CONSIDERATIONES CYCLOMETRICAE.

Auctore

L. EVLERO.

1.

Lunularum quadrabilium constructio ab inuentione binorum angulorum pendet, qui inter se rationem duplicatam sinuum teneant, binos scilicet eiusmodi angulos m et n inuestigari oportet, vt sit

$$m:n = \text{sin.}\, m^2 : \text{sin.}\, n^2 \text{ seu } \frac{m}{\text{sin.}\, m^2} = \frac{n}{\text{sin.}\, n^2}$$

quam aequalitatem hic accuratius perpendere constitui.

2. Dato autem angulo quocunque m valorem expressionis inde natae $\frac{m}{\text{sin.}\, m^2}$ haud difficulter assignare licet, idque duplici modo vel in gradibus, si angulus m ita detur, vel in partibus radii $= 1$, si arcus angulum metiens in partibus radii exprimatur facile autem altera expressio ad alteram reducitur.

3. De hac autem expressione $\frac{m}{\text{sin.}\, m^2}$ obseruo, eam primo, si angulus m euanescat, euadere infinitam, tum vero diminui ad certum vsque terminum, quo superato denuo augetur siquidem angulo m ad duos rectos aucto ob $\text{sin.}\, m = 0$, iterum fit infinita. Quod quo clarius appareat, sit r nota anguli recti, et quia

$$\text{sin.}\tfrac{1}{3}r = \tfrac{1}{2};\ \text{sin.}\tfrac{1}{2}r = \tfrac{1}{\sqrt{2}};\ \text{sin.}\tfrac{2}{3}r = \tfrac{\sqrt{3}}{2} \text{ et sin.}\, r = 1$$

si fueſi fuerit

$$m = 0r;\ \tfrac{1}{3}r;\ \tfrac{1}{2}r;\ \tfrac{2}{3}r;\ r;\ \tfrac{4}{3}r;\ \tfrac{3}{2}r;\ \tfrac{5}{3}r;\ 2r$$

erit

$$\frac{m}{\textit{ſin.}\, m^2} = \infty r;\ \tfrac{4}{3}r;\ r;\ \tfrac{8}{9}r;\ r;\ \tfrac{16}{9}r;\ 3r;\ \tfrac{20}{3}r;\ \infty r.$$

4. Antequam igitur angulus m nonaginta gradus attingit formula $\frac{m}{\textit{ſin.}\, m^2}$ fit minima; colligitur autem hoc euenire vbi ſit $m = \frac{1}{2}$ tang. m, ſeu arcus angulum metiens aequalis ſemiſſi tangentis. Hunc angulum nonniſi proxime aſſignare licet, qui calculo inſtituto reperitur $= 66^\circ, 46', 54\frac{1}{4}''$ vnde prodit valor omnium minimus $\frac{m}{\textit{ſin.}\, m^2} = 79, 07102$ grad.

5. Hunc angulum tam inſigni proprietate praeditum littera a denotabo, ita vt ſit $a = 66^\circ, 46'$, $54\frac{1}{4}''$ in gradibus, in partibus radii autem $a = 1, 165561$, vbi obſeruare licet hunc angulum neque ad peripheriam neque ad radium rationem commenſurabilem tenere, ſed vtriusque reſpectu pro tranſcendente eſſe habendum.

6. Interim tamen iuuabit praecipuas affectiones huius anguli perpendiſſe reperitur autem:

ſin. $a = 0,9190096$; coſ. $a = 0, 3942360$; tang. $a = 2,331122$

tum vero

ſin. $2\,a = 0, 7246132$ et coſec. $2\,a = 1, 380050$

duplum angulum ideo conſidero, quia ob $a = \frac{1}{2}$ tang. a, fit formula noſtra $\frac{a}{\textit{ſin.}\, a^2} = \frac{1}{\textit{ſin.}\, 2\, a} =$ coſec. $2\,a$, ita vt $1, 380050$ ſit valor minimus quem formula $\frac{m}{\textit{ſin.}\, m^2}$

aſſe-

assequi potest. Idem autem in gradibus expressus dat vt ante $79^\circ, 07102$.

7. Vt ergo bini anguli m et n rationem teneant duplicatam sinuum, seu vt sit $\frac{m}{\sin. m^2} = \frac{n}{\sin. n^2}$, necesse est alterum eorum m infra a, alterum vero n supra a existere, et quo magis angulus m infra a deprimitur, eo magis alter n superabit, neque tamen simili ratione, cum sumto $m = 0$, fiat $n = 180^\circ$, neque vero angulus a in horum terminorum medium incidit.

