



## CAPVT II.

DE

## MICROSCOPIIS SIMPLICIBVS

DVABVS PLVRIBVSVE LENTIBVS CON-  
VEXIS INTER SE PROXIME IVNCTIS  
CONSTANTIBVS.

---

Problema I.

56.

**S**i lens duplicata ex duabus lentibus conuexis fit composita, pro data multiplicatione huiusmodi microscopium construere, quod obiecta quantum fieri potest clare et distincte repraesentet.

## Solutio.

Quoniam hic binae lentes sibi proxime iungendae occurrunt, ex formulis nostris generalibus earum intervallum erit  $a + b = A a (1 - \frac{1}{P})$  quod cum debeat esse minimum, statuatur  $= \eta a$ , denotante  $\eta$  fractionem tam parvam, quam circumstantiae permittunt atque hinc colligemus  $P = \frac{A}{A - \eta}$  deinde quia vtra-

que

que lens debet esse conuexa, seu vtriusque distantia focalis positua tam haec quantitas,  $p = \mathcal{A}a$ , quam ista  $q = -\frac{A}{P}a = -(A - \eta)a$  debet esse positua ideoque  $\mathcal{A} > 0$ , at  $A < 0$ , id quod fit si  $\mathcal{A} > 1$ . Hoc notato multiplicatio nobis praebet

$$m = \frac{P \cdot b}{a} = \frac{A}{A - \eta} \cdot \frac{b}{a},$$

unde definitur distantia obiecti  $a = \frac{A}{A - \eta} \cdot \frac{b}{m}$  ita, vt fit  $ma - b = \frac{\eta}{A - \eta} \cdot b$ ; deinde si semidiameter aperturæ primæ lentis ponatur =  $x$ ; secundæ lentis debet esse  $(1 - \frac{\eta}{A})x$ ; unde pro gradu claritatis fiet  $y = \frac{bx}{ma}$  seu  $y = (1 - \frac{\eta}{A})x$ , ita, vt ob  $A < 0$  lentium interualum claritatem augeat. Deinde pro campo apparente ibi inuenimus  $\zeta = \frac{A - \eta}{\eta} q \cdot a \zeta$ ; at hic  $q$  maius accipi nequit, quam vt semidiameter aperturæ secundæ lentis fiat =  $(1 - \frac{\eta}{A})x$ , quippe quæ apertura maior esse nequit, hinc colligimus  $q = -\frac{x}{Aa}$ ; unde concluditur  $\zeta = \frac{(A - \eta)x}{A\eta}$ . Pro loco autem oculi est

$$O = \frac{\eta q}{(A - \eta)a} \cdot \frac{b}{m}$$

quæ cum sit negatiua, oculum immediate adplicari oportet, et quia lentes sibi sunt proximæ, hinc nullus margo coloratus erit metuendus. Nunc igitur potissimum considerari debet semidiameter confusionis, qui est

$$\frac{\mu m x^3}{4a^2 b} \left( \frac{\lambda}{\mathcal{A}^2} + \frac{v}{A\mathcal{A}} - \frac{\lambda'}{A^2 P} \right)$$

vbi

vb<sup>o</sup> posterius membrum ob  $A < 0$  erit positivum ideoque haec quantitas semper maior nihilo, quamolrem hic totum negotium eo redit, ut ista quantitas reddatur minima, id quod fieri potest, cum litterae A et  $\mathcal{A}$  adhuc arbitrio nostro sint relictae. Ad hoc efficiendum statim patet, litteris  $\lambda$  et  $\lambda'$  minimum valorem, quem capere possunt, qui est 1, tribui debere et cum quantitas P parum ab unitate differat, litteram  $\mathcal{A}$  vel A ita definiamus, ut haec formula  $\frac{1}{\mathcal{A}^2} - \frac{1}{A^2} + \frac{v}{A\mathcal{A}}$  fiat minimum. Ante quam, autem eam differentiemus, relationem inter  $\mathcal{A}$  et A attentius consideremus, quae ita exprimi potest  $\frac{1}{\mathcal{A}} = 1 + \frac{1}{A}$ ; unde statim liquet, esse  $\frac{d\mathcal{A}}{dA} = \frac{dA}{A^2}$ ; seu  $d\mathcal{A} : dA = \mathcal{A}^2 : A^2$  quare si illa formula differentietur et nihilo aequalis ponatur, loco differentialium  $d\mathcal{A}$  et  $dA$  scribere licebit eorum proportionalia  $\mathcal{A}^2$  et  $A^2$ , ex quo sequens aequatio resultat:

$$\frac{2}{\mathcal{A}^3} - \frac{2}{A^3} + \frac{v}{\mathcal{A}} + \frac{v}{A} = 0.$$

quae manifesto in hos factores resolvitur

$$(v + \frac{2}{\mathcal{A}} - \frac{2}{A})(\frac{1}{\mathcal{A}} + \frac{1}{A}) = 0,$$

ita, ut vel vnus vel alter horum factorum debeat esse nihilo aequalis; prior autem factor nihilo aequatus dat

$$v + 2 + \frac{2}{A} = \frac{2}{A} \text{ seu } v + 2 = 0,$$

quod cum fieri nequeat, alterum factorem nihilo

aequemus et inueniemus  $x + \frac{z}{A} = 0$ ; seu  $A = -z$   
et  $\eta = z$ . Quibus valoribus in aequatione nostra  
pro confusione tollenda substitutis habebimus

$$\frac{\mu m x^3}{a^2 b} \left( \frac{z}{x} + \frac{r}{s p} - \frac{v}{q} \right) = \frac{r}{k^3} \text{ seu}$$

$$\mu m x^3 \left( z - 2v + \frac{r}{z} \eta \right) = \frac{r a^2 b}{k^3}$$

et quia est  $a = \frac{z}{z + \eta} \cdot \frac{b}{m}$ , erit

$$x^3 = \frac{4 \cdot 8 \cdot b^3}{(z + \eta)^2 \mu m^3 k^3 \left( z - 2v + \frac{r}{z} \eta \right)}$$

ideoque

$$x = \frac{4b}{km} \sqrt[3]{\frac{v}{(z + \eta)^2 \mu (z - 2v + \eta)}}$$

quo valore pro  $x$  inuento omnia, quae ad construc-  
tionem microscopii pertinent, determinantur sequenti  
modo:

### Constructio huius microscopii:

I°. Distantia obiecti ante lentem priorem

$$a = \frac{z}{z + \eta} \cdot \frac{b}{m}$$

II°. Pro lente priore est distantia focalis

$$p = 2 \cdot a = \frac{4}{z + \eta} \cdot \frac{b}{m};$$

et quia est  $\lambda = 1$ , erit

$$\text{radius anter.} = \frac{p}{2\sigma - \rho};$$

$$\text{radius poster.} = \frac{p}{2\sigma - \rho};$$

cuius aperturae semidiameter debet esse  $= x$ .

