon} s^{-\nu} \frac{du}{\cos. u}.$$

Quia igitur erat $P = \frac{\alpha\, dQ \cos. u}{du}$ erit

$$P = \tfrac{1}{2}\alpha\nu\varepsilon s^\nu - \frac{\alpha\nu B s^{-\nu}}{2\varepsilon}.$$

§. 37. His igitur valoribus inuentis erit

$$U = \frac{\alpha\nu\varepsilon s^\nu}{2\cos. u} - \frac{\alpha\nu B s^{-\nu}}{2\varepsilon\cos. u} \text{ et } V = \frac{\varepsilon s^\nu}{2\cos. u} + \frac{B s^{-\nu}}{2\varepsilon\cos. u}$$

ex quibus denique colligimus ambas nostras coordinatas x et y: scilicet

$$x = \tfrac{1}{2}\alpha a \sin.\left(\tfrac{t+\delta}{\lambda}\right)\left(\varepsilon s^\nu + \tfrac{B}{\varepsilon} s^{-\nu}\right) \text{ et}$$

$$y = \tfrac{1}{2}\alpha\nu\lambda a \cos.\left(\tfrac{t+\delta}{\lambda}\right)\left(\varepsilon s^\nu - \tfrac{B}{\varepsilon} s^{-\nu}\right)$$

vbi meminisse oportet esse $\nu = \frac{1}{\lambda}$ et $s = \text{tang.}(45^\circ + \frac{1}{2}u)$; vnde ad has formulas concinniores reddendas, ponamus $B = \varepsilon\varepsilon b$, quibus notatis obtinebimus

$$x = \tfrac{1}{2}\alpha\varepsilon a \sin.\left(\tfrac{t+\delta}{\lambda}\right)\left(s^{\frac{1}{\lambda}} + b s^{-\frac{1}{\lambda}}\right)$$

$$y = \tfrac{1}{2}\alpha\varepsilon a \cos.\left(\tfrac{t+\delta}{\lambda}\right)\left(s^{\frac{1}{\lambda}} - b s^{-\frac{1}{\lambda}}\right).$$

Casus posterior

quo $\alpha\beta = -\mu\mu$ ideoque $\beta = -\frac{\mu\mu}{\alpha}$.

§. 38. Hoc ergo casu habebimus $dt^2 = -\frac{\mu\mu\, dT^2}{A - TT}$ hincque

$dt =$

$dt = \frac{\mu\, dT}{\sqrt{TT - A}}$, vnde integrando fit

$$t + \delta = \mu\, l\,(T + \sqrt{TT - A})$$

vnde si e denotet numerum, cuius logarithmus hyperbolicus $= 1$

erit $e^{\frac{t+\delta}{\mu}} = T + \sqrt{TT - A}$. Sit breuitatis gratia $\frac{t+\delta}{\mu} = \theta$

ita vt sit $d\theta = \frac{dt}{\mu}$ eritque $e^{\theta} - T = \sqrt{TT - A}$, vnde fit

$$T = \frac{e^{2\theta} + A}{2\, e^{\theta}} = \tfrac{1}{2}\, e^{\theta} + \tfrac{1}{2}\, A\, e^{-\theta}. \text{ Hinc autem fit}$$

$$dT = \frac{dt}{2\mu}\, e^{\theta} - \frac{A\, dt}{2\mu}\, e^{-\theta}, \text{ ex quo fit}$$

$$\Theta = \frac{\alpha}{2\mu}\,(e^{\theta} - A\, e^{-\theta}).$$

§. 39. Hoc autem casu porro erit

$$\frac{du^2}{\operatorname{cos}. u^2} = -\frac{\mu\mu\, dQ^2}{QQ - B} = \frac{\mu\mu\, dQ^2}{B - QQ}.$$

Quia igitur B necessario est positiuum, ponamus $B = bb$, vt fiat $\frac{du}{\operatorname{cos}. u} = \frac{\mu\, dQ}{\sqrt{(bb - QQ)}}$ et integrando

$$l\, \operatorname{tang}.\,(45^\circ + \tfrac{1}{2} u) + l\, \varepsilon = \mu\, A\, \operatorname{sin}.\, \frac{Q}{b},$$

vbi si iterum sit $\operatorname{tang}.\,(45^\circ + \tfrac{1}{2} u) = s$, erit $\frac{l\varepsilon s}{\mu} = A\, \operatorname{sin}.\, \frac{Q}{b}$, vnde vicissim deducimus $Q = b\, \operatorname{sin}.\, \frac{l\varepsilon s}{\mu}$, hincque

