



NOUVELLE MANIERE

DE

COMPARER LES OBSERVATIONS DE LA LUNE
AVEC LA THÉORIE. (*)

PAR MR. L. EULER.

J'ai proposé autrefois une méthode toute particulière de déterminer par la Théorie les dérangemens que les mouvemens des corps célestes souffrent de leur action mutuelle; cette méthode est immédiatement fondée sur les formules différentielles du second degré, que la Théorie fournit pour la détermination du mouvement, sans qu'on ait besoin d'en chercher préalablement les intégrales. Pour cet effet je suppose d'abord, que tant le lieu du corps dont il est question, que son mouvement, c'est à dire, sa vitesse avec sa direction, soient exactement connus pour une époque donnée: ensuite, sachant pour ce même tems les accélérations que les forces qui agissent alors sur le corps y produisent, j'ai fait voir comment on peut de là assigner le lieu & le mouvement de ce corps, non seulement pour un instant après, mais pour un tems assez considérable écoulé depuis la première époque. Cependant ce tems ne doit pas être pris trop grand, de peur que l'aberration, qui croît avec le tems, ne devienne sensible; mais, dès qu'on y est arrivé, on n'a qu'à répéter les mêmes opérations pour parvenir à un moment deux fois plus éloigné de la première époque: & ainsi on pourra continuer le même calcul aussi loin qu'on voudra.

En se servant de cette méthode, on suit presque pas à pas le corps céleste dans son mouvement; & quand même on n'en pourroit

Ee 3

espé-

(*) LA le 6 Févr. 1766.



espérer de grands secours pour l'Astronomie, il seroit toujours fort important de connoître tous les dérangemens auxquels le corps est assujetti d'un instant à l'autre; cette même connoissance ne laisseroit pas de nous éclairer très considérablement sur cet intéressant article de l'Astronomie.

Je crois qu'il ne seroit pas inutile d'appliquer cette méthode à la détermination du mouvement de la Lune; car, quoique les Tables Lunaires soient portées à un tel degré de perfection, qu'on ne sauroit presque espérer d'en pousser plus loin la précision, il n'est pas si aisé d'en tirer pour chaque instant les changemens qui sont causés tant dans la vitesse que dans la direction de la Lune: & on n'en sauroit même conclure ces élémens que par voie d'approximation, attendu qu'on est obligé de tenir compte de toutes les inégalités qui se trouvent dans les Tables. Mais, suivant cette nouvelle méthode, on parvient d'abord à la connoissance de ces deux élémens, sans avoir besoin d'aucune approximation. Ce qui étant un article très essentiel dans la connoissance du mouvement de la Lune, on a tout lieu d'espérer, qu'en poursuivant cette méthode avec tous les soins possibles, on y découvrira des ressources auxquelles on ne s'attendoit pas, & que c'est presque le plus sûr moyen pour porter la Théorie de la Lune au plus haut degré de perfection.

Pour cet effet, il faut commencer par connoître très exactement tant le lieu que le mouvement de la Lune pour une époque donnée, d'où l'on puisse ensuite poursuivre la Lune presque pas à pas: & partant on comprendra aisément, que la moindre erreur commise dans ces deux élémens doit avec le tems produire des erreurs très grossières, quoiqu'on puisse espérer de remédier à cet inconvénient, dès qu'on s'appliquera à cette recherche. Pour moi, je dois avouer que je ne me sens plus ni le courage ni la patience nécessaires pour entreprendre un travail de cette nature: mais ayant réfléchi sur les différentes opérations qui y sont nécessaires, j'ai trouvé moyen, en employant plusieurs observations de la Lune, faites pendant plusieurs jours consécuti-



cutivement, d'en constater pour le moment de chacune la véritable vitesse & direction de la Lune, de sorte qu'on pourra établir ensuite par-là des époques pour y appliquer la méthode mentionnée.

LEMME.