III°.

III°. Interuallum autem inter lentem priorem et posteriorem sumtum est  $= \eta a = \frac{1}{2} \eta p$ , ubi  $\eta$  tam paruum assumi conuenit, quam proximitas lentium, ne se in mutuo tangant, postulat.

IV°. Pro lente posteriore distantia focalis est

$$q = (2 + \eta) a = (1 + \frac{1}{2} \eta) p$$

et quia est  $\lambda' = r$  fiet eius radius

$$\text{anter.} = \frac{q}{2} \text{ et poster.} = \frac{q}{2},$$

cui lenti apertura dari debet, cuius semidiameter  $= (1 + \frac{1}{2} \eta) x$  ideoque tantillo maior, quam is primae lentis, quod quidem in praxi non solet attendi, ubi posterior lens tota aperta relinquitur.

V°. Lenti posteriori oculus immediate debet applicari et tum cernet in obiecto spatium, cuius semidiameter erit  $Z = \frac{2 + \eta}{2 \eta} x$  unde intelligitur iterum pro  $\eta$  tam paruum fractionem sumi debere, quam circumstantiae permittunt.

VI°. Pro gradu claritatis inuenimus  $y = (1 + \frac{1}{2} \eta) x$  unde pro modo supra exposito, quo claritatem mensuramus, erit mensura claritatis

$$= 20 y = (20 + 10 \eta) x.$$

## COROLL. I.

57. Eatenus haec microscopia praecedentibus quae lente simplici constant, sunt anteferenda, quatenus hic valor ipsius  $x$  hic maior prodit, quam antea; ante autem inueneramus

$$x = \frac{b}{km} \sqrt[5]{\frac{1}{\mu}} \quad \text{nunc vero } x = \frac{b}{km} \sqrt[5]{\frac{64}{(2+\eta)^2 \mu (4-\eta+\eta)}}$$

ita, ut neglecto  $\eta$ , praesens valor ipsius  $x$  fit ad praecedentem, uti  $\sqrt[5]{\frac{4}{1-\eta}}$  ad 1, quae ratio ob  $\eta = \frac{1}{5}$  circiter reducitur ad hanc

$$\sqrt[5]{5} : 1 = 1,7098 : 1 = 171 : 100$$

proxime siue uti 12 : 7.

## COROLL. 2.

58. Hinc ergo patet, huiusmodi lentem duplicatam insigne lucrum afferre, cum gradum claritatis fere duplo maiorem largiatur sicque posterius incommodum supra § 55. memoratum iam notabiliter fit imminutum. Contra vero prius incommodum in proximitate obiecti situm hic aliquantillum augetur, sed tam parum, ut differentia sit quasi insensibilis, neque etiam limitatio campi hic ullam moram faceret.

## SCHOLIUM.

59. Pro omnimoda igitur horum telescopiorum determinatione imprimis perpendendum est, quam

par-

paruam fractionem pro  $\eta$  assumere liceat, quam quidem vbi supra de telescopiis agebatur vsque ad  $\frac{1}{50}$  imminuimus; facile autem perspicitur, in tam exiguis lenticulis tantam diminutionem neququam locum habere posse, cum ratione distantiae focalis his lenticulis nullo modo tanta tenuitas dari possit, quam maioribus lentibus. Cuilibet enim perspicuum erit si distantia focalis duarum lentium fuerit 50 digit. nihil omnino impedire, quominus earum distantia vnius digiti statuatur; at, si duarum lenticularum distantia focalis tantum sit  $\frac{1}{50}$  dig. nullo certe modo earum interuallum  $= \frac{1}{500}$  dig. statui poterit; vnde merito dubitandum videtur, num, hic, litterae  $\eta$  minor valor, quam  $\frac{1}{5}$  tribui possit. Casu enim modo allato, quo binarum lenticularum distantia focalis  $= \frac{1}{50}$  dig. difficile erit eas tam graciles elaborare, vt earum interuallum non excedere debeat  $\frac{1}{50}$  dig. ne scilicet se mutuo tangant, quam mensuram in sequenti exemplo accuratius euoluamus.

### Exemplum.

60. Sit igitur  $\eta = \frac{1}{5}$  et vitrum eius sit speciei, pro qua refractio est  $n = 1,55$ . litterae autem  $k$  tribuamus, vt ante, valorem  $= 20$  et more solito sumamus,  $h = 8$  dig. vnde pro constructione microscopii sequentes nanciscemur determinaciones:

## Constructio huiusmodi microscopiorum.

I. Distantia obieci ante lentem  $a = \frac{75,273}{m}$  dig.II. Distantia focalis lentis prioris  $p = \frac{14,546}{m}$  dig.

vnde eius constructio ita se habebit:

$$\text{Rad. fac. anter.} = \frac{1}{3,2460} = -0,30257. p = -\frac{11,6742}{m} \text{ dig.}$$

$$\text{Rad. fac. poster.} = \frac{1}{3,6641} = 0,26336. p = +\frac{4,7472}{m} \text{ dig.}$$

III. Nunc quaeratur valor ipsius  $x$ , qui erit:

$$x = \frac{8}{sm} \sqrt[3]{\frac{1}{0,1381 \cdot x \cdot 3,2656 \cdot x + 4,84}} = \frac{0,6510}{m} \text{ dig.}$$

sicque habetur semidiameter aperturæ huius lentis.

IV. Interuallum autem inter hanc lentem et posteriorem  $= \frac{1}{5} a = \frac{15,455}{m}$  dig.V. Lentis posterioris distantia focalis  $q = \frac{16,001}{m}$  dig.

vnde eius constructio ita se habebit

$$\text{Rad. fac. ant.} = \frac{1}{0,1907} = 5,2438 q = \frac{83,9065}{m} \text{ dig.}$$

$$\text{Rad. fac. post.} = \frac{1}{3,6274} = 0,27567 q = \frac{9,8322}{m} \text{ dig.}$$

VI. Huic lenti sufficit aperturam dare tantillo maiorem, quam præcedentem eique oculum immediate adplicari oportet.

VII.