$$dQ = \frac{b}{\mu} \cdot \frac{ds}{s} \operatorname{cos}.\, \frac{l\varepsilon s}{\mu} = \frac{b}{\mu} \frac{du}{\operatorname{cos}. u} \operatorname{cos}.\, \frac{l\varepsilon s}{\mu}, \text{ vnde fit}$$

$$P = \frac{\alpha b}{\mu} \operatorname{cos}.\, \frac{l\varepsilon s}{\mu}.$$

§. 40. Cum igitur ex superioribus sit

$$x = \alpha\, T\, V\, \operatorname{cos}. u = \alpha\, T\, Q \text{ et } y = \beta\, \Theta\, P = -\frac{\mu\mu}{\alpha}\, \Theta\, P$$

erit valoribus modo erutis substituendis

$$x = \tfrac{1}{2}\, \alpha\, b\, \operatorname{sin}.\, \frac{l\varepsilon s}{\mu}\,(e^{\theta} + A\, e^{-\theta}) \text{ et}$$

$$y = -\tfrac{1}{2}\, \alpha\, b\, \operatorname{cos}.\, \frac{l\varepsilon s}{\mu}\,(e^{\theta} - A\, e^{-\theta}).$$

Vbi meminisse oportet esse

$$\theta = \frac{t + \delta}{\mu} \text{ et } s = \operatorname{tang}.\,(45^\circ + \tfrac{1}{2} u).$$

§. 41. Quoniam in his formulis nonnullae quantitates arbitrio noſtro penitus ſunt relictae, hae ſolutiones iam ſatis late patent, et innumerabiles caſus ſpeciales in ſe complectuntur. Verum multo adeo latius haec ſolutio extendi poteſt dum binae pluresue quaeuis ſolutiones inuentae inter ſe coniungi poſſunt. Scilicet: ſi inuenti fuerint primo hi valores: $x = M$ et $y = N$; deinde vero $x = M'$ et $y = N'$; praeterea etiam $x = M''$ et $y = N''$ etc., tum ex his ſolutionibus iſta multo generalior formari poterit:

$$x = \mathfrak{A}M + \mathfrak{B}M' + \mathfrak{C}M'' + \mathfrak{D}M''' \text{ etc. et}$$

$$y = \mathfrak{A}N + \mathfrak{B}N' + \mathfrak{C}N'' + \mathfrak{D}N''' \text{ etc.}$$

quae ſolutio vtique tam generalis videtur, vt omnes ſolutiones poſſibiles in ſe complectatur.

Methodus generalis reſoluendi aequationes differentiales

$$dx = p\,du + r\,dt \operatorname{cof.} u \text{ et } dy = r\,du - p\,dt \operatorname{cof.} u.$$

§. 42. Quaeratur eiusmodi combinatio harum duarum formularum, quae reſolutionem in duos factores admittat. Hunc in finem prior ducatur in α, poſterior vero in β et aggregatum ambarum erit

$$\alpha\,dx + \beta\,dy = p(\alpha\,du - \beta\,dt \operatorname{cof.} u) + r(\beta\,du + \alpha\,dt \operatorname{cof.} u)$$

cuius factores differentiales, vt ad ſimilitudinem perducantur, ita diſponantur:

$$\alpha\,dx + \beta\,dy = \alpha p\left(du - \tfrac{\beta}{\alpha}\,dt \operatorname{cof.} u\right) + \beta r\left(du + \tfrac{\alpha}{\beta}\,dt \operatorname{cof.} u\right).$$

Iam fiat $\frac{\alpha}{\beta} = -\frac{\beta}{\alpha}$, ſiue $\alpha\alpha + \beta\beta = 0$ ſiue $\beta = \alpha\sqrt{-1}$, et iſta combinatio dabit

$$dx + dy\sqrt{-1} = (p + r\sqrt{-1})(du - \sqrt{-1}\,dt \operatorname{cof.} u)$$

quae forma, vt factor differentialis integrabilis reddatur, ita repraeſentetur

$$dx + dy\sqrt{-1} = \operatorname{cof.} u\,(p + r\sqrt{-1})\left(\tfrac{du}{\operatorname{cof.} u} - \sqrt{-1}\,dt\right).$$

§. 43.

