SOLUTION

D'UNE QUESTION TRES DIFFICILE DANS LE CALCUL DES PROBABILITÉS.

PAR MR. EULER.

I.

C'eſt le plan d'une lotterie qui m'a fourni cette queſtion, que je me propoſe de développer. Cette lotterie étoit de cinq claſſes, chacune de 10000 billets, parmi lesquels il y avoit 1000 prix dans chaque claſſe, & par conſéquent 9000 blancs. Chaque billet devoit paſſer par toutes les cinq claſſes; & cette lotterie avoit cela de particulier qu'outre les prix de chaque claſſe on s'engageoit de payer un ducat à chacun de ceux dont les billets auroient paſſé par toutes les cinq claſſes ſans rien gagner. On voit bien que cette derniere dépenſe, à laquelle la Lotterie s'engage, eſt très incertaine, vu qu'il ſeroit poſſible d'un côté, que tous les prix dans chaque claſſe tombaſſent ſur les mêmes numéros, & dans ce cas il y en auroit 9000 à chacun desquels il faudroit un ducat. Or, de l'autre côté, ſi tous les prix des cinq claſſes tomboient ſur des numéros différens, il y auroit en tout 5000 billets gagnans, & autant de perdans, de ſorte que dans ce cas ladite dépenſe ne monteroit qu'à 5000 ducats. L'un & l'autre de ces deux cas étant presque moralement impoſſible, la queſtion eſt de déterminer le nombre des ducats que la lotterie ſera probablement obligée de payer. Pour cet effet il faut faire un dénombrement parfait de tous les cas poſſibles, pour chaque nombre de ceux qui perdront dans toutes les cinq claſſes, depuis le plus petit de 5000 jusqu'au plus grand de 9000.

2. Pour rendre cette recherche & plus générale & plus lumineuse, je poserai

1°. Le nombre des classes de la lotterie $= k$.
2°. Le nombre des prix dans chaque classe $= n$.
3°. Le nombre des billets blancs de chacune $= m$.
4°. Donc le nombre de tous les billets $= m + n$.

Chacun de ces $m + n$ billets passe par toutes les k classes, dans chacune desquelles il gagnera ou perdra; & s'il arrive qu'il ne gagne rien dans toutes les classes, alors il jouira du bénéfice mentionné d'un ducat. Il s'agit donc d'estimer selon les regles de la probabilité le nombre des billets qui passeront par toutes les classes sans rien gagner; & d'abord, pour connoître les limites de ce nombre, supposons que tous les prix de chaque classe tombent sur les mêmes billets: dans ce cas donc il n'y aura que n billets qui gagnent, & tous les autres, dont le nombre est $= m$, seront dans le cas de recevoir un ducat, de sorte que cette dépense est de m ducats pour le fond de la lotterie, & c'est la plus grande possible. Or elle sera la plus petite lorsqu'il arrivera que tous les prix de chaque classe tombent sur des billets différens: dans ce cas le nombre de ceux qui gagnent en quelque classe que ce soit, sera $= kn$, & partant le nombre de ceux qui perdent $= m + n - kn = m - (k - 1)n$. Par conséquent la dépense dans ce cas ne sera que de $m - (k - 1)n$ ducats, en supposant que le nombre m est plus grand que $(k - 1)n$: car s'il lui étoit égal, ou même plus petit, cette dépense se réduiroit à rien.

3. Voilà donc la question dont il faut chercher la solution. Il s'agit de trouver, parmi tous les cas possibles, ceux où le nombre de ceux qui perdent dans toutes les k classes sera, ou m, ou $m - 1$, ou $m - 2$, ou $m - 3$, ou $m - 4$ &c. jusqu'à $m - (k - 1)n$. Ensuite on sait par les regles de la probabilité, que chacun de ces nombres divisé par le nombre de tous les cas possibles exprime

exprime la probabilité que ce cas existe, laquelle sera d'autant plus grande qu'elle approche plus de l'unité; & si elle devenoit égale à l'unité, ce seroit une marque d'une entiere certitude. Cela arrive dans le cas d'une seule classe, où $k = 1$, attendu que le nombre des perdans est alors certainement $= m$, & l'expression pour la probabilité devient alors $= 1$, ou bien elle marque une certitude entiere. Mais, si la lotterie est composée de plusieurs classes, de sorte que $k > 1$, on aura toujours plusieurs cas à développer, selon que le nombre de ceux qui perdent dans toutes les classes est, ou m, ou $m - 1$, ou $m - 2$, ou $m - 3$ &c. jusqu'à $m - (k - 1)n$: & ayant trouvé la probabilité de chacun de ces cas, puisqu'il faut de toute nécessité que quelcun d'eux existe, il est évident que la somme de toutes ces probabilités ensemble est égale à l'unité ou à la mesure d'une certitude entiere. Cette propriété sert d'ailleurs à vérifier les solutions qu'on donne des questions pareilles; mais ici elle me servira à trouver la solution même du probleme proposé, & je doute fort que sans ce secours on y puisse réussir.