VII. Pro gradu claritatis inuenimus  $y = \frac{0,716}{m}$  dig.  
 vnde si claritas, vt supra mensuretur, habebitur  
 mensura claritatis  $20y = \frac{14,32}{m}$ .

VIII. Pro spatio autem apparente colligitur eius  
 femidiameter  $\zeta = \frac{3,580}{m}$  dig.

### Scholion.

61. Hic igitur praecipua praerogatiua prae len-  
 tibus simplicibus in hoc consistit, quod claritas nota-  
 biliter maior exhibeatur; si autem non desideremus  
 maiorem claritatem ideoque aperturam nostris lenti-  
 bus minorem tribuamus, tanto maiorem distinctionem  
 percipiemus, quod commodum certe non minus est  
 aestimandum. Cum hic hoc insigne commodum du-  
 plicatione lentis simus affecti, facile intelligitur, tri-  
 plicatione lentis multo maius commodum obtineri  
 posse, quod lentem adeo quadruplicando adhuc vlt-  
 rius augeri poterit. Hic scilicet loquor de lentibus  
 conuexis, quatenus eae sibi proxime iunctae ita, vt  
 quasi vnicam lentem mentiuntur, in microscopio ad-  
 hibentur, si enim etiam lentes concavas vsurpare ve-  
 limus, confusio plane tolli posset, ita, vt tunc lenti-  
 bus tanta apertura concedi posset, quantam earum  
 figura admittit, quod argumentum in sequente capite  
 adcuratius pertractabimus.

Pro-

## Problema 2.

62. Si microscopium consistet tribus lentibus convexis proxime inter se iunctis, eius constructionem inuestigare, ut pro data multiplicatione et dato distinctionis gradu obiecta maxima, qua fieri potest, claritate repraesentet.

## Solutio.

Cum hic tres lentes occurrant bina intervalla inter eas ita exprimuntur, prius  $a + b = A a (1 - \frac{1}{P})$ ; et posterius  $\beta + c = -\frac{AB}{P} a (1 - \frac{1}{Q})$  quae cum esse debeant minima, utrumque statuatur  $= \eta a$ ; unde colligitur

$$\frac{1}{P} = 1 - \frac{\eta}{A}; \quad P = \frac{A}{A - \eta}; \quad \text{deinde } \frac{1}{Q} = 1 + \frac{P\eta}{AB};$$

ideoque

$$Q = \frac{AB}{AB + P\eta} = \frac{(A - \eta)B}{(A - \eta)B + \eta}.$$

Cum porro omnes tres lentes debeant esse convexas seu earum distantiae focales,  $p, q, r$  positivae; adipiscimur has condiciones

$$p = 2a > 0; \quad q = -\frac{AB}{P} a > 0; \quad r = \frac{AB}{PQ} a > 0.$$

unde primo patet, esse debere  $2$  positivum; circa  $A$  autem nihil adhuc definitur. Considerentur autem binae postremae distantiae focales  $q$  et  $r$  et cum fit

$$\frac{q}{r} = -\frac{PQ}{B}, \quad \text{debet esse } -\frac{PQ}{B} = 2 - 1$$

quan-

quantitas positiva ideoque  $B > 1$  et hinc  $B$  negativum unde manifestum fore,  $A < 0$  hincque  $A > 1$ .

Quod ad marginem coloratum attinet, quia haec tres lentes quasi vnam lentem simplicem mentiuntur, nihil adeo erit metuendum. Quare aequationem pro femidiametro confusionis contemplemur

$$\frac{\mu m x^3}{a^2 b} \left( \frac{\lambda}{A^3} + \frac{v}{A^3} - \frac{r}{A^3 P} \left( \frac{\lambda'}{B^3} + \frac{v}{B^3} \right) + \frac{\lambda''}{A^3 B^3 P Q} \right) = \frac{x}{k^3}$$

in qua omnes termini litteris  $\lambda$  adfecti sunt positivi unde efficiendum est, vt huic formulae minimus valor concilietur vel saltim valor a minimo non multum discrepans, quem in finem 1<sup>o</sup>. litteris  $\lambda$ ,  $\lambda'$ ,  $\lambda''$  valor minimus, qui est 1, tribuatur et cum litterae  $P$ ,  $Q$ , parum ab vnitae differant, earum loco quoque vnitae scribatur et sequens formula ad minimum perducatur

$$\frac{1}{A^3} + \frac{v}{A^3} - \frac{1}{A^3} \left( \frac{1}{B^3} + \frac{v}{B^3} - \frac{1}{B^3} \right)$$

Quaestio scilicet nunc eo redit, vt ambae litterae  $A$  et  $B$  ita definiantur, vt valor huius formulae fiat minimus. Consideremus igitur primo solam litteram  $B$  et manifestum est, eam ita accipi debere, vt formula  $\frac{1}{B^3} + \frac{v}{B^3} - \frac{1}{B^3}$  fiat minima quae cum similis sit formulae praecedentis problematis, eodem modo reperietur  $B = 2$  et  $B = -2$ . His igitur sumtis valoribus nostra formula euadet

$$\frac{1}{A^3} + \frac{v}{A^3} - \frac{1}{4A^3} + \frac{v}{4A^3};$$

pro qua ex natura minimi litterae A et  $\mathcal{A}$  supersunt  
 inuestigandae et cum sit, vt ante obseruauimus  $\frac{1}{\mathcal{A}} = 1 + \frac{2}{A}$   
 hincque  $d\mathcal{A} : dA = \mathcal{A}^2 : A^2$  differentiatio dabit hanc  
 aequationem, quae facile resoluitur in hos factores

$$(v + 3) \left(1 + \frac{2}{A}\right) \left(1 + \frac{1}{A}\right) = 0$$

id quod duplici modo fieri poterit; primo scilicet si  
 $A = -\frac{2}{3}$ ; ideoque  $\mathcal{A} = 3$ ; tum vero etiam si  $A = -\frac{1}{2}$   
 hincque  $\mathcal{A} = -1$ ; ex quo intelligitur solam priorem  
 solutionem locum habere. Quocirca pro solutione  
 nostri problematis statuamus