§. 43. Ponamus nunc $\frac{du}{\cos. u} - dt\sqrt{-1} = dz$, vt fit

$z = l\,\text{tang.}\,(45^\circ + \tfrac{1}{2}u) - t\sqrt{-1}$ eritque

$$dx + dy\sqrt{-1} = \cos. u\,(p + r\sqrt{-1})\,dz$$

quae aequatio manifesto integrabilis esse nequit, nisi factor finitus $\cos. u\,(p + r\sqrt{-1})$ sit functio ipsius z; quaecunque autem fuerit functio, integratio semper locum habebit. Vnde patet, etiam integrale futurum esse functionem ipsius z, ita, vt formula $x + y\sqrt{-1}$ aequetur functioni cuicunque ipsius z hoc est quantitatis

$$l\,\text{tang.}\,(45^\circ + \tfrac{1}{2}u) - t\sqrt{-1}.$$

§. 44. Vt autem haec formula concinnior reddatur statuamus vt hactenus $\text{tang.}\,(45^\circ + \tfrac{1}{2}u) = s$, vt fit

$$\frac{ds}{s} = \frac{du}{\cos. u} \text{ et } z = ls - t\sqrt{-1}.$$

Nunc more solito denotet character Γ functionem quamcunque quantitatis suffixae, eritque

$$x + y\sqrt{-1} = \Gamma : (ls - t\sqrt{-1})$$

siue etiam, quod eodem redit,

$$x + y\sqrt{-1} = 2\,\Gamma : (ls - t\sqrt{-1}).$$

Cum autem formula $\sqrt{-1}$ natura sua signum ambiguum $\pm$ inuoluat, erit quoque

$$x - y\sqrt{-1} = 2\,\Gamma : (ls + t\sqrt{-1}).$$

Hinc autem colligimus fore

$$x = \Gamma : (ls - t\sqrt{-1}) + \Gamma : (ls + t\sqrt{-1}) \text{ et}$$

$$y\sqrt{-1} = \Gamma : (ls - t\sqrt{-1}) - \Gamma : (ls + t\sqrt{-1}).$$

Constat autem has expressiones pro x et y semper reduci ad valores reales.

§. 45. Ita si Γ designet potestatem quamcunque formulae suffixae, vel etiam multiplum quodcunque, cuius exponens sit λ, facta euolutione et posito v. g. $ls = v$ fiet

 $x = v^\lambda$

$$x = v^\lambda - \frac{\lambda(\lambda-1)}{1 \cdot 2} v^{\lambda-2} \cdot tt + \frac{\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} v^{\lambda-4} t^4$$
$$- \frac{\lambda \ldots\ldots (\lambda-5)}{1 \ldots\ldots 6} v^{\lambda-6} t^6 + \text{etc. et}$$
$$y = \frac{\lambda}{1} v^{\lambda-1} t - \frac{\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} v^{\lambda-3} t^3 + \frac{\lambda \ldots\ldots (\lambda-4)}{1 \ldots\ldots 5} v^{\lambda-5} \cdot t^5$$
$$- \frac{\lambda \ldots\ldots (\lambda-6)}{1 \ldots\ldots 7} v^{\lambda-7} \cdot t^7.$$

Ex quibus formulis valor quidem ipſius y prodiiſſet mutatis ſignis: verum ex rei natura intelligitur, ambas coordinatas x et y tam negatiue quam poſitiue accipi poſſe.

§. 46. Euidens autem eſt hos valores plurimum diſcrepare ab iis quos ſolutio particularis nobis ſuppeditauit. Hinc autem caſus Mapparum Hydrographicarum, qui in ſuperioribus formulis non continebatur, ſponte ſe prodit ſumendo $\lambda = 1$; tum enim erit $x = ls = l\,\text{tang.}(45^\circ + \frac{1}{2}u)$ et $y = t$. Supra quidem iſti valores pro x et y erant permutati: verum perſpicuum eſt coordinatas x et y ſemper inter ſe commutari poſſe.

