DU MOUVEMENT DES ABSIDES DES SATELLITES DE JUPITER.

PAR MR. L. EULER.

I.

En comparant le mouvement des Satellites de Jupiter avec celui de la Lune, il femble d'abord que celui-ci doit être affujetti à de plus grandes irrégularités que celui-là. La force du Soleil, qui agit fur la Lune & en trouble le mouvement, qu'elle pourfuivroit en vertu de la force de la Terre, y tient un beaucoup plus grand rapport, que celui de la force dont le Soleil agit fur les Satellites de Jupiter à celle de Jupiter même. Trois raifons concourent à nous perfuader que le mouvement des Satellites de Jupiter doit être moins irrégulier que le mouvement de la Lune. La premiere eft la grande maffe du corps de Jupiter, laquelle furpaffe environ 200 fois celle de la Terre; fi donc les autres circonftances étoient femblables, les dérangemens caufés par la force du Soleil devroient être autant de fois plus petits dans les Satellites de Jupiter que dans la Lune. La feconde raifon eft la diftance plus grande de Jupiter au Soleil; & il eft certain que fi la Terre fe trouvoit à la diftance de Jupiter, les inégalités dans le mouvement de la Lune feroient prefque imperceptibles. La troifieme raifon eft que la diftance des Satellites au centre de Jupiter eft plus petite que celle de la Lune au centre de la Terre, au moins par rapport à la groffeur de cette planete; puifque le quatrieme Satellite n'en eft éloigné que de 25 demi-diametres de Jupiter, pendant que la diftance de la Lune égale environ foixante demi-diametres de la Terre; & le premier Satellite n'en étant éloigné que de $5\frac{2}{3}$ demi-diametres de Jupiter, fe trouve ve même à une diſtance moindre que celle de la Lune à la Terre. D'où il s'enſuit que, ſelon le ſyſteme commun d'attraction, le mouvement des Satellites de Jupiter devroit être beaucoup moins irrégulier que le mouvement de la Lune.

2. Aiant donc aſſez heureuſement déterminé par la Théorie les inégalités du mouvement de la Lune, il ſemble que la même Théorie nous devroit découvrir les inégalités dans le mouvement des Satellites de Jupiter. Pour cet effet, nous n'aurions qu'à ſuppoſer 1°. la maſſe de la Terre environ 200 fois plus grande qu'elle n'eſt effectivement, 2°. ſa diſtance au Soleil égale à celle de Jupiter, & 3°. la diſtance de la Lune à la Terre égale à celle de quelque Satellite au centre de Jupiter; alors le calcul tiré de la Théorie devroit donner toutes les inégalités du mouvement des Satellites. Or, en faiſant cette application du calcul, on s'appercevra aiſément que toutes les inégalités ſe réduiroient preſque à rien, de ſorte qu'il en faudroit conclure que le mouvement des Satellites, & ſurtout du premier, ſeroit preſque entierement conforme aux loix découvertes par *Képler*. Le mouvement des abſides, dont la détermination a été ſi embaraſſante pour la Lune, n'auroit preſque plus de difficultés en faiſant l'application aux Satellites de Jupiter, & le calcul montrera preſque immobiles les lignes des abſides de chaque Satellite, pendant que l'apogée de la Lune avance par an d'environ 40°. Il eſt vrai que les Satellites de Jupiter, entant qu'ils s'attirent mutuellement, doivent cauſer quelque dérangement dans leur mouvement, dont les lignes des abſides ſe reſſentent le plus ſenſiblement; mais, puiſque les maſſes des Satellites ſont fort petites par rapport à celle de Jupiter, & qu'ils ne s'approchent jamais tant entr'eux, que leur diſtance devienne aſſez petite par rapport à celle de Jupiter même, pour qu'il en réſulte un effet conſidérable, il s'enſuit que l'action mutuelle ne ſauroit être regardée comme une ſource conſidérable d'inégalité.

3. Nonobſtant toutes ces raiſons, je crois qu'on ſe tromperoit beaucoup, ſi l'on vouloit aſſurer que le mouvement des Satelli-

tes

tes de Jupiter fût à peu près régulier, & que les anomalies qu'on y observe ne provinssent que de l'excentricité de leurs orbites & d'un petit mouvement de leurs absides. Les observations semblent plutôt prouver que le mouvement des Satellites, & particulierement du premier, qui, par les raisons alléguées, devroit être le plus régulier, est assujetti à quelques inégalités très considérables, qui se découvrent surtout dans un mouvement extrèmement rapide de la ligne des absides, qui surpasse même de beaucoup celui de l'apogée de la Lune. Cette circonstance, qui paroit d'abord contraire à l'hypothese de la gravitation universelle, en est plutôt une conséquence aussi nécessaire que remarquable, comme je le prouverai incontestablement par les recherches suivantes. En effet, il doit paroitre fort étrange que ce mouvement rapide des absides dans les orbites des Satellites de Jupiter se trouve en contradiction avec la Théorie sur laquelle le mouvement de la Lune est fondé, & qu'il soit néanmoins une suite nécessaire de la gravitation universelle: mais une seule considération levera tous les doutes. En déterminant le mouvement de la Lune on suppose que les corps célestes s'attirent mutuellement en raison réciproque du quarré de leurs distances, conformément à la loi générale suivant laquelle toutes les parties de la matiere agissent les unes sur les autres. Mais cette même loi ne sauroit avoir lieu dans les corps finis, qu'entant qu'ils sont sphériques, ou qu'ils ont leurs momens d'inertie égaux entr'eux. Donc le corps de la Terre n'étant pas parfaitement sphérique, la loi supposée en souffre bien quelque altération, mais qui n'est d'aucune conséquence dans le mouvement de la Lune. Or on sait que le corps de Jupiter differe très considérablement de la figure sphérique, & je ferai voir que cette circonstance altere la raison réciproque doublée des distances, au point que le phénomene mentionné en doit être produit.

4. Il faut donc bien remarquer que les corps célestes ne s'attirent mutuellement en raison réciproque quarrée des distances qu'entant que leurs corps peuvent être regardés comme sphériques, ou que leurs distances sont plusieurs fois plus grandes que leurs diametres.

 C'est

C'eſt la raiſon pour laquelle, quoique la Terre ne ſoit pas ſphérique, il n'en réſulte aucune altération ſenſible à la diſtance de la Lune, qui ſurpaſſe trente fois le diametre de la Terre: or, ſi la Lune n'en étoit éloignée que de deux ou trois diametres, l'altération dans la loi d'attraction cauſeroit un mouvement aſſez ſenſible dans la ligne des abſides, bien que la figure de la Terre differe fort peu d'une ſphere parfaite. Mais le cas de Jupiter avec ſes Satellites eſt bien different, le diametre de ſon équateur étant à l'axe de rotation comme 9 à 8, pendant que dans la Terre ce rapport n'eſt que de 201 à 200; d'où la loi d'attraction de Jupiter doit différer beaucoup plus conſidérablement de la raiſon réciproque quarrée des diſtances, & cela d'autant plus que la diſtance ſera plus petite. Outre cela, les diſtances des Satellites au centre de Jupiter ſont à proportion beaucoup plus petites que celle de la Lune à la Terre, attendu que le premier Satellite n'eſt éloigné du centre de Jupiter que de trois de ſes diametres, & le quatrieme encore moins que de treize. Ces deux circonſtances jointes enſemble cauſeront une aſſez grande altération dans la force attractive de Jupiter pour en produire une très conſidérable dans le mouvement de la ligne des abſides, ſurtout pour le premier Satellite, dont le mouvement devroit être le plus régulier, ſi le corps de Jupiter étoit ſphérique. Voilà donc une nouvelle ſource d'inégalités qu'on découvre dans le mouvement des corps céleſtes, & qu'on ne ſauroit expliquer par l'hypotheſe commune, où l'on ſuppoſe les forces réciproquement proportionelles aux quarrés des diſtances: mais cette même circonſtance ſert à porter le principe de l'attraction univerſelle au plus haut degré de certitude.

