PROBLEMA ALGEBRAICVM OB AFFECTIONES PRORSVS SINGVLARES MEMORABILE.

Auctore
L. EVLERO.

Problema, cuius affectiones hic contemplandas suscipio, ita se habet:

Inuenire nouem numeros ita in quadratum disponendos, vt satisfiat duodecim sequentibus conditionibus:	A, B, C D, E, F G, H, I

1°. $AA + DD + GG = 1$;	4°. $AB + DE + GH = 0$
2°. $BB + EE + HH = 1$;	5°. $AC + DF + GI = 0$
3°. $CC + FF + II = 1$;	6°. $BC + EF + HI = 0$
7°. $AA + BB + CC = 1$;	10°. $AD + BE + CF = 0$
8°. $DD + EE + FF = 1$;	11°. $AG + BH + CI = 0$
9°. $GG + HH + II = 1$;	12°. $DG + EH + FI = 0$.

Circa hoc problema sequentia obseruo.

I. Cum numerus conditionum implendarum superet numerum quantitatum determinandarum, problema hoc plusquam determinatum videtur. Vtcunque enim conditiones praescriptae perpendantur, nulla alia relatio, qua aliquae in reliquis iam contineantur, in iis deprehenditur, nisi quod summa conditionum 7°. 8°. 9 conueniat cum summa conditionum 1°. 2°. 3°;

3°; vnde vnica harum duodecim conditionum in reliquis iam contineri videtur; qua remota tamen adhuc vndecim conditiones relinquuntur, quae binario numerum quantitatum incognitarum excedunt. Hic equidem tantum de eiusmodi relatione loquor, quae has conditiones consideranti occurrit, reuera enim aliquot necessariae relationes inter eas intercedunt, quae autem vix ante animadvertuntur, quam problema perfecte fuerit solutum.

II. Deinde obseruo hoc problema non solum non esse plusquam determinatum, sed adeo esse indeterminatum, ita vt nouem numerorum quaesitorum tres pro lubitu accipere liceat, nihiloque minus omnibus conditionibus praescriptis satisfieri queat. Dummodo enim sex prioribus conditionibus fuerit satisfactum, reliquae sex sponte implentur atque omnino fieri non potest, vt sex prioribus satisfiat quin simul omnibus satisfiat. Quocirca problema propositum eiusdem prorsus indolis maneret etiamsi sex posteriores conditiones plane omitterentur; ac tum ei insigne Theorema istud adiungi posset.

Quodsi nouem numeri A, B, C, D, E, F, G, H, I *ita fuerint comparati, vt 6 prioribus conditionibus satisfaciant tum etiam necessario sex posterioribus satisfaciant.*

Quod Theorema pro difficillimo demonstratu venditare non dubito, neque video quomodo demonstratio adornari queat, nisi solutio problematis fuerit explorata.

III.

III. Neque vero hoc problema pro otiosa speculatione seu mero lusu ingenii est habendum, sed potius in doctrina de superficierum natura est maximi momenti. Cum enim natura superficiei per aequationem inter ternas coordinatas tribus axibus inter se normalibus parallelas exprimi soleat, talis aequatio mutandis axibus in ifinitum variari potest, etiamsi axium communis intersectio in eodem puncto statuatur. Quoniam igitur eadem superficies infinitis aequationibus diuersis inter ternas coordinatas definiri potest, plurimum interest earum characterem communem nosse, qui in eo consistit, vt si coordinatae ternis quibusdam axibus datis parallelae sint x, y, z; quae autem aliis quibuscunque axibus constituuntur parallelae, fuerint X, Y, Z eorum relatio mutua semper huiusmodi formulis contineatur:

$$X = Ax + By + Cz;\ Y = Dx + Ey + Fz;\ Z = Gx + Hy + Iz$$

qui nouem coëfficientes ita comparati sint necesse est, vt inde fiat: $XX + YY + ZZ = xx + yy + zz$, quandoquidem his formulis quadratum interualli quo superficiei punctum ab initio coordinatarum distat, exprimitur. Quod fieri nequit, nisi hae sex aequationes habeant locum:

$$AA + DD + GG = 1,\ BB + EE + HH = 1,\ CC + FF + II = 1$$
$$AB + DE + GH = 0,\ AC + DF + GI = 0,\ BC + EF + HI = 0$$

quae sunt ipsae sex priores conditiones nostri problematis.

IV.

IV. Quocunque autem modo hoc problema secundum Algebrae praecepta tentetur, ob tantum incognitarum numerum semper ad calculos vehementer intricatos peruenitur, ex quibus neutiquam solutionem commodam expectare liceat. Theoriam quidem angulorum in subsidium vocando, haud difficulter solutio satis concinna obtinetur, verum haec methodus vix ad alias huius generis quaestiones magis complicatas traduci poterit: veluti si circa 16, 25, 36 etc. numeros, pariter in quadratum disponendos similis quaestio instituatur, vt summa quadratorum per singulas columnas tam verticales quam horizontales sumtorum vnitati aequetur, simul vero summae productorum secundum binas columnas itidem tam verticales quam horizontales ad nihilum redigantur. Methodum ergo etiam ad has quaestiones patentem, quae vtique in Analysi maximi momenti est putanda deinceps sum expositurus, postquam demonstrationem Theorematis §. 11. memorati, atque solutionem problematis initio propositi ope sinuum et cosinuum tradidero.

Demonstratio Theorematis §. 11. propositi.

V. Assumo ergo nouem numeros nostros A, B, C, D, E, F, G, H, I ita esse comparatos vt sit

$1^o.\ AA + DD + GG = 1;\quad 4^o.\ AB + DE + GH = 0$
$2^o.\ BB + EE + HH = 1;\quad 5^o.\ AC + DF + GI = 0$
$3^o.\ CC + FF + II = 1;\quad 6^o.\ BC + EF + GI = 0$

quarum tres posteriores ita repraesento:

$$4^o.\ AB = -DE - GH;\quad 5^o.\ AC = -DF - GI;$$
$$6^o.\ BC = -EF - HI$$

vnde concludo fore:

$$\frac{4^o.\,5^o}{6^o.} \ldots \frac{AABC}{BC} = AA = -\frac{(DE+GH)(DF+GI)}{EF+HI}$$

qui valor ipsius AA in prima aequatione positus dat:

$$-(DE+GH)(DF+GI)+(EF+HI)(DD+GG)=EF+HI$$

factaque euolutione:

$$-DEGI-DFGH+DDHI+EFGG=EF+HI$$

cuius aequationis primum membrum manifesto in hos factores resoluitur:

$$(DH - EG)(DI - FG) = EF + HI.$$

VI. Cum igitur sit $EF + HI = -BC$, erit

$$BC = (EG - DH)(DI - FG)$$

similique modo colligetur fore

$$AC = (FH - EI)(EG - DH) \text{ et}$$
$$AB = (DI - FG)(FH - EI)$$

quarum duarum posteriorum productum per primam diuisum praebet

$$AA = (FH - EI)^2 \text{ hincque } A = \pm(FH - EI)$$

quia autem singulos numeros tam negatiue quam positiue ca-

capere licet, ambiguitas signi nullam variationem inferre est censenda, vnde sumto superiori habebimus:

$$A = FH - EI;\ B = DI - FG;\ C = EG - DH.$$

Cum autem ex rei natura columnas verticales inter se permutare liceat, hinc per analogiam concludimus fore

$$D = BI - CH;\ E = CG - AI;\ F = AH - BG$$
$$G = CE - BF;\ H = AF - CD;\ I = BD - AE.$$

VII. En ergo nouem nouas determinationes, quae in sex conditionibus praescriptis necessario inuoluuntur, et quas insuper ad 12 conditiones initio propositas adiicere potuissemus. Verum hae ipsae nouem determinationes, quas sequenti modo indicabo:

$$13^{\circ}.\ A = FH - EI;\quad 16^{\circ}.\ D = BI - CH;\quad 19^{\circ}.\ G = CE - BF;$$
$$14^{\circ}.\ B = DI - FG;\quad 17^{\circ}.\ E = CG - AI;\quad 20^{\circ}.\ H = AF - CD;$$
$$15^{\circ}.\ C = EG - DH;\quad 18^{\circ}.\ F = AH - BG;\quad 21^{\circ}.\ I = BD - AE;$$

facile ad conditiones sex posteriores initio propositas deducunt. Nam formulae 13°. per D, 14°. per E et 15°. per F multiplicatae et in vnam summam collectae dant:

$$AD + BE + CF = \begin{matrix} + DFH + DEI + EFG \\ - DEI - EFG - DFH \end{matrix} = 0$$

quae est ipsa conditio 10° initio proposita, similique modo $13^{\circ}.\ G + 14^{\circ}.\ H + 15^{\circ}.\ I$ dabit conditionem 11°. et $16^{\circ}.\ G + 17^{\circ}.\ H + 18^{\circ}.\ I$ conditionem 12°. ita vt sit:

