DE RESOLVTIONE IRRATIONALIVM PER FRACTIONES CONTINVAS, VBI SIMVL NOVA QVAEDAM ET SINGVLARIS SPECIES MINIMI EXPONITVR.

Auctore

L. EVLERO.

§. 1.

In superiore dissertatione de resolutione aequationis $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$, totum negotium praecipue ad hanc quaestionem erat deductum, vt pro litteris x et y valores in numeris integris inuestigentur, quibus formulae $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2$ minimus valor inducatur. Tres autem hic potissimum considerandi sunt casus, prouti haec formula vel duos factores habet imaginarios, quod fit si $BB - AC$ fuerit numerus negatiuus, vel factores inter se aequales, quod fit si $BB - AC = 0$, vel denique si eius factores fuerint reales, quod fit si $BB - AC$ numerus positiuus. Primo autem casu haec quaestio minimi nullam attentionem meretur, quoniam solutio nulla plane difficultate laborat. Secundus vero casus multo minus negotium facessit, quum formula abeat in quadratum cuius radicem facillime minimam reddere licet. Solus ergo

ergo tertius casus superest, qui accuratiorem inuestigationem postulat, vnde quidem insuper excludi conuenit casus, quibus formula $BB - AC$ est numerus quadratus, et ambo factores adeo rationales euadunt, tum enim valor formulae propositae adeo ad nihilum redigi poterit, ita vt quaestio minimi hic ne locum quidem habeat.

2. Soli ergo nobis relinquuntur casus, quibus numerus $BB - AC$ est numerus positiuus sed non quadratus, cuiusmodi est ista formula: $mxx - nyy$, denotantibus litteris m et n numeros integros positiuos, eiusmodi tamen vt non vterque sit quadratus, tum enim euidens est istam formulam ad nihilum reduci non posse, nisi tam x quam y euanescat, quem casum tamen vtpote obuium excludi oportet. Cum ergo haec formula $mxx - nyy$ ad nihilum redigi se non patiatur, quaestio sine dubio notatu digna est censenda, qua litterarum x et y ii valores in integris quaeruntur, quibus ipsa formula $mx^2 - ny^2$ minimum omnium adipiscatur valorem. Si alter numerorum m et n vnitati aequetur, semper formulam ad vnitatem vsque deprimere licebit, qui certe est minimus valor cyphra excepta. Si enim fuerit $m = 1$ ex Theoremate Pelliano notissimo constat, semper effici posse $xx - nyy = 1$, siue $x = \sqrt{(nyy + 1)}$, dummodo n non fuerit numerus quadratus, atque adeo hoc non solum vnico modo praestari potest, sed etiam infinitis, quemadmodum iam ab ipso Pellio est demonstratum. Sin autem alter numerus n vnitati aequetur, formula

 mx^2

$mxx - yy$ hac methodo ad -1 deprimitur, qui casus aeque pro minimo est habendus ac $+1$, dum in ea inuestigatione, quae ad hanc quaestionem ansam dedit, discrimen signi non spectatur.

3. His ergo casibus remotis, quo alter numerus m vel n vnitati aequatur, quaestio nostra potissimum versatur circa formulam $mxx - nyy$, quippe ad quam semper formulam generalem $Axx + 2Bxy + Cyy$ reuocare licet. Si enim in genere statuatur $x = t + Bu$ et $y = Av$, facta substitutione formula generalis abit in hanc formam:

$$At^2 - A(B^2 - AC)uu$$

sicque formula nostra assumta $mxx - nyy$ aequalate patere est censenda, atque ipsa proposita trinomialis. Etiamsi autem neque m, neque n vnitati aequetur, saepenumero vsu venire potest, vt formulam nostram quoque ad vnitatem vsque deprimere liceat, idque vel statim manifesto occurrit, veluti in hac forma: $3xx - 2yy$, quae ad vnitatem redigitur sumtis $x = 1$ et $y = 1$, vel non statim se offert, vti fit in $9xx - 5yy$ quae posito $x = 3$ et $y = 4$ ad vnitatem redit, quicquid autem sit, vtique euenire potest, vt minimus valor nostrae formulae vnitatem excedat, ac tum iudicium de minimo plerumque summis difficultatibus inuolutum deprehenditur ceu fit in hac formula $13xx - 7yy$, quam vsque ad binarium deprimi posse non facile perspicitur, si scilicet ponatur $x = 15$ et $y = 11$. At si m et n fuerint numeri praegrandes, iudicium multo

multo operosiores calculos requirit, quamobrem methodus certa etiam in his casibus minimum inuestigandi analysin haud contemnendo incremento locupletare videtur.

4. Antequam autem hanc ipsam methodum explicare adgrediar; plurimum ostendisse iuuabit, semper infinitis modis idem minimum obtineri posse. Atque hoc adeo generalius ita demonstrari potest: Quodsi vnicus casus constet, quo formula $mxx - nyy$ aequalis fiat dato numero k, tum semper infiniti valores pro x et y reperiri possunt, qui ad eundem numerum k deducant. Sit enim casu illo cognito $x = a$ et $y = b$, ita vt sit $maa - nbb = k$ et nunc numeros x et y ita definiri oportet, vt fiat $mxx - nyy = maa - nbb$, id quod sequenti modo commodissime praestabitur. Ante omnia quaerantur numeri p et q, vt fiat $pp - mnqq = 1$, id quod infinitis modis semper fieri posse constat, dummodo mn non fuerit numerus quadratus, vti hic assumimus, atque nunc quaesito satisfieri manifestum est, si statuatur