§. 47. Interim tamen certum eſt, omnes valores ſupra inuentos etiam in his formulis contineri debere, quoniam iſta ſolutio manifeſto maxime eſt generalis, quod oſtendiſſe operae erit pretium. Notetur igitur ſi formulo $\Gamma : z$ denotet functiones quamcunque ipſius z, tum eius loco ſemper ſcribi poſſe $\Delta : Z$, exiſtente Z functione quacunque ipſius z. Hoc notato cum ſit $z = ls - t\sqrt{-1}$, pro Z ſumamus $e^{\alpha z}$, ideoque loco $\Gamma : (ls - t\sqrt{-1})$ ſcribere licebit $\Delta : e^{\alpha ls - \alpha t\sqrt{-1}}$. Eſt vero $e^{\alpha ls} = s^\alpha$; tum vero eſt

$$e^{\alpha t\sqrt{-1}} = \text{cof.}\, \alpha t \pm \sqrt{-1}\, \text{fin.}\, \alpha t, \text{ vnde fiet}$$
$$e^{\alpha ls - \alpha t\sqrt{-1}} = s^\alpha (\text{cof.}\, \alpha t - \sqrt{-1}\, \text{fin.}\, \alpha t).$$

Quo circa binis huiusmodi formulis coniungendis erit

$$x = \Delta : s^\alpha (\text{cof.}\, \alpha t - \sqrt{-1}\, \text{fin.}\, \alpha t) + \Delta : s^\alpha (\text{cof.}\, \alpha t + \sqrt{-1}\, \text{fin.}\, \alpha t)$$
$$y\sqrt{-1} = \Delta : s^\alpha (\text{cof.}\, \alpha t - \sqrt{-1}\, \text{fin.}\, \alpha t) - \Delta : s^\alpha (\text{cof.}\, \alpha t + \sqrt{-1}\, \text{fin.}\, \alpha t)$$

vbi obſeruaſſe iuuabit, hos binos valores non ſolum per conſtantem quamcunque multiplicari ſed etiam inter ſe permutari poſſe.

§. 48.

§. 48. Consideremus hic casum quo $\Delta : Z = Z$ eritque

$$x = 2 s^{\alpha} \operatorname{cos.} \alpha t \text{ et } y = 2 s^{\alpha} \operatorname{sin.} \alpha t.$$

Quod si hic α negatiue capiamus, valores satisfacientes erunt quoque

$$x = 2 s^{-\alpha} \operatorname{cos.} \alpha t \text{ et } y = -2 s^{-\alpha} \operatorname{sin.} \alpha t.$$

Supra autem iam notauimus, binas solutiones semper ita inter se combinari posse, vt ambae per quantitates constantes quascunque multiplicentur; vnde ex his duabus solutionibus formari poterit ista multo latius patens:

$$x = (\mathfrak{A} s^{\alpha} + \mathfrak{B} s^{-\alpha}) \operatorname{cos.} \alpha t \text{ et } y = (\mathfrak{A} s^{\alpha} - \mathfrak{B} s^{-\alpha}) \operatorname{sin.} \alpha t$$

in quibus formalis solutio ante §. 37. data continetur. Euidens autem est formulas hic per functionem Δ exhibitas infinities esse generaliores.

§. 49. Vt hinc etiam solutionem particularem posteriorem eruamus, sumamus

$Z = \operatorname{cos.} \alpha z = \operatorname{cos.} (\alpha l s - \alpha t \sqrt{-1}) = \operatorname{cos.} \alpha l s \operatorname{cos.} \alpha t \sqrt{-1} + \operatorname{sin.} \alpha l s \operatorname{sin.} \alpha t \sqrt{-1}$;

constat autem esse

$$\operatorname{cos.} \alpha t \sqrt{-1} = \frac{e^{-\alpha t} + e^{+\alpha t}}{2} \text{ et}$$

$$\operatorname{sin.} \alpha t \sqrt{-1} = \frac{e^{-\alpha t} - e^{+\alpha t}}{2\sqrt{-1}} \text{ vnde fit}$$

$$Z = \left(\frac{e^{-\alpha t} + e^{+\alpha t}}{2}\right) \operatorname{cos.} \alpha l s + \left(\frac{e^{-\alpha t} - e^{+\alpha t}}{2\sqrt{-1}}\right) \operatorname{sin.} \alpha l s.$$