10°.

$$10^{\circ}.\ AD + BE + CF = 0,\quad 11^{\circ}.\ AG + BH + CI = 0;$$
$$12^{\circ}.\ DG + EN + FI = 0.$$

VIII. Denique si in formula n°. 13°. valores literarum E et F ex formulis 17°. et 18°. substituantur, emergit haec aequatio:
$A = AHH - BGH - CGI + AII = A(HH + II) - G(BH + CI)$
at ex aequatione 11°. est $BH + CI = -AG$, unde colligitur:
$A = A(GG + HH + II)$, ideoque vel $A = 0$ vel $GG + HH + II = 1$.
Cum autem simili modo ex formulis 14°. 15°. 16°. 17°. et 18°. eliciantur aequationes:

$$B = B(GG + HH + II);\quad D = D(GG + HH + II)$$
$$C = C(GG + HH + II);\quad E = E(GG + HH + II)$$
$$\text{et } F = F(GG + HH + II)$$

neque litterae A, B, C, D, E, F omnes simul euanescant, necesse est sit $GG + HH + II = 1$ quae est conditio 9°. hocque modo ostenditur esse:

$$7^{\circ}.\ AA + BB + CC = 1;\quad 8^{\circ}.\ DD + EE + FF = 1;$$
$$9^{\circ}.\ GG + HH + II = 1$$

quae est demonstratio completa theorematis propositi.

Solutio Problematis initio propositi.

IX. Statuamus $A = \cos.\zeta$, et cum conditiones 1°. et 7°. praebeant:

$$DD + GG = \sin.\zeta^2 \text{ et } BB + CC = \sin.\zeta^2$$

his ingenere satisfaciemus ponendo:

$$B = \sin.\zeta \cos.\eta;\ C = \sin.\zeta \sin.\eta;\ D = \sin.\zeta \cos.\theta;$$
$$G = \sin.\zeta \sin.\theta.$$

Considerentur iam conditiones 17°. et 21°. quae factis his substitutionibus induent has formas:

17°. $E = \sin.\zeta^2 \sin.\eta \sin.\theta - I\cos.\zeta$, seu $E + I\cos.\zeta = \sin.\zeta^2 \sin.\eta \sin.\theta$
21°. $I = \sin.\zeta^2 \cos.\eta \cos.\theta - E\cos.\zeta$, seu $I + E\cos.\zeta = \sin.\zeta^2 \cos.\eta \cos.\theta$.

Hinc 17°. — 21°. $\cos.\zeta$ et 21°. — 17°. $\cos.\zeta$ dant:

$$E(1 - \cos.\zeta^2) = \sin.\zeta^2 (\sin.\eta \sin.\theta - \cos.\zeta \cos.\eta \cos.\theta)$$
$$I(1 - \cos.\zeta^2) = \sin.\zeta^2 (\cos.\eta \cos.\theta - \cos.\zeta \sin.\eta \sin.\theta)$$

vnde colligitur:

$$E = \sin.\eta \sin.\theta - \cos.\zeta \cos.\eta \cos.\theta \text{ et } I = \cos.\eta \cos.\theta - \cos.\zeta \sin.\eta \sin.\theta.$$

X. Simili modo conditiones 18. et 20°. modo ante demonstratae, factis substitutionibus suppeditant has aequationes:

18°. $F = H\cos.\zeta - \sin.\zeta^2 \cos.\eta \sin.\theta$ seu $F - H\cos.\zeta = -\sin.\zeta^2 \cos.\eta \sin.\theta$
20°. $H = F\cos.\zeta - \sin.\zeta^2 \sin.\eta \cos.\theta$ seu $H - F\cos.\zeta = -\sin.\zeta^2 \sin.\eta \cos.\theta$

vnde formae 18°. + 20°. $\cos.\zeta$ et 20°. + 18°. $\cos.\zeta$ producunt

$$F(1 - \cos.\zeta^2) = -\sin.\zeta^2 (\cos.\eta \sin.\theta + \cos.\zeta \sin.\eta \cos.\theta)$$
$$H(1 - \cos.\zeta^2) = -\sin.\zeta^2 (\sin.\eta \cos.\theta + \cos.\zeta \cos.\eta \sin.\theta)$$

vnde ob $1 - \cos.\zeta^2 = \sin.\zeta^2$ elicitur

$$F = -\cos.\eta \sin.\theta - \cos.\zeta \sin.\eta \cos.\theta; \text{ et}$$
$$H = -\sin.\eta \cos.\theta - \cos.\zeta \cos.\eta \sin.\theta$$

sic-

sicque nouem numeri conditionibus praescriptis satisfacientes ita sunt definiti, vt tres anguli ζ, η, θ arbitrio nostro relinquantur, in quo criterium solutionis completae cernitur.

XI. Solutio ergo completa nostri problematis ita se habet, vt nouem numeri quaesiti sequentes sortiantur valores:

$A = \cos.\zeta$	$B = \sin.\zeta\cos.\eta$	$C = \sin.\zeta\sin.\eta$
$D = \sin.\zeta\cos.\theta$	$E = \sin.\eta\sin.\theta - \cos.\zeta\cos.\eta\cos.\theta$	$F = -\cos.\eta\sin.\theta - \cos.\zeta\sin.\eta\cos.\theta$
$G = \sin.\zeta\sin.\theta$	$H = -\sin.\eta\cos.\theta - \cos.\zeta\cos.\eta\sin.\theta$	$I = +\cos.\eta\cos.\theta - \cos.\zeta\sin.\eta\sin.\theta$

quibus valoribus non solum sex conditiones priores, quibus problema determinatur, sed etiam sex posteriores, atque adeo etiam nouem nouae §. VII. exhibitae, adimplentur. Haecque solutio istum praestat vsum, vt inde facili negotio solutiones in numeris rationalibus, quotcunque libuerit, reperire liceat, tres scilicet angulos ζ, η, θ ita capi opus est, vt eorum tam sinus quam cosinus rationaliter exprimantur. Hinc solutio satis simplex prodibit sumendo

$\cos.\zeta = \frac{3}{5}$; $\sin.\zeta = \frac{4}{5}$; $\cos.\eta = \frac{3}{5}$; $\sin.\eta = \frac{4}{5}$; $\cos.\theta = \frac{5}{13}$; $\sin.\theta = \frac{12}{13}$.

Methodus Generalis huiusmodi problemata resoluendi.

XII. Methodus generalis, quam hic sum traditurus, ex principio supra §. III. memorato est petita, vbi ostendi problema propositum eo redire, vt ex ternis variabilibus x, y, z, aliae tres X, Y, Z per huiusmodi formulas $\alpha x + \beta y + \gamma z$ ita determinentur, vt fiat $X^2+Y^2+Z^2=x^2+y^2+z^2$, haecque determinatio maxime sit generalis; tum enim coëfficientes trium harum formularum $\alpha x+\beta y+\gamma z$ pro nouis variabilibus X, Y, Z resultantium, erunt ipsi illi nouem numeri, qui in problemate desiderantur. Hic igitur duae conditiones probe sunt perpendendae, quarum altera est, vt valores ipsarum X, Y, Z simpliciter per huiusmodi formulas $\alpha x+\beta y+\gamma z$ exprimantur, altera vero vt tum fiat $X^2+Y^2+Z^2=x^2+y^2+z^2$. Nisi enim illa conditio adesset, quaestio foret per methodum Diophanteam solutu facilis, dum tantum trium quadratorum summa in tria alia quadrata resolui deberet, id quod nihil habet difficultatis.

XIII. Quoniam vero rem eo deducere animus est, ut methodus ad quaestiones continuo magis complicatas extendi queat, a casu simplicissimo exordiar, quo propositis tantum duabus variabilibus x et y, ex iis aliae duae X et Y per huiusmodi formulas $\alpha x+\beta y$ definiri debeant vt fiat $X^2+Y^2=x^2+y^2$. Hunc in finem posito

$$X=\alpha x+\beta y \quad \text{et} \quad Y=\gamma x+\delta y$$

necesse est, fiat:

$$\alpha\alpha+\gamma\gamma=1;\ \beta\beta+\delta\delta=1;\ \alpha\beta+\gamma\delta=0.$$

Statuamus ergo $\alpha=\cos.\zeta$ et $\beta=\cos.\eta$, vt habeatur $\gamma=\sin.\zeta$ et $\delta=\sin.\eta$, sicque duabus prioribus conditionibus

nibus satisfiat: tum vero tertia dabit $\cos.\zeta\cos.\eta+\sin.\zeta\sin.\eta = \cos.(\zeta-\eta) = 0$, ex quo erit $\zeta-\eta = 90^\circ$, ideoque $\eta = \zeta - 90^\circ$, ac propterea $\cos.\eta = \sin.\zeta$ et $\sin.\eta = -\cos.\zeta$. Vnde patet si capiatur:

$$X = x\cos.\zeta + y\sin.\zeta \text{ et } Y = x\sin.\zeta - y\cos.\zeta$$

fore $X^2 + Y^2 = x^2 + y^2$.