$\mathcal{A} = 3$ ;  $A = -\frac{2}{3}$ ; atque  $\mathcal{B} = 2$  et  $B = -2$ ,  
 fietque

$$1^\circ. P = \frac{2}{3+2\eta}; Q = \frac{3+2\eta}{3+3\eta}$$

$$2^\circ. \text{vero etiam } p = 3a; q = \frac{2}{P}a = (3+2\eta)a$$

$$r = \frac{2}{PQ} \cdot a = 3(1+\eta)a$$

Formula autem pro multiplicatione supra data fit hic ]

$$m = P Q \cdot \frac{b}{a} = \frac{1}{1+\eta} \cdot \frac{b}{a}$$

vnde deducimus

$$a = P Q \cdot \frac{b}{m} = \frac{1}{1+\eta} \cdot \frac{b}{m}$$

quibus notatis denuo consideremus aequationem pro  
 confusione, quae his omnibus valoribus substitutis in-  
 duet hanc formam:

$$\frac{(1+\eta)^2 \mu m^3 \infty^3}{2^3} \left( \frac{1}{27} \left( 1 + \frac{1}{P} + \frac{1}{PQ} \right) - \frac{2\eta}{27} \left( 3 + \frac{1}{P} \right) \right) = \frac{1}{A^2}$$

quae

quae porro ad hanc formam reducitur

$$\frac{(1+\eta)^2 \mu m^3 x^3}{2\gamma b^3} (3 + \frac{5}{3}\eta - 4\gamma(2 + \frac{1}{3}\eta)) = \frac{2}{k^2}$$

ita, vt fit

$$\frac{k m x}{3 b} \sqrt{\mu (1 + \eta)^2 (3 + \frac{5}{3}\eta - 4\gamma(2 + \frac{1}{3}\eta))} = 1.$$

vnde facile valor ipsius  $x$  colligitur, qui praebet semidiametrum aperturae primae lentis. Duas reliquas tuto tam apertas relinquere licet, quam earum forma permittit. Hinc autem pro gradu claritatis habebitur  $y = \frac{h x}{m a} = (1 + \eta) x$  hincque mensura claritatis  $= 20y$ , si scilicet  $x$  in digitis exprimatur.

Denique superest, vt spatium in obiecto visum accuratius determinemus, cuius semidiameter  $\zeta$  supra in genere ita est definitus

$$\zeta = \frac{q+r}{m a - b} \cdot a b \xi = M a \xi, \text{ posito } M = \frac{q+r}{m a - b} \cdot b$$

erit autem

$$m a - b = - \frac{\eta}{1 + \eta} \cdot b \text{ ideoque } M = - \frac{(q+r)(1+\eta)}{\eta}$$

ita, vt nunc  $q$  et  $r$  vt negatiuae spectari debeant, nunc autem adiungi debet prima aequatio fundamentalis

$$3q = (P - 1) M = \frac{-2\eta}{2+2\eta} M,$$

hincque

$$q = - \frac{\eta}{3+2\eta} M.$$

I 2

vbi

vbi si loco  $M$  valor substituat, erit  $q = \frac{1+\eta}{2-\eta} \cdot r$ ;  
 quod ad litteram  $r$  attinet eius loco unitas accipi pos-  
 set, si vltima lens esset vtrinqve aequaliter conuexa;  
 cum autem hinc proditura sit fere conuexo plana,  
 eius apertura ad dimidium reducetur, ita, vt statui  
 debeat  $r = -\frac{1}{2}$ ; vnde fit

$$q = -\frac{(1+\eta)}{2(2-\eta)} \text{ hincque } M = \frac{s(1+\eta)}{\eta(2-\eta)}$$

quo circa sumto  $\xi = \frac{1}{2}$  habebitur semidiameter spatii  
 conspiciui

$$\xi = \frac{s(1+\eta)}{2\eta(2-\eta)} \cdot a = \frac{s}{2\eta(2-\eta)} \cdot \frac{b}{m}$$

qui campus tantus est, vt de eo nemo rationem ha-  
 beat conquerendi. Tum autem semidiametri apertura-  
 rae binarum posteriorum lentium debent esse

$$\text{secundae} = \frac{1+\eta}{s(2-\eta)} \cdot q = \frac{s+2\eta}{s(2-\eta)} \cdot \frac{b}{m}$$

$$\text{tertia} = \frac{1}{s} \cdot r = \frac{s}{s} \cdot \frac{b}{m}$$

siquidem hi valores sint maiores iis, quos claritas po-  
 stulat, quippe qui sunt pro

$$\text{secunda} = \frac{x}{p} = \frac{s+2\eta}{s} \cdot x \text{ et pro}$$

$$\text{tertia} = \frac{x}{p \cdot q} = (1+\eta) \cdot x.$$

### Scholion.

63. Obiectioni hic occurrendum necesse vide-  
 tur, quod in praecipua huius solutionis parte non  
 ipsam formulam, qua semidiameter confusionis expri-  
 mitur,

mittur, ad minimum valorem perduxerimus, sed aliam formulam, quae ab illa satis notabiliter discrepare possit, praecipue si, ut ante fecimus statuamus  $\eta = \frac{1}{3}$  atque hoc quidem statim lubenter concedimus, nos hoc modo, semidiametro confusionis non absolute minimum valorem induxisse atque adeo minorem eoque inuenimus, erui posse, si quis laborem suscipere vellet, ipsam formulam litteras P et Q continentem secundum methodum maximorum et minimorum tractandi; tum scilicet pro litteris A et B alios valores a nostris aliquantillum discrepantes esset inuenturus, qui certe molestissimis formulis torrent implicati, ut neque operae pretium esset eos euoluere neque ab artifice perfectissima exsecutio sperari posset. Nos autem hic valore inuento, qui certe iam satis est exiguus, etsi non sit omnium minimus, contenti esse poterimus, si quidem inde eiusmodi microscopia, adipiscimur, quae vulgaribus simplicibus longissime sunt anteferenda, cum multo maiorem claritatis gradum largiantur, pro data scilicet distinctione, ita, ut si aliquid de claritate remittere voluerimus, aperturam primae lentis aliquantillum restringendo, tum maximum lucrum in distinctione simus consecuturi.