Connoissant pour les abscisses $\zeta = 0, \zeta = 1, \zeta = 2, \zeta = 3, \zeta = 4$ etc. les appliquées p, q, r, s, t etc. d'une courbe, trouver les valeurs différentielles tant du premier degré $\frac{dp}{d\zeta}, \frac{dq}{d\zeta}, \frac{dr}{d\zeta}, \frac{ds}{d\zeta}$ etc. que du second degré $\frac{ddp}{d\zeta^2}, \frac{ddq}{d\zeta^2}, \frac{ddr}{d\zeta^2}, \frac{dds}{d\zeta^2}$ etc. en prenant constant le différentiel $d\zeta$.

SOLUTION.

Soit z l'appliquée qui répond à l'abscisse indéfinie ζ ; & posant $q - p = \Delta p; r - 2q + p = \Delta^2 p; s - 3r + 3q - p = \Delta^3 p$ etc. valeurs qu'on trouve aisément en prenant les différences de la série des appliquées, tant les premières que les secondes, troisièmes etc. Cela posé, on fait qu'on aura :

$$z = p + \Delta p \cdot \frac{\zeta}{1} + \Delta^2 p \cdot \frac{\zeta(\zeta-1)}{1 \cdot 2} + \Delta^3 p \cdot \frac{\zeta(\zeta-1)(\zeta-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \text{ etc. ou}$$

$$z = p + \Delta p \cdot \zeta + \frac{1}{2} \Delta^2 p \cdot (\zeta^2 - \zeta) + \frac{1}{6} \Delta^3 p \cdot (\zeta^3 - 3\zeta^2 + 2\zeta) \\ + \frac{1}{24} \Delta^4 p \cdot (\zeta^4 - 6\zeta^3 + 11\zeta^2 - 6\zeta) \\ + \frac{1}{120} \Delta^5 p \cdot (\zeta^5 - 10\zeta^4 + 35\zeta^3 + 50\zeta^2 + 24\zeta)$$

etc.

De là il est aisé de tirer les valeurs différentielles de tous les ordres, & pour le premier & second nous aurons :

$$\begin{aligned} \frac{ds}{d\zeta} &= \Delta p + \frac{1}{2}\Delta^2 p (2\zeta - 1) + \frac{1}{6}\Delta^3 p (3\zeta^2 - 6\zeta + 2) \\ &\quad + \frac{1}{24}\Delta^4 p (4\zeta^3 - 18\zeta^2 + 22\zeta - 6) \\ &\quad + \frac{1}{120}\Delta^5 p (5\zeta^4 - 40\zeta^3 + 105\zeta^2 - 100\zeta + 24) \\ &\quad \text{etc.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{dds}{d\zeta^2} &= \Delta^2 p + \Delta^3 p \cdot (\zeta - 1) + \frac{1}{12}\Delta^4 p \cdot (6\zeta^2 - 18\zeta + 11) \\ &\quad + \frac{1}{12}\Delta^5 p (2\zeta^3 - 12\zeta^2 + 21\zeta - 10). \end{aligned}$$

Maintenant, posant successivement $\zeta = 0$, $\zeta = 1$, $\zeta = 2$, etc. nous aurons ces valeurs différentielles pour les appliquées déterminées p , q , r , s etc.

du premier ordre :

$$\frac{dp}{d\zeta} = \Delta p - \frac{1}{2}\Delta^2 p + \frac{1}{3}\Delta^3 p - \frac{1}{4}\Delta^4 p + \frac{1}{5}\Delta^5 p - \text{etc.}$$

$$\frac{dq}{d\zeta} = \Delta p + \frac{1}{2}\Delta^2 p - \frac{1}{6}\Delta^3 p + \frac{1}{12}\Delta^4 p - \frac{1}{20}\Delta^5 p + \text{etc.}$$

$$\frac{dr}{d\zeta} = \Delta p + \frac{3}{2}\Delta^2 p + \frac{1}{3}\Delta^3 p - \frac{1}{12}\Delta^4 p + \frac{1}{30}\Delta^5 p$$