5. Pour mettre cela dans tout ſon jour, il faut commencer par chercher la force dont un corps non ſphérique agit ſur un autre corps ſitué à un endroit quelconque, en ſuppoſant que tous les élémens de matiere s'attirent mutuellement en raiſon réciproque quarrée des diſtances. J'ai déjà donné autrefois la ſolution de ce probleme, & ainſi je me contenterai d'en rapporter ici le réſultat. Soit donc I le centre
Planche IX. d'inertie du corps dont nous cherchons la force attractive, & que les
Fig. 5. lignes Aa, Bb, Cc ſoient ſes trois axes principaux, ſelon les princi-

pes

pes de la connoissance mécanique des corps, que j'ai établis dans un Mémoire particulier. Que la lettre M exprime la masse entiere de ce corps, & que les momens d'inertie par rapport aux trois axes principaux respectivement soient Maa, Mbb, Mcc. Soit maintenant une molécule de matiere dans un lieu quelconque Z, où au lieu d'une molécule il est permis de supposer un corps sphérique quelconque, dont le centre soit en Z; & même une autre figure quelconque n'influeroit pas sensiblement sur la force dont ce corps est attiré vers le premier, de sorte que dans la suite ce corps nous puisse représenter les Satellites de Jupiter, pendant que le premier est pris pour le corps de Jupiter. Pour tenir compte du lieu de ce corps, qu'on abaisse de Z au plan formé par les deux axes principaux Aa, Bb la perpendiculaire ZY, & de Y à l'axe Aa prolongé à angles droits la droite YX. Qu'on nomme alors ces trois coordonnées $TX = x$, $XY = y$, & $YZ = z$, & outre cela la distance $IZ = v$, de sorte que $v = \sqrt{(xx + yy + zz)}$. Cela posé, la force dont le corps en I agit sur le corps en Z, se réduit à trois forces appliquées au point Z selon les directions $Z\alpha$, $Z\beta$, $Z\gamma$ paralleles aux trois axes principaux Aa, Bb, Cc, & posant N la masse du corps en Z, ces trois forces ont été trouvées

$$\text{force selon } Z\alpha = \frac{MNx}{v^3}\left(1 + \frac{3aa}{2vv}\left(3 - \frac{5xx}{vv}\right) + \frac{3bb}{2vv}\left(1 - \frac{5yy}{vv}\right) + \frac{3cc}{2vv}\left(1 - \frac{5zz}{vv}\right)\right)$$

$$\text{force selon } Z\beta = \frac{MNy}{v^3}\left(1 + \frac{3bb}{2vv}\left(3 - \frac{5yy}{vv}\right) + \frac{3cc}{2vv}\left(1 - \frac{5zz}{vv}\right) + \frac{3aa}{2vv}\left(1 - \frac{5xx}{vv}\right)\right)$$

$$\text{force selon } Z\gamma = \frac{MNz}{v^3}\left(1 + \frac{3cc}{2vv}\left(3 - \frac{5zz}{vv}\right) + \frac{3aa}{2vv}\left(1 - \frac{5xx}{vv}\right) + \frac{3bb}{2vv}\left(1 - \frac{5yy}{vv}\right)\right).$$

6. Dans

6. Dans ces formules, qu'une approximation a fournies, on ſuppoſe que la diſtance v eſt conſidérablement plus grande que les quantités a, b, c, de ſorte que les termes négligés, qui ſont diviſés par de plus hautes puiſſances de v, ne ſoient d'aucune conſéquence, d'où il ſemble que ces formules pourroient être défectueuſes quand il s'agit des Satellites de Jupiter & ſurtout du premier où la diſtance v n'excede les quantités a, b, c qu'environ $9\frac{1}{2}$ fois. Mais il faut auſſi remarquer que ces mêmes formules ſeroient tout à fait exactes, ſi les trois momens d'inertie Maa, Mbb, Mcc, étoient égaux entr'eux, d'où l'on comprend que plus ces momens approchent de l'égalité, moins ils s'écarteront de la vérité, quand même la diſtance v ne ſeroit pas aſſez conſidérable. Donc, puiſque dans le corps de Jupiter les quantités a, b, c, ne s'écartent pas beaucoup de la raiſon d'égalité, l'erreur de nos formules deviendra tout à fait inſenſible, de ſorte que quand même la diſtance v excéderoit moins de 9 fois les quantités a, b, c, il n'y auroit rien à craindre pour la juſteſſe du calcul.

7. Si tous les trois momens principaux d'inertie du corps de Jupiter étoient inégaux entr'eux, il faudroit pour chaque inſtant connoitre la ſituation des trois axes pricipaux pour y rapporter le lieu du Satellite Z, & partant le mouvement de rotation de Jupiter entreroit dans le calcul. Mais, puiſque l'inégalité de ces momens eſt cauſée par le mouvement de rotation, ſi nous ſuppoſons que Jupiter tourne autour de l'axe CIc, les deux autres axes Aa & Bb ſe trouveront dans le plan de ſon équateur où la force centrifuge étant partout la même, il faut conclure que les momens d'inertie par rapport à ces deux axes Aa & Bb ſont égaux entr'eux, & la même égalité de momens aura auſſi lieu pour tous les axes pris dans le plan de l'équateur. Il n'y aura donc plus de diſtinction entre les axes tirés dans le plan de l'équateur; & partant, pourvu que l'axe de rotation Cc conſerve toujours la même direction, comme on peut le ſuppoſer, le plan de l'équateur déterminé par les axes Aa, Bb ſera fixe, & les lignes Aa & Bb pourront être regardées comme fixes & indépendantes du mouvement

de

de rotation; ce qui nous procure la commodité de rapporter le lieu des Satellites de Jupiter au plan de son équateur, en y prenant à volonté une ligne IA pour fixe, sans aucun égard au mouvement de rotation.

8. Ayant donc pour le corps de Jupiter $aa = bb$, les trois forces dont le Satellite en Z est sollicité seront exprimées ainsi:

$$\text{force selon } Z\alpha = \frac{MNx}{v^3}\left(1 + \frac{3aa}{2vv}\left(4 - \frac{5xx - 5yy}{vv}\right) + \frac{3cc}{2vv}\left(1 - \frac{5zz}{vv}\right)\right)$$

$$\text{force selon } Z\beta = \frac{MNy}{v^3}\left(1 + \frac{3aa}{2vv}\left(4 - \frac{5xx - 5yy}{vv}\right) + \frac{3cc}{2vv}\left(1 - \frac{5zz}{vv}\right)\right)$$

$$\text{force selon } Z\gamma = \frac{MNz}{v^3}\left(1 + \frac{3aa}{2vv}\left(2 - \frac{5xx - 5yy}{vv}\right) + \frac{3cc}{2vv}\left(3 - \frac{5zz}{vv}\right)\right).$$

Or, puisque $xx + yy = vv - zz$, ces formules se réduisent aux suivantes:

$$\text{force selon } Z\alpha = \frac{MNx}{v^3}\left(1 + \frac{3(cc - aa)}{2vv}\left(1 - \frac{5zz}{vv}\right)\right)$$

$$\text{force selon } Z\beta = \frac{MNy}{v^3}\left(1 + \frac{3(cc - aa)}{2vv}\left(1 - \frac{5zz}{vv}\right)\right)$$

$$\text{force selon } Z\gamma = \frac{MNz}{v^3}\left(1 + \frac{3(cc - aa)}{2vv}\left(3 - \frac{5zz}{vv}\right)\right)$$

d'où l'on voit que, si le corps de Jupiter étoit sphérique, ou $cc = aa$,

ces

ces trois forces ſe réuniroient dans une ſeule ſuivant la direction ZI qui ſeroit $= \frac{MN}{vv}$, ou réciproquement proportionelle au quarré de la diſtance, comme on le ſuppoſe ordinairement. Mais il eſt auſſi clair qu'entant que le corps de Jupiter n'eſt pas ſphérique, la force dont il agit ſur les Satellites s'écarte un peu de la raiſon réciproque du quarré des diſtances, & cela d'autant plus que le Satellite en eſt moins éloigné. Or, pour de grandes diſtances, cette aberration s'évanouit entierement.

9. Puiſque cette aberration dépend de l'inégalité des quantités aa & cc, voyons à combien elle peut monter effectivement. Conſidérons donc le corps de Jupiter comme un ſphéroïde applati, & ſoit f la moitié de ſon axe IC, & h le demi-diametre de ſon équateur IA $=$ IB. Cela poſé, *Newton* a conclu par la rapidité du mouvement de rotation que $f : h = 8 : 9$, ou bien $f = \frac{8}{9} h$, en ſuppoſant le corps de Jupiter compoſé d'une matiere homogene. De là, ſi nous cherchons les momens d'inertie, nous trouvons

$$cc = \tfrac{2}{5} hh \quad \& \quad aa = bb = \tfrac{1}{5}(ff + hh)$$

donc
$$cc - aa = \tfrac{1}{5}(hh - ff)$$

& partant $cc - aa = \frac{17}{405} hh$ ou $cc - aa = \frac{1}{24} hh$ à peu près. Or, puiſque h eſt le demi-diametre de l'équateur de Jupiter, il eſt en même tems la meſure des diſtances moyennes des Satellites, & les Aſtronomes ont déterminé ces diſtances de cette ſorte.

Diſtances moyennes au centre de Jupiter:

du premier Satellite	$=$	$5\frac{2}{3} h$
du ſecond Satellite	$=$	$9 h$
du troiſieme Satellite	$=$	$14\frac{1}{3} h$
du quatrieme Satellite	$=$	$25\frac{1}{4} h$.