## C O R O L L. I.

64. Cum pro prima lente sit distantia focalis  $g = 3a = \frac{3}{1+\eta} \cdot \frac{b}{m}$  et numeri  $\mathcal{N} = 3$  et  $\lambda = 1$ ,

I 3

crit.

erit huius lentis radius

$$\text{anter.} = \frac{p}{\sigma - 2(\sigma - p)} \text{ et poster.} = \frac{p}{p + 2(\sigma - p)}$$

sicque erit radius

$$\text{anter.} = \frac{p}{3p - 2\sigma} \text{ et poster.} = \frac{p}{2\sigma - 2p}$$

### COROLL. 2.

65. Simili modo cum pro lente secunda sit distantia focalis

$$q = (3 + 2\eta) a = \frac{3 + 2\eta}{1 + \eta} \cdot \frac{b}{m}$$

et numeri  $\mathfrak{B} = 2$  et  $\lambda' = 1$ , erit eius radius

$$\text{anter.} = \frac{q}{2p - \sigma} \text{ et poster.} = \frac{q}{2\sigma - p}$$

Pro lente autem tertia ob

$$r = 3(1 + \eta) a = \frac{3b}{m}; \mathfrak{C} = 1 \text{ et } \lambda'' = 1$$

erit eius radius

$$\text{anter.} = \frac{r}{p} \text{ et poster.} = \frac{r}{\sigma}$$

### COROLL. 3.

66. Quod ad interualla inter has ternas lentes attinet, ea assumta inter se aequalia et nunc vtrumque inuentum est  $= \eta a = \frac{\eta}{1 + \eta} \cdot \frac{b}{m}$ , dum scilicet obiectum ante lentem primam collocatur ad distantiam  $a = \frac{r}{1 + \eta} \cdot \frac{b}{m}$ , quae distantia ergo aliquanto minor est, quam casu lentis simplicis et duplicatae.

Exem-



## Exemplum.

67. Parentur omnes tres lentes ex vitro communi, pro quo est  $n = 1,55$ ; tum vero statuatur  $\eta = \frac{1}{3}$ , et sumatur  $k = 20$ ; et  $b = 8$  dig. atque hinc pro quantitate  $x$  determinanda habebitur ista aequatio

$$\frac{smx}{6} \sqrt[3]{0,9381 \times 1,44 \times 1,4105} = 1$$

quae evoluta dat  $x = \frac{0,96795}{m}$  dig. vnde sequens oritur

## Constructio huiusmodi microscopiorum.

I. Distantia obiecti ante lentem primam

$$a = \frac{20}{3m} = \frac{6,666}{m} \text{ dig.}$$

II. Pro lente prima, cuius distantia focalis  $= p = \frac{10}{m}$ , erit

radius faciei anterioris

$$= -\frac{p}{2,5827} = -0,37276 p = -\frac{2,552}{m} \text{ dig.}$$

radius faciei posterioris

$$= \frac{p}{4,5008} = 0,22218 p = \frac{1,1109}{m} \text{ dig.}$$

cui lenti tribuatur apertura, cuius semidiameter  $x = \frac{0,96795}{m}$  dig.

tum ad distantiam  $\eta a = \frac{4}{3m} = \frac{1,333}{m}$  dig.

III. Locetur lens secunda, cuius distantia focalis est  $q = \frac{22,666}{m}$  dig. eritque

radius

radius faciei

$$\text{anter.} = \frac{-q}{3,2460} = -0,802579 = -\frac{18,1915}{m} \text{ dig.}$$

$$\text{poster.} = \frac{q}{8,0641} = 0,32636 q = \frac{7,3973}{m} \text{ dig.}$$

cuius aperturæ femidiameter fit  $\frac{1,85}{m}$  dig.

et distantia ad lentem sequentem, ut ante  
 $= \frac{1,333}{m}$  dig.

IV. Pro lente tertia, cuius distantia focalis est

$r = \frac{24}{m}$  dig. erit radius faciei

$$\text{anter.} = \frac{r}{0,1907} = 5,2438. r = \frac{126,851}{m} \text{ dig.}$$

$$\text{poster.} = \frac{r}{1,6274} = 0,61447. r = \frac{34,7473}{m} \text{ dig.}$$

cuius apertura tanta esse potest, ut eius femidiameter fit  $= \frac{6}{m}$  dig.

huicque lenti oculus immediate adplicetur.

V. Tum vero cum sit  $y = \frac{6}{5} x = \frac{1,1616}{m}$  dig. erit

mensura claritatis  $= \frac{23,280}{m}$ , quæ femisse maior est, quam casu præcedente.

VI. Pro spatio denique obiecti conspicuo habebimus eius femidiametrum

$$\zeta = \frac{50}{8m} = \frac{16,666}{m}$$

Scho-

## Scholion.

68. Ne quisquam miretur, hoc casu spatium conspicuum tanto maius esse inuentum, quam casu praecedente, is obseruet in casu antecedente lenti oculari non maiorem aperturam esse datam, quam gradus claritatis postulat; quod ideo fecimus, quod priori lenti adhuc exigua apertura tribui debebat ideoque hoc casu consultum erat ambas lentes non maiores efficere, quam ista apertura postularet, ut scilicet earum crassities eo minor redderetur. In praesente autem casu res longe aliter se habet, cum iam prima lens fere tantam aperturam requirat, quantam eius figura permittit; ex quo hae lentes necessario tantum discum habere debent, qui faciei curuioris arcum triginta graduum complectatur; ex quo etiam binis reliquis lentibus multo maior apertura tribui poterat. Verum hic in genere notandum est, etiam casu praecedente campum apparentem iam tantum fore, ut quilibet de eo contentus esse possit. Quoniam autem hic primae lentis apertura fere iam tanta est inuenta, ut eius figura maiorem non pateretur, inutile videri posset, hanc inuestigationem ulterius ad quatuor lentes proseguere, quandoquidem calculum simili modo instituendo multo maiorem valorem pro  $x$  essemus adepturi; verum ob hanc ipsam causam ista inuestigatio maximi erit momenti; quia enim haec hactenus litterae  $k$  maiorem valorem non tribuimus, quam viginti; unde admodum modicus distinctionis gradus

nascitur; nunc huius litterae valorem multo maiorem assumere poterimus, quo his microscopiis fumus certe perfectionis gradus inducetur; idque sine vilo claritatis detrimento. Quaecunque enim adhuc per microscopia vulgaria sunt obseruata, semper haud exiguo confusionis gradu erant inquinata, ex quo si eiusmodi microscopia nunc producantur, quae obiecta multo maiore distinctione repraesentent; ipsa obseruationes multa nobis patefacient, quae adhuc erant incognita, ita, vt non amplius multo maior multiplicatio tanto studio sit desideranda.