$$\frac{ds}{d\zeta} = \Delta p + \frac{5}{2}\Delta^2 p + \frac{1}{6}\Delta^3 p + \frac{1}{4}\Delta^4 p - \frac{1}{20}\Delta^5 p$$

du second ordre :

$$\frac{ddp}{d\zeta^2} = \Delta^2 p - \Delta^3 p + \frac{1}{12}\Delta^4 p - \frac{1}{6}\Delta^5 p$$

$$\frac{ddq}{d\zeta^2} = \Delta^2 p \quad \bullet \quad - \frac{1}{12}\Delta^4 p + \frac{1}{12}\Delta^5 p$$

$$\frac{ddr}{d\zeta^2} = \Delta^2 p + \Delta^3 p - \frac{1}{12}\Delta^4 p \quad \bullet$$

$$\frac{dds}{d\zeta^2} = \Delta^2 p + 2\Delta^3 p + \frac{1}{12}\Delta^4 p - \frac{1}{12}\Delta^5 p.$$

Ensuite du troisieme ordre:

$$\frac{d^3 p}{d\zeta^3} = \Delta^3 p - \frac{3}{2} \Delta^4 p + \frac{7}{4} \Delta^5 p$$

$$\frac{d^3 q}{d\zeta^3} = \Delta^3 p - \frac{1}{2} \Delta^4 p + \frac{3}{4} \Delta^5 p$$

$$\frac{d^3 r}{d\zeta^3} = \Delta^3 p + \frac{1}{2} \Delta^4 p - \frac{7}{4} \Delta^5 p$$

$$\frac{d^3 s}{d\zeta^3} = \Delta^3 p + \frac{3}{2} \Delta^4 p + \frac{1}{4} \Delta^5 p,$$

& du quatrieme ordre:

$$\frac{d^4 p}{d\zeta^4} = \Delta^4 p - 2 \Delta^5 p$$

$$\frac{d^4 q}{d\zeta^4} = \Delta^4 p - \Delta^5 p$$

$$\frac{d^4 r}{d\zeta^4} = \Delta^4 p \quad \bullet$$

$$\frac{d^4 s}{d\zeta^4} = \Delta^4 p + \Delta^5 p.$$

Ce Lemme nous fera d'un grand usage dans la comparaison de plusieurs lieux observés de la Lune, puisque par son moyen nous serons en état d'assigner pour chaque lieu les valeurs différentielles, qui s'y rapportent: or celles du second ordre ne sont que l'effet des forces qui agissent sur la Lune, ce qui nous met en état de comparer les observations avec la Théorie. Je m'en vai donc considérer les formules différentielles, que la Théorie fournit pour le mouvement de la Lune.



FORMULES DIFFÉRENTIELLES

*qui expriment le mouvement de la Lune.*Pl. VIII.
Fig. 3.

Soit A le centre de la Terre, & AB une ligne fixe tirée vers l'équinoxe du printems; Z le centre de la Lune, d'où l'on abaisse au plan de l'écliptique la perpendiculaire ZY, & de Y à AB la perpendiculaire YX. Posons

1°. la distance $AZ = v$;

2°. la latitude de la Lune $ZAY = \psi$ boréale;

3°. la longitude de la Lune $YAX = \phi$.

De ces trois élémens donnés par les observations on définira les trois coordonnées $AX = x$; $XY = y$, & $YZ = z$, de cette sorte :

$$z = v \sin \psi; \quad AY = v \cos \psi; \quad y = v \cos \psi \sin \phi; \quad x = v \cos \psi \cos \phi.$$

En même tems soit S le lieu du Soleil, sa distance à la Terre $AS = u$, & sa longitude $BAS = \theta$, d'où l'on tire $AR = u \cos \theta$ & $RS = u \sin \theta$.