10. Je

10. Je n'ai pas ici dessein de déterminer exactement le mouvement des Satellites de Jupiter, mais je me propose uniquement d'en rechercher les inégalités qui doivent résulter de la figure non sphérique du corps de Jupiter. Dans cette vue je ne tiendrai compte, ni de la force du Soleil, ni de celle dont les Satellites agissent mutuellement les uns sur les autres: & partant je ne considérerai que les trois forces selon $Z\alpha$, $Z\beta$ & $Z\gamma$, dont chaque Satellite est sollicité par l'attraction de Jupiter. Supposons donc un Satellite quelconque en Z, dont le lieu est déterminé par les trois coordonnées $IX = x$, $XY = y$ & $XZ = z$.

Prenant l'élément du tems dt constant, le mouvement du Satellite sera déterminé par les trois équations suivantes

$$ddx = \frac{-2Mgx\,dt^2}{v^3}\left(1 + \frac{3(cc-aa)}{2vv}\left(1 - \frac{5zz}{vv}\right)\right)$$

$$ddy = \frac{-2Mgy\,dt^2}{v^3}\left(1 + \frac{3(cc-aa)}{2vv}\left(1 - \frac{5zz}{vv}\right)\right)$$

$$ddz = \frac{-2Mgz\,dt^2}{v^3}\left(1 + \frac{3(cc-aa)}{2vv}\left(3 - \frac{5zz}{vv}\right)\right)$$

où il faut remarquer que g est une telle constante que, si nous supposons la masse du Soleil $= L$, la distance moyenne de la Terre au Soleil $= e$, & l'angle que la Terre décrit autour du Soleil pendant le tems dt par son mouvement moyen $= d\zeta$, on aura $2g\,dt^2 = \frac{e^3 d\zeta^2}{L}$.

11. Donc, si au lieu de l'élément du tems dt, nous introduisons dans le calcul le mouvement moyen du Soleil $d\zeta$ qui répond à ce tems, & que nous posions le rapport de la masse de Jupiter M à celle du Soleil L comme 1 à n, nous aurons $M = nL$ & $2Mg\,dt^2 = ne^3 d\zeta^2$; nos équations differentio-différentielles pour le mouvement du Satellite seront:

ddx

$$ddx = \frac{-ne^3xd\zeta^2}{v^3}\left(1 + \frac{3(cc-aa)}{2vv}\left(1 - \frac{5zz}{vv}\right)\right)$$

$$ddy = \frac{-ne^3yd\zeta^2}{v^3}\left(1 + \frac{3(cc-aa)}{2vv}\left(1 - \frac{5zz}{vv}\right)\right)$$

$$ddz = \frac{-ne^3zd\zeta^2}{v^3}\left(1 + \frac{3(cc-aa)}{2vv}\left(3 - \frac{5zz}{vv}\right)\right).$$

Ou bien on pourra auſſi réduire ces déterminations au mouvement moyen du même Satellite, en poſant $n = 1$, & prenant e égale à la diſtance moyenne du Satellite au centre de Jupiter: alors ζ marquera l'angle décrit par le mouvement moyen, pendant un tems propoſé: & il faut ſe ſouvenir que le tems périodique de chaque Satellite qui répond à $\zeta = 360°$ eſt

pour le I. Satellite	=	$1^j, 18^h, 27', 34''$
pour le II. Satellite	=	$3^j, 13^h, 13', 42''$
pour le III. Satellite	=	$7^j, 3^h, 42', 36''$
pour le IV. Satellite	=	$16^j, 16^h, 32', 9''$.

12. Le cas le plus aiſé à réſoudre eſt ſans doute lorſque le Satellite ſe meut dans le plan de l'équateur de Jupiter, ou qu'il ſe trouve en Y. Alors, puiſque $z = 0$, nous aurons ces deux équations:

$$ddx = \frac{-ne^3xd\zeta^2}{v^3}\left(1 + \frac{3(cc-aa)}{2vv}\right)$$

$$ddy = \frac{-ne^3yd\zeta^2}{v^3}\left(1 + \frac{3(cc-aa)}{2vv}\right)$$

où $vv = xx + yy$. De là nous tirons premierement

$yddx - xddy = 0$ & partant $ydx + xdy = -Cd\zeta$.

Enſuite, à cauſe de $xdx + ydy = vdv$,

$$2dxddx + 2dyddy = \frac{-2ne^3dvd\zeta^2}{vv}\left(1 + \frac{3(cc-aa)}{2vv}\right)$$

dont

dont l'intégration fournit

$$\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 = 2ne^3\mathrm{d}\zeta^2\left(\mathrm{D} + \frac{1}{v} + \frac{(cc - aa)}{2v^3}\right).$$

Soit l'angle XIY $= \phi$ pour avoir $x = v \operatorname{cof} \phi$ & $y = v \operatorname{fin} \phi$ & partant $\mathrm{d}x = \mathrm{d}v \operatorname{cof}\phi - v\mathrm{d}\phi\, \mathrm{f}\phi$ & $\mathrm{d}y = \mathrm{d}v\, \mathrm{f}\phi + v\mathrm{d}\phi \operatorname{cof}\phi$; cette ſubſtitution nous conduit à ces deux équations

$$-vv\mathrm{d}\phi = -\mathrm{C}\mathrm{d}\zeta \text{ \& } \mathrm{d}v^2 + vv\mathrm{d}\phi^2 = 2ne^3\mathrm{d}\zeta^2\left(\mathrm{D} + \frac{1}{v} + \frac{cc-aa}{2v^3}\right).$$

Poſons $\mathrm{C} = \sqrt{2ne^3\mathrm{E}}$ pour avoir $\mathrm{d}\zeta = \frac{vv\mathrm{d}\phi}{\sqrt{2ne^3\mathrm{E}}}$, & de là

$$\mathrm{d}v^2 + vv\mathrm{d}\phi^2 = \frac{v^4\mathrm{d}\phi^2}{\mathrm{E}}\left(\mathrm{D} + \frac{1}{v} + \frac{cc - aa}{2v^3}\right), \text{ ou}$$

$$\frac{\mathrm{d}v^2}{v^4} = \frac{\mathrm{d}\phi^2}{\mathrm{E}}\left(\mathrm{D} + \frac{1}{v} - \frac{\mathrm{E}}{vv} + \frac{cc - aa}{2v^3}\right).$$

13. Introduiſons l'anomalie vraie, qui ſoit $= s$, & poſons $v = \frac{p}{1 + q \operatorname{cof} s}$, où par la nature de l'anomalie l'élément dv doit s'évanouir en poſant tant $s = 0$ que $s = 180°$. Cette double condition donne

$$\mathrm{D} + \frac{1 + q}{p} - \frac{\mathrm{E}(1 + q)^2}{pp} + \frac{(cc-aa)(1+q)^3}{2p^3} = 0 \text{ \&}$$

$$\mathrm{D} + \frac{1 - q}{p} - \frac{\mathrm{E}(1 + q)^2}{pp} + \frac{(cc-aa)(1-q)^3}{2p^3} = 0$$

& en prenant tant la différence que la ſomme

$$\frac{2q}{p} - \frac{4\mathrm{E}q}{pp} + \frac{(cc - aa)(6q + 2q^3)}{2p^3} = 0$$

$$2D + \frac{2}{p} - \frac{2E(1+qq)}{pp} + \frac{(cc-aa)(1+3qq)}{p^3} = 0.$$

Au lieu de chercher de là les quantités p & q, déterminons en plutôt les constantes D & E, que nous trouverons

$$E = \tfrac{1}{2}p + \frac{(cc-aa)(3+qq)}{4p} \quad \&$$

$$D = -\frac{1+qq}{2p} + \frac{(cc-aa)(1-qq)^2}{4p^3}.$$

Par ces substitutions notre équation prendra cette forme

$$\frac{dv^2}{v^4} = \frac{d\Phi^2}{E} \cdot \frac{qq \sin s^2}{2p}\left(1 + \frac{cc-aa}{2pp}(-3-2q\cos s + qq)\right)$$

donc $\frac{dv}{vv} = \frac{q\,d\Phi \sin s}{\sqrt{2Ep}} \sqrt{\left(1 - \frac{(cc-aa)(3+2q\cos s - qq)}{2pp}\right)}$

& $d\zeta = \frac{vv\,d\Phi}{\sqrt{2ne^3E}}$ ou $d\Phi = \frac{d\zeta\sqrt{2ne^3E}}{vv}$.

