

SÖLVATIO QVORVNDAM
 PROBLEMATVM
 DIOPHANTAEORVM.

Auctore

L. EVLERO.

Problema I.

Inuenire duo quadratorum paria xx , yy et tt , uu ,
 ita vt tam $(xx + yy)(ttxx + uuyy)$ quam
 $(xx + yy)(uuxx + ttyy)$ fiat numerus quadratus.

Analysis.

1. Primo patet, quicumque bini numeri tam
 pro x , y quam pro t , u fuerint inuenti, eorum ae-
 que multipla veluti ax , ay et bt , bu quaesito
 aeque satisfacere; sicque problema ita restringi con-
 veniet, vt tam x et y quam t et u numeri
 primi inter se.

2. Incipiamus a formula priori $(xx + yy)(ttxx + uuyy)$,
 quae posita huic quadrato $(xx + yy)^2 xx yy$
 $(pp + qq)^2$ aequalis fit

$$ttxx + uuyy = xxyy(xx + yy)((pp - qq)^2 + (2pq)^2)$$

unde concluditur

$$tx = xy(x(pp - qq) + 2pqy); \quad uy = xy(y(pp - qq) - 2pqx)$$

sicque erit

$$t = xy(pp - qq) + 2pqy; \quad u = xy(pp - qq) - 2pqx.$$

3. Iam pro altera formula, cum fit

$$xy = xyy(pp - qq) + 2pqy^2; \quad ux = xxy(pp - qq) - 2pqx^2$$

fiet

$$xy + uux = xxy^2(pp - qq)^2 + 4pqxy^2(pp - qq) + 4ppqqy^2 + x^2yy(pp - qq)^2 - 4pqx^2y(pp - qq) + 4ppqqx^2$$

quae forma, quia manifesto per $xx + yy$ est divisibilis, abit in

$$(xx + yy)(xxyy(pp - qq)^2 - 4pqxy^2(xx - yy)(pp - qq) + 4ppqq(x^2 - xxyy + y^2)).$$

4. Cum nunc haec forma per $xx + yy$ multiplicata numerum quadratum praebere debeat, habebimus sequentem expressionem ad quadratum reducendam:

$$4ppqqx^2 - 4pq(pp - qq)x^2y + (p^2 - 6p^2q^2 + q^4)x^2y^2 + 4pq(pp - qq)xy^2 + 4ppqqy^2$$

quae quidem manifesto fit quadratum, si $x = y$; verum hunc casum utpote facillimum hinc merito excludimus; siquidem tota quaestio huc rediret, ut $2(x + u)$ quadratum efficeretur.

5. At ponendo illam formulam aequalem huic quadrato

$$(2pqxx - (pp - qq)xy + 2pqyy)^2$$

deletis terminis paribus fit

$$(p^2 - 6ppqq + q^4)x^2y^2 + 4pq(pp - qq)xy^2 = (p^2 + 6ppqq + q^4)x^2y^2 - 4pq(pp - qq)xy^2$$

$$\text{hincque } 8pq(pp - qq)y = 12ppqqx$$

unde colligitur haec solutio problematis:

$$x = 2(pp - qq); \quad y = 3pq; \quad \text{hincque patet}$$

$$t = 6pq(p^2 + ppqq + q^4), \quad \text{et } u = -2pq(pp - qq)^2.$$

6. En ergo solutionem prima infinite patentem, quoniam numeros p et q ad arbitrium capere licet; reductis scilicet numeris t et u ad minimos terminos, et quia perinde est siue sint positivi siue negativi habebimus

$$x = 2(pp - qq); \quad t = 3(pp^2 + ppqq + q^2) = \frac{3}{2}xx + yy$$

$$y = 3pq; \quad u = (pp - qq)^2 = \frac{1}{2}xx$$

hincque reperitur

$$xx + yy = 4p^2 + ppqq + 4q^2$$

$$ttxx + uuyy = xxyy(xx + yy)(pp + qq)^2 = xx(xx + yy)(\frac{3}{2}xx + yy)$$

$$uuxx + ttyy = 4ppqq(xx + yy)(p^2 + 7ppqq + q^2)^2 = (xx + yy)(\frac{1}{2}xx + yy)^2$$

7. Ut alias solutiones inueniamus, ponamus superioris formae radicem quadratam:

$$2ppxx - (pp - qq)xy - 2pqyy + Ayy$$

cuius quadrato illi aequali posito prodibit aequatio:

$$(AA - 4Apq)yy - 2A(pp - qq)xy + (4Apq - 4ppqq)xx = 0$$

hic si $A = 4pq$ prodit solutio praecedens; at posito $A = pq$ fit

$$+ 3pqy + 2(pp - qq)x = 0,$$

quae cum illa pariter congruit.