Nunc igitur characterem Δ praefigendo erit

$$x = \Delta : \left(\frac{\operatorname{cos.} \alpha l s (e^{-\alpha t} + e^{+\alpha t})}{2} + \frac{(e^{-\alpha t} - e^{+\alpha t}) \operatorname{sin.} \alpha l s}{2\sqrt{-1}}\right)$$

$$+ \Delta : \left(\frac{\operatorname{cos.} \alpha l s (e^{-\alpha t} + e^{\alpha t})}{2} - \frac{\operatorname{sin.} \alpha l s (e^{-\alpha t} - e^{\alpha t})}{2\sqrt{-1}}\right) \text{ et}$$

$$y\sqrt{-1} = \Delta : \left(\frac{\operatorname{cos.} \alpha l s (e^{-\alpha t} + e^{\alpha t})}{2} + \frac{\operatorname{sin.} \alpha l s (e^{-\alpha t} - e^{\alpha t})}{2\sqrt{-1}}\right)$$

$$- \Delta : \left(\frac{\operatorname{cos.} \alpha l s (e^{-\alpha t} + e^{\alpha t})}{2} - \frac{\operatorname{sin.} \alpha l s (e^{-\alpha t} - e^{\alpha t})}{2\sqrt{-1}}\right).$$

Quod

§. 48. Consideremus hic casum quo $\Delta : Z = Z$ eritque

$$x = 2s^{\alpha} \operatorname{cos}. \alpha t \text{ et } y = 2s^{\alpha} \operatorname{sin}. \alpha t.$$

Quod si hic α negatiue capiamus, valores satisfacientes erunt quoque

$$x = 2s^{-\alpha} \operatorname{cos}. \alpha t \text{ et } y = -2s^{-\alpha} \operatorname{sin}. \alpha t.$$

Supra autem iam notauimus, binas solutiones semper ita inter se combinari posse, vt ambae per quantitates constantes quascunque multiplicentur; vnde ex his duabus solutionibus formari poterit ista multo latius patens:

$$x = (\mathfrak{A}s^{\alpha} + \mathfrak{B}s^{-\alpha}) \operatorname{cos}. \alpha t \text{ et } y = (\mathfrak{A}s^{\alpha} - \mathfrak{B}s^{-\alpha}) \operatorname{sin}. \alpha t$$

in quibus formulis solutio ante §. 37. data continetur. Euidens autem est formulas hic per functionem Δ exhibitas infinities esse generaliores.

§. 49. Vt hinc etiam solutionem particularem posteriorem eruamus, sumamus

$Z = \operatorname{cos}. \alpha z = \operatorname{cos}. (\alpha ls - \alpha t\sqrt{-1}) = \operatorname{cos}. \alpha ls \operatorname{cos}. \alpha t\sqrt{-1} + \operatorname{sin}. \alpha ls \operatorname{sin}. \alpha t\sqrt{-1}$;

constat autem esse

$$\operatorname{cos}. \alpha t\sqrt{-1} = \frac{e^{-\alpha t} + e^{+\alpha t}}{2} \text{ et}$$

$$\operatorname{sin}. \alpha t\sqrt{-1} = \frac{e^{-\alpha t} - e^{+\alpha t}}{2\sqrt{-1}} \text{ vnde fit}$$

$$Z = \left(\frac{e^{-\alpha t} + e^{+\alpha t}}{2}\right) \operatorname{cos}. \alpha ls + \left(\frac{e^{-\alpha t} - e^{+\alpha t}}{2\sqrt{-1}}\right) \operatorname{sin}. \alpha ls.$$

Nunc igitur characterem Δ praefigendo erit

$$x = \Delta : \left(\frac{\operatorname{cos}. \alpha ls (e^{-\alpha t} + e^{+\alpha t})}{2} + \frac{(e^{-\alpha t} - e^{+\alpha t}) \operatorname{sin}. \alpha ls}{2\sqrt{-1}}\right)$$

$$+ \Delta : \left(\frac{\operatorname{cos}. \alpha ls (e^{-\alpha t} + e^{\alpha t})}{2} - \frac{\operatorname{sin}. \alpha ls (e^{-\alpha t} - e^{\alpha t})}{2\sqrt{-1}}\right) \text{ et}$$

$$y\sqrt{-1} = \Delta : \left(\frac{\operatorname{cos}. \alpha ls (e^{-\alpha t} + e^{\alpha t})}{2} + \frac{\operatorname{sin}. \alpha ls (e^{-\alpha t} - e^{\alpha t})}{2\sqrt{-1}}\right)$$

$$- \Delta : \left(\frac{\operatorname{cos}. \alpha ls (e^{-\alpha t} + e^{\alpha t})}{2} - \frac{\operatorname{sin}. \alpha ls (e^{-\alpha t} - e^{\alpha t})}{2\sqrt{-1}}\right).$$

Quod

Quod si ergo pro $\Delta : Z$ sumatur ipsum Z erit

$$x = \frac{\text{cos.}\, \alpha\, l\, s\, (e^{-\alpha t} + e^{\alpha t})}{2} \text{ et } y\sqrt{-1} = \frac{\text{sin.}\, \alpha\, l\, s\, (e^{-\alpha t} - e^{\alpha t})}{\sqrt{-1}}$$

sumto autem α negatiuo erit

$$x = \text{cos.}\, \alpha\, l\, s\, (e^{\alpha t} + e^{-\alpha t}) \text{ et } y\sqrt{-1} = \frac{\text{sin.}\, \alpha\, l\, s\, (e^{\alpha t} - e^{-\alpha t})}{\sqrt{-1}}$$

quae formulae continent solutionem casus posterioris §. 40. allati.