$$mxx - nyy = (maa - nbb)(pp - mnqq)^{\lambda},$$

quod quo facilius fieri possit, sumamus factores etsi irrationales et ponamus

$$x\sqrt{m} + y\sqrt{n} = (a\sqrt{m} + b\sqrt{n})(p + q\sqrt{mn})^{\lambda}$$

tum enim mutato signo radicalis $\sqrt{n}$, sponte fiet

$$x\sqrt{m} - y\sqrt{n} = (a\sqrt{m} - b\sqrt{n})(p - q\sqrt{mn})^{\lambda},$$

sicque alteri tantum harum duarum aequationum satisfe-

tisfecisse sufficiet. Quia autem euolutio formulae $(p+q\sqrt{mn})^\lambda$ alternatim terminos rationales et irrationales radicali $\sqrt{mn}$ affectos praebet, sit P summa terminorum rationalium et $Q\sqrt{mn}$ summa irrationalium, ita vt sit

$$(p+q\sqrt{mn})^\lambda = P + Q\sqrt{mn}$$

similique modo

$$(p-q\sqrt{mn})^\lambda = P - Q\sqrt{mn}.$$

Nunc igitur aequatio nostra erit

$$x\sqrt{m}+y\sqrt{n}=(a\sqrt{m}+b\sqrt{n})(P+Q\sqrt{mn}) \text{ siue}$$

$$x\sqrt{m}+y\sqrt{n}=(aP+nbQ)\sqrt{m}+(bP+maQ)\sqrt{n}$$

vbi tam partes signo $\sqrt{n}$, quam partes signo $\sqrt{m}$ affectae, seorsim sunt inter se aequandae, atque hinc statim elicimus sequentes valores

$$x=aP+nbQ;\quad y=bP+maQ;$$

simulque patet multitudinem harum solutionum reuera esse infinitam.

5. His praemissis ipsam nostram quaestionem adgrediamur, quaesituri valores litterarum x et y, quibus formula $mxx-nyy$ minimum sortiatur valorem, qui sit $=k$, ac statim quidem euidens est his casibus formulam $mxx-nyy$ propius ad nihilum redigi, quam vllis aliis casibus, sicque pro x et y eiusmodi inuestigandi sunt valores, quibus proxime fiat $\frac{x}{y}=\sqrt{\frac{n}{m}}=\frac{\sqrt{mn}}{m}$, quocirca negotium iam huc est perductum, vt quaerantur fractiones rationales $\frac{x}{y}$, quae tam prope aequentur formae irrationali

nali $\frac{\sqrt{mn}}{m}$, quam quidem fieri poteſt, non maioribus numeris pro x et y adhibendis.

6. Hoc autem Problema iam olim a Walliſio propoſitum expeditiſſime reſoluitur, ſi formula $\frac{\sqrt{mn}}{m}$ in fractionem continuam conuertatur, ſimili ſcilicet operatione, qua vulgo maximus communis diuiſor duorum numerorum quaeri ſolet. Si enim hoc modo peruentum fuerit ad hanc fractionem continuam:

$$\frac{\sqrt{mn}}{m} = \alpha + \cfrac{1}{\beta + \cfrac{1}{\gamma + \cfrac{1}{\delta + \cfrac{1}{\varepsilon + \text{etc.}}}}}$$

continui hi quoti in ſeriem diſponantur, ac primo quidem ipſi α ſubſcribatur fractio $\frac{1}{0}$, ipſi β vero $\frac{\alpha}{1}$, ac deinceps ex binis fractionibus continuo ſequens formatur, dum vltimae tam nominator quam denominator per indicem ſupra ſcriptum multiplicetur hisque productis, tam numerator quam denominator penultimae fractionis reſpectiue addantur. Sequenti ſcilicet modo

$$\begin{array}{cccccc} \alpha, & \beta, & \gamma, & \delta, & \varepsilon & \\ \frac{1}{0}, & \frac{\alpha}{1}, & \frac{\alpha\beta+1}{\beta}, & \frac{\alpha\beta\gamma+\gamma+\alpha}{\beta\gamma+1}, & \frac{\alpha\beta\gamma\delta+\gamma\delta+\alpha\delta+\alpha\beta+1}{\beta\gamma\delta+\delta+\beta} & \text{etc.} \end{array}$$

7. Omnes iſtae fractiones hac gaudent proprietate, vt quaelibet valorem formulae $\frac{\sqrt{mn}}{m}$ propius exhauriat, quam fieri poterit numeris non maioribus adhibendis. Verum etiam inter has ipſas fractiones

ctiones ingens intercedit discrimen, quod aliae aliis, caeteris quidem paribus magis appropinquent. Eae autem maxime adpropinquare sunt compertae, quae maximos indices sibi habent inscriptos, si ergo illae pro $\frac{x}{y}$ accipiantur, iam certi sumus istis numeris pro x et y assumtis, formulae nostrae $mxx - nyy$ minimum valorem induci. Simul vero notari oportet inter hos quotos successiuos α, β, γ, δ, ϵ etc. semper dari periodos, in quibus idem quotorum ordo recurrit, omnes ergo fractiones iisdem maxime quotis suscriptae omnes quoque valores idoneos pro x et y suppeditabunt, quibus formula nostra $mxx - nyy$ eundem minimum valorem nanciscitur.