4. Je suppose d'abord qu'on ait déjà tiré la premiere classe, & que les prix soient tombés sur les billets marqués A, B, C, D, E &c. dont le nombre est $= n$. Maintenant, en passant à la seconde classe, où il y a encore n prix, le nombre de tous les billets étant $= m + n$, je remarque que le nombre de toutes les variations possibles parmi les n billets auxquels les prix sont attachés, sans avoir égard à leur ordre, est $= \dfrac{(m+n)}{1.} \dfrac{(m+n-1)}{2.} \dfrac{(m+n-2)}{3.} \cdots \cdots \dfrac{(m+1)}{n}$;

& si l'on veut aussi avoir égard à la diversité de l'ordre suivant lequel ils sortent successivement, on n'a qu'à omettre le dénominateur, & le nombre de tous les cas possibles sera $= (m+n)(m+n-1)(m+n-2) \ldots \ldots (m+1)$. Or, considérant aussi la diversité de l'ordre, le nombre de tous les cas où les prix se rencontrent avec les mêmes billets A, B, C, D &c. qui ont gagné dans la premiere classe & dont le nombre est $= n$, est exprimé ainsi

1.

$1.\ 2.\ 3.\ 4 \ldots\ldots n$. Donc, pour que les prix de la ſeconde claſſe tombent ſur les mêmes billets que dans la premiere, la probabilité eſt =

$$\frac{1.\ 2.\ 3.\ 4 \ldots\ldots n}{(m+1)\,(m+2)\,(m+3)\ \ldots\ldots\ (m+n)},$$

& que la même choſe arrive auſſi dans la troiſieme, la probabilité eſt égale au quarré de cette expreſſion, dans la quatrieme au cube, & ainſi de ſuite. Par conſéquent, que dans toutes les k claſſes les prix tombent ſur les mêmes billets, la probabilité ſera =

$$\left(\frac{1.\ 2.\ 3.\ 4 \ldots\ldots n}{(m+1)\,(m+2)\,(m+3)\ \ldots\ldots\ (m+n)}\right)^{k-1}.$$

5. Je remarque ſur cette expreſſion, 1°. que le nombre de toutes les variations poſſibles par rapport aux billets qui ſe rencontrent avec les prix, dans toutes les claſſes enſemble, eſt = $((m+1)\,(m+2)\,(m+3)\ \ldots\ldots\ (m+n))^{k-1}$, en tenant auſſi compte de la diverſité dans l'ordre où les billets qui gagnent, ſortent ſucceſſivement; enſuite 2°. que le nombre de tous les cas poſſibles que préciſément les billets marqués A, B, C, D &c. ſe rencontrent avec les prix dans toutes les claſſes, eſt

$$(1.\ 2.\ 3.\ 4 \ldots\ldots n)^{k-1},$$

de ſorte que ce nombre diviſé par celui-là exprime la probabilité que ce cas exiſte, comme je viens de le trouver. Mais la remarque la plus eſſentielle, qui me conduira au but propoſé, conſiſte en ce que le nombre de tous les cas poſſibles, où dans toutes les k claſſes les prix ſe rencontrent avec les mêmes billets marqués A, B, C &c. dépend uniquement 1° du nombre des prix n, ou bien de celui des billets A, B, C, D &c. qui ont gagné dans la premiere claſſe, & 2°. du nombre des claſſes k de la lotterie; de ſorte que le nombre des autres billets, qui eſt = m, n'entre point du tout en conſidération; ou bien, quelque grand que ſoit le nombre de tous les billets, le nombre des

des cas qui font gagner les mêmes billets dans toutes les classes demeure toujours le même. Qu'on n'oublie point que je parle ici toujours de toutes les variations possibles, tant dans les billets même que dans leur ordre.