Maintenant, posant la distance de la Lune au Soleil $SZ = w$, on aura $w^2 = (u \cos \theta - x)^2 + (u \sin \theta - y)^2 + z^2$,
ou bien $w^2 = uu - 2uv \cos \psi (\cos \theta \cos \phi + \sin \theta \sin \phi) + vv$,
ou $w^2 = uu - 2uv \cos \psi \cos (\phi - \theta) + vv$.

Soit t le tems écoulé depuis une certaine époque jusqu'à cette observation, pendant lequel le mouvement moyen du Soleil soit l'angle $= \tau$, qu'on exprime en parties du rayon 1; & posons la distance moyenne du Soleil à la Terre $= k$. Enfin, soit A à B comme la masse de la Terre à celle du Soleil, & la Théorie fournit pour le mouvement de la Lune ces trois formules :

$$I. \quad \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{Ak^3}{A+B} \cdot \frac{x}{v^3} + \frac{k^3 (u \cos \theta - x)}{w^3} - \frac{k^3 \cos \theta}{uu} = -P$$

II.

$$\text{II. } \frac{ddy}{d\tau^2} = -\frac{Ak^3}{A+B} \cdot \frac{y}{v^3} + \frac{k^3(u \sin \theta - y)}{w^3} - \frac{k^3 \sin \theta}{uu} = -Q$$

$$\text{III. } \frac{ddz}{d\tau^2} = -\frac{Ak^3}{A+B} \cdot \frac{z}{v^3} - \frac{k^3 z}{w^3} = -R.$$

Reflexions sur ces formules.

I. Ayant donc exactement observé le lieu de la Lune avec sa parallaxe horizontale, on pourra déterminer par-là les quantités v , x , y , z , & sachant par la Théorie du Soleil la distance u avec sa longitude θ , on en tirera la distance $w = SZ$. De là, en regardant la fraction

$\frac{A}{A+B} = \lambda$ comme connue, on calculera aisément ces trois valeurs :

$$P = \lambda \frac{k^3 x}{v^3} - \frac{k^3(u \cos \theta - x)}{w^3} + \frac{k^3 \cos \theta}{uu}$$

$$Q = \lambda \frac{k^3 y}{v^3} - \frac{k^3(u \sin \theta - y)}{w^3} + \frac{k^3 \sin \theta}{uu}$$

$$R = \lambda \frac{k^3 z}{v^3} + \frac{k^3 z}{w^3}$$

d'où l'on aura les trois égalités suivantes :

$$\frac{ddx}{d\tau^2} = -P; \quad \frac{ddy}{d\tau^2} = -Q \quad \& \quad \frac{ddz}{d\tau^2} = -R.$$

II. La Théorie nous fournit donc les valeurs différentielles des trois coordonnées x , y , z , rapportées au mouvement moyen du Soleil, qui nous sert de mesure du tems. Donc, si nous voulons exprimer le tems en jours, en posant le nombre des jours $= \zeta$, puisque le mouvement moyen du Soleil dans un jour est $= 0,0172028$, si nous posons cette fraction connue $= n = 0$,

0172028, de sorte que $ln = 8,2355992$, nous aurons $d\tau = nd\zeta$, & partant.

$$\frac{ddx}{d\zeta^2} = -nnP; \quad \frac{ddy}{d\zeta^2} = -nnQ; \quad \frac{ddz}{d\zeta^2} = -nnR.$$