8. Quo autem operationes quibus isti quoti facillime eruuntur, clarius explicare valeam, exemplum primo determinatum expediamus, quo formula proposita sit $7xx - 13yy$, ita vt iam proxime fieri debeat $\frac{x}{y} = \frac{\sqrt{91}}{7}$, vbi tantum notetur esse $\sqrt{91} > 9$ et < 10. Nunc ergo operatio vti pro maximo diuisore instituatur: ac primo diuidi oportet $\frac{\sqrt{91}}{7}$ per 7, vnde primus quotus prodit $= 1$, residuum vero $= \sqrt{91} - 7$ per quod praecedens diuisor 7 debet diuidi, multiplicetur vterque numerus per $\sqrt{91} + 7$, ac diuisor iam erit 42, diuidendus autem $7(\sqrt{91} + 7)$, qui per septenarium depressi, praebent diuisorem $= 6$ et diuidendum $= \sqrt{91} + 7 > 16$, vnde secundus quotus colligitur 2, ac residuum fiet $\sqrt{91} - 5$, per quod 6 debet diuidi. Multiplicando per $\sqrt{91} + 5$, diuisor erit 66 et diuidendus $6(\sqrt{91} + 5)$, ac per 6 depri-

deprimendo, iam per 11 diuidi debet $\sqrt{91}+5$, vnde tertius quotus fit 1, residuo manente $\sqrt{91}-6$, per quod praecedens diuisor 11 debet diuidi. Quae operatio vlterius hic repraesentatur

multipl. per	diuid. per	Quot.
$\frac{11}{\sqrt{91}-6}$ $\sqrt{91}+6$ fit	$\frac{11(\sqrt{91}+6)}{55}$ 11	$\frac{\sqrt{91}+6}{5}$ 3 N. 4
$\frac{5}{\sqrt{91}-9}$ $\sqrt{91}+9$	$\frac{5(\sqrt{91}+9)}{10}$ 5	$\frac{\sqrt{91}+9}{2}$ 9 N. 5
$\frac{2}{\sqrt{91}-9}$ $\sqrt{91}+9$	$\frac{2(\sqrt{91}+9)}{10}$ 2	$\frac{\sqrt{91}+9}{5}$ 3 N. 6
$\frac{5}{\sqrt{91}-6}$ $\sqrt{91}+6$	$\frac{5(\sqrt{91}+6)}{55}$ 5	$\frac{\sqrt{91}+6}{11}$ 1 N. 7
$\frac{11}{\sqrt{91}-5}$ $\sqrt{91}+5$	$\frac{11(\sqrt{91}+5)}{66}$ 11	$\frac{\sqrt{91}+5}{6}$ 2 N. 8
$\frac{6}{\sqrt{91}-7}$ $\sqrt{91}+7$	$\frac{6(\sqrt{91}+7)}{42}$ 6	$\frac{\sqrt{91}+7}{7}$ 2 N. 9
$\frac{7}{\sqrt{91}-7}$ $\sqrt{91}+7$	$\frac{7(\sqrt{91}+7)}{42}$ 7	$\frac{\sqrt{91}+7}{6}$ 2 N. 10

Vlterius calculum producere non est opus, quia haec postrema diuisio cum secunda conuenit et iam periodus secunda incipit, vbi notandum loco primi quoti 1 hic eius duplum occurrere, id quod in huiusmodi diuisionibus semper vsu venit.

9. Quoti ergo ordine inuenti sequenti modo progrediuntur:

1, 2, 1, 3, 9, 3, 1, 2 | 2, 2, 1, 3, 9, 3, 1, 2

inter quos maxime eminent 9 ideoque nullum amplius est dubium, quin illae fractiones, quae his quotis subiiciuntur, formulae $7xx-13yy$ omnium valorum minimum concilient. Adponamus igitur has fractiones sequenti modo

1.	2.	1.	3.	9
$\frac{1}{0}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{3}{1}$	$\frac{4}{1}$	$\frac{15}{11}$

vnde patet fractionem nobis satisfacientem fore $\frac{x}{y} = \frac{15}{11}$ siue $x = 15$ et $y = 11$. Hinc autem $7xx = 1575$ et $13xx = 1573$, vnde minimus valor sine vllo dubio est binarius, quem diuinando non tam facile quisquam detexerit.

10. Si has operationes, quibus illi quoti continui reperiuntur, attentius perpendamus, calculum non mediocriter contrahi posse facile perspicere licet. Sit enim $\sqrt{k}$ quantitas illa irrationalis, quam formula in fractionem continuam conuertenda inuoluit, numerus autem integer proxime minor, quam $\sqrt{k}$, sit $= e$ et ponamus peruentum iam esse ad diuisionem, qua formula $\sqrt{k} + r$ diuidi debet per numerum p, ita vt quotus hinc oriundus sit $q < \frac{e+r}{p}$ eritque residuum $= \sqrt{k} + r - pq$ et quia $pq > r$ (saltem quando operationes iam ordine progrediuntur), vocemus $pq - r = r'$ ita vt iam residuum sit $\sqrt{k} - r'$, vnde pro sequente diuisione habebimus diuisorem $= \sqrt{k} - r'$ et diuidendum $= p$, multiplicetur vterque per $\sqrt{k} + r'$ et fiat $\frac{k - r'r'}{p} = p'$ (vidimus enim semper in decursu operationum, formulam $k - r'r'$ diuisibilem fore per p) et iam sequens diuisio ita erit comparata, vt sit diuisor $= p'$ et diuidendus $\sqrt{k} + r'$, vnde nascetur quotus $q' < \frac{e+r'}{p'}$ atque hinc simili modo tertia et sequentes diuisiones conficientur.

11. Ex prima igitur illa operatione, qua formulam $\sqrt{k} + r$ diuidi oportet per numerum p, notentur tantum numeri r et p, vnde deducitur

quotus

quotus $q < \frac{e+r}{p}$; deinde sumatur $r' = pq - r$ et $p' = \frac{k - r'r'}{p}$, hincque fiet $q' < \frac{e+r'}{p'}$; simili modo capiatur porro $r'' = p'q' - r'$ et $p'' = \frac{k - r''r''}{p'}$, hincque $q'' < \frac{e+r''}{p''}$. Quas operationes sequente schemate repraesentamus:

r	p	$q < \frac{e+r}{p}$
$r' = pq - r$	$p' = \frac{k - r'r'}{p}$	$q' < \frac{e+r'}{p'}$
$r'' = p'q' - r'$	$p'' = \frac{k - r''r''}{p'}$	$q'' < \frac{e+r''}{p''}$
$r''' = p''q'' - r''$	$p''' = \frac{k - r'''r'''}{p''}$	$q''' < \frac{e+r'''}{p'''}$
etc.	etc.	etc.