6. Posons pour abréger

$$((m+1)(m+2)(m+3)\ .\ .\ .\ .\ (m+n))^{k-1} = M,$$

$$\&\ (1.\ 2.\ 3.\ 4\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ n)^{k-1} = \alpha,$$

& le nombre des cas où le nombre de ceux qui perdent dans toutes les classes soit $= m$, sera $= \alpha$, & la probabilité que quelqu'un de ces cas existe sera $= \frac{\alpha}{M}$. Maintenant je passe au second cas, où le nombre de ceux qui perdent dans toutes les classes est $= m - 1$; & je remarque qu'outre les billets marqués A, B, C, D &c. qui ont gagné dans la premiere classe, il faut que l'un des autres, dont le nombre est $= m$, gagne aussi dans une ou plusieurs des autres classes; puisque ce bonheur peut arriver à chacun des m billets, le nombre de tous ces cas sera exprimé par βm, où β ne renferme plus le nombre m, mais dépend uniquement des combinaisons avec les autres billets qui gagnent dans les classes suivantes. De la même maniere pour le troisieme cas, où le nombre de ceux qui perdent dans toutes les classes est $= m - 2$, il faut combiner deux billets de ceux qui ont perdu dans la premiere, qui recevant $m(m-1)$ variations, le nombre de tous ces cas aura cette forme $\gamma m(m-1)$. Pour le quatrieme cas, où le nombre des perdans par toutes les classes est $= m - 3$, le nombre de tous les cas possibles sera $= \delta m(m-1)(m-2)$; & ainsi de suite pour les cas suivans où le nombre de perdans dans toutes les classes est ou $m - 4$, ou $m - 5$, ou $m - 6$ &c. jusqu'à $m - (k-1)n$.

7. Pour voir d'un coup d'oeil toutes ces suppositions, je les représenterai de cette façon:

Nombre de ceux qui perdent dans toutes les claſſes.	Nombre de tous les cas où cela arrive.	Probabilité que quelcun de ces cas exiſte.
m	α	$\frac{\alpha}{M}$
$m-1$	βm	$\frac{\beta m}{M}$
$m-2$	$\gamma m\ (m-1)$	$\frac{\gamma m\ (m-1)}{M}$
$m-3$	$\delta m\ (m-1)(m-2)$	$\frac{\delta m\ (m-1)\ (m-2)}{M}$
$m-4$	$\varepsilon m\ (m-1)\ (m-2)\ (m-3)$	$\frac{\varepsilon m\ (m-1)\ (m-2)(m-3)}{M}$
.	.	.
.	.	.
.	.	.
$m-(k-1)n$	$\omega m(m-1)\ldots(m-kn+n+1)$	$\frac{\omega m(m-1)\ldots(m-kn+n+1)}{M}$

où pour abréger j'ai poſé

$$M = ((m+1)(m+2)(m+3)\ .\ \vdots\ \vdots\ .\ (m+n))^{k-1}.$$

Ayant déjà trouvé la premiere valeur

$$\alpha = (1.\ 2.\ 3.\ 4\ .\ \ .\ \ .\ \ .\ n)^{k-1},$$

tout revient à chercher les valeurs des lettres ſuivantes β, γ, δ, ε &c. ce qui ſe pourroit faire ſuivant les principes de la combinaiſon & variation; mais cela demanderoit des recherches fort épineuſes & ennuyantes, qu'on auroit même bien de la peine à pouſſer ſi loin qu'on en en pût découvrir la loi de la progression : encore une telle loi conclue uniquement par induction seroit fort sujette à caution.

8. Mais la considération que toutes ces probabilités ensemble doivent être égales à l'unité, nous fournit une route fort aisée pour déterminer toutes ces quantités α, β, γ, δ &c. Nous n'avons qu'à satisfaire à cette équation :

$$M = \alpha + \beta m + \gamma m(m-1) + \delta m(m-1)(m-2) + \varepsilon m(m-1)(m-2)(m-3) \text{ \&c.}$$

en observant que les quantités α, β, δ, ε &c. ne dépendent point du nombre m, mais qu'elles sont uniquement déterminées par les deux autres n & k. Voici de quelle maniere on doit conduire le raisonnement pour arriver à ce but. Puisque cette équation doit toujours avoir lieu, quelque valeur qu'on donne au nombre m, posons d'abord $m = 0$, & nous aurons

$$(1.\ 2.\ 3\ \ldots\ldots\ n)^{k-1} = \alpha,$$

d'où nous tirons la même valeur pour α, que je lui ai assignée auparavant. Posons ensuite pour m successivement les nombres 1, 2, 3, 4 &c. pour avoir ces équations

$$\begin{aligned}
(2.3.4\ \ldots\ (n+1))^{k-1} &= \alpha + \beta,\\
(3.4.5\ \ldots\ (n+2))^{k-1} &= \alpha + 2\beta + 2\gamma,\\
(4.5.6\ \ldots\ (n+3))^{k-1} &= \alpha + 3\beta + 6\gamma + 6\delta\\
(5.6.7\ \ldots\ (n+4))^{k-1} &= \alpha + 4\beta + 12\gamma + 24\delta + 24\varepsilon,\\
(6.7.8\ \ldots\ (n+5))^{k-1} &= \alpha + 5\beta + 20\gamma + 60\delta + 120\varepsilon + 120\zeta,\\
&\text{\&c.}
\end{aligned}$$

d'où l'on tirera sans difficulté successivement les valeurs de toutes les lettres β, γ, δ, ε, ζ &c. jusqu'à la derniere ω, qu'on trouvera aisément être $= 1$, puisque le nombre des cas où tous les prix tombent sur des billets différens est

$$m(m-1)(m-2)(m-3)\ \ldots\ldots\ (m-(k-1)n+1).$$

9.