14. De là il est clair que les quantités p & q sont constantes, dont celle-là marque le demi-parametre de l'orbite & celle-ci l'excentricité. Donc, puisque $\frac{dv}{vv} = \frac{q\,ds \sin s}{p}$, nous aurons

$$ds = \frac{p\,d\Phi}{\sqrt{2Ep}}\sqrt{\left(1 - \frac{(cc-aa)(3+2q\cos s - qq)}{2pp}\right)}, \quad \text{ou bien}$$

$$d\Phi = \frac{ds\sqrt{(pp + \frac{1}{2}(cc-aa)(3+qq))}}{\sqrt{(pp - \frac{1}{2}(cc-aa)(3+2q\cos s - qq))}}.$$

Or nous avons vu que $cc - aa = \frac{1}{214}hh$, prenant h pour le demi-diametre de l'équateur de Jupiter, & partant nous aurons assez exactement

$$d\Phi = ds\left(1 + \frac{(cc-aa)(3+q\cos s)}{2pp}\right)$$

d'où

d'où nous tirons par l'intégration

$$\Phi = \text{Conſt.} + \left(1 + \frac{3(cc - aa)}{2pp}\right)s + \frac{(cc - aa)\, q \sin s}{2pp}.$$

Suppoſons que le Satellite ait paſſé par l'endroit où il eſt le plus proche de Jupiter; il s'en éloignera le plus qu'il eſt poſſible après avoir parcouru l'angle $\Phi = \left(1 + \frac{3(cc - aa)}{2pp}\right) 180°$, & il ne retournera à l'endroit le plus proche qu'après avoir parcouru l'angle $= \left(1 + \frac{3(cc - aa)}{2pp}\right) 360°$.

15. Ici il faut conſidérer que $\Phi - s$ exprime la longitude de la ligne des abſides, de ſorte que nous ayons en regardant ſeulement le mouvement moyen

$$\Phi - s = \text{Conſt.} + \frac{3(cc - aa)}{2pp}\, s$$

ou

$$\Phi - s = \text{Conſt.} + \frac{3(cc - aa)}{2pp + 3(cc - aa)}\, \Phi.$$

Donc, pendant une révolution entiere du Satellite, où $\Phi = 360°$, les abſides avanceront par un angle

$$\text{qui eſt } = \frac{3(cc - aa)}{2pp + 3(cc - aa)}\, 360°,$$

& poſant maintenant $cc - aa = \frac{1}{12} hh$, cet avancement périodique ſera $= \frac{hh}{8pp + hh} \cdot 360°$, où p exprime à peu près la diſtance moyenne du Satellite au centre de Jupiter.

16. Appliquons cette formule à chaque Satellite ſéparément, & pour le premier Satellite ayant $p = 5\frac{2}{3}h$ & partant $8pp =$

$257hh$, ses absides avanceront pendant chaque révolution ou dans l'espace de $1^j. 18^h, 27', 34''$, par l'angle

$$\tfrac{1}{258} \cdot 360^\circ = 1^\circ. 23', 48''$$

d'où l'on conclut le mouvement pour un an entier de 288°.

Pour le second Satellite ayant $p = 9h$ & $8pp = 648hh$, ses absides avanceront pendant chaque révolution, ou dans l'espace de $3^j. 13^h, 13', 42''$, par l'angle

$$\tfrac{1}{649} \cdot 360^\circ = 33', 17''$$

& partant pendant un an entier par $57^\circ, 3'$.

Pour le troisieme Satellite nous avons $p = 14\tfrac{1}{3}h$, donc $8pp = 1643$, & partant ses absides avanceront pendant chaque révolution, qui est de $7^j, 3^h, 42', 36''$, par l'angle

$$\tfrac{1}{1644} \cdot 360^\circ = 13', 8''$$

& partant pendant un an entier par $11^\circ. 10'$.

Pour le quatrieme Satellite ayant $p = 25\tfrac{1}{4}h$, & $8pp = 5100$, ses absides avanceront pendant chaque révolution, qui est de $16^j, 16^h, 32', 9''$, par l'angle

$$\tfrac{1}{5101} \cdot 360^\circ = 4', 14''$$

donc pendant un an entier par $1^\circ, 32', 40''$.

17. Quoique nous n'ayons pas assez de certitude sur le degré d'applatissement du corps de Jupiter, & qu'une petite erreur puisse très considérablement altérer ces déterminations, il est toujours certain que le mouvement des absides, qui est produit par cette cause, doit être très rapide, surtout pour le premier Satellite, dont les absides avancent chaque année par 288°. Cette rapidité devroit produire un effet bien étrange, si l'orbite de ce Satellite n'étoit pas à peu près circulaire, car, dans le cas où l'orbite est circulaire, ou $q = 0$, le mouvement ne laisse pas d'être uniforme, tout comme dans l'hypothese ordi-

ordinaire, & l'applatiſſement du corps de Jupiter n'y produira aucun dérangement. Mais dès que l'orbite d'un Satellite a une excentricité aſſez conſidérable, ce mouvement des abſides doit cauſer de grandes irrégularités dans le mouvement du Satellite, & on n'en ſauroit calculer les apparitions, à moins qu'on n'ait une exacte connoiſſance de cet élément. Il eſt auſſi bien remarquable que ce mouvement des abſides diminue ſi ſubitement pour de plus grandes diſtances, de ſorte que s'il y avoit un Satellite éloigné du centre de Jupiter de 60 demi-diametres, le mouvement des abſides ſeroit preſque imperceptible, au lieu que les autres cauſes qui font avancer les abſides produiſent un effet tout à fait contraire.

18. Mais voyons auſſi comment le vrai lieu du Satellite peut être déterminé; pour cet effet on n'a qu'à chercher l'anomalie vraie s pour un tems propoſé quelconque, & indiqué par l'angle ζ qui lui eſt proportionnel. Or ayant trouvé

$$d\Phi = \frac{d\zeta\sqrt{2ne^3E}}{vv} = \frac{d\zeta(1+q\cos s)^2\sqrt{ne^3}(pp+\frac{1}{2}(cc-aa)(3+qq))}{pp\sqrt{p}}$$

& auſſi $d\Phi = \dfrac{ds\sqrt{(pp+\frac{1}{2}(cc-aa)(3+qq))}}{\sqrt{(pp-\frac{1}{2}(cc-aa)(3+2q\cos s-qq))}}$

le rapport entre ζ & s ſera exprimé par cette équation

$$d\zeta = \frac{pp\sqrt{p}}{\sqrt{ne^3}} \cdot \frac{ds}{(1+q\cos s)^2\sqrt{(pp-\frac{1}{2}(cc-aa)(3+2q\cos s-qq))}}$$

laquelle, à cauſe de $cc-aa$ très petit par rapport à pp, ſe réduit à

$$d\zeta = \frac{\sqrt{p^3}}{\sqrt{ne^3}} \cdot \frac{ds}{(1+q\cos s)^2}\left(1+\frac{(cc-aa)(3+2q\cos s-qq)}{4pp}\right)$$

pour l'équation de laquelle on a

$$\int\frac{ds}{(1+q\cos s)^2} = \frac{1}{(1-qq)^{\frac{3}{2}}}\,A\,n\cos\frac{q+\cos s}{1+q\cos s} - \frac{q\sin s}{(1+qq)(1+q\cos s)}\ \&$$

$$\int \frac{ds \cos s}{(1+q\cos s)^2} = \frac{\sin s}{(1-qq)(1+q\cos s)} - \frac{q}{(1-qq)^{\frac{3}{2}}} \mathrm{A}\,n \cos \frac{q+\cos s}{1+q\cos s}$$

d'où l'on trouve

$$\zeta \sqrt{\frac{ne^3}{p^3}} = \mathrm{Const.} + \frac{1}{(1-qq)^{\frac{3}{2}}} \mathrm{A}\,n \cos \frac{q+\cos s}{1+q\cos s} - \frac{q \sin s}{(1-qq)(1+q\,c.\,s)}$$

$$+ \frac{3(cc-aa)}{4pp\sqrt{(1-qq)}} \mathrm{A}\,n \cos \frac{q+\cos s}{1+q\cos s} - \frac{(cc-aa)q\sin s}{\mathrm{A}pp(1+q\,c.\,s)}.$$

Ensuite posant la longitude de l'abside pour le tems proposé $= \eta$, on aura la longitude du Satellite

$$\Phi = \eta + s + \frac{(cc-aa)\,q\,\sin s}{2pp}.$$

19. Puisque l'excentricité q est très petite, le calcul se fait plus commodément par approximation. Ayant donc

$$\frac{1}{(1+q\cos s)^2} = \frac{1}{(1-qq)^{\frac{3}{2}}}\left(1 - 2q\cos s + \tfrac{3}{2}qq\cos 2s - q^3\cos 3s\right).$$