§. 50. In his igitur formulis generalissimis, pro coordinatis x et y inuentis, continentur omnes plane repraesentationes possibiles superficiei sphaericae, quae in plano ita exhiberi possunt, vt Meridiani a Parallelis normaliter traiiciantur et omnes figurae valde exiguae in Sphaera sumtae per similes figuras in plano exprimantur.

§. 51. In hac solutione generalissima continetur proiectio ordinaria, qua Hemisphaeria terrestria repraesentari solent per circulos, in quorum centro alteruter polus existit. Prodit enim ista proiectio, si in formulis

$$x = s^{\alpha} \text{cos.}\, \alpha t \text{ et } y = s^{\alpha} \text{sin.}\, \alpha t$$

sumatur $\alpha = -1$, vt sit

$$x = \frac{\text{cos.}\, t}{\text{tang.}\, (45^{\circ} + \frac{1}{2} u)} \text{ et } y = \frac{\text{sin.}\, t}{\text{tang.}\, (45^{\circ} + \frac{1}{2} u)},$$

tum enim pro Polo, vbi $u = 90^{\circ}$, tam x quam y euanescunt. Pro Aequatore autem, vbi $u = 0$ et $s = 1$, fit $x = \text{cos.}\, t$ et $y = \text{sin.}\, t$ vnde fit $xx + yy = 1$. Sicque Aequator referetur circulo circa polum descripto cuius radius $= 1$. Tum vero longitudine t manente eadem erit $\frac{y}{x} = \text{tang.}\, t$; vnde patet omnes Meridianos esse radios circuli. Pro quauis autem latitudine u Paralleli erunt circuli Aequatori concentrici, quorum radii erunt

$$= \frac{1}{s} = \frac{1}{\text{tang.}\, (45^{\circ} + \frac{1}{2} u)} = \text{tang.}\, (45 - \frac{1}{2} u)$$

hoc est $=$ tangenti semissis distantiae a polo. Secundum has conditiones etiam Hemisphaeria talia exhiberi solent.

Hypo-

Hypothesis III.

Qua omnes Terrae regiones vera quantitate in plano repraesentatur.

§. 58. Constitutis in genere binis formulis pro dx et dy, quae sint

$$dx = p\,du + q\,dt \text{ et } dy = r\,du + s\,dt$$

primum efficiatur, vt omnes meridiani a parallelis normaliter traiiciantur, id quod euenit si fuerit $\frac{s}{q} = -\frac{p}{r}$. Statuatur igitur $s = -np$ et $q = +nr$ vt habeamus

$$dx = p\,du + nr\,dt \text{ et } dy = r\,du - np\,dt.$$

Nunc igitur erit elementum $PQ = du\sqrt{pp + rr}$ et elementum Paralleli $PR = ndt\sqrt{pp + rr}$. Hinc igitur area rectanguli $PQRS$ erit $ndudt(pp + rr)$, in Sphaera autem area respondens $pqrs$ est $= dudt \operatorname{cos.} u$, quae ergo formulae aequales sunt reddendae, vnde fit $n(pp + rr) = \operatorname{cos.} u$ ideoque $n = \frac{\operatorname{cos.} u}{pp + rr}$, quamobrem pro nostra Hypothesi habebimus has formulas:

$$dx = p\,du + \frac{r\,dt \operatorname{cos.} u}{pp + rr} \text{ et } dy = r\,du - \frac{p\,dt \operatorname{cos.} u}{pp + rr}.$$

Quaeri ergo oportet functiones idoneas pro p et r, vt ambae istae formulae fiant integrabiles.