XIV. Hoc lemmate praemisso ex propositis tribus variabilibus x, y, z primo alias tres x', y', z' ita definio vt sit

$$x' = x\cos.\zeta + y\sin.\zeta;\ y' = x\sin.\zeta - y\cos.\zeta;\ \text{et } z' = z$$

hoc enim modo certo erit

$$x'x' + y'y' + z'z' = xx + yy + zz.$$

Deinde ex his simili modo alias tres x'', y'', z'' deduco, vt sit $x'' = x'$; $y'' = y'\cos.\eta + z'\sin.\eta$; $z'' = y'\sin.\eta - z'\cos.\eta$ atque hinc tandem quaesitas X, X, Z, ita definio:

$$X = z''\cos.\theta + x''\sin.\theta;\ Y = y'';\ Z = z''\sin.\theta - x''\cos.\theta$$

sic enim vtique fiet:

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = x''x'' + y''y'' + z''z''$$
$$= x'x' + y'y' + z'z' = xx + yy + zz.$$

XV. Ex hac autem triplici positione sequitur fore:

$$x'' = x\cos.\zeta + y\sin.\zeta;\ y'' = x\sin.\zeta\cos.\eta - y\cos.\zeta\cos.\eta + z\sin.\eta;$$
$$z'' = x\sin.\zeta\sin.\eta - y\cos.\zeta\sin.\eta - z\cos.\eta$$

tum vero

$X = x$

$$X = x(\sin.\zeta \sin.\eta \cos.\theta + \cos.\zeta \sin.\theta) - y(\cos.\zeta \sin.\eta \cos.\theta - \sin.\zeta \sin.\theta) - z \cos.\eta \cos.\theta$$

$$Y = x \sin.\zeta \cos.\eta - y \cos.\zeta \cos.\eta + z \sin.\eta$$

$$Z = x(\sin.\zeta \sin.\eta \sin.\theta - \cos.\zeta \cos.\theta) - y(\cos.\zeta \sin.\eta \sin.\theta + \sin.\zeta \cos.\theta) - z \cos.\eta \sin.\theta$$

quae formulae cum ante inuentis conueniunt.

XVI. Hanc solutionem esse generalem vel inde patet, quod ea complectatur tres angulos arbitrarios ζ, η, θ, qui per tres transformationes quas instituimus, sunt introducti. Vis enim huius methodi in hoc consistit, vt quauis transformatione duae tantum quantitates varientur, dum scilicet in earum locum duae aliae vna cum angulo arbitrario introducuntur, tertia manente immutata. Hinc duae operationes iam quidem solutionem problematis suppeditant, sed nondum completam, ob defectum vnius quantitatis arbitrariae. Quamobrem tot transformationes institui oportet donec tot huiusmodi quantitates arbitrariae fuerint ingressae quot ad maximam solutionis extensionem requiruntur. Supra autem iam obseruaui, cum quaestio circa nouem numeros versetur ac tantum sex conditiones praescribantur, tres eorum manere indeterminatos, quemadmodum etiam in solutione hic data ob angulos ζ, η, θ arbitrio nostro relictos, tres numeri A, B, D pro lubitu accipi possunt.

XVII. Hinc autem dubium nasci posset, quod cum qua-

libet

libet transformatione nouus angulus introducatur, avcto transformationum numero nostri problematis solutio multo adhuc generalior obtineri posset. Verum tamen qui huius rei periculum facere voluerit, mox animaduertet, nouum angulum introductum cum aliquo praecedentium in vnum coalescere ita vt quotcunquae transformationes suscipiantur, numerus angulorum vere arbitrariorum non vltra ternarium augeri queat. Adiiciamus enim insuper hanc transformationem ponendo:

$X' = X$; $Y' = Y \cos.\lambda - Z \sin.\lambda$; et $Z' = Y \sin.\lambda + Z \cos.\lambda$

fietque

$$X' = x(\sin.\zeta \sin.\eta \cos.\theta + \cos.\zeta \sin.\theta + y(\sin.\zeta \sin.\theta - \cos.\zeta \cos.\eta \cos.\theta) - z \cos.\eta \cos.\theta$$

$$\begin{aligned} Y' = {} & x(\sin.\zeta \cos.\eta \cos.\lambda - \sin.\zeta \sin.\eta \sin.\theta \sin.\lambda + \cos.\zeta \cos.\theta \sin.\lambda) \\ & - y(\cos.\zeta \cos.\eta \cos.\lambda - \cos.\zeta \sin.\eta \sin.\theta \sin.\lambda - \sin.\zeta \cos.\theta \sin.\lambda) \\ & + z(\sin.\eta \cos.\lambda + \cos.\eta \sin.\theta \sin.\lambda) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Z' = {} & x(\sin.\zeta \cos.\eta \sin.\lambda + \sin.\zeta \sin.\eta \sin.\theta \cos.\lambda - \cos.\zeta \cos.\theta \cos.\lambda) \\ & - y(\cos.\zeta \cos.\eta \sin.\lambda + \cos.\zeta \sin.\eta \sin.\theta \cos.\lambda + \sin.\zeta \cos.\theta \cos.\lambda) \\ & + z(\sin.\eta \sin.\lambda - \cos.\eta \sin.\theta \cos.\lambda) \end{aligned}$$

vbi etsi quatuor anguli adsunt ζ, η, θ et λ, tamen inde non plures tribus coëfficientes pro lubitu assignare licet: quod quidem non facile perspicitur, et nonnisi per plures ambages ostendi posse videtur: cum tamen ex rei natura res sit prorsus manifesta.

XVIII. Etiamsi maxime arduum videatur has quatuor quantitates indeterminatas ad tres revocare haecque inuestigatio

tio omnino singulares calculi euolutiones postulet, tamen ratio in eo sita haud difficulter deprehenditur, quod bis inter easdem quantitates cognomines y et z transformatio sit instituta. Scilicet in secunda quantitates y', z' in y'', z'' ope anguli η et in quarta quantitates cognomines Y et Z ope anguli λ in Y' et Z' sunt transformatae. Quae duae transformationes si immediate se exciperent ponendo exempli gratia

primum $y' = y \cos.\zeta + z \sin.\zeta$; $z' = y \sin.\zeta - z \cos.\zeta$

tum veró $y'' = y' \cos.\eta + z' \sin.\eta$; $z'' = y' \sin.\eta - z' \cos.\eta$

coniunctim prodiret:

$$y'' = y \cos.(\zeta - \eta) + z \sin.(\zeta - \eta) \quad \text{et}$$

$$z'' = -y \sin.(\zeta - \eta) + z \cos.(\zeta - \eta)$$

sicque duplex illa transformatio manifesto vnicae ope anguli $\zeta - \eta$ factae aequiualeret. Quod etiam euenire est intelligendum, etiamsi huiusmodi binae transformationes inter quantitates cognomines non immediate se excipiant.

XIX. Hinc cum quaelibet transformatio inter duas tantum quantitates variabiles instituatur, hanc regulam stabiliri conuenit, vt hae transformationes semper inter binas variabiles diuersi nominis suscipiantur; quo pacto numerus transformationum ita determinatur, vt plures forent inutiles. Ita cum in nostro problemate tres habeantur quantitates variabiles litteris x, y, z indicatae, plures quam tres transformationes locum habere nequeunt, dum vna inter x et y, alia inter x et z, et tertia inter y et z instituitur hoc modo

$$\begin{array}{l|l|l} x' = x\cos.\zeta + y\sin.\zeta & x'' = x'\cos.\eta + z'\sin.\eta & x''' = x'' \\ y' = x\sin.\zeta - y\cos.\zeta & y'' = y' & y''' = y''\cos.\theta + z''\sin.\theta \\ z' = z & z'' = x'\sin.\eta - z'\cos.\eta & z''' = y''\sin.\theta - z''\cos.\theta \end{array}$$

vbi in prima quantitas nominis z, in secunda nominis y, in tertia vero nominis x inuariata relinquitur.

XX. Hanc regulam obseruantes methodum hanc per istiusmodi transformationes procedentem facile ad eiusmodi problemata accommodare poterimus, quibus plures quam tres quantitates variabiles proponuntur, quas simili modo in alias totidem transformari oporteat, vt quadratorum summa maneat eadem. Pluribus scilicet transformationibus inter binas tantum instituendis opus erit, vbi tantum erit cauendum, ne inter binas cognomines bis transformatio instituatur. Quo obseruato, solutio non ante erit completa, quam inter omnes binas diuersi nominis tales transformationes fuerint absolutae cuiusmodi diuersae combinationes habebuntur sex, si quatuor propositae sint quantitates, decem vero si quinque et ita porro. Cuiusmodi problemata aliquot cum solutionibus hic subiungam.