8. Si igitur angulus m sit minimus, ponatur $m = \mu$ in partibus radii, et denotante π semicircumferentiam seu mensuram duorum rectorum, angulus n quam minime a π deficiet, statuatur ergo $n = \pi - \nu$, eritque

$$\mu \sin. \nu^2 = (\pi - \nu) \sin. \mu^2 \text{ seu } \mu(1 - \cos. 2\nu) = (\pi - \nu)(1 - \cos. 2\mu)$$

Iam vero est

$$1 - \cos. \Phi = \tfrac{1}{2}\Phi^2 - \tfrac{1}{24}\Phi^4 + \tfrac{1}{720}\Phi^6 - \text{etc.}$$

Ergo

$$\mu(2\nu\nu - \tfrac{2}{3}\nu^4 + \tfrac{4}{45}\nu^6) = (\pi - \nu)(2\mu\mu - \tfrac{2}{3}\mu^4 + \tfrac{4}{45}\mu^6)$$

vnde colligitur proxime

$$\nu = \sqrt{\pi\mu} - \tfrac{1}{2}\mu + \frac{3 + 4\pi\pi}{24\sqrt{\pi}}\mu\mu.$$

9 Sin autem angulus m sit parumper minor angulo a, alter n parumper erit maior. Satuatur ergo $m = a - \mu$ et $n = a + \nu$; atque formula $\frac{m}{\sin. m^2}$ abit in

$$\frac{2(a - \mu)}{1 - \cos. 2(a - \mu)} = \frac{2(a - \mu)}{1 - \cos. 2a \cos. 2\mu - \sin. 2a \sin. 2\mu}$$

quae

quae ob angulum μ minimum in talem feriem euoluatur:

$$A - B\mu + C\mu^2 - D\mu^3 + E\mu^4 - \text{etc.}$$

vbi litterae A, B, C, D etc. hoc modo definiuntur

$$A\,\text{fin.}\,a^2 - a = 0 \text{ hinc } A = \frac{a}{\text{fin.}\,a^2} = \frac{1}{\text{fin.}\,2a}$$

$$B\,\text{fin.}\,a^2 + A\,\text{fin.}\,2a - 1 = 0 \text{ hinc } B = 0 \text{ ob } A = \frac{1}{\text{fin.}\,2a}$$

$$C\,\text{fin.}\,a^2 + B\,\text{fin.}\,2a + A\,\text{cof.}\,2a = 0$$

$$D\,\text{fin.}\,a^2 + C\,\text{fin.}\,2a + B\,\text{cof.}\,2a - \tfrac{2}{3}A\,\text{fin.}\,2a = 0$$

$$E\,\text{fin.}\,a^2 + D\,\text{fin.}\,2a + C\,\text{cof.}\,2a - \tfrac{2}{3}B\,\text{fin.}\,2a - \tfrac{1}{3}A\,\text{cof.}\,2a = 0$$

$$F\,\text{fin.}\,a^2 + E\,\text{fin.}\,2a + D\,\text{cof.}\,2a - \tfrac{2}{3}C\,\text{fin.}\,2a - \tfrac{1}{3}B\,\text{cof.}\,2a + \tfrac{2}{15}A\,\text{fin.}\,2a = 0$$

etc.

vbi coefficientes numerici continuo per fractiones $\frac{2}{2}, \frac{2}{3}, \frac{2}{4}, \frac{2}{5}$ etc. multiplicantur.

10. His litteris determinatis, erit

$$\frac{m}{\text{fin.}\,m^2} = A - B\mu + C\mu^2 - D\mu^3 + E\mu^4 - F\mu^5 \text{ etc. et}$$

$$\frac{n}{\text{fin.}\,n^2} = A + B\nu + C\nu^2 + D\nu^3 + E\nu^4 + F\nu^5 \text{ etc.}$$

quae feries cum inter fe aequari debeant, ex dato angulo μ, alter ν ita definitur, vt quia $B = 0$ pofito

$$\nu = \mu + P\mu^2 + Q\mu^3 + R\mu^4 + S\mu^5 \text{ etc.}$$

fit

$$P = \frac{-D}{C};\; Q = \frac{DD}{CC};\; R = \frac{-2D^3}{C^3} + \frac{2DE}{CC} - \frac{F}{C}$$

et

$$S = \frac{4D^4}{C^4} - \frac{6DDE}{C^3} + \frac{3DF}{CC}$$

Calculo autem ſubducto reperitur

$A = 1,380050$; $C = 1,126090$; $P = 0,265937$
$B = 0$, $D = -0,299469$; $Q = 0,070722$.