§. 53. Quo hoc facilius effici possit statuamus

$$p = m \operatorname{cos.} \Phi \text{ et } r = m \operatorname{sin.} \Phi$$

vt sit $pp + rr = mm$ et habebimus

$$dx = m\,du \operatorname{cos.} \Phi + \frac{dt \operatorname{cos.} u \operatorname{sin.} \Phi}{m} \text{ et}$$

$$dy = m\,du \operatorname{sin.} \Phi - \frac{dt \operatorname{cos.} u \operatorname{cos.} \Phi}{m}.$$

Fiat porro $m = k \operatorname{cos.} u$ vt consequamur

$$dx = k\,du \operatorname{cos.} u \operatorname{cos.} \Phi + \frac{dt \operatorname{sin.} \Phi}{k} \text{ et}$$

$$dy = k\,du \operatorname{cos.} u \operatorname{sin.} \Phi - \frac{dt \operatorname{cos.} \Phi}{k}.$$

 Facia-

Faciamus denique $du \cos. u = dv$ vt ſit $v = \sin. u$ eritque

$$dx = k\,dv \cos.\Phi + \frac{dt \sin.\Phi}{k} \text{ et } dy = k\,dv \sin.\Phi - \frac{dt \cos.\Phi}{k}$$

vbi ergo valores idoneos pro k et Φ inueſtigari oportet.

§. 54. Quoniam nullo adhuc modo patet, quomodo reſolutionem generalem harum formularum inſtitui conueniat, quaeramus ſolutiones particulares. Ac primo quidem ſtatim ſe offert ea ſolutio huius caſus, quam ſupra iam inuenimus (vid. §. 22.) vbi erat $x = t$ et $y = \sin. u$, qui valores prodeunt ex noſtris formulis, ſi ſumatur $k = 1$ et $\Phi = 90°$; hincque patet, etiam generalius ſumi poſſe tam pro k quam Φ quantitates, quaſcunque conſtantes. Sit igitur $k = a$ et $\Phi = \alpha$, vnde reperietur

$$x = av \cos.\alpha + \frac{t \sin.\alpha}{a} \text{ et } y = av \sin.\alpha - \frac{t \cos.\alpha}{a}.$$

Haec autem ſolutio ab illa hoc tantum differt, quod Meridiani non amplius ſint ad noſtrum axem EF normales ſed ſub angulo obliquo inclinantur, qui aequatur ipſi angulo $= \alpha$; Paralleli autem iſtos Meridianos normaliter traiicient eruntque idcirco pariter lineae rectae.

§. 55. Alias autem ſolutiones elicere poterimus, ſi pro altera quantitatum k et Φ tantum functionem ipſius v, pro altera autem ipſius t tantum ſumamus. Sit igitur $k = T$ et $\Phi = V$, vt habeamus

$$dx = T\,dv \cos. V + \frac{dt}{T} \sin. V \text{ et}$$
$$dy = T\,dv \sin. V - \frac{dt}{T} \cos. V,$$

eliciuntur ſcilicet

$$x = T \int dv \cos. V = \sin. V \int \frac{dt}{T}$$
$$y = T \int dv \sin. V = -\cos. V \int \frac{dt}{T}.$$

Hos igitur valores aequales inter ſe reddi oportet.

§. 56.

§. 56. Ex binis valoribus ipsius x deducimus

$$\int \frac{dv\,\mathrm{cos.}\,V}{\mathrm{sin.}\,V} = \int \frac{dt}{T} : T = \alpha \text{ et ex valoribus ipsius } y$$

$$\int \frac{dv\,\mathrm{sin.}\,V}{\mathrm{cos.}\,V} = -\int \frac{dt}{T} : T = \beta$$

vnde pro functione t istae aequalitates prodeunt

$$\int \frac{dt}{T} = \alpha\,T \text{ et } \int \frac{dt}{T} = -\beta\,T$$

vbi statim patet esse debere $\beta = -\alpha$; tum vero differentiando fit $\frac{dt}{T} = \alpha\,dT$ ideoque $T = \sqrt{\frac{2t}{\alpha}}$. Pro V autem habebimus $\int dv\,\mathrm{cos.}\,V = \alpha\,\mathrm{sin.}\,V$ et $\int dv\,\mathrm{sin.}\,V = -\alpha\,\mathrm{cos.}\,V$; quae ambae differentiatae praebent $dv = \alpha\,dV$, ita vt sit $V = \frac{v}{\alpha}$, siue constantem adiiciendo $V = \frac{v+c}{\alpha}$.