Problema.

Quatuor quantitates v, x, y, z ita in alias per huiusmodi formulas $\alpha v + \beta x + \gamma y + \delta z$ transformare, vt summa quadratorum maneat eadem vel ponendo

$$V = Av + Bx + Cy + Dz;\quad Y = Iv + Kx + Ly + Mz$$
$$X = Ev + Fx + Gy + Hz;\quad Z = Nv + Ox + Py + Qz$$

hos sedecim coëfficientes ita definire vt fiat

$$VV + XX + YY + ZZ = vv + xx + yy + zz$$

quem in finem sequentibus 10 conditionibus satisfieri oportet:

$1^o.\ AA+EE+II+NN=1;\quad 5^o.\ AB+EF+IK+NO=0$
$2^o.\ BB+FF+KK+OO=1;\quad 6^o.\ AC+EG+IL+NP=0$
$3^o.\ CC+GG+LL+PP=1;\quad 7^o.\ AD+EH+IM+NQ=0$
$4^o.\ DD+HH+MM+QQ=1;\quad 8^o.\ BC+FG+KL+OP=0$
$9^o.\ BD+FH+KM+OQ=0;\quad 10^o.\ CD+FH+LM+PQ=0.$

XXI. Cum hic sedecim numeri ex 10 conditionibus inueniendi proponantur, euidens est eorum sex arbitrio nostro relinqui, seu quod eodem redit solutionem completam sex quantitates arbitrarias complecti debere. Methodum autem ante expositam sequentes reuera solutionem sex transformationibus absolui deprehendimus, quae ita repraesentari possunt:

I.	II.	III.
$x^{I} = x\cos.\alpha + y\sin.\alpha$	$x^{II} = x^{I}\cos.\beta + z^{I}\sin.\beta$	$x^{III} = x^{II}\cos.\gamma + v^{II}\sin.\gamma$
$y^{I} = x\sin.\alpha - y\cos.\alpha$	$y^{II} = y^{I}$	$y^{III} = y^{II}$
$z^{I} = z$	$z^{II} = x^{I}\sin.\beta - z^{I}\cos.\beta$	$z^{III} = z^{II}$
$v^{I} = v$	$v^{II} = v^{I}$	$v^{III} = x^{II}\sin.\gamma - v^{II}\cos.\gamma$

IV.

IV.	V.	VI.
$x^{IV}=x^{III}$	$x^{V}=x^{IV}$	$x^{VI}=x^{V} \qquad = X$
$y^{IV}=y^{III}\cos.\delta+z^{III}\sin.\delta$	$y^{V}=y^{IV}\cos.\varepsilon+v^{IV}\sin.\varepsilon$	$y^{VI}=y^{V} \qquad = Y$
$z^{IV}=y^{III}\sin.\delta-z^{III}\cos.\delta$	$z^{V}=z^{VI}$	$z^{VI}=z^{V}\cos.\zeta+v^{V}\sin.\zeta=Z$
$v^{IV}=v^{III}$	$v^{V}=y^{IV}\sin\varepsilon-v^{IV}\cos\varepsilon$	$v^{VI}=z^{V}\sin.\zeta-v^{V}\cos.\zeta=V$

in quas formulas reuera sex anguli arbitrarii ingrediuntur vt solutionis completae indoles postulat.

XXII. Iam perspicuum est ope harum reductionum nouas quantitates X, Y, Z, V ita per primum assumtas x, y, z, v expressum iri, vt fiat $X = Ax + By + Cz + Dv$, similiterque etiam reliquae vnde facta euolutione coëfficientes ipsarum x, y, z, v in quatuor formis pro X, Y, Z, V oriundis ipsos eos sedecim numeros praebebunt, qui requiruntur, pro solutione problematis propositi. Quae cum per se sint manifesta, non opus esse arbitror singulos valores harum sedecim litterarum euoluere. Ceterum cum in harum sex transformationum prima binae litterae x et y, in secunda x et z, in tertia x et v, in quarta y et z, in quinta y et v et in sexta z et v sint transformatae, quae sunt omnes combinationes possibiles; in hoc ipso etiam continetur criterium solutionis completae.

XXIII. Quoniam autem hic occurrunt quatuor quantitates x, y, z, v in singulis operationibus duae transformationes binarum institui possunt, quo pacto euolutio valorem quaesitorum non mediocriter subleuatur, vti iterum cauendum ne inter easdem binas litteras plus vna transformatione suscipiatur.

Sic autem totum negotium tribus operationibus absolui poterit hoc modo.

I.	II.	III.
$x' = x\cos.\alpha + y\sin.\alpha$	$x'' = x'\cos.\gamma + z'\sin.\gamma$	$x''' = x''\cos.\varepsilon + v''\sin.\varepsilon = X$
$y' = x\sin.\alpha - y\cos.\alpha$	$y'' = y'\cos.\delta + v'\sin.\delta$	$y''' = y''\cos.\zeta + z''\sin.\zeta = Y$
$z' = z\sin.\beta + v\sin.\beta$	$z'' = x'\sin.\gamma - z'\cos.\gamma$	$z''' = y''\sin.\zeta - z''\cos.\zeta = Z$
$v' = z\sin.\beta - v\cos.\beta$	$v'' = y'\sin.\delta - v'\cos.\delta$	$v''' = x''\sin.\varepsilon - v''\cos\varepsilon = V.$

Harum formularum euolutio pro sedecim numeris quaesitis sequentes praebet valores:

$$A = \begin{pmatrix} +\cos.\alpha\cos.\gamma\cos.\varepsilon \\ +\sin.\alpha\sin.\delta\sin.\varepsilon \end{pmatrix};\quad B = \begin{pmatrix} +\sin.\alpha\cos.\gamma\cos.\varepsilon \\ -\cos\alpha\sin.\delta\sin.\varepsilon \end{pmatrix};$$

$$C = \begin{pmatrix} +\cos.\beta\sin.\gamma\cos.\varepsilon \\ -\sin.\beta\cos.\delta\sin.\varepsilon \end{pmatrix};\quad D = \begin{pmatrix} +\sin.\beta\sin.\gamma\cos.\varepsilon \\ +\cos.\beta\cos.\delta\sin.\varepsilon \end{pmatrix};$$

$$E = \begin{pmatrix} +\sin.\alpha\cos.\delta\cos.\zeta \\ +\cos.\alpha\sin.\gamma\sin.\zeta \end{pmatrix};\quad F = \begin{pmatrix} -\cos.\alpha\cos.\delta\cos.\zeta \\ +\sin.\alpha\sin.\gamma\sin.\zeta \end{pmatrix};$$

$$G = \begin{pmatrix} +\sin.\beta\sin.\delta\cos.\zeta \\ -\cos.\beta\cos.\gamma\sin.\zeta \end{pmatrix};\quad H = \begin{pmatrix} -\cos.\beta\sin.\delta\cos.\zeta \\ -\sin.\beta\cos.\gamma\sin.\zeta \end{pmatrix};$$

$$I = \begin{pmatrix} +\sin.\alpha\cos.\delta\sin.\zeta \\ -\cos.\alpha\sin.\gamma\cos.\zeta \end{pmatrix};\quad K = \begin{pmatrix} -\cos.\alpha\cos.\delta\sin.\zeta \\ -\sin.\alpha\sin.\gamma\cos.\zeta \end{pmatrix};$$

$$L = \begin{pmatrix} +\sin.\beta\sin.\delta\sin.\zeta \\ +\cos.\beta\cos.\gamma\cos.\zeta \end{pmatrix};\quad M = \begin{pmatrix} -\cos.\beta\sin.\delta\sin.\zeta \\ +\sin.\beta\cos.\gamma\cos.\zeta \end{pmatrix};$$

$$N = \begin{pmatrix} +\cos.\alpha\cos.\gamma\sin.\varepsilon \\ -\sin.\alpha\sin.\delta\cos.\varepsilon \end{pmatrix};\quad O = \begin{pmatrix} +\sin.\alpha\cos.\gamma\sin.\varepsilon \\ +\cos.\alpha\sin.\delta\cos.\varepsilon \end{pmatrix};$$

$$P = \begin{pmatrix} +\cos.\beta\sin.\gamma\sin.\varepsilon \\ +\sin.\beta\cos.\delta\cos.\varepsilon \end{pmatrix};\quad Q = \begin{pmatrix} +\sin.\beta\sin.\gamma\sin.\varepsilon \\ -\cos.\beta\cos.\delta\cos.\varepsilon \end{pmatrix}.$$

XXIV.