9. Soit, pour abréger, la valeur de M, en y posant en général $m = \lambda$ indiquée de cette sorte, $M^{(\lambda)}$, & nous aurons

$$M^{(0)} = \alpha,$$
$$M^{(1)} = \alpha + \beta,$$
$$M^{(2)} = \alpha + 2\beta + 2\gamma,$$
$$M^{(3)} = \alpha + 3\beta + 6\gamma + 6\delta,$$
$$M^{(4)} = \alpha + 4\beta + 12\gamma + 24\delta + 24\varepsilon,$$

&c.

d'où prenant les différences:

$$M^{(1)} - M^{(0)} = \beta,$$
$$M^{(2)} - M^{(1)} = \beta + 2\gamma,$$
$$M^{(3)} - M^{(2)} = \beta + 4\gamma + 6\delta,$$
$$M^{(4)} - M^{(3)} = \beta + 6\gamma + 18\delta + 24\varepsilon,$$

&c.

& les secondes différences seront:

$$M^{(2)} - 2M^{(1)} + M^{(0)} = 2\gamma,$$
$$M^{(3)} - 2M^{(2)} + M^{(1)} = 2\gamma + 6\delta,$$
$$M^{(4)} - 2M^{(3)} + M^{(2)} = 2\gamma + 12\delta + 24\varepsilon,$$

&c.

de plus les troisiemes différences:

$$M^{(3)} - 3M^{(2)} + 3M^{(1)} - M^{(0)} = 6\delta,$$
$$M^{(4)} - 3M^{(3)} + 3M^{(2)} - M^{(1)} = 6\delta + 24\varepsilon,$$

&c.

& les quatriemes:

$$M^{(4)} - 4M^{(3)} + 6M^{(2)} + 4M^{(1)} + M^{(0)} = 24\varepsilon,$$

&c.

Sur la continuation de ces différences il ne sauroit y avoir aucun doute.

10. Toutes ces valeurs $M^{(0)}$, $M^{(1)}$, $M^{(2)}$ &c. dérivées de $M = ((m+1)(m+2)(m+3) \; . \; . \; . \; . \; (m+n))^{k-1}$ étant connues & indépendantes du nombre m, les quantités α, β, γ, δ &c. qui renferment la ſolution de notre queſtion, ſeront déterminées ainſi:

$$\alpha = M^{(0)},$$

$$\beta = \frac{M^{(1)} - M^{(0)}}{1},$$

$$\gamma = \frac{M^{(2)} - 2M^{(1)} + M^{(0)}}{1.\,2}.$$

$$\delta = \frac{M^{(3)} - 3M^{(2)} + 3M^{(1)} - M^{(0)}}{1.\,2.\,3}.$$

$$\varepsilon = \frac{M^{(4)} - 4M^{(3)} + 6M^{(2)} - 4M^{(1)} + M^{(0)}}{1.\,2.\,3.\,4},$$

&c.

Or, parmi ces diverſes valeurs dérivées de M, nous connoiſſons les rapports ſuivans:

$$M^{(1)} = \left(\frac{n+1}{1}\right)^{k-1} M^{(0)},$$

$$M^{(2)} = \left(\frac{n+2}{2}\right)^{k-1} M^{(1)}$$

$$M^{(3)} = \left(\frac{n+3}{3}\right)^{k-1} M^{(2)},$$

$$M^{(4)} = \left(\frac{n+4}{4}\right)^{k-1} M^{(3)},$$

&c.

la premiere étant $M^{(0)} = (1.\ 2.\ 3.\ 4 \ldots\ldots n)^{k-1}$. D'où, par cette ſeule valeur $M^{(0)}$, nous aurons

$$\beta = \frac{\alpha}{1}\left(\left(\frac{n+1}{1}\right)^{k-1} - 1\right),$$

$$\gamma = \frac{\alpha}{1.2}\left(\left(\frac{n+1}{1}\cdot\frac{n+2}{2}\right)^{k-1} - 2\left(\frac{n+1}{1}\right)^{k-1} + 1\right),$$

$$\delta = \frac{\alpha}{1.2.3}\left(\left(\frac{n+1}{1}\cdot\frac{n+2}{2}\cdot\frac{n+3}{3}\right)^{k-1} - 3\left(\frac{n+1}{1}\cdot\frac{n+2}{2}\right)^{k-1} + 3\left(\frac{n+1}{1}\right)^{k-1} - 1\right),$$