11. At ſumto vtcunque angulo m, alter angulus n per cognitam appropinquandi methodum proxime ſaltem definiri poteſt; veluti ſi ſumatur $m = 60^\circ$, reperitur $n = 73^\circ, 41', 32'' \frac{22}{100}$ ac poſito $m = 30^\circ$, prodit $n = 108^\circ, 14', 30'' \frac{18}{100}$ tum vero ſi $n = 135^\circ$ fit $m = 12^\circ, 20', 54'' \frac{82}{100}$ ſin autem angulus m ita accipiatur, vt ſit tang. $m = \sqrt{2}$, ideoque $m = 54^\circ, 44', 8\frac{1}{5}''$, inuenitur $n = 79^\circ, 14', 23'' \frac{36}{100}$ nullo autem horum caſuum angulum alterum geometrice aſſignare licet.

12. Talis autem inueſtigatio ad lunularum quadrabilium conſtructionem nihil iuuat, cum neceſſe ſit, vt vterque angulus m et n geometrice aſſignari poſſit, quod euenit, ſi vtriusque ſinum vel tangentem geometrice exhibere licuerit. Magna ergo hinc exoritur quaeſtio, quomodo binos eiusmodi angulos m et n geometrice aſſignabiles inueſtigari oporteat vt fiat

$$\frac{m}{\text{ſin.}\, m^2} = \frac{n}{\text{ſin.}\, n^2} \text{ ſeu } m(1 - \text{coſ.}\, 2n) = n(1 - \text{coſ.}\, 2m).$$

13. Ad hoc problema ſoluendum vulgo aſſumi ſolet, binos angulos m et n inter ſe commenſurabiles eſſe debere; nondum autem eſt demonſtratum nullo alio caſu ſolutionem obtineri non poſſe. Sinus certe horum angulorum rationem algebraicam tenére oportet, quia alioquin anguli geometrice aſſignari

non

non possent, ex quo etiam ipsa angulorum ratio algebraice assignabilis esse debet; neque vero hinc conficitur, hanc rationem numeris integris contineri debere.

14. Infinitis certe modis anguli geometrice assignari possunt, qui inter se non sint commensurabiles, veluti anguli quorum sinus sunt $\frac{4}{5}$ et $\frac{1}{3}$; num autem huiusmodi anguli non rationem quandam irrationalem tenere possint, neutiquam adhuc satis constat? Eximium autem foret inuentum si huiusmodi anguli quorum ratio esset exempli gratia vt $1 : \sqrt{2}$ geometrice exhiberi possent.

15. Quodsi inter angulos m et n ratio statuatur $= 1 : \sqrt{2}$ resolutio aequationis $\frac{m}{\sin. m^2} = \frac{n}{\sin. n^2}$ praebet hos valores.

$$m = 55^\circ, 28', 18'' \text{ et } n = 78^\circ, 27', 0''$$

qui autem anguli geometrice assignabiles non videntur. Cum autem hinc nihil concludi possit, methodum adhuc deesse cogimus fateri, cuius beneficio hoc problema per angulos etiam non commensurabiles resolui queat.

16. Videamus autem quot modis hos angulos inter se commensurabiles statuendo ista quaestio per circulum et normam resolui possit, ita vt problema pro plano haberi possit: Statuatur ergo $m = \frac{1}{2}\mu\omega$ et $n = \frac{1}{2}\nu\omega$, vt sit $m : n = \mu : \nu$, fierique debet

$$\mu(1 - \cos. \nu\omega) = \nu(1 - \cos. \mu\omega).$$

Sit cos. $\omega = z$, ac notetur esse:

$$\begin{aligned}
\cos. 2\omega &= 2zz - 1 \\
\cos. 3\omega &= 4z^3 - 3z \\
\cos. 4\omega &= 8z^4 - 8zz + 1 \\
\cos. 5\omega &= 16z^5 - 20z^3 + 5z \\
\cos. 6\omega &= 32z^6 - 48z^4 + 18zz - 1
\end{aligned}$$

etc.