XXIV. Circa hos autem sedecim valores, quibus decem conditiones in problemate allatae implentur, hanc insignem proprietatem locum habere obseruo, vt iisdem quoque sequentibus decem conditionibus satisfiat:

11°. $AA+BB+CC+DD=1$; 15°. $AE+BF+CG+DH=0$
12°. $EE+FF+GG+HH=1$; 16°. $AI+BK+CL+DM=0$
13°. $II+KK+LL+MM=1$; 17°. $AN+BO+CP+DQ=0$
14°. $NN+OO+PP+QQ=1$; 18°. $EI+FK+GL+HM=0$
19°. $EN+FO+GP+HQ=0$
20°. $IN+KO+LP+MQ=0$.

Quod est Theorema prorsus memorabile ac simile ei, quod initio circa nouem tantum numeros demonstraui. Eo autem modo, quo ibi demonstrationem adornaui, hic quidem ob litterarum multitudinem vti non licebit; sed quoniam ad hos valores generales successiue peruenire docui, demonstratio ita conuenientissime conficietur, vt si haec proprietas in valoribus quibusque antecedentibus, locum habuerit, eadem quoque in sequentibus per transformationem inde deriuatis locum habere ostendatur.

XXV. Consideremus igitur valores quoscunque intermedios qui per quatuor primitiuas quantitates x, y, z, v ita definiantur, vt sit

$$x^{(n)}=\mathfrak{A}x+\mathfrak{B}y+\mathfrak{C}z+\mathfrak{D}v;\quad y^{(n)}=\mathfrak{E}x+\mathfrak{F}y+\mathfrak{G}z+\mathfrak{H}v$$
$$z^{(n)}=\mathfrak{I}x+\mathfrak{K}y+\mathfrak{L}z+\mathfrak{M}v;\quad v^{(n)}=\mathfrak{N}x+\mathfrak{O}y+\mathfrak{P}z+\mathfrak{Q}v$$

vbi

vbi coëfficientes ita sint comparati, vt supra memoratis conditionibus satisfaciant; scilicet vt sit:

$$\mathfrak{A}\mathfrak{A}+\mathfrak{B}\mathfrak{B}+\mathfrak{C}\mathfrak{C}+\mathfrak{D}\mathfrak{D}=1;\quad \mathfrak{A}\mathfrak{E}+\mathfrak{B}\mathfrak{F}+\mathfrak{C}\mathfrak{G}+\mathfrak{D}\mathfrak{H}=0$$
$$\mathfrak{E}\mathfrak{E}+\mathfrak{F}\mathfrak{F}+\mathfrak{G}\mathfrak{G}+\mathfrak{H}\mathfrak{H}=1;\quad \mathfrak{A}\mathfrak{J}+\mathfrak{B}\mathfrak{K}+\mathfrak{C}\mathfrak{L}+\mathfrak{D}\mathfrak{M}=0$$
$$\mathfrak{J}\mathfrak{J}+\mathfrak{K}\mathfrak{K}+\mathfrak{L}\mathfrak{L}+\mathfrak{M}\mathfrak{M}=1;\quad \mathfrak{A}\mathfrak{N}+\mathfrak{B}\mathfrak{O}+\mathfrak{C}\mathfrak{P}+\mathfrak{D}\mathfrak{Q}=0$$
$$\mathfrak{N}\mathfrak{N}+\mathfrak{O}\mathfrak{O}+\mathfrak{P}\mathfrak{P}+\mathfrak{Q}\mathfrak{Q}=1;\quad \mathfrak{E}\mathfrak{J}+\mathfrak{F}\mathfrak{K}+\mathfrak{G}\mathfrak{L}+\mathfrak{H}\mathfrak{M}=0$$
$$\mathfrak{E}\mathfrak{N}+\mathfrak{F}\mathfrak{O}+\mathfrak{G}\mathfrak{P}+\mathfrak{H}\mathfrak{Q}=0$$
$$\mathfrak{J}\mathfrak{N}+\mathfrak{K}\mathfrak{O}+\mathfrak{L}\mathfrak{P}+\mathfrak{M}\mathfrak{Q}=0$$

quae conditionibus vtique in prima positione locum habent, vbi est $x^{(n)}=x$, $y^{(n)}=y$, $z^{(n)}=z$, $v^{(n)}=v$; siquidem tum habetur:

$$\begin{array}{llll}
\mathfrak{A}=1; & \mathfrak{E}=0; & \mathfrak{J}=0; & \mathfrak{N}=0\\
\mathfrak{B}=0; & \mathfrak{F}=1; & \mathfrak{K}=0; & \mathfrak{O}=0\\
\mathfrak{C}=0; & \mathfrak{G}=0; & \mathfrak{L}=1; & \mathfrak{P}=0\\
\mathfrak{D}=0; & \mathfrak{H}=0; & \mathfrak{M}=0; & \mathfrak{Q}=1.
\end{array}$$

XXVI. Ponamus ex illis valoribus per transformationem sequentes ita deriuari

vt posito	prodeant hi valores deriuati
$x^{(n+1)}=x^{(n)}\cos.\theta+y^{(n)}\sin.\theta$	$x^{(n+1)}=\mathfrak{A}'x+\mathfrak{B}'y+\mathfrak{C}'z+\mathfrak{D}'v$
$y^{(n+1)}=x^{(n)}\sin.\theta-y^{(n)}\cos.\theta$	$y^{(n+1)}=\mathfrak{E}'x+\mathfrak{F}'y+\mathfrak{G}'z+\mathfrak{H}'v$
$z^{(n+1)}=z^{(n)}$	$z^{(n+1)}=\mathfrak{J}'x+\mathfrak{K}'y+\mathfrak{L}'z+\mathfrak{M}'v$
$v^{(n+1)}=v^{(n)}$	$v^{(n+1)}=\mathfrak{N}'x+\mathfrak{O}'y+\mathfrak{P}'z+\mathfrak{Q}'v$

eritque:

$$\mathfrak{A}' = \mathfrak{A}\cos.\theta + \mathfrak{E}\sin.\theta;\ \mathfrak{E}' = \mathfrak{A}\sin.\theta - \mathfrak{E}\cos.\theta;\ \mathfrak{I}' = \mathfrak{I};\ \mathfrak{N}' = \mathfrak{N}$$
$$\mathfrak{B}' = \mathfrak{B}\cos.\theta + \mathfrak{F}\sin.\theta;\ \mathfrak{F}' = \mathfrak{B}\sin.\theta - \mathfrak{F}\cos.\theta;\ \mathfrak{K}' = \mathfrak{K};\ \mathfrak{O}' = \mathfrak{O}$$
$$\mathfrak{C}' = \mathfrak{C}\cos.\theta + \mathfrak{G}\sin.\theta;\ \mathfrak{G}' = \mathfrak{C}\sin.\theta - \mathfrak{G}\cos.\theta;\ \mathfrak{L}' = \mathfrak{L};\ \mathfrak{P}' = \mathfrak{P}$$
$$\mathfrak{D}' = \mathfrak{D}\cos.\theta + \mathfrak{H}\sin.\theta;\ \mathfrak{H}' = \mathfrak{D}\sin.\theta - \mathfrak{H}\sin.\theta;\ \mathfrak{M}' = \mathfrak{M};\ \mathfrak{Q}' = \mathfrak{Q}.$$

Vnde quidem hae conditiones iam sponte implentur:

$$\mathfrak{I}'\mathfrak{I}' + \mathfrak{K}'\mathfrak{K}' + \mathfrak{L}'\mathfrak{L}' + \mathfrak{M}'\mathfrak{M}' = 1;\ \mathfrak{I}'\mathfrak{N}' + \mathfrak{K}'\mathfrak{O}' + \mathfrak{L}'\mathfrak{P}' + \mathfrak{M}'\mathfrak{Q}' = 0$$
$$\mathfrak{N}'\mathfrak{N}' + \mathfrak{O}'\mathfrak{O}' + \mathfrak{P}'\mathfrak{P}' + \mathfrak{Q}'\mathfrak{Q}' = 1.$$