III. Or, en employant plusieurs observations de la Lune, dont les intervalles de tems soient tous d'un jour, si nous prenons x, y, z, P, Q, R , pour la premiere de ces observations, & que pour les suivantes nous conservions les mêmes lettres en y ajoutant les signes $'$, $''$, $'''$, etc. par le moyen du lemme précédent, nous en pourrons conclure les valeurs différentielles $\frac{ddx}{d\zeta^2}, \frac{ddy}{d\zeta^2}, \frac{ddz}{d\zeta^2}$; lesquelles devant être égales aux quantités $-nnP, -nnQ, nnR$, on verra jusqu'à quel point de précision les observations seront d'accord avec la Théorie, & cela sans se servir d'aucunes Tables Lunaires. Cette maniere de comparer les observations avec la Théorie mérite d'autant plus d'attention, qu'elle est tirée immédiatement des formules différentielles fournies par la Théorie; pendant que les Tables n'en sont formées que par approximation, & qu'elles renferment encore plusieurs élémens conclus par les seules observations: comme le mouvement moyen, l'excentricité de l'orbite, & son inclinaison moyenne à l'écliptique. Or, dans cette maniere de comparer les observations avec la Théorie, nous n'avons besoin d'aucun de ces élémens.

IV. Mais remarquons que nos formules renferment la fraction $\lambda = \frac{A}{A+B}$, dont nous ne saurions connoître la véritable valeur que par les observations: mais nous voyons aussi qu'une seule équation nous en découvre la véritable valeur; & comme chaque observation donne trois équations, cette détermination sera d'autant plus certaine, surtout quand nous y employerons plusieurs observations. Par ce moyen nous découvrirons bien plus sûrement le véritable rapport
entre



entre la masse du Soleil B & celle de la Terre A, que par la méthode dont on s'est servi jusqu'ici pour cet effet.

V. Ensuite on remarquera que, pour faire usage de nos formules, il faut connoître le vrai rapport entre les distances du Soleil & de la Lune à la Terre, u & v , qui est inconnu sans doute tant qu'on ne découvre point la parallaxe du Soleil. Mais considérant comme connue la parallaxe du Soleil dans sa moyenne distance k , puisque les observations nous donnent la parallaxe de la Lune, nous en tirerons d'abord le rapport entre les distances k & v , & celui qu'il y a entre k & u est donné par la Théorie du Soleil, ce qui suffit pour développer nos formules. Or on fait que la parallaxe du Soleil n'entre que pour fort peu dans le mouvement de la Lune, & partant il suffira de la connoître à peu près. Je supposerai donc la parallaxe du Soleil de $9''$, & sa distance moyenne à la Terre $k = 100000$; & dans la même mesure j'exprimerai la distance de la Lune à la Terre.

VI. On pourroit faire encore une autre hypothèse en supposant la parallaxe du Soleil de $8''$, ou de $10''$, & calculer séparément plusieurs observations sur nos formules pour voir quelle différence il en résulte: ce qui nous conduiroit peut-être à la route la plus sûre pour déterminer exactement la parallaxe du Soleil. Mais on comprendra aisément que, pour cet effet, il faudroit employer des observations si exactes, que l'erreur n'en surpassât point quelques secondes, ce qui rend l'exécution de ce dessein presque impossible, à moins qu'en appliquant le même calcul à un très grand nombre d'observations, on n'en pût tirer enfin une conclusion assez certaine.

VII. Mais je m'en tiendrai ici au premier dessein, où il ne s'agit que de comparer les observations de la Lune avec la Théorie, sans aucun secours des Tables, & je supposerai la parallaxe du Soleil $= 9''$ dans sa moyenne distance $k = 100000$, & partant tout revient à trouver de bonnes observations de la Lune. Or, puisque les Tables de feu M. Meyer sont reconnues pour donner les lieux de la Lune à une minute près, & que les Connoissances des mouvemens célestes de Mr.

de la Lande font calculées sur ces Tables, je regarderai les lieux de la Lune qui y font assignés pour chaque midi, comme des observations immédiates: vu que des observations actuelles pourroient bien être moins exactes. Outre cela, j'en retirerai aussi cet avantage, que tous les intervalles de tems entre ces observations sont égaux entr'eux & précisément de 24 heures, ce qui fournit une grande commodité pour le calcul, que j'ai déjà arrangé en sorte que l'unité, par laquelle je mesure le tems, est un jour, qui donne en même tems les intervalles égaux pris sur l'axe de la courbe considérée dans le Lemme.