$$\varepsilon = \frac{\alpha}{1.2.3.4}\left(\left(\frac{n+1}{1}\cdot\frac{n+2}{2}\cdot\frac{n+3}{3}\cdot\frac{n+4}{4}\right)^{k-1} - 4\left(\frac{n+1}{1}\cdot\frac{n+2}{2}\cdot\frac{n+3}{3}\right)^{k-1} + 6\left(\frac{n+1}{1}\cdot\frac{n+2}{2}\right)^{k-1} - 4\left(\frac{n+1}{1}\right)^{k-1} + 1\right),$$

dont la progreſſion eſt également évidente.

11. Pour mieux voir la nature de ces nombres α, β, γ, δ &c. développons quelques cas particuliers, & ſuppoſons d'abord qu'il n'y ait qu'un ſeul prix dans chaque claſſe, de ſorte que $n = 1$, le nombre des claſſes demeurant $= k$. Soit $k = \pi + 1$ pour avoir $k - 1 = \pi$. Le nombre de tous les billets dans chaque claſſe ſera donc $= m + 1$, & $M = (m + 1)^{\pi}$ & partant

$M^{(0)} = 1$; $M^{(1)} = 2^{\pi}$; $M^{(2)} = 3^{\pi}$; $M^{(3)} = 4^{\pi}$; $M^{(4)} = 5^{\pi}$ &c.

d'où

d'où nous tirons les valeurs suivantes:

$$\alpha = 1$$

$$\beta = \frac{2^\pi - 1}{1}$$

$$\gamma = \frac{3^\pi - 2.2^\pi + 1}{1.\ 2}$$

$$\delta = \frac{4^\pi - 3.3^\pi + 3.2^\pi - 1}{1.\ 2.\ 3}$$

$$\varepsilon = \frac{5^\pi - 4.4^\pi + 6.3^\pi - 4.2^\pi + 1}{1.\ 2.\ 3.\ 4}$$

&c.

si $\pi = 1$	si $\pi = 2$	si $\pi = 3$	si $\pi = 4$	si $\pi = 5$
$\alpha = 1$	$\alpha = 1$	$\alpha = 1$	$\alpha = 1$	$\alpha = 1$
$\beta = 1$	$\beta = 3$	$\beta = 7$	$\beta = 15$	$\beta = 31$
$\gamma = 0$	$\gamma = 1$	$\gamma = 6$	$\gamma = 25$	$\gamma = 90$
$\delta = 0$	$\delta = 0$	$\delta = 1$	$\delta = 10$	$\delta = 65$
$\varepsilon = 0$	$\varepsilon = 0$	$\varepsilon = 0$	$\varepsilon = 1$	$\varepsilon = 15$
$\zeta = 0$	$\zeta = 0$	$\zeta = 0$	$\zeta = 0$	$\zeta = 1$

12. Soit maintenant le nombre des prix de chaque classe $n = 2$, les deux autres nombres m & $k = \pi + 1$ demeurant indéterminés. Donc, puisque $M = (m + 1)^\pi (m + 2)^\pi$, nous aurons:

$$M^{(0)} = 2^\pi;\quad M^{(1)} = 6^\pi;\quad M^{(2)} = 12^\pi;\quad M^{(3)} = 20^\pi \text{ \&c.}$$

& partant:

$$\alpha = 2^\pi,$$

$$\beta = \frac{6^\pi - 2^\pi}{1},$$

$$\gamma = \frac{12^\pi - 2.6^\pi + 2^\pi}{1.\ 2},$$

$$\delta = \frac{20^\pi - 3.12^\pi + 3.6^\pi - 2^\pi}{1.\ 2.\ 3},$$

&c.

si $\pi = 1$	si $\pi = 2$	si $\pi = 3$
$\alpha = 2$	$\alpha = 4$	$\alpha = 8$
$\beta = 4$	$\beta = 32$	$\beta = 208$
$\gamma = 1$	$\gamma = 38$	$\gamma = 652$
$\delta = 0$	$\delta = 12$	$\delta = 576$
$\varepsilon = 0$	$\varepsilon = 1$	$\varepsilon = 188$
$\zeta = 0$	$\zeta = 0$	$\zeta = 24$
$\eta = 0$	$\eta = 0$	$\eta = 1$

13.