Hocque modo progressio quotorum q, q', q'', q''' etc. facillime inueniri posse videtur.

12. Dilucidemus hanc regulam exemplo; quo formula $5xx - 38yy$ minimum sit reddenda, seu fractio $\frac{x}{y} = \frac{\sqrt{38}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{190}}{5}$ per fractionem infinitam euolvenda. Hic igitur erit $k = 190$, $e = 13$, $p = 5$ et $r = 0$, vnde totus calculus sequenti modo instituetur:

$r = 0$	$p = 5$	$q = 2 < \frac{13+10}{5}$
$r' = 10$	$p' = \frac{190-180}{5} = 18$	$q' = 1 < \frac{13+18}{18}$
$r'' = 8$	$p'' = \frac{190-64}{18} = 7$	$q'' = 3 < \frac{13+8}{7}$
$r''' = 13$	$p''' = \frac{190-169}{7} = 3$	$q''' = 8 < \frac{13+13}{3}$
$r'''' = 11$	$p'''' = \frac{190-121}{3} = 23$	$q'''' = 1 < \frac{13+11}{23}$
$r''''' = 12$	$p''''' = \frac{190-144}{23} = 2$	$q''''' = 12 < \frac{13+12}{2}$
$r'''''' = 12$	$p'''''' = \frac{190-144}{2} = 23$	$q'''''' = 1 < \frac{13+12}{23}$
$r''''''' = 11$	$p''''''' = \frac{190-121}{23} = 3$	$q''''''' = 8 < \frac{13+11}{3}$
$r'''''''' = 13$	$p'''''''' = \frac{190-169}{3} = 7$	$q'''''''' = 3 < \frac{13+13}{7}$
$r''''''''' = 8$	$p''''''''' = \frac{190-64}{7} = 18$	$q''''''''' = 1 < \frac{13+8}{18}$
$r = 10$	$p'''''''''' = \frac{190-100}{18} = 5$	$q'''''''''' = 4 < \frac{13+10}{5}$
etc.	etc.	etc.

Calculum vlterius prosequi non est opus, quum iam patescat quotorum ordo

2, 1, 3, 8, 1, 12, 1, 8, 3, 1 | 4, 1, 3, 8, 1, 12, 1, 8

vnde fractio continua oritur

$$\frac{x}{y} = \sqrt{\tfrac{19}{3}} = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{8 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{12 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{8}}}}}}}$$

Tum vero quum maximus horum quotorum sit 12, ei respondebit valor minimus formulae propositae $3xx - 38yy$, at fractio $\frac{x}{y}$ ita definietur 2, 1,

2, 1, 3, 8, 1, 12

$\frac{1}{0}$ $\frac{2}{1}$ $\frac{7}{1}$ $\frac{11}{4}$ $\frac{91}{33}$ $\frac{103}{37}$

ſicque pro caſu minimi habemus $x = 102$ et $y = 37$, vnde $5xx = 52010$ et $38.yy = 52022$, ergo differentia $= -2$, quia autem inter quotos etiam eminet 8, eique ſubiacet fractio $\frac{11}{4}$, ſumendo $x = 11$ et $y = 4$, colligitur valor formulae $5xx - 38.yy = 605 - 608 = -3$, qui valor poſt illum ſine dubio eſt minimus.

13. Plura huius generis exempla non afferimus, ſed quo haec methodus ſuccincta ad vſum ampliorem accommodetur, inueſtigemus fractiones continuas pro ſingulis multiplis ipſius $\sqrt{2}$, plurimum enim iuuabit, relationem inter hos valores perpendiſſe, ſiquidem hoc argumentum de fractionibus continuis neutiquam adhuc ſatis eſt exploratum. Quotos autem tantum pro ſingulis his multiplis adpoſuiſſe ſufficiet:

Pro $\sqrt{2}$
Quoti 1, 2, 1, 2, 1, 2
Pro $2\sqrt{2}$
Quoti 2, 1, 4, 1, 4, 1, 4
Pro $3\sqrt{2}$
Quoti 4, 4, 8, 4, 8, 4, 8
Pro $4\sqrt{2}$
Quoti 5, 1, 1, 1, 10, 1, 1
Pro $5\sqrt{2}$
Quoti 7, 14, 14, 14, 14, 14, 14

Pro $6\sqrt{2}$

Quoti 8, 2, 16, 2, 16, 2, 16

Pro $7\sqrt{2}$

Quoti 9, 1, 8, 1, 18, 1, 8.

14. Hae progressiones eo magis sunt notatu dignae, quod tantopere a se inuicem discrepant, etiamsi ipsae quantitates iis expressae tam simplicem rationem inter se teneant. Neque vero tantum multipla tantam gignunt differentiam in fractionibus continuis, sed etiam ipsa additio adhuc maius discrimen parit, si scilicet ad $\sqrt{2}$ quaepiam fractio rationalis addatur, id quod exemplo formulae $\frac{1}{2}+\sqrt{2}$ illustremus, vbi adeo vsu venit, vt primae operationes peculiarem euolutionem requirant, dum quotos a sequentibus periodis diuersos praebent. Ponatur ergo $\frac{x}{y}=\frac{1+2\sqrt{2}}{2}=\frac{1+\sqrt{8}}{2}$. Primo igitur per 2 diuidatur $1+\sqrt{8}$ et quotus erit 1; residuum vero $\sqrt{8}-1$ per quod diuidi debet 2, multiplicetur vtrinque per $\sqrt{8}+1$, vt per 7 diuidi debeat $2\sqrt{8}+2=\sqrt{32}+2$, et nunc operatio in ordinem subit, hic scilicet est $k=32$; $e=5$; $r=2$ et $p=7$ et operationes ita se habebunt:

$r=2$	$p=7$	$q=1$
$r=5$	$p=1$	$q=10$
$r=5$	$p=7$	$q=1$
$r=2$	$p=4$	$q=1$
$r=2$	$p=7$	$q=1$
$r=5$	$p=1$	$q=10$
$r=5$	$p=7$	$q=1$
$r=$ etc.	etc.	etc.