XXVII. Reliquis vero etiam conditionibus satisfieri facile ostenditur; erit enim:

$$\mathfrak{A}'\mathfrak{A}' + \mathfrak{B}'\mathfrak{B}' + \mathfrak{C}'\mathfrak{C}' + \mathfrak{D}'\mathfrak{D}' = \left\{\begin{array}{l} +\ (\mathfrak{A}\mathfrak{A} + \mathfrak{B}\mathfrak{B} + \mathfrak{C}\mathfrak{C} + \mathfrak{D}\mathfrak{D})\cos.\theta^2 \\ +\ (\mathfrak{E}\mathfrak{E} + \mathfrak{F}\mathfrak{F} + \mathfrak{G}\mathfrak{G} + \mathfrak{H}\mathfrak{H})\sin.\theta^2 \\ +\ 2(\mathfrak{A}\mathfrak{E} + \mathfrak{B}\mathfrak{F} + \mathfrak{C}\mathfrak{G} + \mathfrak{D}\mathfrak{H})\sin.\theta\cos.\theta \end{array}\right.$$
$$= \left.\begin{array}{l} +\ 1\,.\cos.\theta^2 \\ +\ 1\,.\sin.\theta^2 \\ +\ 0\,.\sin.\theta\cos.\theta \end{array}\right\} = 1$$

quod simili modo de summa quadratorum secundae columnae $\mathfrak{E}'\mathfrak{E}' + \mathfrak{F}'\mathfrak{F}' + \mathfrak{G}'\mathfrak{G}' + \mathfrak{H}'\mathfrak{H}'$ ostenditur. Deinde etiam res manifesta est circa summam productorum:

$$\mathfrak{A}'\mathfrak{I}' + \mathfrak{B}'\mathfrak{K}' + \mathfrak{C}'\mathfrak{L}' + \mathfrak{D}'\mathfrak{M}' = \left.\begin{array}{l} -(\mathfrak{A}\mathfrak{I} + \mathfrak{B}\mathfrak{K} + \mathfrak{C}\mathfrak{L} + \mathfrak{D}\mathfrak{M})\cos.\theta \\ +(\mathfrak{E}\mathfrak{I} + \mathfrak{F}\mathfrak{K} + \mathfrak{G}\mathfrak{L} + \mathfrak{H}\mathfrak{M})\sin.\theta \end{array}\right\} = 0$$

pariterque etiam circa has summas:

$$\mathfrak{A}'\mathfrak{N}' + \mathfrak{B}'\mathfrak{O}' + \mathfrak{C}'\mathfrak{P}' + \mathfrak{D}'\mathfrak{Q}' = 0;\ \mathfrak{E}'\mathfrak{I}' + \mathfrak{F}'\mathfrak{K}' + \mathfrak{G}'\mathfrak{L}' + \mathfrak{H}'\mathfrak{M}' = 0$$
$$\text{et } \mathfrak{E}'\mathfrak{N}' + \mathfrak{F}'\mathfrak{O}' + \mathfrak{G}'\mathfrak{P}' + \mathfrak{H}'\mathfrak{Q}' = 0$$

vnde tantum relinquitur haec:

$\mathfrak{A}'$

$$\mathfrak{A}'\mathfrak{E}'+\mathfrak{B}'\mathfrak{F}'+\mathfrak{C}'\mathfrak{G}'+\mathfrak{D}'\mathfrak{H}'=\left\{\begin{array}{l}+(\mathfrak{A}\mathfrak{A}+\mathfrak{B}\mathfrak{B}+\mathfrak{C}\mathfrak{C}+\mathfrak{D}\mathfrak{D})\sin.\theta\cos.\theta\\ -(\mathfrak{E}\mathfrak{E}+\mathfrak{F}\mathfrak{F}+\mathfrak{G}\mathfrak{G}+\mathfrak{H}\mathfrak{H})\sin.\theta\cos.\theta\\ +(\mathfrak{A}\mathfrak{E}+\mathfrak{B}\mathfrak{F}+\mathfrak{C}\mathfrak{G}+\mathfrak{D}\mathfrak{H})\sin.\theta^2\\ -(\mathfrak{A}\mathfrak{E}+\mathfrak{B}\mathfrak{F}+\mathfrak{C}\mathfrak{G}+\mathfrak{D}\mathfrak{H})\cos.\theta^2\end{array}\right\}$$

$$=\left\{\begin{array}{l}+\sin.\theta\cos.\theta\\ -\sin.\theta\cos.\theta\\ +\mathrm{o}\sin.\theta^2\\ -\mathrm{o}\cos.\theta^2\end{array}\right\}=\mathrm{o}.$$

XXVIII. Cum igitur harum decem conditionum veritas in positione prima, vti iam ostendi, sit manifesta, etiam in positione secunda per transformationem binarum inde deducta quoque subsistet, hincque etiam in omnibus sequentibus positionibus simili modo ex praecedentibus deductis. Quocirca etiam solutio generalis sex transformationibus vti in § 21. absoluta ita erit comparata, vt non solum decem conditionibus in problemate praescriptis, sed etiam alteris illis decem §. 24. commemoratis satisfaciat: hocque ita vt decem prioribus conditionibus satisfieri nequeat, quin simul decem posterioribus satisfiat. Atque hinc iam facile colligitur eandem proprietatem etiam in problematibus, vbi similis quaestio circa 25 . 36 pluresque numeros instituitur, semper locum habere debere. Progredior igitur ad sequens.

Problema.

Inuenire 25 numeros A, B, C, D etc. ita in formam quadrati disponendos: vt vt summae quadratorum ex singulis columnis tam verticalibus quam horizontalibus desumtorum

$$\begin{array}{ccccc} A, & B, & C, & D, & E \\ F, & G, & H, & I, & K \\ L, & M, & N, & O, & P \\ Q, & R, & S, & T, & U \\ V, & W, & X, & Y, & Z \end{array}$$

vnitate aequentur, summae productorum autem ex binis columnis siue verticalibus siue horizontalibus formatorum euanescant.

XXIX. Ex praecedentibus intelligitur hoc problema eo reduci, vt sumtis istis 25 numeris pro coëfficientibus, quinque variabiles u, v, x, y, z per huiusmodi formulas in alias transformentur:

$$\begin{aligned} U &= Au + Bv + Cx + Dy + Ez \\ V &= Fu + Gv + Hx + Iy + Kz \\ X &= Lu + Mv + Nx + Oy + Pz \\ Y &= Qu + Rv + Sx + Ty + Uz \\ Z &= Vu + Wv + Xx + Yy + Zz \end{aligned}$$

vt fiat:

$$UU + VV + XX + YY + ZZ = uu + vv + xx + yy + zz.$$

Quod ergo problema, cum quinque quantitates 10 combinationes diuersas binarum admittant, per decem transformationes successiue in binis instituendas, resoluetur, hoc modo:

I.	II.	III.
$u^{\mathrm{I}} = u \cos.\alpha + v \sin.\alpha$	$u^{\mathrm{II}} = u^{\mathrm{I}} \cos.\beta + x^{\mathrm{I}} \sin.\beta$	$u^{\mathrm{III}} = u^{\mathrm{II}} \cos.\gamma + y^{\mathrm{II}} \sin.\gamma$
$v^{\mathrm{I}} = u \sin.\alpha - v \cos.\alpha$	$v^{\mathrm{II}} = v^{\mathrm{I}}$	$v^{\mathrm{III}} = v^{\mathrm{II}}$
$x^{\mathrm{I}} = x$	$x^{\mathrm{II}} = u^{\mathrm{I}} \sin.\beta - x^{\mathrm{I}} \cos.\beta$	$x^{\mathrm{III}} = x^{\mathrm{II}}$
$y^{\mathrm{I}} = y$	$y^{\mathrm{II}} = y^{\mathrm{I}}$	$y^{\mathrm{III}} = u^{\mathrm{II}} \sin.\gamma - y^{\mathrm{II}} \cos.\gamma$
$z^{\mathrm{I}} = z$	$z^{\mathrm{II}} = z^{\mathrm{I}}$	$z^{\mathrm{III}} = z^{\mathrm{II}}$

IV.	V.	VI.
$u^{\mathrm{IV}} = u^{\mathrm{III}} \cos.\delta + z^{\mathrm{III}} \sin.\delta$	$u^{\mathrm{V}} = u^{\mathrm{IV}}$	$u^{\mathrm{VI}} = u^{\mathrm{V}}$
$v^{\mathrm{IV}} = v^{\mathrm{III}}$	$v^{\mathrm{V}} = v^{\mathrm{IV}} \cos.\varepsilon + x^{\mathrm{IV}} \sin.\varepsilon$	$v^{\mathrm{VI}} = v^{\mathrm{V}} \cos.\zeta + y^{\mathrm{V}} \sin.\zeta$
$x^{\mathrm{IV}} = x^{\mathrm{III}}$	$x^{\mathrm{V}} = v^{\mathrm{IV}} \sin.\varepsilon - x^{\mathrm{IV}} \cos.\varepsilon$	$x^{\mathrm{VI}} = x^{\mathrm{V}}$
$y^{\mathrm{IV}} = y^{\mathrm{III}}$	$y^{\mathrm{V}} = y^{\mathrm{IV}}$	$y^{\mathrm{VI}} = v^{\mathrm{V}} \sin.\zeta - y^{\mathrm{V}} \cos.\zeta$
$z^{\mathrm{IV}} = u^{\mathrm{III}} \sin.\delta - z^{\mathrm{III}} \cos.\delta$	$z^{\mathrm{V}} = z^{\mathrm{IV}}$	$z^{\mathrm{VI}} = z^{\mathrm{V}}$