8. Ponamus $A = -2pp$ prodibitque haec aequatio

$$(pp + 2pq)yy + (pp - qq)xy - (2pq + qq)xx = 0$$

quae per $x + y$ diuisa dat

$$(pp + 2pq)y - (2pq + qq)x = 0$$

vnde

vnde

x =

y =

diuersi

ad m

x =

y =

hincqu

xx =

yy =

uux

(2)

(pp - 2

x =

y =

xx =

yy =

uux

uux

Haec a

positio

praebent

uux

vna sol

uux

vnde fit

$$x = p(p + 2q) \text{ et } y = q(q + 2p) \text{ tum vero}$$

$$u = pqq(p + 2q)(qq + 2pq + 3pp).$$

9. En ergo aliam solutionem a praecedente diuersam, et infinite patentem, qua numeris t et u ad minimos terminos reductis fit

$$x = p(p + 2q); t = p(q + 2p)(pp + 2pq + 3qq)$$

$$y = q(q + 2p); u = q(p + 2q)(qq + 2pq + 3pp)$$

hincque reperitur:

$$xx + yy = p^4 + 4p^3q + 8ppqq + 4pq^3 + q^4$$

$$ttxx + uuyy = (p + 2q)^2(q + 2p)^2(pp + qq)^2(xx + yy)$$

$$uuxx + ttyy = ppqq(5pp + 8pq + 5qq)^2(xx + yy).$$

10. Posito $A = 2pp$ prodit $(pp - 2pq)yy - (pp - qq)xy + (2pq - qq)xx = 0$ quae per $y - x$ diuisa dat $(pp - 2pq)y - (2pq - qq)x = 0$ ideoque

$$x = p(p - 2q); t = p(2p - q)(pp - 2pq + 3qq)$$

$$y = q(2p - q); u = q(p - 2q)(qq - 2pq + 3qq)$$

$$xx + yy = p^4 - 4p^3q + 8ppqq - 4pq^3 + q^4$$

$$ttxx + uuyy = (p - 2q)^2(2p - q)^2(pp + qq)^2(xx + yy)$$

$$uuxx + ttyy = ppqq(5pp - 8pq + 5qq)^2(xx + yy).$$

Haec autem solutio a praecedente non differt; neque positiones $A = 2qq$ et $A = -2qq$ solutionis diuersas praebent.

11. Constant methodi, quarum beneficio ex vna solutione inuenta aliae etiam possunt; verum eae

ad calculos nimium intricatos deducunt. Ita reperire licet

$$x = q(pp - qq)(3pp - qq)$$

$$y = (pp + qq)(p(pp + qq) + q(3pp + qq))$$

conuenientes vero valores pro t et u paragr. 2 supeditat.

Solutio I.

In hac solutione ratio numerorum x et y est $\frac{x}{y} = \frac{pp - qq}{2pq}$ vnde ex cathetis trianguli rectanguli inueniuntur; tum vero ratio $\frac{t}{u} = \frac{3xx + yy}{xx}$; vnde solutiones simpliciores sunt:

- 1. $x = 5; y = 2; t = 91; u = 25$
- 2. $x = 7; y = 5; t = 247; u = 49$
- 3. $x = 5; y = 9; t = 399; u = 25$
- 4. $x = 3; y = 10; t = 427; u = 9$
- 5. $x = 11; y = 14; t = 1147; u = 121$
- 6. $x = 15; y = 7; t = 871; u = 225$
- 7. $x = 16; y = 5; t = 217; u = 64$
- 8. $x = 16; y = 9; t = 273; u = 64$
- 9. $x = 7; y = 18; t = 1443; u = 49$
- 10. $x = 13; y = 20; t = 2107; u = 169$

Solutio II.