Quum

Quum igitur primus quotus fuerit 1 a prioribus prorsus separandus, series quotorum erit:

1 | 1, 10, 1, 1, 1, 10, 1 | 1, 10

quae series eo maiorem attentionem meretur, quod 2 praecedentibus toto coelo discrepat.

15. Sumamus aliud exemplum $\frac{x}{y} = \frac{1}{3} + \sqrt{2} = \frac{1+\sqrt{18}}{3}$, vnde resultat primus quotus $= 1$ et residuum est $\sqrt{18} - 2$ per quod diuidi oportet 3, sive multiplicando per $\sqrt{18} + 2$, diuisor fit 14 dividendus autem $3\sqrt{18} + 6 = \sqrt{162} + 6$, cuius euolutio sequenti modo repraesentatur:

$k = 162$; $e = 12$;

$r = 6$	$p = 14$	$q = 1$
$r = 8$	$p = 7$	$q = 2$
$r = 6$	$p = 18$	$q = 1$
$r = 12$	$p = 1$	$q = 24$
$r = 12$	$p = 18$	$q = 1$
$r = 6$	$p = 7$	$q = 2$
$r = 8$	$p = 14$	$q = 1$
$r = 6$	$p = 9$	$q = 2$
$r = 12$	$p = 2$	$q = 12$
$r = 12$	$p = 9$	$q = 2$
$r = 6$	$p = 14$	$q = 1$
$r = 8$	$p = 7$	$q = 2$
$r = 6$	$p = 18$	$q = 1$
$r = 12$	$p = 1$	$q = 24$
$r = 12$	$p = 18$	$q = 1$
$r = 6$	$p = 7$	$q = 2$
$r = 8$	$p = 14$	$q = 1$
$r = 6$	$p = 9$	$q = 2$
$r = 12$	$p = 2$	$q = 12$
etc.		

Series

Series igitur quotorum est

1 | 1, 2, 1, 24, 1, 2, 1, 2, 12, 2 | 1, 2, 1, 24, 1, 2

vbi excluso primo, reliqui secundum denos periodum constituunt.

16. Quum hic sit $\frac{x}{y} = \frac{1+\sqrt{18}}{2}$, habebimus $3x - y = y\sqrt{18}$ reddamus hanc aequationem rationalem et prodibit

$$xx - 6xy = 17yy; \text{ siue } 9xx - 6xy - 17yy = 0.$$

Hinc ergo discimus, si proposita fuerit haec formula trinomialis $9xx - 6xy - 17yy$, cuiusmodi valores litteris x et y tribui debeant, vt haec formula minimum nanciscatur valorem. Scilicet quotis modo inuentis subscribantur fractiones more solito, atque ea, cui maximus quotus est inscriptus, dabit valores ipsarum x et y, quocirca has fractiones hic subiiciamus:

1,	1,	2,	1,	24
$\frac{1}{0}$,	$\frac{1}{1}$,	$\frac{2}{1}$,	$\frac{5}{2}$,	$\frac{7}{4}$.

Pro casu ergo minimi habemus $\frac{x}{y} = \frac{7}{4}$, siue $x = 7$ et $y = 4$ vnde fit

$$9xx = 441; \; 6xy = 168; \; 17yy = 272$$

ergo ipsa formula abit in $+1$, qui valor vtique est omnium minimus.

17. Quod si autem hanc formulam modo supra exposito tractare et ad duos terminos redigere vellemus, ob $A = 9$ $B = -3$; $C = -17$, ponendo $x = t + 3u$ et $y = 9u$, prodiret haec formula $9tt - 1458uu = 9(tt - 162uu)$, quae formula certe nunquam

quam minor euadere poteſt quam nouem, ex quo intelligimus, ſi huiusmodi formularum valores minimos inueſtigare voluerimus, neutiquam licere eas ad duos terminos reducere; quandoquidem hoc modo earum natura penitus mutaretur, quocirca neceſſe eſt, tales formulas, data opera euoluere, id quod in ſequentibus problematibus ſumus expedituri.

Problema I.

Si formula $Ax^2 - 2Bxy + Cy^2$, caſu quo $x = a$ et $y = b$ praebeat valorem $= c$, inuenire infinitos alios valores pro x et y, qui eundem valorem c producant, ſiquidem quantitas $B^2 - AC$ fuerit numerus positiuus non quadratus.

Solutio.

18. Quum igitur ſit

$$Aa^2 - 2Bab + Bb^2 = c,$$

requiritur, vt fiat

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = Aa^2 - 2Bab + Cb^2.$$

Iam quaerantur ante omnia numeri p et q, vt fiat

$$pp - 2Bpq + ACqq = 1,$$

id quod ſemper fieri licet, quum hinc ſit

$$p = Bq + \sqrt{((B^2 - AC)qq + 1)}$$

cuius reſolutio a Problemate Pelliano pendet, dummodo $B^2 - AC$ fuerit numerus positiuus non quadratus. Statuamus ergo $B^2 - AC = k$, vt fieri debeat

$$p = Bq + \sqrt{(kq^2 + 1)},$$

ita vt quaeri oporteat numerum q, vt formula kq^2+1 fiat quadratum. Hoc ergo facto statuamus:

$$Ax^2-2Bxy+Cy^2=(Aa^2-2Bab+Cbb)(pp-2Bpq+ACqq)$$

quod productum cum ipsa forma proposita conuenire, ita per factores irrationales ostendimus. Quum enim sit

$$Ax^2-2Bxy+Cy^2=\tfrac{1}{A}(Ax-By+y\sqrt{k})(Ax-By-y\sqrt{k})$$

et $Aa^2-2Bab+Cy^2=\tfrac{1}{A}(Aa-Bb+b\sqrt{k})(Aa-Bb-b\sqrt{k})$

et

$$pp-2Bpq+ACq^2=(p-Bq+q\sqrt{k})(p-Bq-q\sqrt{k})$$

statuamus

$$Ax-By+y\sqrt{k}=(Aa-Bb+b\sqrt{k})(p-Bq+q\sqrt{k})$$

tum enim sponte fiet sumendo $\sqrt{k}$ negatiue

$$Ax-By-y\sqrt{k}=(Aa-Bb-b\sqrt{k})(p-Bq-q\sqrt{k})$$

vnde sufficiet alteram aequationem tantum euoluisse, si modo partes rationales et irrationales seorsim inter se aequentur. Prodibit igitur

$$Ax-By=(Aa-Bb)(p-Bq)+bq(B^2-AC)$$
$$y=q(Aa-Bb)+b(p-Bq)$$

qui valor in priori aequatione substitutus praebet

$$Ax=By+(Aa-Bb)(p-Bq)+kbq$$

hincque $x=ap-Cbq$, ita vt valores quaesiti sint

$$x=ap-Cbq;\ y=bp+Aaq-2Bbq,$$

atque hinc adhuc alia solutio formari potest, quoniam permutatis litteris A et C tam litterae x et y, quam

quam a et b inter se permutantur, litterae vero p et q eaedem manent, scilicet

$$x = ap + Cbq - 2Baq;\ y = bp - Aaq.$$

Inuenta autem vnica solutione, valores pro x et y reperti scribentur in locum litterarum a, et b, sicque denuo noua solutio eruitur atque hinc similimodo infinitas alias successiue elicere licebit.

Coroll. 1.

19. Quin etiam adhuc alias solutiones impetrare licet, si alii factores inter se combinentur, veluti si ponamus

$$Ax - By + y\sqrt{k} = (Aa - Bb - b\sqrt{k})(p - Bq + q\sqrt{k})$$

hinc orientur istae aequationes

$$Ax - By = (Aa - Bb)(p - Bq) - kbq$$
$$y = q(Aa - Bb) - b(p - Bq) = Aaq - bp$$

hincque $Ax = Aap - 2Bbp + ACbq$

seu $\quad x = ap + Cbq - \frac{2B}{A}bp,$

quae autem solutio non est integra, nisi $2Bbp$ per A sit diuisibile. Permutatio autem porro hanc suppeditat solutionem:

$$x = Cbq - ap;\ y = bp + Aaq - \frac{2B}{C}ap.$$

Coroll. 2.

20. Vtemur nunc etiam hac combinatione

$$Ax - By + y\sqrt{k} = (Aa - Bb + b\sqrt{k})(p - Bq - q\sqrt{k})$$

hincque obtinebimus

$$Ax - By = (Aa - Bb)(p - Bq) - kbq$$
$$y = -(Aa - Bb)q + b(p - Bq) = bp - Aaq$$
$$x = ap - 2Baq + Cbq.$$

Quae solutio iam permutatione in problematis solutione est eruta.

Coroll. 3.

21. Eodem modo si hos factores adhibeamus

$$Ax - By + y\sqrt{k} = (Aa - Bb - b\sqrt{k})(p - Bq - q\sqrt{k})$$

easdem solutiones reperimus, quas in primo Corollario iam inuenimus, permutatione scilicet adhibita.

Coroll. 4.

22. Verum adeo infinitas solutiones simul exhibere poterimus, si loco factorum $p - Bq \pm q\sqrt{k}$, eorum potestates quascunque vsurpamus, quarum quidem exponentes sunt numeri integri. Si enim euoluta formula $(p - Bq + q\sqrt{k})^n$, terminos irrationales ponamus $= Q\sqrt{k}$, rationales vero $P - BQ$, ita vt iam P et Q infinitos valores in se inuoluant, omnes praecedentes solutiones generales reddentur, si modo litterarum p et q loco, scribantur litterae P et Q.

Problema II.

Proposita formula $Ax^2 - 2Bxy + Cy^2$, in qua $BB - AC$ sit numerus positiuus non quadratus, inuenire eos valores pro litteris x et y, quibus ipsa formula ad minimum valorem perducatur.

Solutio.

Solutio.

23. Hoc problema simili modo soluetur, quo supra formulam binomialem tractauimus, scilicet ipsa nostra formula aequetur nihilo ex eiusque resolutione quaeratur fractio $\frac{x}{y}$, quae posito vt ante $B^2 - AC = k$, reperitur $\frac{x}{y} = \frac{B \pm \sqrt{k}}{A}$ quocirca istam formulam irrationalem in fractionem continuam resolui oportet, quaerendo scilicet seriem quotorum continuorum, quibus si more solito fractiones subscribantur, eae quae maximis quotis respondent, loco $\frac{x}{y}$ sumtae, formulae propositae minimum valorem inducent et quia hic $\sqrt{k}$ tam negatiue, quam positiue accipere licet, geminas solutiones assignare licebit, quae quidem plerumque inter se conuenient. Id quod clarissime exemplis ostendetur.

Exemplum.