17. Hinc percurramus casus praecipuos aequationis inuentae

$$\nu - \mu = \nu \cos. \mu\omega - \mu \cos. \nu\omega$$

I. $\mu = 1$ et $\nu = 2$ hinc $m = \frac{1}{2}\omega$ et $n = \omega$ erit

$$1 = 2z - 2zz + 1, \text{ seu } zz - z = 0,$$

vnde per $z - 1$ diuidendo, id quod semper succedit, fit $z = 0$; ideoque $\omega = 90°$, et $m = 45°$ et $n = 90°$, qui est casus lunulae Hippocratis

II. $\mu = 1$, et $\nu = 3$, hinc $m = \frac{1}{2}\omega$ et $n = \frac{3}{2}\omega$

Erit ergo $2 = 3z - 4z^3 + 3z$ seu

$$1 - 3z + 2z^3 = 0,$$

quae aequatio per $1 - z$ diuisa dat

$$1 - 2z - 2zz = 0, \text{ hincque}$$

$$z = \frac{-1 + \sqrt{3}}{2} = \cos. \omega \text{ et } \cos. 2\omega = 1 - \sqrt{3};$$

problema planum.

III.

III. Sit $\mu = 2$ et $\nu = 3$ hinc $m = \omega$ et $n = \frac{3}{2}\omega$. Erit ergo $1 = 6zz - 3 - 8z^3 + 6z$ seu $4 - 6z - 6zz + 8z^3 = 0$ quae aequatio per $2(1 - z)$ diuisa dat $2 - z - 4zz = 0$ vnde colligitur $z = -\frac{1+\sqrt{33}}{8} = \cos.\omega$ et $\cos. 2\omega = \frac{1+\sqrt{33}}{16}$; problema planum.

IV. Sit $\mu = 1$ et $\nu = 4$ hinc $m = \frac{1}{2}\omega$ et $n = 2\omega$ Erit ergo $3 = 4z - 8z^4 + 8zz - 1$ seu $1 - z - 2zz + 2z^4 = 0$ quae aequatio per $1 - z$ diuisa dat

$$1 - 2zz - 2z^3 = 0$$ problema solidum.

V. Sit $\mu = 3$ et $\nu = 4$ hinc $m = \frac{3}{2}\omega$ et $n = 2\omega$. Erit ergo $1 = 16z^3 - 12z - 24z^4 + 24zz - 3$ seu

$$1 + 3z - 6zz - 4z^3 + 6z^4 = 0$$

quae per $1 - z$ diuisa dat

$$1 + 4z - 2zz - 6z^3 = 0$$ problema solidum.

VI. Sit $\mu = 1$ et $\nu = 5$ hinc $m = \frac{1}{2}\omega$ et $n = \frac{5}{2}\omega$. Erit ergo $4 = 5z - 16z^5 + 20z^3 - 5z$ seu

$$1 - 5z^3 + 4z^5 = 0$$

quae per $1 - z$ diuisa praebet

$$1 + z + zz - 4z^3 - 4z^4 = 0$$

et in hanc formam transfunditur:

$$\left(2zz + z - \tfrac{1}{2}\right)^2 = \tfrac{5}{4} \text{ seu } 2zz + z - \tfrac{1}{2} = \tfrac{\sqrt{5}}{2}$$

hinc $z = -\frac{1+\sqrt{(5+4\sqrt{5})}}{4} = \cos.\omega$ et $\cos. 2\omega = \frac{2\sqrt{5} - 1 - \sqrt{(5+4\sqrt{5})}}{4}$ ita vt hic prodeat problema planum,

VII.

VII. Sit $\mu = 2$ et $\nu = 5$ hinc $m = \omega$ et $n = \frac{5}{2}\omega$.
Erit ergo $3 = 10zz - 5 - 32z^5 + 40z^3 - 10z$ seu

$$4 + 5z - 5zz - 20z^3 + 16z^5 = 0 \text{ et per } 1 - z \text{ diuidendo}$$

$$4 + 9z + 4zz - 16z^3 - 16z^4 = 0 \text{ problema solidum}$$

VIII. Sit $\mu = 3$ et $\nu = 5$ hinc $m = \frac{3}{2}\omega$ et $n = \frac{5}{2}\omega$.
Ergo $2 = 20z^3 - 15z - 48z^5 + 60z^3 - 15z$ seu