13. Il feroit inutile de développer plufieurs cas, puisque la détermination des nombres α, β, γ, δ &c. demanderoit des calculs trop embarraffans qui même, au bout du compte, ne nous fourniroient aucun éclairciffement fur la queftion dont il s'agit. D'où l'on comprend que, fi l'on vouloit appliquer ces formules à l'exemple de la lotterie rapportée au commencement, en fuppofant

$$n = 1000, \quad m = 9000, \quad \& \ k = 5,$$

d'où réfulteroit le nombre

$$M = (9001.\ 9002.\ 9003 \ \ .\ .\ .\ .\ \ 10000)^4,$$

& ceux qui en font dérivés

$$M^{(0)} = (1.\ 2.\ 3 \ \ .\ .\ .\ .\ \ 1000)^4,$$

$$M^{(1)} = (2.\ 3.\ 4 \ \ .\ .\ .\ .\ \ 1001)^4,$$

$$M^{(2)} = (3.\ 4.\ 5 \ \ .\ .\ .\ .\ \ 1002)^4,$$

$$M^{(3)} = (4.\ 5.\ 6 \ \ .\ .\ .\ .\ \ 1003)^4,$$

on feroit obligé de s'enfoncer dans de terribles calculs avant que de parvenir à la connoiffance des nombres α, β, γ, δ &c. dont la multitude monte à 4001. Enfuite il faudroit encore multiplier chacun de ces nombres par les coëfficiens affignés au §. 7. pour avoir les nombres de tous les cas où chaque variété peut arriver. Et enfin, ayant trouvé tous ces nombres, il refteroit à divifer chacun par le nombre M, pour avoir la probabilité que le nombre de ceux qui perdent dans toutes les claffes foit ou 9000, ou 8999, ou 8998, jufqu'à ce qu'on parvienne à 5000.

14. Il eft bien certain que perfonne n'entreprendra jamais cet immenfe ouvrage, dans la feule vue de répondre aux Entrepreneurs de la lotterie mentionnée, à combien ils doivent probablement eftimer la dépenfe à laquelle ils s'engagent en promettant un ducat à chacun de ceux qui n'auront rien gagné dans toutes les 5 claffes. Donc, s'il n'y avoit point d'autre moyen de fatisfaire à cette queftion, on feroit bien

bien obligé d'en regarder la ſolution comme moralement impoſſible, & il n'y auroit d'autre parti à prendre que de conſeiller aux Entrèpreneurs d'une pareille lotterie de s'en tenir à quelque nombre mitoyen entre la plus grande ſomme de 9000 ducats, & la plus petite de 5000 ducats, qui conſtituent les limites de cette dépenſe. Au reſte, s'il ne s'agiſſoit que de tirer une ſeule fois cette lotterie, il ne vaudroit pas même la peine de ſe livrer à ce travail, quand même il ne ſeroit pas ſi difficile, puisqu'un ſeul coup ne ſe regle jamais ſur la probabilité. Mais ſi l'on vouloit répéter plusieurs fois de ſuite cette même lotterie, la queſtion deviendroit plus importante, puisqu'alors la dite dépenſe ſeroit, tantôt plus grande, tantôt plus petite: & ce n'eſt que dans ce cas qu'on pourroit être aſſuré que le milieu entre toutes ces dépenſes approchera d'autant plus de la ſomme déterminée par les regles de la probabilité, qu'on répétera plus de fois le tirage de cette même lotterie. C'eſt donc cette ſomme moyenne que les regles de la probabilité nous doivent découvrir.

15. Or, quelque inſurmontables que paroiſſent les calculs pour trouver cette ſomme, il ſe rencontre une certaine circonſtance heureuſe, qui rend extrêmement facile l'exécution de tous ces calculs, de ſorte qu'on n'a pas même beſoin de calculer les valeurs des nombres α, β, γ, δ &c. On n'a qu'à s'en tenir aux formules générales données dans le §. 7. & puisque pour chaque nombre de ducats, auquel la dépenſe peut monter, la probabilité eſt comme il ſuit:

que la dépenſe ſoit de tant de ducats	la probabilité eſt
m	$\frac{\alpha}{M}$
$m - 1$	$\frac{\beta m}{M}$
$m - 2$	$\frac{\gamma m (m - 1)}{M}$
$m - 3$	$\frac{\delta m (m - 1)(m - 2)}{M}$
.	.
.	.
.	.
$m - (k - 1) n$	$\frac{\omega m (m-1)(m-2) \ldots . (m - (k-1) n + 1)}{M}$

la ſomme de chaque dépenſe multipliée par la probabilité donnera la vraie dépenſe moyenne que nous cherchons, qui ſera par conſéquent $=$

$$\frac{\alpha m + \beta m(m-1) + \gamma m(m-1)(m-2) \ldots + \omega m(m-1) \ldots (m-(k-1)n)}{M},$$

& je remarque que la valeur de cette expreſſion peut être aſſignée ſans qu'on ait beſoin de développer, ni les nombres α, β, γ, δ &c. ni même le dénominateur M; ce qui eſt ſans doute un évenement auquel on ne pouvoit pas s'attendre.