24. Sit proposita ista formula $5xx - 6xy - 7yy$, vnde fit $\frac{x}{y} = \frac{3 \pm \sqrt{44}}{5}$. Valeat primo signum superius et formula $\frac{3 + \sqrt{44}}{5}$ dabit primum quotum $= 1$, ex quo oritur residuum $\sqrt{44} - 2$, per quod diuidi oportet 5. Multiplicetur vtrinque per $\sqrt{44} + 2$ vt prodeat diuisor 40 et diuidendus $5(\sqrt{44} + 2)$, qui deprimuntur ad 8 et $\sqrt{44} + 2$ nunc iam regula supra data vti poterimus, vti hic videre licet.

$k = 44; \quad e = 6$

$r = 2$	$p = 8$	$q = 1$
$r = 6$	$p = 1$	$q = 12$
$r = 6$	$p = 8$	$q = 1$
$r = 2$	$p = 5$	$q = 1$
$r = 3$	$p = 7$	$q = 1$
$r = 4$	$p = 4$	$q = 2$
$r = 4$	$p = 7$	$q = 1$
$r = 3$	$p = 5$	$q = 1$
$r = 2$	$p = 8$	$q = 1$
$r = 6$	$p = 1$	$q = 12$

qui quoti cum ante inuento hanc seriem constituunt

1, 1, 12, 1, 1, 1, 2, 1 | 1, 1, 12 etc.

vnde fractiones quotis 12 subscriptae quaesito satisfacient, quarum prima est $\frac{2}{1}$ ita vt sit $x = 2$ et $y = 1$ vnde formula proposita acquirit valorem $+1$.

At si sumamus

$$\frac{x}{y} = \frac{8 - \sqrt{44}}{5}, \text{ siue } \frac{-y}{x} = \frac{5}{\sqrt{44} - 8} = \frac{5(\sqrt{44} + 8)}{35} = \frac{\sqrt{44} + 8}{7}$$

vnde posito vt ante $k = 44$ et $e = 6$, habemus

$r = 3$	$p = 7$	$q = 1$
$r = 4$	$p = 4$	$q = 2$

atque hic subsistimus, quia eaedem diuisiones iam supra occurrerunt et nunc series quotorum erit

1, 2, 1, 1, 1, 12, 1, 1 | 1, 2, 1 etc.

prima autem fractio quoto 12 respondens hic fit $\frac{11}{1}$, sumatur ergo $x = 8$ et $y = -11$, atque nostrae formulae valor euadit $+1$.

Exem-

Exemplum II.

25. Proposita formula $7xx - 20xy + 14yy$ minimum reddenda, cuius valor casu $x = 1$ et $y = 1$ statim fit $+1$ certe minimum. Hic ergo fractio $\frac{x}{y}$ proxime debet esse aequalis formulae $\frac{10+\sqrt{2}}{7}$, vnde statim primus quotus oritur $= 1$ et residuum erit $3 + \sqrt{2}$ vnde pro secundo quoto habemus $\frac{7}{3+\sqrt{2}} = \frac{7(3-\sqrt{2})}{7} = \frac{3-\sqrt{2}}{1}$ sicque quotus $= 1$, et residuum $= 2 - \sqrt{2}$. Pro tertio quoto habemus $\frac{1}{2-\sqrt{2}} = \frac{2+\sqrt{2}}{2}$, sicque quotus $= 1$, et residuum $\sqrt{2}$ quare pro quarto habemus $\frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{1}$, vnde sequentes quoti sunt vti supra inuenimus 1, 2, 2, 2 etc., integra ergo series quorum erit

$$1,\ 1,\ 1\ |\ 1,\ 2,\ 2,\ 2,\ 2.$$

Quamquam hae operationes initio irregulares videntur, eas tamen secundum regulam praescriptam euolvere licet, hic enim est statim $k = 2$ $e = 1$, $r = 10$ et $p = 7$, vnde calculus ita procedet:

$r = +10$	$p = +7$	$q = 1$
$r = -3$	$p = -1$	$q = 1$
$r = +2$	$p = +2$	$q = 1$
$r = +0$	$p = +1$	$q = 1$
$r = +1$	$p = +1$	$q = 2$
$r = +1$	$p = 1$	$q = 2$

hincque superior series quotorum oritur, vnde valores fractionis $\frac{x}{y}$ sequenti modo procedent:

1, 1,

$$\begin{array}{cccccccc} 1. & 1. & 1. & 1. & 2. & 2. & 2. & 2 \\ \frac{1}{0}. & \frac{1}{1}. & \frac{2}{1}. & \frac{3}{2}. & \frac{5}{3}. & \frac{13}{8}. & \frac{31}{19}. & \frac{75}{46} \end{array}$$

quarum secunda statim dat casum minimi ante memoratum. Tertia dat $+2$, quarta -1, quinta dat $+1$, sexta -1 etc. Iidem valores sine dubio prodire debent, si in fractione pro $\frac{x}{y}$ capiatur $\sqrt{2}$ negatiue, vt habeatur $\frac{10-\sqrt{2}}{7}$, quam etiam per regulam nostram euoluere licebit, dummodo ita repraesentetur: $\frac{\sqrt{2}-10}{-7}$, ita vt sit $r=-10$ et $p=-7$, vnde calculus erit

$$k=2,\ e=1$$

$$\begin{array}{l|l|l} r=-10 & p=-7 & q=+1 \\ r=+3 & p=+1 & q=+4 \\ r=+1 & p=+1 & q=2 \\ r=+1 & p=+1 & q=2. \end{array}$$

Ex quibus quotis sequentes fractiones formantur

$$\begin{array}{ccccc} 1, & 4, & 2, & 2, & 2 \\ \frac{1}{0} & \frac{1}{1} & \frac{5}{4} & \frac{11}{9} & \frac{27}{22} \end{array} \text{ etc.}$$

quarum secunda formulam reducit ad $+1$, tertia ad -1, quarta ad $+1$ etc. Notatu dignum hic occurrit, quod hae fractiones a praecedentibus tantopore discrepent, atque nihilo secius eadem minima producant. Sed supra iam ostendimus huiusmodi formulam eosdem valores recipere posse, dum loco x et y diuersi valores substituuntur.