Si nous posons $\frac{p}{1-qq} = r$, de sorte que r signifie le demi-axe de l'orbite, & pour abréger $\frac{cc-aa}{4pp} = m$, nous aurons

$$d\zeta = \frac{\sqrt{r^3}}{\sqrt{ne^3}}\,.\,ds \begin{cases} 1 - 2q\cos s + \tfrac{3}{2}qq\cos 2s - q^3\cos 3s \\ +m(3-qq) - 2mq(3-qq)c.s + \tfrac{3}{2}mqq\,c.\,2s - 3mq^3\,c.\,3s \\ -2mqq + 2mq\cos s - 2mqq\,c.\,2s + \tfrac{3}{2}mq^3\,c.\,3s \\ + \tfrac{3}{2}mq^3\cos s \end{cases}$$

ou bien

$$d\zeta\sqrt{\frac{ne^3}{r^3}} = ds\left(\begin{matrix} 1+3m(1-qq) - 2q\cos s + \tfrac{3}{2}qq\cos 2s - q^3\cos 3s \\ -4mq(1-\tfrac{7}{8}qq)c.s + \tfrac{3}{4}mqq\,c.\,2s - \tfrac{3}{2}mq^3 c.3s \end{matrix}\right)$$

donc

donc prenant les intégrales

$$\zeta \sqrt{\frac{ne^3}{r^3}} = s(1+3m(1-qq)) - 2q \sin s + \tfrac{3}{4}qq \sin 2s - \tfrac{1}{3}q^3 \sin 3s$$
$$- 4mq \sin s + \tfrac{5}{4}mqq \sin 2s - \tfrac{1}{2}mq^3 \sin 3s$$

ou bien à peu près

$$\frac{\zeta}{1+3m}\sqrt{\frac{ne^3}{r^3}} = s - \frac{2(1+2m)}{1+3m} q \sin s + \frac{(3+5m)}{4(1+3m)} qq \sin 2s - \frac{(2+3m)}{6(1+3m)} q^3 \sin 3s$$

ou $\frac{\zeta}{1+3m}\sqrt{\frac{ne^3}{r^3}}$ peut être regardée comme l'anomalie moyenne, qui croît uniformément avec le tems; si nous la posons $= \tau$ nous aurons:

$$\tau = s - \frac{2(1+2m)}{1+3m} q \sin s + \frac{(3+5m)}{4(1+3m)} qq \sin 2s - \frac{(2+3m)}{6(1+3m)} q^3 \sin 3s$$

d'où l'on connoit l'anomalie vraie s, qui convient à la moyenne τ, l'équation du centre étant

$$\frac{2(1+2m)}{1+3m} q \sin s - \frac{(3+5m)}{4(1+3m)} qq \sin 2s + \frac{(2+3m)}{6(1+3m)} q^3 \sin 3s$$

& $s = \tau +$ Equation du centre.

Ensuite on aura

$$\Phi = \eta + \tau + \text{Equation du centre} + 2mq \sin s$$

où $\eta + \tau$ marque la longitude moyenne & Φ la vraie. Enfin la distance du Satellite au centre de Jupiter est $v = \frac{p}{1 + q \cos s}$.

20. Jusqu'ici j'ai supposé que le Satellite se meuve exactement dans le plan de l'équateur de Jupiter; je m'en vai donc aussi déterminer les dérangemens qui proviennent de la figure applatie du corps

corps de Jupiter, lorſque l'orbite du Satellite eſt inclinée au plan de l'équateur de Jupiter, ou lorſque la coordonnée z n'eſt pas évanouiſſante. Pour ce cas nous n'avons qu'à conſidérer les trois équations différentio-différentielles rapportées au §. 11. d'où nous tirons dabord en les combinant ces équations:

$$\text{I. } y\,ddx - x\,ddy = 0;$$

$$\text{II. } z\,ddy - y\,ddz = \frac{3n(cc-aa)e^3 d\zeta^2}{v^5}\,.\,yz;$$

$$\text{III. } z\,ddx - x\,ddz = \frac{3n(cc-aa)e^3 d\zeta^2}{v^5}\,.\,xz,$$

& encore celle-ci:

$$2dx\,ddx + 2dy\,ddy + 2dz\,ddz = -2ne^3 d\zeta^2\left(\frac{dv}{vv} + \frac{3(cc-aa)dv}{2v^4} + \tfrac{3}{2}(cc-aa)\left(\frac{2z\,dz}{v^5} - \frac{5zz\,dv}{v^6}\right)\right),$$

qui donne par l'intégration:

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = 2ne^3 d\zeta^2\left(C + \frac{1}{v} + \frac{cc-aa}{2v^3} - \frac{3(cc-aa)zz}{2v^5}\right).$$

21. Pour ramener ces quantités aux élémens dont on ſe ſert
Fig. 6. en Aſtronomie, ſoit Zz l'eſpace que le Satellite parcourt dans le tems dt, auquel répond l'angle $d\zeta$, & on aura $Zz^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$. Or ayant $Iz = v + dv$, ſi nous poſons l'angle élémentaire $ZIz = d\Phi$, nous aurons auſſi $Zz^2 = dv^2 + vv\,d\Phi^2$, d'où notre derniere équation prendra cette forme:

$$dv^2 + vv\,d\Phi^2 = 2ne^3 d\zeta^2\left(C + \frac{1}{v} + \frac{cc-aa}{2v^3} - \frac{3(cc-aa)zz}{2v^5}\right).$$

Que le plan ZIz, dans lequel le Satellite ſe meut actuellement, coupe le plan de l'équateur de Jupiter par la droite IN qui ſera la ligne des nœuds, dont la longitude ſoit ou l'angle $XIN = \psi$, l'inclinaiſon $= \omega$,

$= \omega$, & l'angle NIZ $= u$, qui ſera l'argument de latitude. Qu'on tire de Z & Y à la ligne IN les perpendiculaires ZN & YN, & l'angle ZNY ſera égal à l'inclinaiſon ω. Donc, ayant tiré du triangle ZIN les lignes $\mathrm{IN} = v \cos u$, & $\mathrm{ZN} = v \sin u$, nous aurons $\mathrm{YN} = v \sin u \cos \omega$ & $\mathrm{ZY} = v \sin u \sin \omega = z$. Enſuite l'angle $\mathrm{XIN} = \psi = \mathrm{XYN}$ fournit

$$\mathrm{IX} = x = v \cos u \cos \psi - v \sin u \cos \omega \sin \psi \quad \&$$
$$\mathrm{XY} = y = v \cos u \sin \psi + v \sin u \cos \omega \cos \psi.$$

22. Puiſque la différentiation tranſporte le point Z en z, il eſt clair qu'on doit trouver les mêmes valeurs des différentiels $\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}y$ & $\mathrm{d}z$, ſoit qu'on regarde la ligne des nœuds IN avec l'inclinaiſon comme conſtantes, ſoit qu'on tienne compte de leur variabilité. Or, en conſidérant les angles ψ & ω comme conſtans, l'angle $\mathrm{NIZ} = u$ croit de l'angle $\mathrm{ZI}z = \mathrm{d}\Phi$, de ſorte que dans ce cas il faut mettre $\mathrm{d}u = \mathrm{d}\Phi$, & partant nous aurons:

$$\mathrm{d}z = \mathrm{d}v \sin u \sin \omega + v\,\mathrm{d}\Phi \cos u \sin \omega = \frac{z\,\mathrm{d}v}{v} + v\,\mathrm{d}\Phi \cos u \sin \omega$$

$$\mathrm{d}x = \frac{x\,\mathrm{d}v}{v} - v\,\mathrm{d}\Phi\,(\sin u \cos \psi - \cos u \cos \omega \sin \psi)$$

$$\mathrm{d}y = \frac{y\,\mathrm{d}v}{v} - v\,\mathrm{d}\Phi\,(\sin u \sin \psi - \cos u \cos \omega \cos \psi).$$

De là nous tirons

$$y\,\mathrm{d}x - x\,\mathrm{d}y = -vv\,\mathrm{d}\Phi \cos \omega \quad \text{ou} \quad x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x = vv\,\mathrm{d}\Phi \cos \omega$$
$$z\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}z = -vv\,\mathrm{d}\Phi \sin \omega \sin \psi \quad \text{ou} \quad y\,\mathrm{d}z - z\,\mathrm{d}y = vv\,\mathrm{d}\Phi \sin \omega \sin \psi$$
$$z\,\mathrm{d}x - x\,\mathrm{d}z = -vv\,\mathrm{d}\Phi \sin \omega \cos \psi \quad \text{ou} \quad x\,\mathrm{d}z - z\,\mathrm{d}x = vv\,\mathrm{d}\Phi \sin \omega \cos \psi.$$

23. Si nous ſubſtituons ces valeurs dans nos équations précédentes, nous trouverons:

I. $\mathrm{d}.(vv\,\mathrm{d}\Phi \cos \omega) = 0$

II. $d.(vv d\Phi \sin\omega \sin\psi) = -\frac{3n(cc-aa)e^3 d\zeta^2}{v^3} \sin u\, s\omega (\cos u\, s\psi +$
$\sin u \cos\omega \cos\psi)$