Hic ratio numerum x et y est $\frac{x}{y} = \frac{p(p + 2q)}{q(q + 2p)}$ numerorum t et u vero $\frac{t}{u} = \frac{p(q + 2p)(p^2 + 2pq + 3q^2)}{q(p + 2q)(q^2 + 2pq + 3p^2)}$ si numeros x et y vt datos spectemus, ob

$$p^2y + 2p^2qy = q^2x + 2pqx, \text{ reperitur}$$

$$\frac{p}{q} = \frac{x - y + y(x^2 - xy + y^2)}{y}$$

vnde

vnde numerorum x et y character in hoc consistit, ut $xx - xy + yy$ sit quadratum; cuiusmodi numeri cum facile inueniantur; sit $xx - xy + yy = zz$; eritque

$$\frac{p}{q} = \frac{x-y+z}{y} = \frac{z}{y-x+z}; \text{ seu } \frac{p}{q} = \frac{z-y}{x+z};$$

hinc fit

$$\frac{p+zq}{q+p} = \frac{zx-y-z}{z-y+x} = \frac{z+y}{z+x} \text{ et } \frac{p(q+zp)}{q(p+zq)} = \frac{(z-y)(z+x+y)}{(z-x)(z+y-zx)} \text{ vnde}$$

$$(z-y)(z+x-2y) = (z+x-y)(2z-x-y)(z-x)(z+y-2x) \\ = z+y-x)(2z-x-y)$$

vnde $\frac{p(q+zp)}{q(p+zq)} = \frac{z+x-y}{z+y-x}$.

Deinde est

$$\frac{pp+zpq+3qq}{qq+zpq+3pp} = \frac{(x-y)^2 + z(x-z)^2}{(x-y)^2 + z(z-y)^2} = \frac{zx+y-x}{zx+x-y};$$

hincque tandem elicitur

$$\frac{t}{u} = \frac{(z+x-y)(z-z-x+y)}{(z+y-x)(z+z-x-y)}$$

Sicque pro x et y eiusmodi numeris inuentis, ut sit rationaliter $\sqrt{xx - xy + yy} = z$ capiatur:

$$t = (z+x-y)(2z-x+y) = xx + yy + (x-y)z$$

$$u = (z+y-x)(2z-y+x) = xx + yy - (x-y)z.$$

hinc obtinetur

$$ttxx + uuyy = (xx + yy)(xx - 2xy + yy + (x+y)z)^2$$

$$uuxx + ttyy = (xx + yy)(xx - 2xy + yy - (x+y)z)^2$$

vel etiam hoc modo

$$ttxx + uuyy = \frac{1}{2}(xx + yy)(x+y+z)^2(4z-x-y)^2$$

$$uuxx + ttyy = \frac{1}{2}(xx + yy)(x+y-z)^2(4z+x+y)^2.$$

Num autem quo facilius valores pro x et y idoneos

reperiamus, spectemus x vt datum ac ponamus $z = y - v$
eritque

$$xx - xy = -2yv + vv \text{ et } y = \frac{xx - vv}{-2v + x} = \frac{vv - xx}{2v - x};$$

vbi pro quouis valore ipsius x assumto casus integri
pro y sunt eruendi: notandum vero est, pro x nume-
rum impariter parem assumi non posse, quia y quo-
que fieret par:

x	y	z	t	u
3	- 5	7	45	11
3	+ 8	7	19	54
5	+ 8	7	34	55
5	- 16	19	340	59
5	+ 21	19	81	385
7	- 8	13	154	41
7	+ 15	13	85	189
7	- 33	37	1309	171
7	+ 40	37	214	1435
8	+ 15	13	99	190
9	- 56	61	3591	374
9	+ 65	61	445	3861
11	- 24	31	891	194
11	+ 35	31	301	1045
11	- 85	91	8041	695
11	+ 96	91	801	8536
13	- 35	43	1729	335
13	+ 48	43	484	1989
13	- 120	127	15730	1161
13	+ 133	127	1309	16549

Problema

Problema 2.

Inuenire duo quadratorum paria xx, yy et tt, uu ,
vt $(ttxx + uuyy)(uuxx + ttyy)$ sit numerus qua-
dratus.

Solutio.

Hoc problema eandem sortitur solutionem, quod
praecedenti, idemque quaterni numeri pro x, y, t, u
inuenti satisfaciunt. Inde ergo solutio simplicissima est

$$x=2; y=5; t=11; u=45$$

ex qua fit

$$ttxx + uuyy = 34.9.169; uuxx + ttyy = 34.625$$

ideoque

$$(ttxx + uuyy)(uuxx + ttyy) = 34^2.39^2.25^2.$$

Ceterum haec solutio non solum ob eam causam
tantum est particularis, ob quam talis erat, sed
etiam hoc problema infinitas solutiones admittere
videtur, quae praecedenti non conueniant. Fieri
enim potest, vt haec formula

$$(ttxx + uuyy)(uuxx + ttyy)$$

fit quadratum, etiamsi neutra praecedentium

$(xx + yy)(ttxx + uuyy)$, et $(xx + yy)(uuxx + ttyy)$
fuerit quadratum, cuius rei vnicum exemplum de-
disse sufficiat:

$$x=973; y=263; t=973; u=1841$$

est enim

$$uuxx + ttyy = 2.25.263^2.973^2 \text{ quadratum duplicatum}$$

$$ttxx + uuyy = 2.25.141793^2 \text{ quadratum duplicatum.}$$

En

En adhuc aliam solutionem latius patentem

$$x = 3n^2 + 6mnn - m^2; t = mx$$

$$y = 3m^2 + 6mnn - n^2; u = ny$$

cuius inuentionis ratio facile intelligitur, posita enim $t = mx$ et $u = ny$ fit