Exem-

Exemplum III.

26. Sit proposita formula $25xx - 70xy + 46yy$ minimum reddenda, hic ergo proxime esse oportet $\frac{x}{y} = \frac{7+\sqrt{3}}{5}$, vnde primus quotus fit $= 1$ et residuum $= 2 + \sqrt{3}$ ergo pro secundo quoto habetur fractio $\frac{5}{2+\sqrt{3}} = \frac{5(2-\sqrt{3})}{1} = \frac{10-\sqrt{75}}{1}$ hincque quotus $= 1$. Tota autem operatio per regulam nostram expediri potest, si fractio nostra per 5 multiplicando ad hanc formam reducatur $\frac{8+\sqrt{75}}{25}$, vbi est $k = 75$, $e = 8$, $r = 35$ et $p = 25$, vnde calculus sequitur

$r = 35$	$p = 25$	$q = +1$
$r = -10$	$p = -1$	$q = +1$
$r = +9$	$p = +6$	$q = 2$
$r = 3$	$p = +11$	$q = 1$
$r = 8$	$p = +1$	$q = 16$
$r = 8$	$p = 11$	$q = 1$
$r = 3$	$p = 6$	$q = 1$
$r = 3$	$p = 11$	$q = 1$
$r = 8$	$p = 1$	$q = 16$
etc.		

Quoti ergo cum fractionibus ita se habebunt:

$$1,\ 1,\ 2,\ \Big|\ 1,\ 16,\ 1,\ 1\ \Big|\ 1,\ 16,\ \text{etc.}$$

$$\frac{1}{0},\ \frac{1}{1},\ \frac{2}{1},\ \frac{5}{2},\ \frac{7}{3},\ \frac{117}{35},\ \frac{124}{37},\ \frac{241}{72},\ \frac{365}{109}$$

euidens est ergo fractiones indicibus 16 subscriptas quaesito satisfacere debere, quod fit si $x = 7$ et

 $y = 4$

$y = 4$ tum autem formula nostra abit in $+1$; si in prima formula radicali tribuatur signum -1, vt prodeat $y = \frac{\sqrt{105} - 35}{-25}$, quae per regulam euoluta praebet ob $k = 75$ et $e = 8$, $r = -35$, $p = -25$, q

$r = -35$	$p = -25$	$q = 1$
$r = +10$	$p = +1$	$q = 18$
$r = 8$	$p = +11$	$q = 1$
$r = 3$	$p = +6$	$q = 1$
$r = 3$	$p = +11$	$q = 1$
$r = 8$	$p = +1$	$q = 16$
$r = 8$	$p = 11$	$q = 1$
$r = 3$	$p = 6$	$q = 1$
$r = 3$	$p = 11$	$q = 1$
etc.	etc.	etc.

Hinc autem quoti cum fractionibus ita procedent

1;	18	1;	1;	1;	16	1;	1
$\frac{1}{0}$;	$\frac{1}{1}$;	$\frac{19}{18}$;	$\frac{20}{19}$;	$\frac{39}{37}$;	$\frac{59}{56}$;	$\frac{98}{93}$;	$\frac{157}{149}$.

Secunda fractio indici 18 respondens sine dubio producit valorem minimum scilicet $+1$, quod ex priori casu concludi nequit, quum ibi haec fractio $\frac{1}{1}$ exiguo quoto sit subscripta, verum hoc neutiquam est mirandum, propterea quod hi valores litterarum x et y sunt valde exigui, principium autem supra stabilitum, quo fractiones maximis quotis respondentes accipere iubemur proprie numeris maioribus conuenit atque vtique euenire potest, vt valo-

valores minimis numeris expressi ab hac regula recedant.

27. Ex his exemplis abunde perspicitur, quo modo regula nostra aeque facili ac concinna in omnibus casibus vti conueniat; imprimis autem ea optimo successu adhiberi poterit in Problemate illo Pelliano famosissimo soluendo, vbi quaeruntur numeri x et y vt sit $y = \sqrt{(kxx + 1)}$, tum enim vtique oportebit esse proxime $\frac{y}{x} = \sqrt{k}$, quandoquidem formula $yy - kxx$ minima fieri debet, minimum autem iam sponte constat esse $= 1$, prodiens si $x = 0$ et $y = 1$. Veluti si fuerit $k = 13$, cui conuenit $e = 3$ ac primo sit $r = 0$, $p = 1$, ficque calculus ita progredietur:

$r = 0$	$p = 1$	$q = 3$
$r = 3$	$p = 4$	$q = 1$
$r = 1$	$p = 3$	$q = 1$
$r = 2$	$p = 3$	$q = 1$
$r = 1$	$p = 4$	$q = 1$
$r = 3$	$p = 1$	$q = 6$
$r = 3$	$p = 4$	$q = 1$.

Vnde quoti cum fractionibus $\frac{y}{x}$ erunt

3,	1,	1,	1,	1	6,	1,	1,	1,	1	6	etc.
1	2	4	7	11	18	119	137	256	393	649	etc.
0,	1,	1,	2,	3	5,	33,	38,	71,	109,	180	etc.

vbi maximi quoti sunt sex, quia autem $\frac{y}{x}$ maius

esse debet quam $\sqrt{k}$ fractiones autem hic resultantes alternatim superant et deficiunt ab isto valore, pro casu nostro eas accipi oportet, quae locis imparibus consistunt, ergo vndecima harum fractionum, quae dat $y = 649$ et $x = 180$ quaesito satisfacit, fractio autem priori 6 subscripta resoluit aequationem $y = \sqrt{(13xx - 1)}$.

PHYSI-