VII.	VIII.	IX.
$u^{\mathrm{VII}} = u^{\mathrm{VI}}$	$u^{\mathrm{VIII}} = u^{\mathrm{VII}}$	$u^{\mathrm{IX}} = u^{\mathrm{VIII}}$
$v^{\mathrm{VII}} = v^{\mathrm{VI}} \cos.\eta + z^{\mathrm{VI}} \sin.\eta$	$v^{\mathrm{VIII}} = v^{\mathrm{VII}}$	$v^{\mathrm{IX}} = v^{\mathrm{VIII}}$
$x^{\mathrm{VII}} = x^{\mathrm{VI}}$	$x^{\mathrm{VIII}} = x^{\mathrm{VII}} \cos.\theta + y^{\mathrm{VII}} \sin.\theta$	$x^{\mathrm{IX}} = x^{\mathrm{VIII}} \cos.\kappa + z^{\mathrm{VIII}} \sin.\kappa$
$y^{\mathrm{VII}} = y^{\mathrm{VI}}$	$y^{\mathrm{VIII}} = x^{\mathrm{VII}} \sin.\theta - y^{\mathrm{VII}} \cos.\theta$	$y^{\mathrm{IX}} = y^{\mathrm{VIII}}$
$z^{\mathrm{VII}} = v^{\mathrm{VI}} \sin.\eta - z^{\mathrm{VI}} \cos.\eta$	$z^{\mathrm{VIII}} = z^{\mathrm{VII}}$	$z^{\mathrm{IX}} = z^{\mathrm{VIII}} \sin.\kappa - z^{\mathrm{VIII}} \cos.\kappa$

X.

$$u^{\mathrm{X}} = u^{\mathrm{IX}} \quad ===== \quad U$$

$$v^{\mathrm{X}} = v^{\mathrm{IX}} \quad ===== \quad V$$

$$x^{\mathrm{X}} = x^{\mathrm{IX}} \quad ===== \quad X$$

$$y^{\mathrm{X}} = y^{\mathrm{IX}} \cos.\lambda + z^{\mathrm{IX}} \sin.\lambda = Y$$

$$z^{\mathrm{X}} = z^{\mathrm{IX}} \sin.\lambda - z^{\mathrm{IX}} \cos.\lambda = Z.$$

XXX. His ergo operationibus decem anguli arbitrarii introducuntur, in quo character solutionis completae seu generalis consistit. Cum enim conditiones ex columnis verticalibus petitae problemati soluendo sufficiant, indeque alterae conditiones ad columnas horizontales spectantes sponte impleantur; quadratorum summae praebent 5, producta vero ex binis 10 aequationes; ita vt omnino 15 conditionibus sit satisfaciendum; quare cum 25 numeri investigandi proponantur, ex iis decem adhuc manebunt indeterminati, in quo etiam solutio hic data egregie consentit, dum plures quam 10 transformationes, quae quidem circa binas quantitates diuersas instituantur, locum habere nequeunt.

XXXI. Quo illarum formularum euolutio facilior reddatur, qualibet operatione duae transformationes coniungi possunt, prorsus vt in solutione praecedentis problematis est factum. Has autem coniunctiones ita capi conuenit, vt quantitas solitaria nullam mutationem patiens in omnibus sit diuersa: id quod euenit si binae praecedentium transformationum hoc modo coniungantur:

(I, VIII), (II, VII), (III, IX), (IV, VI), (V, X)

vnde sequentes quinque transformationes oriuntur:

I.	II.	III.
$u^{\mathrm{I}} = u\cos.\alpha + v\sin.\alpha$	$u^{\mathrm{II}} = u^{\mathrm{I}}\cos.\gamma + x^{\mathrm{I}}\sin.\gamma$	$u^{\mathrm{III}} = u^{\mathrm{II}}\cos.\varepsilon + y^{\mathrm{II}}\sin.\varepsilon$
$v^{\mathrm{I}} = u\sin.\alpha - v\cos.\alpha$	$v^{\mathrm{II}} = v^{\mathrm{I}}\cos.\delta + z^{\mathrm{I}}\sin.\delta$	$v^{\mathrm{III}} = v^{\mathrm{II}}$
$x^{\mathrm{I}} = x\cos.\beta + y\sin.\beta$	$x^{\mathrm{II}} = u^{\mathrm{I}}\sin.\gamma - x^{\mathrm{I}}\cos.\gamma$	$x^{\mathrm{III}} = x^{\mathrm{II}}\cos.\zeta + z^{\mathrm{II}}\sin.\zeta$
$y^{\mathrm{I}} = x\sin.\beta - y\cos.\beta$	$y^{\mathrm{II}} = y^{\mathrm{I}}$	$y^{\mathrm{III}} = u^{\mathrm{II}}\sin.\varepsilon - y^{\mathrm{II}}\cos.\varepsilon$
$z^{\mathrm{I}} = z$	$z^{\mathrm{II}} = v^{\mathrm{I}}\sin.\delta - z^{\mathrm{I}}\cos.\delta$	$z^{\mathrm{III}} = x^{\mathrm{II}}\sin.\zeta - z^{\mathrm{II}}\cos.\zeta$

IV.	V.
$u^{\mathrm{IV}} = u^{\mathrm{III}}\cos.\eta + z^{\mathrm{III}}\sin.\eta$	$u^{\mathrm{V}} = u^{\mathrm{IV}}$
$v^{\mathrm{IV}} = v^{\mathrm{III}}\cos.\theta + y^{\mathrm{III}}\sin.\theta$	$v^{\mathrm{V}} = v^{\mathrm{IV}}\cos.\varkappa + x^{\mathrm{IV}}\sin.\varkappa$
$x^{\mathrm{IV}} = x^{\mathrm{III}}$	$x^{\mathrm{V}} = v^{\mathrm{IV}}\sin.\varkappa - z^{\mathrm{IV}}\cos.\varkappa$
$y^{\mathrm{IV}} = v^{\mathrm{III}}\sin.\theta - y^{\mathrm{III}}\cos.\theta$	$y^{\mathrm{V}} = y^{\mathrm{IV}}\cos.\lambda + z^{\mathrm{IV}}\sin.\lambda$
$z^{\mathrm{IV}} = u^{\mathrm{III}}\sin.\eta - z^{\mathrm{III}}\cos.\eta$	$z^{\mathrm{V}} = y^{\mathrm{IV}}\sin.\lambda - z^{\mathrm{IV}}\cos.\lambda$

XXXII. Simili modo problemata huius generis circa 36 pluresque numeros, quorum quidem multitudo est numerus quadratus resolui possunt; vbi pro calculo contrahendo non solum duas, sed etiam tres ac deinceps plures transformationes in vna operatione complecti licebit; atque hic perpetuo pulcherrimus consensus inter solutionem generalem ex omnibus combinationibus eliciendam ac rei naturam deprehendetur. Posito enim in genere quantitatum quaesitarum numero $= nn$, quadratorum summae vnitati aequandae praebent n conditiones, productorum autem ex binis nihilo aequandae $\frac{nn-n}{2}$, sicque coniunctim $\frac{nn+n}{2}$ conditiones, quo numero a numero quaesitorum nn ablato, restat $\frac{nn-n}{2}$, ac propterea totidem ex quae-

sitis

sitis manebunt indeterminati, seu solutio generalis totidem quantitates arbitrarias complecti debet, secundum regulam autem supra expositam in hunc finem $\frac{nn-n}{2}$ transformationibus est vtendum, quibus ergo praecise tot anguli arbitrarii in calculum introducuntur.

Problematis initio propositi solutio generalis in numeris rationalibus.

XXXIII. Coronidis loco solutionem problematis nostri e methodo Diophantea petitam, subiungam, quae sequenti modo satis concinne exhiberi potest.