16. Ayant fait voir ci-deſſus, que les nombres α, β, δ &c. ne dépendent pas du nombre m, & qu'ils doivent être tels qu'il ſoit

$$\alpha + \beta m + \gamma m (m - 1) + \delta m (m - 1)(m - 2) + \ldots .$$
$$+ \omega m (m - 1)(m - 2) \ldots . . (m - (k - 1) n + 1)$$
$$= M = ((m + 1)(m + 2) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (m + n))^{k-1},$$

il

il s'ensuit d'abord qu'écrivant $m - 1$ au lieu de m, il faut qu'il soit
$\alpha + \beta(m-1) + \gamma(m-1)(m-2) + \ldots + \omega(m-1)(m-2)\ldots(m-(k-1)n)$
$= (m(m+1)(m+2) \ldots\ldots + (m+n-1))^{k-1}$,
les nombres α, β, γ, δ &c. étant les mêmes qu'auparavant. Mais cette derniere expression $\alpha + \beta(m-1) + \gamma(m-1)(m-2) +$ &c. étant multipliée par m donne précisément le numérateur de la fraction, que nous venons d'assigner pour la quantité probable de la dépense: d'où nous concluons cette dépense $= \frac{m(m(m+1)(m+2)\ldots(m+n-1))^{k-1}}{((m+1)(m+2)\ldots(m+n))^{k-1}}$, qui se réduit évidemment à celle-ci $= m\left(\frac{m}{m+n}\right)^{k-1}$, dont l'application se fera aisément à chaque cas proposé, sans qu'on ait besoin de calculer ni les valeurs des lettres α, β, γ, δ &c. ni le nombre M. Voilà donc, contre toute attente, une solution aussi simple que belle de notre question, par laquelle nous connoissons qu'en général, le nombre des classes étant $= k$, le nombre des prix de chaque classe $= n$, & le nombre de tous les billets $= m + n$, la dépense en question doit être estimée $= m\left(\frac{m}{m+n}\right)^{k-1}$.

17. Pour le cas de la lotterie décrite au commencement, où $k = 5$, $n = 1000$ & $m = 9000$, la dépense en faveur de ceux qui ne gagnent rien dans toutes les cinq classes doit être estimée à $9000(\frac{9}{10})^4$ ducats, ce qui fait $5904\frac{9}{10}$ ducats, d'où l'on voit que ce milieu est beaucoup plus proche de la plus petite limite 5000 que de la plus grande 9000.

Soit, pour donner un autre exemple, le nombre des classes encore $k = 5$, le nombre des prix de chaque classe $n = 8000$, & celui de tous les billets $m + n = 50000$; donc $m = 42000$: & quand on s'engage de payer aussi un ducat à chacun de ceux qui

passent

passent par les cinq classes sans rien gagner, cette dépense doit être estimée selon les regles de la probabilité à $42000 \left(\frac{42}{50}\right)^4$, c'est à dire, à $20910 \frac{6}{10}$ ducats.

18. En général, je remarque sur l'estime de cette dépense que je viens de trouver $= m \left(\frac{m}{m+n}\right)^{k-1}$, que quand il n'y aura qu'une seule classe, elle sera $= m$ auquel cas la probabilité devient une entiere certitude. Mais, si la lotterie est composée de 2 classes, cette dépense est $= \frac{mm}{m+n}$; pour trois classes elle devient $= \frac{m^3}{(m+n)^2}$, pour quatre $= \frac{m^4}{(m+n)^3}$, & ainsi de suite; de sorte qu'elle décroît en raison de $m+n$ à m pour chaque classe de plus. Donc, si le nombre des classes étoit infini, cette dépense se réduiroit à rien, quelque petit que soit le nombre des prix par rapport à tous les billets. Comme cette simple formule vient d'être conclue d'un calcul extrêmement embarrassé, il n'y a aucun doute qu'il n'y ait une autre méthode fort simple, qui y conduise directement sans aucun détour. En effet, la seule considération de cette formule nous fournit d'abord les raisonnemens qu'il faut faire pour y parvenir, que je vais mettre dans tout leur jour.