### Problema 3.

69. Si microscopium constet quatuor lentibus conuexis et proxime inter se iunctis, eius constructionem inuestigare, vt pro data multiplicatione et dato distinctionis gradu obiecta maxima qua fieri potest, claritate repraesentet.

### Solutio.

Cum hic quatuor lentes occurrant, tria inter eas interualla ita exprimuntur

$$I^{sum} = A a \left( 1 - \frac{1}{P} \right)$$

$$II^{sum} = - \frac{AB}{P} a \left( 1 - \frac{1}{Q} \right)$$

$$III^{sum} = \frac{ABC}{PQ} a \left( 1 - \frac{1}{R} \right)$$

quae

quae cum esse debeant minima, quodlibet statuamus  
 $= \eta a$ , unde obtinebimus

$$\frac{1}{P} = 1 - \frac{\eta}{A} \text{ feu } P = \frac{A}{A-\eta};$$

deinde

$$\frac{1}{Q} = 1 + \frac{P\eta}{AB}, \text{ feu } Q = \frac{(A-\eta)B}{(A-\eta)B+\eta}$$

tertio vero

$$\frac{1}{R} = 1 - \frac{\eta}{(A-\eta)BC + C\eta} \text{ feu } R = \frac{(A-\eta)BC + C\eta}{(A-\eta)BC + C\eta - \eta}$$

$$\text{feu } R = \frac{ABC - \eta(B-1)C}{ABC - \eta(B-1)C - \eta}$$

Cum iam omnes quatuor lentes debeant esse conuexae  
 feu earum distantiae focales  $p, q, r, s$  positivae, has  
 adipiscimur conditiones

$$p = \mathcal{A} a > 0; \quad q = -\frac{A\mathcal{B}}{P} a > 0.$$

$$r = \frac{AB\mathcal{C}}{PQ} a > 0; \quad s = -\frac{ABC}{PQR} a > 0;$$

unde primo colligimus

$$\frac{r}{s} = -\frac{R\mathcal{C}}{C} > 0; \text{ ita, vt esse debeat } -\frac{\mathcal{C}}{C} = \mathcal{C} - 1$$

positivum, unde fit  $\mathcal{C} > 1$ . hinc C negativum, ideo-  
 que AB positivum. Deinde cum fit

$$\frac{q}{r} = -\frac{\mathcal{B}Q}{B\mathcal{C}}, \text{ debeat esse } -\frac{\mathcal{B}}{B} = \mathcal{B} - 1 > 0;$$

unde patet, fore  $\mathcal{B} > 1$  hincque  $B < 0$  simulque  
 $A < 0$ . denique cum fit

$$\frac{p}{q} = -\frac{\mathcal{A}P}{A\mathcal{B}}, \text{ etiam esse debeat}$$

$$-\frac{\mathcal{A}}{A} = \mathcal{A} - 1 > 0, \text{ ergo } \mathcal{A} > 1 \text{ et } A < 0.$$

K 2

Quod

Quod, ad marginem coloratum attinet de eo non est opus, ut simus solliciti, ut iam supra annotauimus. Quare pro semidiametro confusionis hanc contemplemur aequationem:

$$\frac{u \cdot m \cdot x^3}{a^2 b} \left( \frac{\lambda}{u^3} + \frac{v}{u} - \frac{1}{A^2 P} \left( \frac{\lambda'}{u^3} + \frac{v}{B u} \right) + \frac{1}{A^2 B^2 P Q} \left( \frac{\lambda''}{u^3} + \frac{v}{C u} \right) - \frac{\lambda'''}{A^2 B^2 C^2 P Q R} \right) = \frac{1}{A^2}$$

in qua omnes termini litteris  $\lambda$  adfecti sunt positiui; unde huic formulae valor minimus vel saltem a minimo non multum discrepans conciliari debet quem in finem primo litteris  $\lambda$ ,  $\lambda'$ ,  $\lambda''$ ,  $\lambda'''$  valor minimus, = 1, tribuatur, cumque P, Q, R ab unitate parum differant, eorum loco scribatur unitas et sequens formula ad minimum perducatur:

$$\frac{x^3}{u^3} + \frac{u}{A u} - \frac{1}{A^2} \cdot W; \text{ existente}$$

$$W = \frac{1}{u^3} + \frac{u}{B u} - \frac{1}{B^2} \left( \frac{1}{u^3} + \frac{v}{C u} - \frac{1}{C^2} \right)$$

ubi evidens est, hanc formulam W omnino similem esse illi formulae, quam in praecedente problemate minimum reddi oportuit; hoc tantum discrimine, quod litterae B et C hic adhibitae ante erant A et B. Quare iam nouimus, ut haec formula W fiat minima, capi debere:

$$B = 3; B = -\frac{3}{2}; C = 2; \text{ et } C = -2;$$

quibus valoribus substitutis formula W fiet.

$$W = \frac{1}{9} - \frac{3v}{27}$$

Quo-

Quocirca formula nostra ad minimumam reuocanda erit:

$$\frac{r}{\mathfrak{A}^3} + \frac{v}{A\mathfrak{A}} - \frac{r}{A^3} \left( \frac{1}{9} - \frac{8v}{27} \right)$$

quae differentiata propter  $d\mathfrak{A}:dA = \mathfrak{A}^2:A^2$  praebet:

$$\frac{3r}{\mathfrak{A}^2} + \frac{v}{\mathfrak{A}} + \frac{v}{A} - \frac{3r}{A^2} \left( \frac{r}{9} - \frac{8v}{27} \right) = 0,$$

quae porro reducitur ad hanc formam:

$$3 \left( \frac{r}{\mathfrak{A}^2} - \frac{r}{9A^2} \right) + v \left( \frac{1}{\mathfrak{A}} + \frac{1}{A} + \frac{8}{9A^2} \right) = 0,$$

in qua si loco  $\frac{r}{\mathfrak{A}}$  scribatur eius valor  $r + \frac{1}{A}$  prodibit:

$$(v+3) \left( r + \frac{2}{A} + \frac{8}{9A^2} \right) = 0,$$

qui posterior factor resoluitur in hos duos factores:

$$\left( r + \frac{4}{3A} \right) \left( r + \frac{2}{3A} \right)$$

quorum prior nihilo aequatus dat

$$A = -\frac{4}{3} \text{ ideoque } \mathfrak{A} = 4;$$

posterior vero

$$A = -\frac{2}{3} \text{ hincque } \mathfrak{A} = -2;$$

qui ergo nostro instituto non conuenit. Quocirca pro valore minimo obtinendo sequentes nacti sumus valores:

$$\mathfrak{A} = 4; A = -\frac{4}{3}; \mathfrak{B} = 3; B = -\frac{1}{3};$$

$$C = 2; C = -2;$$

ex quibus valores supra inuenti ita exprimentur:

$$P = \frac{4}{4+3\eta}; Q = \frac{4+3\eta}{4+3\eta}; R = \frac{4+5\eta}{4+6\eta};$$

et distantiae focales

$$p = 4a; q = (4 + 3\eta)a;$$

$$r = (4 + 5\eta)a \text{ et } s = (4 + 6\eta)a.$$

Formula autem pro multiplicatione supra data hic fit

$$m = PQR \cdot \frac{b}{a} = \frac{4}{4+6\eta} \cdot \frac{b}{a}$$

vnde colligitur

$$a = \frac{2}{2+3\eta} \cdot \frac{b}{m}$$

His igitur substitutis valoribus aequatio pro confusione tollenda hanc induet formam:

$$\frac{\mu \left(1 + \frac{5}{2}\eta\right)^2 m^3 x^3}{1.64. b^3} \left(1 + \frac{1}{P} + \frac{1}{PQ} + \frac{1}{PQR} - 2\sqrt{\left(6 + \frac{5}{P} + \frac{1}{PQ}\right)}\right) = \frac{1}{k^3}$$

quae loco P, Q, R valoribus substitutis abit in hanc formam:

$$\frac{k^3. m^3 x^3}{64. b^3} \cdot \mu \left(1 + \frac{5}{2}\eta\right)^2 \left(4 + \frac{7}{2}\eta - \sqrt{(20 + 7\eta)}\right) = 1$$

ita, vt fit

$$\frac{k m x}{4 b} \sqrt[3]{\mu \left(1 + \frac{5}{2}\eta\right)^2 \left(4 + \frac{7}{2}\eta - \sqrt{(20 + 7\eta)}\right)} = 1$$

vnde facile, valor ipsius  $x$  definitur, qui nisi maior prodeat, quam vt prima lens tantam aperturam admittere possit, dabit huius aperturae semidiametrum; sin autem maior prodeat, tum valor  $k$  eo vsque augetur, quoad prima lens hanc aperturam capere possit, sicque patebit, quanto distinctionis gradu haec mi-

cro-



rospectio futura sint praedita, scilicet lentibus definitis pro  $x$  sumatur valor maximae aperturae respondens ac tum ex hac aequatione valor ipsius  $k$  eliciatur. Hoc itaque modo definito  $x$ , pro gradu claritatis habebimus  $y = \frac{2+3\eta}{2} x$  hincque mensura claritatis  $= 20 y = (20 + 30 \eta) x$ . De spatio in obiecto conspicuo hic nihil definitio, cum certe sit maximum, si quidem singulis lentibus maxima, cuius capaces sunt, apertura tribuatur.

## Coroll. 1.

70. Cum pro prima lente sit distantia focalis

$$p = 4 a = \frac{s}{2+s\eta} \cdot \frac{b}{m}$$

et numeri  $\mathcal{A} = 4$  et  $\lambda = 1$ , erit radius faciei

$$\text{anter.} = \frac{p}{\sigma - (\sigma - \rho)}; \text{ poster.} = \frac{p}{\rho + (\sigma - \rho)}$$

## Coroll. 2.

71. Reliquarum trium lentium constructio erit, vt in problemate praecedente; pro secunda scilicet erit radius faciei

$$\text{anter.} = \frac{q}{\sigma - s(\sigma - \rho)} \text{ et poster.} = \frac{q}{\rho + s(\sigma - \rho)}$$

existente

$$q = \frac{2(1+s\eta)}{2+s\eta} \cdot \frac{b}{m}$$

Pro tertia lente erit radius faciei

$$\text{anter.} = \frac{r}{\sigma - 2(\sigma - \rho)}; \text{ et poster.} = \frac{r}{\rho + 2(\sigma - \rho)}$$

existen-

existente

$$r = \frac{2(4+3\eta)}{2+3\eta} \cdot \frac{b}{m}$$

Pro quarta denique lente radius faciei

anter. =  $\frac{s}{\rho}$ ; poster. =  $\frac{s}{\sigma}$ ; existente

$$s = \frac{2(4+6\eta)}{2+3\eta} \cdot \frac{b}{m} = \frac{4b}{m}$$

### Coroll. 3.

72. Quod ad intervalla attinet, omnia sunt inter se aequalia scilicet  $= \eta a$  eorum igitur quodlibet erit  $= \frac{2\eta}{2+3\eta} \cdot \frac{b}{m}$  quia scilicet obiectum ante primam lentem collocari debet ad distantiam  $a = \frac{2}{2+3\eta} \cdot \frac{b}{m}$ .

### Exemplum.

73. Ponantur omnes quatuor lentes ex vitro communi confectae, pro quo  $n = 1,55$ ; tum vero statuatur iterum  $\eta = \frac{1}{3}$  et  $b = 8$  dig. at vero  $k$  adhuc indefinitum relinquamus unde habebitur ista aequatio:

$$\frac{k m x}{x^2} \sqrt[3]{0,9381 \times 1,69 \times (-0,2776)} = 1$$

vbi signum — calculum non turbat, cum hic de quantitate absoluta sermo sit, unde reperitur  $kx = \frac{42,0692}{m}$  unde iam patet, si caperetur  $k = 20$ , valorem ipsius  $x$  proditurum esse nimis magnum, quare  $x$  ex figura lentium et tum hinc valorem ipsius  $k$  inuestigemus, ut gradum distinctionis accuratius cognoscamus.

Habe-

Habetur itaque sequens

Constructio horum microscopiorum.