Sumantur pro lubitu quatuor numeri p, q, r, s ac posita quadratorum eorum summa $pp + qq + rr + ss = u$ nouem numeri quaesiti ita determinati reperiuntur:

$$A = \frac{pp + qq - rr - ss}{u};\quad B = \frac{2qr + 2ps}{u};\quad C = \frac{2qs - 2pr}{u};$$
$$D = \frac{2qr - 2ps}{u};\quad E = \frac{pp - qq + rr - ss}{u};\quad F = \frac{2pq + 2rs}{u};$$
$$G = \frac{2qs + 2pr}{u};\quad H = \frac{2rs - 2pq}{u};\quad I = \frac{pp - qq - rr + ss}{u}.$$

Hinc simplicissimi numeri, qui quidem inter se omnes sint inaequales, colliguntur sequentes in quadratum dispositi:

			hic est				vbi est
$+\frac{47}{57}$	$-\frac{28}{57}$	$-\frac{16}{57}$	$p = 6$	$+\frac{53}{63}$	$+\frac{26}{63}$	$-\frac{22}{63}$	$p = 7,$
$+\frac{4}{57}$	$+\frac{23}{57}$	$+\frac{52}{57}$	$q = 4$	$-\frac{2}{63}$	$+\frac{43}{63}$	$+\frac{46}{63}$	$q = 3,$
$+\frac{32}{57}$	$-\frac{44}{57}$	$+\frac{17}{57}$	$r = 2$	$+\frac{34}{63}$	$-\frac{38}{63}$	$+\frac{37}{63}$	$r = 2,$
			$s = 1$				$s = 1.$

Em

En adhuc alia fere aeque simplicia exempla

$+\frac{53}{71}$	$-\frac{42}{71}$	$+\frac{26}{71}$
$-\frac{18}{71}$	$+\frac{19}{71}$	$+\frac{66}{71}$
$+\frac{46}{71}$	$+\frac{54}{71}$	$-\frac{3}{71}$

$+\frac{86}{99}$	$+\frac{38}{99}$	$-\frac{31}{99}$
$-\frac{14}{99}$	$+\frac{79}{99}$	$+\frac{58}{99}$
$+\frac{47}{99}$	$-\frac{46}{99}$	$+\frac{74}{99}$

Pro casu sedecim numerorum.

XXXIV. Si pro casu sedecim numerorum simili modo in quadratum disponendorum solutio in rationalibus desideretur, vnde facile numeros non nimis magnos reperire liceat; methodus supra data ad hunc finem difficulter accommodatur. Alio autem modo prorsus singulari sequentem solutionem latissime patentem sum nactus, vbi sumtis pro lubitu octo numeris a, b, c, d, p, q, r, s, sedecim numeri in quadratum dispositi ita se habent

$+ap+bq+cr+ds$	$+aq-bp+cs-dr$	$+ar-bs-cp+dq$	$+as+br-cq-dp$
$+aq-bp-cs+dr$	$-ap-bq+cr+ds$	$-as-br-cq-dp$	$+ar-bs+cp-dq$
$+ar+bs-cp-dq$	$+as-br-cq+dp$	$-ap+bq-cr+ds$	$-aq-bp-cs-dr$
$+as-br+cq-dp$	$-ar-bs-cp-dq$	$+aq+bp-cs-dr$	$-ap+bq+cr-ds$

vbi summa quadratorum in singulis columnis siue horizontalibus siue verticalibus prodit vbique eadem

$$=(aa+bb+cc+dd)(pp+qq+rr+ss).$$

Quare vt hae summae vnitati aequentur, hanc expressionem quadratum reddi, per eiusque radicem singulos numeros diuidi oportet. Tum vero hi sedecim numeri etiam hac gaudent proprietate, vt summa productorum ex binis columnis siue horizontalibus siue verticalibus sumtorum vbique euanescat.

XXXV.

XXXV. Hinc ergo facile plurima exempla in numeris satis exiguis deduci possunt, inter quae sequens ideo notatu dignum videtur, quod omnes numeri sint inter se inaequales

+ 37	+ 4	+ 1	+ 12
− 6	+ 33	− 18	+ 9
+ 11	+ 8	− 7	− 36
− 2	+ 19	+ 34	− 3

quadrata

	1369	16	1	144	1530
	36	1089	324	81	1530
	121	64	49	1296	1530
	4	361	1156	9	1530
summae	1530	1530	1530	1530	summae

ac de productis binorum res est manifesta:

cum sit $-6 \cdot 37 + 4 \cdot 33 - 1 \cdot 18 + 9 \cdot 12 = 0$

$$+4 \cdot 37 - 6 \cdot 33 + 8 \cdot 11 - 2 \cdot 19 = 0.$$

etc.

Generales autem formas inspicienti facile patebit, per eas omnes illas 20 conditiones §§. 20 et 24 allatas perfecte impleri, siquidem summae quaternorum quadratorum ad vnitatem reuocentur.

XXXVI. Solutio haec eo maiorem attentionem meretur quod ad eam nulla certa methodo, sed potius quasi diuinando sum perductus: et quoniam ea adeo octo numeros arbitrarios implicat, qui quidem facta reductione ad vnitatem, ad septem rediguntur, vix dubitare licet, quin ista solutio sit vniuersalis et omnes prorsus solutiones possibiles in se complectatur. Si quis ergo viam directam ad hanc solutionem manuducentem inue-

inuestigauerit, insignia certe subsidia Analysi attulisse erit censendus. Vtrum autem similes solutiones pro amplioribus quadratis, quae numeris 25, 36 et maioribus constant, expectare liceat, vix affirmare ausim. Non solum autem hinc Algebra communis sed etiam Methodus Diophantea maxima incrementa adeptura videtur.

Problema curiosum.

A	B	C	D
E	F	G	H
I	K	L	M
N	O	P	Q

Inuenire sedecim numeros ita in quadratum disponendos, vt non solum summae quadratorum per columnas tam horizontales quam verticales sumtorum sed etiam eae quae per diagonales sumuntur, scilicet $A^2 + F^2 + L^2 + Q^2$ et $D^2 + G^2 + K^2 + N^2$ sint omnes inter se aequales, ac praeterea producta binorum ita sumtorum, vt supra est praeceptum, euanescant, scilicet

$$\begin{array}{l|l}
AE + BF + CG + DH = 0 & AB + EF + IK + NO = 0 \\
AI + BK + CL + DM = 0 & AC + EG + IL + NP = 0 \\
AN + BO + CP + DQ = 0 & AD + EH + IM + NQ = 0 \\
EI + FK + GL + HM = 0 & BC + FG + KL + OP = 0 \\
EH + FO + GP + HQ = 0 & BD + FH + KM + OQ = 0 \\
IH + KO + LP + MQ = 0 & CD + GH + LM + PQ = 0.
\end{array}$$

Solutio:

Hic ergo proponuntur 22 conditiones, quibus satisfieri oportet; omissis autem duabus ad diagonales spectantibus, sequens forma generalis reliquas omnes adimplet,

+ *ap*

$+ap+bq+cr+ds$	$+ar-bs-cp+dq$	$-as-br+cq+dp$	$+aq-bp+cs-dr$
$-aq+bp+cs-dr$	$+as+br+cq+dp$	$+ar-bs+cp-dq$	$+ap+bq-cr-ds$
$+ar+bs-cp-dq$	$-ap+bq-cr+ds$	$+aq+bp+cs+dr$	$+as-br-cq+dp$
$-as+br-cq+dp$	$-aq-bp+cs+dr$	$-ap+bq+cr-ds$	$+ar+bs+cp+dq$

vbi summa quaternorum quadratorum ex columnis tam horizontalibus quam verticalibus sumtorum est

$$(aa+bb+cc+dd)(pp+qq+rr+ss)$$

cui vt etiam summae quadratorum per diagonales sumtorum aequentur, sequentes binas aequationes confici oportet:

$$+abpq+abrs+acpr+acqs+adps+adqr+bcqr+bcps+bdqs$$
$$+bdpr+cdrs+cdpq=0$$
$$-abpq-abrs+acpr+acqs-adps-adqr-bcqr-bcps+bdqs$$
$$+bdpr-cdrs-cdpq=0$$

ex quibus deducuntur hae duae:

$$(ac+bd)(pr+qs)=0$$
$$(ab+cd)(pq+rs)+(ad+bc)(ps+qr)=0.$$

Vnde hae duae determinationes eliciuntur:

I. $pr+qs=0$ et II. $\frac{a}{c}=\frac{-d(pq+rs)-b(ps+qr)}{b(pq+rs)+d(ps+qr)}$

ita vt adhuc sex litterae arbitrio nostro relinquantur.

Euoluamus exemplum sumendo $p=6$, $q=3$, $r=1$, $s=-2$ unde cum fiat $\frac{a}{c}=\frac{-16d+9b}{16b-9d}$, sit $d=0$, $b=1$, $a=9$, $c=16$ et quadratum omnibus conditionibus satisfaciens erit

+ 73	— 85	+ 65	+ 11
— 53	+ 31	+ 107	+ 41
— 89	— 67	+ 1	— 67
— 29	— 65	— 35	+ 103

vbi summae quaternorum quadratorum secundum columnas tam horizontales quam verticales, itidemque secundum diagonales sumtorum, prodeunt = 16900 ex quo si hi numeri diuiderentur per 130, hae summae omnes ad vnitatem redigerentur.

Si quem hic offendant numeri 65 et 67 bis occurrentes, adiungam aliud huiusmodi quadratum minoribus adeo numeris expressum.

+ 68	— 29	+ 41	— 37
— 17	+ 31	+ 79	+ 32
+ 59	+ 28	— 23	+ 61
— 11	— 77	+ 8	+ 49

vbi quaternorum quadratorum summa est 8515.

Notetur denique in his quadratis etiam quadrata tam numerorum angularium, quam mediorum eandem summam producere.

SO-