19. On n'a qu'à parcourir successivement toutes les classes, en réfléchissant que chaque classe contient en tout $m+n$ billets, parmi lesquels il y a n gains & m pertes. Donc, la premiere classe étant tirée, il y aura certainement m billets qui auront perdu; ceux-ci entrant dans la seconde classe, il est probable qu'il y en aura quelques uns, qui gagnent, & cela dans le rapport du nombre de tous les billets $m+n$ au nombre des prix n: donc, de ces m billets qui ont perdu dans la premiere classe, il y aura probablement $m \cdot \frac{n}{m+n}$ qui gagneront dans la

seconde

ſeconde claſſe, & partant le nombre de ceux qui paſſent par les deux premieres claſſes ſans rien gagner, doit être eſtimé $= m.\frac{m}{m+n}$. Maintenant ces billets entrent dans la troiſieme claſſe, & par la même raiſon leur nombre entier ſera à celui des billets qui perdront auſſi dans cette claſſe comme $m+n$ à m; par conſéquent le nombre des billets qui paſſeront par les trois premieres claſſes ſans rien gagner, ſera probablement $= m\left(\frac{m}{m+n}\right)^2$. Par ce même raiſonnement on trouve que le nombre des billets qui paſſeront probablement par quatre claſſes ſans rien gagner, ſera $= m\left(\frac{m}{m+n}\right)^3$; & en général, ſi le nombre des claſſes eſt $= k$, le nombre des billets qui paſſeront par toutes ces claſſes ſans rien gagner doit être fixé ſelon les regles de la probabilité à $m\left(\frac{m}{m+n}\right)^{k-1}$; & ſi l'on s'engage de payer à chacun un ducat, cette dépenſe doit être eſtimée à $m\left(\frac{m}{m+n}\right)^{k-1}$ ducats, ce qui eſt préciſément la ſomme que j'ai trouvée auparavant.

20. Si cette route eſt préférable à la premiere à cauſe de ſa ſimplicité, la premiere a d'autres avantages très conſidérables en nous découvrant en détail la probabilité, que la dépenſe égale préciſément une ſomme donnée. Car, comme il n'eſt pas même probable que la dépenſe actuelle ſoit la même que montre la probabilité, il eſt très important que le dénombrement de tous les cas poſſibles nous ſoit bien connu pour nous mettre en état de juger de la probabilité de chacun. Mais la derniere méthode a pourtant cet avantage ſur la premiere, qu'elle peut être appliquée à des cas où toutes les claſſes de la lotterie ne contiennent pas le même nombre de prix; laquelle circonſtance rendroit presque

impoſſible la premiere méthode. Cependant il faut toujours ſuppoſer que le nombre de tous les billets ſoit le même dans toutes les claſſes, puisque ſans cette condition la queſtion dont il s'agit ne ſauroit avoir lieu. Soit donc l le nombre de tous les billets de chaque claſſe, & poſons le nombre de ceux qui perdent dans la premiere claſſe $= m$, dans la ſeconde $= m'$, dans la troiſieme $= m''$, dans la quatrieme $= m'''$ & ainſi de ſuite. Cela poſé, le nombre des billets qui perdront dans toutes les claſſes ſera probablement:

$$m \cdot \frac{m'}{l} \cdot \frac{m''}{l} \cdot \frac{m'''}{l} \cdot \frac{m^{IV}}{l} \cdot \frac{m^{V}}{l} \cdot \&c.$$

juſqu'à ce qu'on ait parcouru toutes les claſſes. D'où l'on voit que s'il y avoit une ſeule claſſe où tous les billets gagnaſſent, quelqu'un des nombres m, m', m'', m''' &c. évanouiroit, & le nombre trouvé ſe réduiroit à zéro; ce qui ne ſeroit plus la meſure de la probabilité, mais une certitude complette.

21. Pour en donner un exemple, ſuppoſons qu'il y ait une lotterie compoſée de 5 claſſes, chacune renfermant 10000 billets: & dont la premiere contienne 1000 prix, la ſeconde 2000, la troiſieme 3000, la quatrieme 4000, & la cinquieme 5000. Nous aurons donc $l = 10000$, & les nombres des billets qui perdent dans chaque claſſe ſeront:

$$m = 9000;\quad m' = 8000;\quad m'' = 7000;\quad m''' = 6000;\quad m^{IV} = 5000.$$

Et partant le nombre des billets qui paſſeront par toutes les 5 claſſes, ſans rien gagner, ſera conformément aux regles de la probabilité $= 9000 \cdot \frac{9}{10} \cdot \frac{8}{10} \cdot \frac{7}{10} \cdot \frac{6}{10} \cdot \frac{5}{10} = 1512$; ou bien on peut eſtimer qu'il n'y aura que 1512 billets qui perdront dans toutes les 5 claſſes; donc il eſt probable que de tous les 10000 billets il y en aura 8488 qui tireront quelque prix dans une ou pluſieurs claſſes. Par conſéquent, pour ceux qui s'intéreſſeroient dans cette lotterie, on peut dire que la probabilité eſt $\frac{8488}{10000}$ ou $\frac{1061}{1250}$, qu'ils ne paſſeront point par toutes les 5 claſſes ſans rien gagner.