VIII. Ayant donc tiré de la Connoissance des mouvemens célestes de l'an 1765, six lieux de la Lune depuis le 31 Juillet jusqu'au 5 Août, j'ai calculé pour chacun les trois coordonnées x, y, z , pour en conclure leurs valeurs différentielles du second degré, dont voici le calcul:

	x	Δx	$\Delta^2 x$	$\Delta^3 x$	$\Delta^4 x$	$\Delta^5 x$
Juil. 31	113,69					
Août 1	166,97	53,28	-10,16			
2	210,09	43,12	-12,52	-2,36	+0,67	
3	240,69	30,60	-14,21	-1,69	+0,84	+0,17
4	257,08	16,39	-15,06	-0,85		
5	258,41	1,33				

d'où je tire pour la seconde observation du 1 Août la valeur différentielle:

$$\frac{d^2 x'}{d\zeta^2} = \Delta^2 x - \frac{1}{12} \Delta^4 x + \frac{1}{12} \Delta^5 x = -10,20.$$

Or, pour cette même observation, je trouve $P = a\lambda - 290,1$ où $1/a = 10,0356834$; donc $\ln na = 6,5068818$ & $290,1 nn = 0,086$, de sorte que

$$-10,20 = -nn a \lambda + 0,086 \quad \& \quad nn a \lambda = 10,286,$$

& partant $\frac{1}{\lambda} = 312346$ ou $1/\lambda = 4,5053647$.

IX. De la même manière je fais le calcul pour les coordon-

nées y :

	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$	$\Delta^5 y$
Juil. 31	-219,005	+34,966				
Août 1	-184,039	+46,041	+11,075			
2	-137,998	+54,584	+8,543	-2,532		
3	-83,414	+59,120	+4,536	-4,007	-1,475	
4	-24,294	+60,119	+0,999	-3,537	-10,470	+1,945
5	+35,825					

d'où $\frac{ddy'}{d\zeta^2} = +11,360$. Or $Q = -6\lambda + 372,7$, où $l\epsilon = 10,0779488$; donc $l\ln n\epsilon = 6,5491472$ & $372,7nn = 0,1103$. Par conséquent $11,360 = 6nn\lambda - 0,1103$ ou $6nn\lambda = 11,470$, & partant $\frac{1}{\lambda} = 308730$ ou $l\lambda = 4,5104162$.

X. Pour la troisième coordonnée z , nous aurons

	z	Δz	$\Delta^2 z$	$\Delta^3 z$	$\Delta^4 z$	$\Delta^5 z$
Juil. 31	-14,5543	+4,7998				
Août 1	-9,7545	+5,4232	+0,6234			
2	-4,3313	+5,6796	+0,2564	-0,3670		
3	+1,3483	+5,6015	-0,0781	-0,3345	+0,0325	
4	+6,9498	+5,1595	-0,4420	-0,3639	-0,0294	-0,0619
5	+12,1093					

Donc $\frac{ddz'}{d\zeta^2} = 0,6234 - 0,0027 - 0,0051 = 0,6156$. Or $R = -\gamma\lambda - 9,274$ & $l\gamma = 8,8022397$, donc $l\ln n\gamma = 5,2734381$ & $9,274nn = 0,00274$ & partant $0,6156 = nn\gamma\lambda + 0,00274$ ou $nn\gamma\lambda = 0,61286$. Par conséquent $\frac{1}{\lambda} = 306250$ & $l\lambda = 4,5139232$.

CONCLUSIONS.

1. Voilà donc trois valeurs que les six observations choisies nous fournissent pour la fraction λ , qui à la vérité ne sont pas trop d'accord entr'elles, mais la différence n'est pas pourtant si grande, qu'elle ne puisse être attribuée aux erreurs des observations, en supposant même que ces erreurs ne surpassent point une minute. Le milieu entre ces trois valeurs étant $\frac{1}{\lambda} = 309108$, on en peut conclure avec assez d'assurance, que la masse du Soleil surpasse 309108 fois la masse de la Terre, en supposant la parallaxe du Soleil de 9". Si l'on vouloit se donner la peine de faire le même calcul sur d'autres observations, & prendre le milieu des trois résultats qu'on en tire, on parviendroit à un rapport plus exact entre la masse du Soleil & celle de la Terre.