§. 57. His iam valoribus inuentis ob

$$\int dv\,\mathrm{cos.}\,V = \alpha\,\mathrm{sin.}\,V = \alpha\,\mathrm{sin.}\,\frac{v+c}{\alpha} \text{ et}$$

$$\int \frac{dt}{T} = \alpha\,T = \sqrt{2\alpha t}$$

ambae coordinatae ita reperiuntur expressae:

$$x = \mathrm{sin.}\,\frac{v+c}{\alpha}\sqrt{2\alpha t} \text{ et } y = -\mathrm{cos.}\,\frac{v+c}{\alpha}\sqrt{2\alpha t}.$$

Hinc statim colligimus $\sqrt{xx+yy} = \sqrt{2\alpha t}$; ex quo manifestum est, pro locis, quibus eadem longitudo t conuenit, ea sita fore in peripheria circuli cuius radius $= \sqrt{2\alpha t}$; quam ob rem in hac repraesentatione omnes Meridiani exprimentur per circulos concentricos, atque adeo Meridianus primus, vbi $t = 0$, totus in centro circulorum coalescit; ex quo iam manifestum est, omnes circulos parallelos hic per radios circuli referri. Talis autem repraesentatio sine dubio maxime foret absurda, etiamsi conditiones praescriptas adimpleat.

§. 58. Sumatur nunc pro k functio ipsius v, quae sit V; angulus vero ϕ statuatur aequalis functioni ipsius t, quae sit $=$T, et habebimus

$$dx = V\,dv\,\mathrm{cos.}\,T + \frac{dt\,\mathrm{sin.}\,T}{V} \text{ et } dy = V\,dv\,\mathrm{sin.}\,T - \frac{dt\,\mathrm{cos.}\,T}{V}$$

 vnde

vnde bini valores pro x et y resultantes fiunt

$$x = \text{cos. T} \int V\, dv + \tfrac{1}{V} \int dt\, \text{sin. T} \text{ et } y = \text{sin. T} \int V\, dv - \tfrac{1}{V} \int dt\, \text{cof. T}.$$

Ex his igitur valoribus sequentes statuantur aequalitates

$$V \int V\, dv = \int \frac{dt\, \text{sin. T}}{\text{cos. T}} = \alpha \quad \text{et} \quad - V \int V\, dv = \int \frac{dt\, \text{cos. T}}{\text{sin. T}}.$$

Ex valoribus ipsius V statim fit $\beta = \alpha$; tum vero differentiando fit $V\, dv = -\frac{\alpha\, dV}{VV}$, vnde fit $dv = -\frac{\alpha\, dV}{V^3}$ et integrando $v + c = \frac{\alpha}{2VV}$, hincque $V = \sqrt{\frac{\alpha}{2(v+c)}}$. Pro functione T autem erit

$$\int dt\, \text{sin. T} = \alpha\, \text{cos. T} \quad \text{et} \quad - \int dt\, \text{cos. T} = \alpha\, \text{sin. T}$$

ex quarum differentiatione sequitur $dT = -\frac{dt}{\alpha}$ ergo $T = -\frac{t}{\alpha}$.

§. 59. His valoribus inuentis ob $\int V\, dv = \sqrt{2\alpha(v+c)}$, erit $x = \sqrt{2\alpha(v+c)}\, \text{cos.} \frac{t}{\alpha}$ et $y = -\sqrt{2\alpha(v+c)}\, \text{sin.} \frac{t}{\alpha}$. Hinc fit primo $\frac{y}{x} = -\text{tang.} \frac{t}{\alpha}$ et $xx + yy = 2\alpha(v+c)$. Ex priore formula patet, pro eadem longitudine t omnes Meridianos per rectas ex puncto fixo tanquam radios eductas repraesentari: ex altera autem patet, omnes Parallelos per circulos concentricos expressum iri. Hoc igitur modo hemisphaeria Terrae perquam apte per circulos repraesentari poterunt, dum polus in centro existit; vbi adeo figura cuiusque regionis non multum a veritate abludet; quam ob caussam facile erit veram cuiusque regionis magnitudinem dimetiri.

§. 60. In his autem tribus Hypothesibus omnia continentur, quae circa repraesentationes tam geographicas quam hydrographicas desiderari solent; atque adeo secunda Hypothesis supra tractata omnes plane modos possibiles in se complectitur. Ob summam autem vniuersalitatem minus facile est methodos vsu receptas ex formulis nostris generalibus elicere. Neque vero institutum praesens permittit vt huic negotio immoremur, praecipue cum consuetae proiectiones ab aliis iam abunde sint explicatae.

DE