III. $d.(vv d\Phi \sin\omega \cos\psi) = -\frac{3n(cc-aa)e^3 d\zeta^2}{v^3} \sin u\, s\omega (\cos u\, c.\psi -$
$\sin u \cos\omega \sin\psi)$

dont les deux dernieres donnent par leur combinaiſon

$$d.(vv d\Phi \sin\omega) = -\frac{3n(cc-aa)e^3 d\zeta^2}{v^3} \sin u \cos u\, s\omega$$

$$\& \quad vv d\Phi\, d\psi \sin\omega = -\frac{3n(cc-aa)e^3 d\zeta^2}{v^3} \sin u^2 \sin\omega \cos\omega.$$

Or celle-là étant combinée avec la premiere donne

$$d.(vv d\Phi) = -\frac{3n(cc-aa)e^3 d\zeta^2}{v^3} \sin u \cos u \sin\omega^2$$

$$\& \quad vv d\Phi\, d\omega = -\frac{3n(cc-aa)e^3 d\zeta^2}{v^3} \sin u \cos u \sin\omega \cos\omega$$

de ſorte que

$$d\psi = -\frac{3n(cc-aa)e^3 d\zeta^2 \sin u^2 \cos\omega}{v^5 d\Phi}$$

$$\& \quad d\omega = -\frac{3n(cc-aa)e^3 d\zeta^2 \sin u \cos u \sin\omega \cos\omega}{v^5 d\Phi}.$$

Mais l'équation déjà une fois intégrée fournit

$$dv^2 + vv d\Phi^2 = 2ne^3 d\zeta^2 \left(C + \frac{1}{v} + \frac{cc-aa}{2v^3}(1 - 3\, su^2\, s\omega^2)\right).$$

24. Or, ſi nous tenons compte de la variabilité des angles ψ & & ω, où du n'eſt plus égal à $d\Phi$, il faut que les mêmes valeurs pour dx, dy & dz en réſultent. Trouvant donc

$$dz = dv\, su\, s\omega + v du \cos u\, s\omega + v d\omega\, su \cos\omega$$

puiſ-

puiſque $\mathrm{d}z = \mathrm{d}v\,ſu\,ſ\omega + v\,\mathrm{d}\Phi \cos u\,ſ\omega$, nous en concluons

$$\mathrm{d}\Phi = \mathrm{d}u + \frac{\mathrm{d}\omega \sin u \cos\omega}{\cos u \sin\omega}.$$

En comparant de la même maniere les différentiels $\mathrm{d}x$ & $\mathrm{d}y$ avec les valeurs précédentes, nous obtiendrons

$$(\mathrm{d}\Phi - \mathrm{d}u)(ſu \cos\psi + \cos u \cos\omega\,ſ\psi) - \mathrm{d}\psi(\cos u\,ſ\psi + ſu \cos\omega\, c.\psi)$$
$$+ \mathrm{d}\omega \sin u \sin\omega \sin\psi = 0$$
$$(\mathrm{d}\Phi - \mathrm{d}u)(\sin u\,ſ\psi - \cos u \cos\omega\, c.\psi) - \mathrm{d}\psi(\cos u\, c.\psi - ſu \cos\omega\,ſ\psi)$$
$$- \mathrm{d}\omega \sin u \sin\omega \cos\psi = 0.$$

Donc, puiſque $\mathrm{d}\Phi - \mathrm{d}u = \dfrac{\mathrm{d}\omega\,ſu \cos\omega}{\cos u\,ſ\omega}$, l'une & l'autre donne

$$\mathrm{d}\psi = \frac{\mathrm{d}\omega \sin u}{\cos u\,ſ\omega}, \quad \text{donc } \mathrm{d}\Phi = \mathrm{d}u + \mathrm{d}\psi \cos\omega$$

& c'eſt le même rapport qui a été trouvé dans l'article précédent.

25. Conſidérons l'équation $\mathrm{d}.(vv\,\mathrm{d}\Phi) = \cdot\cdot\cdot$ qui étant multipliée par $2vv\,\mathrm{d}\Phi$ & intégrée donne:

$$v^4 \mathrm{d}\Phi^2 = 2ne^3 \mathrm{d}\zeta^2 \left(D - 3(cc - aa)\int \frac{\mathrm{d}\Phi}{v} \sin u \cos u \sin\omega^2\right)$$

ou poſant pour abréger $\int \frac{\mathrm{d}\Phi}{v} \sin u \cos u \sin\omega^2 = P$, & $cc - aa = mhh$, où la valeur de m eſt environ $\frac{1}{11}$, prenant h pour le demi-diametre de l'équateur de Jupiter, nous aurons

$$v^4 \mathrm{d}\Phi^2 = 2ne^3 \mathrm{d}\zeta^2 (D - 3mhhP)$$

& partant l'équation intégrale:

$$\mathrm{d}v^2 = 2ne^3 \mathrm{d}\zeta^2 \left(C + \frac{1}{v} - \frac{(D - 3mhhP)}{vv} + \frac{mhh(1 - 3\,ſu^2\,ſ\omega^2)}{2v^3}\right).$$

Posons maintenant $v = \frac{p}{1 + q \operatorname{cof} s}$, de sorte que s soit l'anomalie vraie, & cette circonstance nous fournit ces deux équations

$$C + \frac{1+q}{p} - \frac{(D - 3mhhP)(1+q)^2}{pp} + \frac{mhh(1 - 3\,\mathrm{f}u^2\,\mathrm{f}\omega^2)(1+q)^3}{2p^3} = 0$$

$$C + \frac{1-q}{p} - \frac{(D - 3mhhP)(1-q)^2}{pp} + \frac{mhh(1 - 3\,\mathrm{f}u^2\,\mathrm{f}\omega^2)(1-q)^3}{2p^3} = 0$$

d'où nous tirons:

$$\frac{2q}{p} - \frac{4q(D - 3mhhP)}{pp} + \frac{mhh(1 - 3\,\mathrm{f}u^2\,\mathrm{f}\omega^2)\,q\,(3+qq)}{p^3} = 0$$

& partant $D - 3mhhP = \frac{1}{2}p + \frac{mhh(1 - 3\,\mathrm{f}u^2\,\mathrm{f}\omega^2)(3+qq)}{4p}$.

Ensuite, puisque

$$C + \frac{1}{p} - \frac{(D - 3mhhP)(1+qq)}{pp} + \frac{mhh(1 - 3\,\mathrm{f}u^2\,\mathrm{f}\omega^2)(1+3qq)}{2p^3} = 0$$

nous aurons

$$C = -\frac{(1-qq)}{2p} + \frac{mhh(1-qq)^2(1 - 3 \sin u^2 \sin \omega^2)}{4p^3}.$$

26. Ces valeurs étant substituées produisent

$$dv^2 = 2ne^3 d\zeta^2 \left(\frac{qq\,\mathrm{f}s^2}{2p} - \frac{mhh(1 - 3\,\mathrm{f}u^2\,\mathrm{f}\omega^2)}{4p^3}(3qq\,\mathrm{f}s^2 + 2q^3\,\mathrm{f}s^2 \operatorname{cof} s - q^4\,\mathrm{f}s^2)\right)$$

ou bien

$$dv^2 = \frac{ne^3 qq\, d\zeta^2\, \mathrm{f}s^2}{p}\left(1 - \frac{mhh(1 - 3\,\mathrm{f}u^2\,\mathrm{f}\omega^2)}{2pp}(3 + 2q\,\mathrm{c}.s - qq)\right)$$

& par ce que j'ai montré ci-dessus:

$$d\Phi^2 = \frac{ne^3 d\zeta^2}{v^4}\left(p + \frac{mhh(1 - 3\,\mathrm{f}u^2\,\mathrm{f}\omega^2)(3+qq)}{2p}\right)$$

donc:

donc:

$$dv = \frac{q\,d\zeta\,\sin s}{p}\sqrt{ne^3}\left(p - \frac{mhh(1-3\sin u^2\sin\omega^2)(3+2q\,c.s-qq)}{2p}\right) \text{ ou}$$

$$\frac{dv}{vv} = \frac{q\,d\Phi\,\sin s}{p}\sqrt{\frac{2pp - mhh(1-3\sin u^2\sin\omega^2)(3+2q\cos s-qq)}{2pp + mhh(1-3\sin u^2\sin\omega^2)(3+qq)}} \quad \&$$

$$d\zeta\sqrt{ne^3} = \frac{vv\,d\Phi\sqrt{2p}}{\sqrt{(2pp + mhh(1-3\sin u^2\sin\omega^2)(3+qq))}}.$$