$$1 + 15z - 40z^3 + 24z^5 = 0 \text{ et per } 1 - z \text{ diuidendo}$$

$$1 + 16z + 16zz - 24z^3 - 24z^4 = 0$$

quae reducitur ad hanc formam

$$(1 + 8z + 6zz)^2 = 60(z + zz)^2$$

vnde fit, $zz\sqrt{60} + z\sqrt{60} = 6zz + 8z + 1$ ideoque

$$z = \frac{4 - \sqrt{15} + \sqrt{(25 - 6\sqrt{15})}}{2\sqrt{15} - 6} \text{ seu } \frac{1}{z} = -4 + \sqrt{15} + \sqrt{(25 - 6\sqrt{15})}$$

vel $z = \frac{\sqrt{15} - 3 + \sqrt{(60 + 5\sqrt{15})}}{12} = \text{cos.}\,\omega$ et $\text{cos.}\,2\omega = \frac{1 + \sqrt{(25 - 6\sqrt{15})}}{6}$

sicque etiam hoc casu problema est planum.

IX. Sit $\mu = 4$ et $\nu = 5$ hinc $m = 2\omega$ et $n = \frac{5}{2}\omega$.
Ergo $1 = 40z^4 - 40zz + 5 - 64z^5 + 80z^3 - 20z$ seu

$$1 - 5z - 10zz + 20z^3 + 10z^4 - 16z^5 = 0 \text{ et per } 1 - z \text{ diuidendo}$$

$$1 - 4z - 14zz + 6z^3 + 16z^4 = 0$$

at haec aequatio nonnisi constructionem solidam admittit.

18. Quinque ergo casus sumus adepti, quibus ope circuli et normae lunulas quadrabiles exhibere, vel hanc aequationem $\frac{m}{\text{sin.}\,m^2} = \frac{n}{\text{sin.}\,n^2}$ construere licet:

I.

I. Casus $m = 45^\circ$ et $n = 90^\circ$

II. Casus $m = \frac{1}{2}\omega$ et $n = \frac{3}{2}\omega$ existente
$\cos\omega = \frac{\sqrt{3} - 1}{2}$ vel $\cos 2\omega = 1 - \sqrt{3}$

III. Casus $m = \omega$ et $n = \frac{3}{2}\omega$ existente
$\cos\omega = \frac{\sqrt{33} - 1}{8}$ vel $\cos 2\omega = \frac{1 - \sqrt{33}}{16}$

IV. Casus $m = \frac{1}{2}\omega$ et $n = \frac{5}{2}\omega$ existente
$\cos\omega = \frac{\sqrt{(5 + 4\sqrt{5})} - 1}{4}$

V. Casus $m = \frac{3}{2}\omega$ et $n = \frac{5}{2}\omega$ existente
$\cos\omega = \frac{\sqrt{15} - 3 + \sqrt{(60 + 6\sqrt{15})}}{12}$ vel $\cos 2\omega = \frac{1 + \sqrt{(25 - 6\sqrt{15})}}{6}$.

19. Pro aliis rationibus inter arcus m et n assumtis constructio lunularum ad altiores locos geometricos assurgit, neque vero minus pro geometrica est habenda. Vtrum autem praeter hos casus nullae aliae lunulae geometrice assignari queant, nec ne? in dubio relinquendum videtur. Neque contra valeret argumentum afferri vulgo solitum, quod inde circuli quadratura consequeretur, etiamsi et id, nisi quadratura indefinita spectetur, parum roboris habere videatur. Etsi enim satis constet rationem peripheriae ad diametrum per numeros rationales exprimi non posse, minus tamen adhuc perspicitur, numeros etiam irrationales ad hunc scopum esse ineptos. Verum etiamsi esset euictum, hanc rationem ne surdis quidem numeris vllo modo exhiberi posse, tamen inde vix quicquam pro arcubus ad totam circumferentiam incommensurabilibus concludere liceret. Veluti si quis arcum circuli sinu ver-

bi gratia $= \frac{2}{3} = 0,6666666$ determinatum geometrice assignare docuerit, inde minime adhuc quantitas peripheriae colligi posset; ex quo huiusmodi rectificatio impossibilitati quadraturae circuli aduersari haud videatur; nisi forte ad ipsam methodum, qua quis ad valorem arcus, cuius sinus est $= \frac{2}{3}$ peruenerit, respiciamus, cum enim eidem sinui innumeri arcus conueniant, ob legem continuitatis methodus simul omnes istos arcus complecti deberet, ideoque algebraica expressione contineri non posset; praeterquam quod differentia vel summa horum arcuum etiam integram peripheriam esset ostensura. Hac igitur ratione demum confirmata pronunciare licebit, nullius prorsus arcus circularis, geometrice assignabilis, quantitatem geometrice definiri posse.