$txx + uyy = mmx^2 + my^2$ et $uuxx + ttyy = xxyy(mm + nn)$
sicque ad quadratum reducenda est haec formula

$$(mm + nn)(mmx^2 + nny^2)$$

quae facto $x = v + z$ et $y = v - z$ ad istam solutionem perducit: hinc autem praecedentes solutiones non obtinentur.

Problema 3.

Inuenire duo quadratorum paria $xxyy$ et $ttuu$,
vt tam hic numerus $ttxx + uuyy$ quam iste
 $yyy + uuxx$ fiat quadratus.

Solutio.

Ex modo tradita solutione problematis praecedentis solutio huius facile adornatur, pro m et n eiusmodi numeris sumendis, vt $mm + nn$ fiat quadratum. Sic si fiat $m = 4$ et $n = 3$ reperitur

$$x = 851, t = 3404$$

$$y = 1551, u = 3653$$

At ex problemate primo, multo concinniores solutiones impetrantur, quibus adeo praeter binas praescriptas condiciones, et haec tertia adimpletur; vt $xx + yy$ fiat etiam quadratum. At solutio secunda primi problematis vnum praebet casum, quo $xx + yy$ fit quadratum scilicet

$$x = 8; y = 15; t = 99; u = 190$$

vnde

vnde fit

$$xx + yy = 17^2$$

$$ttxx + uuyy = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 17^2 \cdot 29^2$$

$$tlyy + uuxx = 5^2 \cdot 5^2 \cdot 5^2 \cdot 17^2$$

Si insuper addita fuisset haec conditio, vt etiam $xx - xy + yy$ foret quadratum eadem solutio negotium conficeret. Huiusmodi autem solutiones elicientur quaerendis numeris x et y vt haec expressio

$$x^4 - x^2y + 2xxyy - xy^2 + y^4 \text{ fiat quadratum}$$

ad quos porro vt ante numeros t et u inuestigari oportet.

Occasionem hoc problema Diophantaeum tractandi praebuit problema Geometricum a Schotenio propositum, quo datis in triangulo basi, perpendicularo et ratione laterum ipsa latera quaerentur. Problema hoc geminam admittit solutionem, quarum vtraque vt praebet latera rationaliter expressa, negotium ad problema istud Diophantaeum perducitur. Si enim basis trianguli ponatur $= a$, perpendicularum $= b$, et laterum ratio $m:n$; vocatis ipsis lateribus mz et nz ; primo necesse est a et b ita exprimi

$$a = (mm - nn)(xx + yy) \text{ et } b = 2mnxy,$$

tum vero pro z haec duplex expressio reperitur:

$$z = \sqrt{(xx + yy)((m - n)^2 xx + (m + n)^2 yy)} \text{ et}$$

$$z = \sqrt{(xx + yy)((m + n)^2 xx + (m - n)^2 yy)}$$

Tom. XX. Nou. Comm.

H

quae

quae ut ambae fiant rationales facta $m+n=b$, $m-n=w$
nascitur nostrum problema Diophantaeum. Cuius
ergo casus simplicissimus erit sumto

$$x=3; y=5; t=45 \text{ et } u=11,$$

unde haec nascuntur data:

$$\text{ratio laterum } m:n=28:17$$

$$\text{basis trianguli } = 33, \text{ et perpendicularum } = 28,$$

unde reperiuntur ipsa latera:

$$\text{vel } m z = \frac{140}{3} \text{ et } n z = \frac{85}{3}$$

$$\text{vel } m z = \frac{364}{5} \text{ et } n z = \frac{221}{5}$$

sive in integris sumta

$$\text{basis } a = 495, \text{ et perpendiculara } b = 420$$

obtinebuntur latera rationem 28:17 tenentia

$$\text{vel } m z = 700, \text{ et } n z = 425$$

$$\text{vel } m z = 1092, \text{ et } n z = 663.$$