27. La différentiation des quantités constantes D & C donne:

$$-\frac{3mhh\,d\Phi\sin u\cos u\sin\omega^2}{v} = \tfrac{1}{2}dp + \tfrac{1}{4}mhh(1-3\sin u^2\sin\omega^2)d.\frac{3+qq}{p} - \frac{3mhh\,d\Phi\sin u\cos u\sin\omega^2}{2p}(3+qq)$$

ou bien

$$3mhh\,d\Phi\sin u\cos u\sin\omega^2.\frac{1-2q\cos s+qq}{p} = dp + \tfrac{1}{2}mhh(1 - 3\sin u^2\sin\omega^2)\,d.\frac{3+qq}{p}$$

& ensuite celle de C:

$$-d.\frac{1-qq}{p} + \tfrac{1}{2}mhh(1-3\sin u^2\sin\omega^2)\,d.\frac{(1-qq)^2}{p^3} - \frac{3mhh(1-qq)^2\,d\Phi\sin u\cos u\sin\omega^2}{p^3} = 0$$

d'où l'on pourroit déterminer tant dp que dq par l'élément $d\Phi$. Mais, puisque les quantités p & q sont fort peu variables, devenant même constantes si $\omega = 0$, on aura assez exactement:

$$p\,dp = 3mhh\,d\Phi(1 - 2q\cos s + qq)\sin u\cos u\sin\omega^2$$

& posant le demi-axe $\frac{p}{1 - qq} = r$

$$\frac{dr}{rr} = \frac{3mhh\,d\Phi \sin u \cos u \sin \omega^2}{prr} \quad \text{ou bien}$$

$$p\,dr = 3mhh\,d\Phi \sin u \cos u \sin \omega^2.$$

Or $2rq\,dq = dr(1 - qq) - dp$, d'où nous trouverons

$$pr\,dq = 3mhh\,d\Phi (\cos s - q) \sin u \cos u \sin \omega^2.$$

28. Ensuite, puisque $\frac{1}{v} = \frac{1 + q \cos s}{p}$, nous aurons

$$\frac{dv}{vv} = \frac{dp(1 + q \cos s)}{pp} - \frac{dq \cos s}{p} + \frac{q\,ds\,\mathrm{s}s}{p}, \text{ \& partant}$$

$$\frac{dv}{vv} = \frac{q\,ds \sin s}{p} + \frac{3mhh\,d\Phi (1 + qq)\,\mathrm{s}u \cos u\,\mathrm{s}\omega^2\,\mathrm{s}s^2}{p^3}.$$

Or la valeur de $\frac{dv}{vv}$ trouvée ci-dessus se réduit à cette forme

$$\frac{dv}{vv} = \frac{q\,d\Phi \sin s}{p}\left(1 - \frac{mhh(3 + q \cos s)\,(1 - 3\,\mathrm{s}u^2\,\mathrm{s}\omega^2)}{2pp}\right)$$

ce qui donne

$$ds = d\Phi - \frac{mhh(3 + q \cos s)\,(1 - 3 \sin u^2\,\mathrm{s}\omega^2)}{2pp}\,d\Phi - \frac{3mhh(1 + qq) \sin u \cos u\,\mathrm{s}\omega^2\,\mathrm{s}s}{ppq}\,d\Phi.$$

Enfin, en négligeant les petits termes, & en substituant pour $ue^3 d\zeta^2$ sa valeur, nous aurons

$$d\psi = \frac{-3mhh(1 + q \cos s)}{pp}\,d\Phi \sin u^2 \cos \omega \quad \&$$

dω

$$d\omega = +\frac{d\psi\, \mathrm{f}\omega}{\mathrm{tag}\, u} = \frac{-3mhh(1+q\, \mathrm{cof}\, s)}{pp}\, d\phi\, \mathrm{f}u\, \mathrm{cof}\, u\, \mathrm{f}\omega\, \mathrm{cof}\, \omega$$

& $du = d\phi + d\psi\, \mathrm{cof}\, \omega$

de forte que les différentiels de tous nos élémens sont déterminés par $d\phi$.

29. On peut parvenir à d'autres solutions dont la plus simple paroit être celle qu'on tire de l'équation

$d.(vv\, d\phi\, \mathrm{cof}\,\omega) = 0$, qui donne $v^4 d\phi^2 \mathrm{cof}\,\omega^2 = 2ne^3 E\, d\zeta^2$

& partant $vv\, d\phi^2 = \frac{2ne^3 E\, d\zeta^2}{vv\, \mathrm{cof}\,\omega^2}$, sans qu'on ait besoin d'une quantité intégrale. Or cette formule ne sauroit avoir lieu quand l'inclinaison ω approche fort d'un angle droit. De là nous aurons:

$$dv^2 = 2ne^3 d\zeta^2 \left(C + \frac{1}{v} - \frac{E}{vv\, \mathrm{c.}\,\omega^2} + \frac{mhh\,(1 - 3\, \mathrm{f}u^2\, \mathrm{f}\omega^2)}{2v^3} \right)$$

& posant comme ci-dessus $v = \frac{p}{1 + q\, \mathrm{cof}\, s}$,

$$\frac{E}{\mathrm{cof}\,\omega^2} = \tfrac{1}{2}p + \frac{mhh\,(1 - 3\, \mathrm{f}u^2\, \mathrm{f}\omega^2)\,(3 + qq)}{4p} \quad \&$$

$$C = -\frac{(1-qq)}{2p} + \frac{mhh\,(1-qq)^2\,(1 - 3\, \mathrm{f}u^2\, \mathrm{f}\omega^2)}{4p^3}$$

d'où l'on déduit ensuite comme ci-dessus:

$$\frac{dv}{vv} = \frac{q\, d\phi\, \mathrm{f}s}{p} \sqrt{\frac{2pp - mhh\,(3 + 2q\, \mathrm{cof}\, s - qq)(1 - 3\, \mathrm{f}u^2\, \mathrm{f}\omega^2}{2pp + mhh\,(3 + qq)\,(1 - 3\, \mathrm{fin}\, u^2\, \mathrm{fin}\, \omega^2)}}$$

&

$$d\zeta \sqrt{ne^3} = \frac{vv\, d\phi \sqrt{2p}}{\sqrt{(2pp + mhh\,(3 + qq)\,(1 - 3\, \mathrm{f}u^2\, \mathrm{f}\omega^2))}}$$

$$d\psi = \frac{-3mhh\,(1 + q\,\mathrm{cos}\,s)}{pp}\,d\phi\,\mathrm{sin}\,u^2\,\mathrm{cos}\,\omega$$

$$d\omega = \frac{d\psi\,\mathrm{sin}\,\omega}{\mathrm{tag}\,u}, \qquad \& \quad du = d\phi + d\psi\,\mathrm{cos}\,\omega.$$

30. De là on peut d'abord déterminer les quantités p & q, & puisque leur variabilité est très petite, nous les pourrons regarder comme constantes dans les petits termes affectés par mhh. Donc, si nous posons pour abréger $\frac{mhh\,(1 - 3\,\mathrm{s}u^2\,\mathrm{s}\omega^2)}{2pp} = U$, nous aurons:

$$p\,\mathrm{cos}\,\omega^2 + p\,(3 + qq)\,U\,\mathrm{cos}\,\omega^2 = f\,\mathrm{cos}\,\epsilon^2 \qquad \&$$

$$\frac{1 - qq}{p} - \frac{(1 - qq)^2\,U}{p} = \frac{1 - kk}{f} \qquad \text{ou}$$

$$1 - \text{[illegible]} = \frac{(1 - kk)\,p}{f} + (1 - qq)^3\,U$$

où f, k & ϵ sont presque les valeurs moyennes de p, q, & ω, & puisque U est une quantité très petite, il sera permis d'y mettre au lieu de p, q & ω, leurs valeurs moyennes, & en passant aux différentiels nous aurons:

$$dU = \frac{-3mhh\,d\phi\,\mathrm{sin}\,u\,\mathrm{cos}\,u\,\mathrm{sin}\,\omega^2}{pp}$$

$$\& \qquad d\omega = \frac{-3mhh\,(1 + q\,\mathrm{cos}\,s)\,d\phi\,\mathrm{s}u\,\mathrm{cos}\,u\,\mathrm{s}\omega\,\mathrm{cos}\,\omega}{pp}.$$

& partant

$$dp\,\mathrm{cos}\,\omega^2 + \frac{6mhh\,(1 + q\,\mathrm{cos}\,s)\,d\phi\,\mathrm{s}u\,\mathrm{cos}\,u\,\mathrm{s}\omega^2\,\mathrm{cos}\,\omega^2}{p} - \frac{3mhh\,(3 + qq)\,d\phi\,\mathrm{s}u\,\mathrm{cos}\,u\,\mathrm{s}\omega^2\,\mathrm{cos}\,\omega^2}{p} = 0$$

$$\text{ou} \quad d\phi = \frac{3mhh\,(1 - 2q\,\mathrm{cos}\,s + qq)\,d\phi\,\mathrm{s}u\,\mathrm{cos}\,u\,\mathrm{s}\omega^2}{p}$$

&

& $\quad 2q\,dq = \frac{3mhh(1-qq)^2\, d\Phi \sin u \cos u \sin \omega^2}{pp} - \frac{(1-kk)\,dp}{f}$

donc, à cauſe de $\frac{dv}{vv} = \frac{dp(1+q\cos s)}{pp} - \frac{dq\cos s}{p} + \frac{q\,ds\sin s}{p}$.