I. Obiecti ante lentem distantia

$$a = \frac{80}{1376} = \frac{6,1528}{m} \text{ dig.}$$

II. Pro lente prima, cuius distantia focalis

$$p = \frac{24,6152}{m} \text{ dig. erit radius faciei}$$

$$\text{anter.} = -\frac{p}{4,1164} = -0,24275 \cdot p = -\frac{5,9755}{m} \text{ dig.}$$

$$\text{poster.} = \frac{p}{5,9375} = 0,16842 \cdot p = \frac{2,1457}{m} \text{ dig.}$$

cuius aperturæ semidiameter sumi poterit

$$x = \frac{12,0364}{m} \text{ dig.}$$

tum vero pro gradu distinctionis erit  $k = 42$  circiter; quare cum distinctio sequatur cubum ipsius  $k$  hic distinctio octies maior erit, quam in casibus præcedentibus, ubi  $k = 20$ . Tum vero ad lentem sequentem erit distantia  $= \frac{12,2308}{m} \text{ dig.}$

III. Pro secunda lente, cuius distantia focalis

$$q = \frac{29,308}{m} \text{ dig. erit radius faciei}$$

$$\text{anter.} = -\frac{q}{2,6827} = -0,3727 \cdot q = -\frac{10,552}{m} \text{ dig.}$$

$$\text{poster.} = \frac{q}{4,5008} = 0,2222 \cdot q = \frac{6,2316}{m} \text{ dig.}$$

cuius apertura priorè aliquanto maior sumi potest.

Distantia ad lentem sequentem est, vt ante.

IV. Pro tertia lente, cuius distantia focalis est

$$r = \frac{30,77}{m} \text{ dig.}$$

Tom. III.

L

erit

erit radius faciei

$$\text{anter.} = -\frac{r}{1,2450} = -0,8025. r = -\frac{24,600}{m} \text{ dig.}$$

$$\text{poster.} = \frac{r}{3,0641} = 0,3264. r = \frac{52,66}{m} \text{ dig.}$$

cuius apertura iterum aliquanto maior, quam praecedens, et interuallum ad sequentem est, vt ante.

V. Pro quarta lente, cuius distantia focalis est  $s = \frac{32}{m}$  dig. erit radius faciei

$$\text{anter.} = \frac{s}{0,1907} = 5,2438. s = \frac{367,8016}{m} \text{ dig.}$$

$$\text{poster.} = \frac{s}{1,5574} = 0,61447. s = \frac{15,663}{m} \text{ dig.}$$

cuius apertura denuo aliquantillum maior, eique oculus immediate applicatur.

VI. Pro gradu claritatis est  $y = 1,3$   $x = \frac{1,2427}{m}$  dig. vnde mensura claritatis fit  $\frac{26,946}{m}$  ita, vt nisi plus quam vices sexies multiplicare velimus, adhuc plena claritate frui queamus.

### Scholion.

74. En ergo speciem microscopiorum simplicium, quae maximam attentionem mereri videtur, cum sine detrimento claritatis obiecta multo distinctius repraesentabunt, quam vulgo fieri solet. Interim tamen fateri cogimur, haec instrumenta non ad praegrandes multiplicationes applicari posse; si enim multiplicationem  $m = 100$  desideremus, lentes quidem  
ad huc

adhuc facile parari possent sed distantia obiectorum fieret tantum  $\frac{6}{100}$  dig., quae distantia utique nimis, parua fieri posset, praecipue si obiecta non fuerint admodum laeuia. Ceterum multiplicatio ad 150 vel 200 fortasse posset vrgeri, si summa necessitas posularet. Deinceps autem eiusmodi microscopia composita proferemus, quae non solum aequae clare et distincte obiecta repraesentent, sed etiam maiorem elongationem obiectorum admittant. Quoniam autem in hoc capite lentes tantum conuexas sumus contemplati, nunc etiam lentes concavas introducamus, quibus adeo effici poterit, vt confusio penitus euanescat, sed aliud incommodum executionem turbabit, dum scilicet lentibus nimis exiguis erit opus, quemadmodum in capite sequente videbimus.

### Annotation.

75. In hoc exemplo singulari attentione dignum euenit, vt formula pro confusione prodierit negativa; euidens autem est, eam siue maiorem siue minorem prodituram fuisse, si litterae  $\eta$  alius valor fuisset tributus, quin etiam haec confusio plane ad nihilum reduceretur, si  $\eta$  ita acciperetur, vt fieret haec formula  $4 + \frac{7}{2}\eta - \sqrt{(20 + 7\eta)} = 0$ ; vnde pro casu exempli sequeretur

$$\eta = \frac{8}{7} \cdot \frac{5\sqrt{-1}}{1-2\sqrt{-1}} = \frac{1,3040}{3,7430} = 0,34833,$$

hoc est propemodum si sumissemus  $\eta = \frac{1}{3}$ . Praete-

rea vero alio modo haec confusio ad nihilum reduci  
 posset, si scilicet pro prima lente numerum  $\lambda$  non  
 unitati aequalem, sed  $\lambda = 1 + \omega$  posuiffemus; tum  
 enim in formula illa primus terminus 4 particula  $\omega$   
 augeri deberet, ita, vt prodiret in casu exempli  
 $\omega = 0,2776$ ; vnde foret  $\omega = 0,2776$ , primaque lens  
 ex numero  $\lambda = 1 + \omega = 1,2776$  constriui deberet;  
 reliquarum lentium constructione eadem relicta. Pro  
 prima igitur hac lente substitui poterit haec con-  
 structio ob  $\tau\sqrt{\lambda - 1} = 0,4768$ :

$$\text{rad. fac. anter.} = \frac{-p}{4,24194 - 0,4768} = \frac{-p}{3,76514}$$

$$\text{rad. fac. poster.} = \frac{p}{5,9375 - 0,4768} = \frac{p}{5,4607}; \text{ seu}$$

$$\text{rad. anter.} = -0,27453 \cdot p = -\frac{6,756}{m} \text{ dig.}$$

$$\text{rad. poster.} = 0,18312 \cdot p = \frac{4,804}{m} \text{ dig.}$$

quodsi ergo haec lens in exemplo allato loco primae  
 lentis substituat, reliquis omnibus seruatis his mi-  
 croscoopiis adhuc maior perfectionis gradus conciliabi-  
 tur, praecipue cum iam prima lens maiorem aper-  
 turam admittat.