Or $\frac{dv}{vv} = \frac{q\,d\Phi \sin s}{p}\sqrt{\frac{1-U(3+2q\cos s-qq)}{1+U(3+qq)}} = \frac{q\,d\Phi\sin s}{p}(1-U(3+q\,c.\,s))$

d'où l'on tire

$$\frac{q\,d\Phi\sin s}{p}(1-U(3+q\cos s)) = \frac{q\,ds\sin s}{p} + \frac{3mhh(1+qq)\,d\Phi\sin u\, c.\,u\sin\omega^2\sin s^2}{p^3}$$

ou bien

$$ds = d\Phi - U\,d\Phi(3+q\cos s) - \frac{3mhh(1+qq)\,d\Phi\sin u\cos u\sin\omega^2\sin s}{ppq}$$

comme ci-deſſus, & enfin: $\quad vv\,d\Phi^2 = \frac{ne^3 f\,d\zeta^2 \sin s^2}{vv\cos\omega^2} \quad$ ou

$$d\zeta\sqrt{ne^3 f} = \frac{vv\,d\Phi\cos\omega}{\sin s}.$$

31. Comme je me borne ici à déterminer le mouvement de la ligne des abſides, dont la longitude dans l'orbite eſt $= \Phi = s$, je pourrai conſidérer dans les petits termes les quantités p, q & ω comme conſtantes, & $du = d\Phi$. Donc, puiſque $U = \frac{mhh}{2pp}(1-\frac{3}{2}\sin\omega^2 + \frac{3}{2}\cos 2u\sin\omega^2)$, nous aurons pour le mouvement moyen:

$$ds = d\Phi - \frac{3mhh\,d\Phi}{2pp}(1-\tfrac{3}{2}\sin\omega^2)$$

donc $$\Phi - s = \frac{3mhh}{2pp}(1-\tfrac{3}{2}\sin\omega^2)\,\Phi$$

d'où nous voyons que, pendant chaque révolution du Satellite, la ligne des abſides avance par un angle $= \frac{3mhh}{2pp}(1-\frac{3}{2}\sin\omega^2)\,360° = \frac{mhh}{pp}$ (1 —

$(1 - \frac{3}{2} \sin \omega^2)$ 540°. Ce mouvement eſt donc plus lent, ſi l'orbite du Satellite eſt inclinée à l'équateur de Jupiter, que ſi elle eſt ſituée dans le même plan: & ſi l'inclinaiſon ω étoit $= 54°, 44'$, la ligne des abſides perdroit tout ſon mouvement, qui iroit même en arriere ſi $\omega > 54°, 44'$.

Donc, ſi l'orbite d'un Satellite eſt inclinée au plan de l'équateur de Jupiter d'un angle $= \epsilon$, le mouvement de ſa ligne des abſides, déterminé ci-deſſus, doit être diminué dans la raiſon de 1 à $1 - \frac{3}{2} \sin \epsilon^2$.

32. Au reſte il eſt auſſi évident que dans ce cas la ligne des nœuds doit avoir un mouvement en arriere. Car, ayant

$$d\psi = \frac{-3mhh(1 + q \cos s)}{pp} d\Phi (1 - \tfrac{1}{2} \cos 2u) \cos \omega,$$

ſon mouvement moyen ſera $d\psi = \frac{-3mhh}{pp} d\Phi \cos \omega$, & partant, pendant chaque révolution où $\Phi = 360°$, la ligne des nœuds reculera par un angle $= \frac{3mhh \cos \omega}{pp} . 360°$. Donc, ſi l'inclinaiſon ω eſt fort petite, le mouvement de la ligne des nœuds eſt deux fois plus rapide que celui de la ligne des abſides. Il ſera donc bien utile de déterminer exactement la poſition des orbites de chaque Satellite à l'égard de l'équateur de Jupiter, pour s'aſſurer combien ces déterminations ſont d'accord avec les obſervations, & ſi en effet l'applatiſſement du corps de Jupiter a une ſi grande influence dans le mouvement de ſes Satellites. Ce ſera le plus ſûr moyen de connoitre juſqu'à quel point la théorie de l'attraction univerſelle s'accorde avec les vrais mouvemens des corps céleſtes.

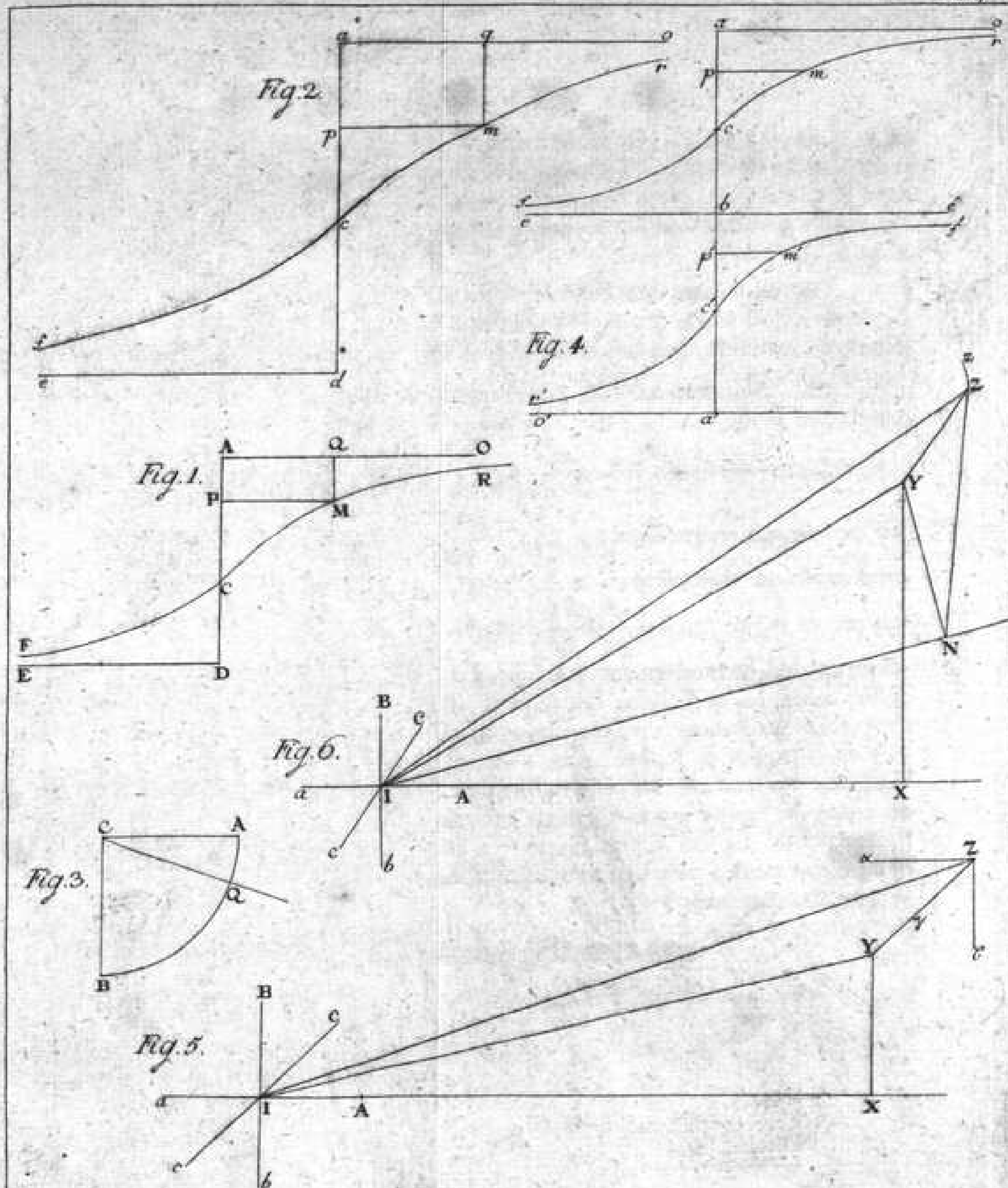
Fig. 2.
Fig. 4.
Fig. 1.
Fig. 6.
Fig. 3.
Fig. 5.