2. *Newton*, en supposant la parallaxe du Soleil de 10", trouve le rapport de la masse du Soleil à celle de la Terre comme 227512 à 1: qui pour la parallaxe de 9" devoit être augmenté en raison de 1000 à 729, d'où ce rapport seroit de 312088 à 1, ce qui s'accorde assez bien avec ce que je viens de trouver. Or, puisque *Newton* a tiré sa détermination du mouvement moyen de la Lune, elle est sans doute plus exacte que celle que j'ai trouvée ici.

3. Ayant trouvé la véritable valeur du nombre λ , on fera en état d'exécuter les opérations que j'ai proposées autrefois, par le moyen desquelles, en connoissant le lieu & le mouvement de la Lune pour une époque donnée, on peut déterminer les mêmes choses pour un autre tems qui n'en est pas trop éloigné, comme pour le jour suivant. Car, soient pour l'époque donnée la distance de la Lune à la Terre = v , les trois coordonnées x, y, z , leur valeurs différentielles $\frac{dx}{d\zeta}$, $\frac{dy}{d\zeta}$ & $\frac{dz}{d\zeta}$; & pour un tems de ζ jours après, posant les trois coordonnées X, Y, Z , on aura:

$$X = x + \frac{\zeta dx}{d\zeta} + \frac{\zeta^2 ddx}{2 d\zeta^2} + \frac{\zeta^3 d^3x}{6 d\zeta^3} + \frac{\zeta^4 d^4x}{24 d\zeta^4} + \text{etc.}$$

$$\& \frac{dX}{d\zeta} = \frac{dx}{d\zeta} + \frac{\zeta ddx}{d\zeta^2} + \frac{\zeta^2 d^3x}{2 d\zeta^3} + \frac{\zeta^3 d^4x}{6 d\zeta^4} + \text{etc.}$$

Or, la Théorie donnant $\frac{ddx}{d\zeta^2} = -nnP$, $\frac{ddy}{d\zeta^2} = -nnQ$ &

$\frac{ddz}{d\zeta^2} = -nnR$, on obtient

$$X = x + \frac{\zeta dx}{d\zeta} - \frac{nn\zeta^2 P}{2} - \frac{nn\zeta^3 dP}{6 d\zeta} - \frac{nn\zeta^4 ddP}{24 d\zeta^2} \text{ etc.}$$

$$\& \frac{dX}{d\zeta} = \frac{dx}{d\zeta} - nn\zeta P - \frac{nn\zeta^2 dP}{2 d\zeta} - \frac{nn\zeta^3 ddP}{6 d\zeta^2} \text{ etc.}$$

& ainsi des autres coordonnées.

4. Maintenant, ayant pour le midi du premier d'Août 1765 à Paris,

$$x = + 166,970; \quad y = - 184,039; \quad z = - 9,7545$$

& de là par les observations:

$$\frac{dx}{d\zeta} = + 36,09; \quad \frac{dy}{d\zeta} = + 40,316; \quad \frac{dz}{d\zeta} = + 5,1982.$$

Ensuite nous avons

$$P = + 34496; \quad Q = - 37968; \quad R = - 2041,4$$

& par les observations rapportées on pourroit encore trouver les valeurs différentielles de P, Q, R.

De là, pour ζ jours après le 1 Août, on aura

$$\begin{aligned} X &= + 166,970 + 36,090\zeta - 5,104\zeta\zeta \\ Y &= - 184,039 + 40,316\zeta + 5,618\zeta\zeta \\ Z &= - 9,7545 + 5,1982\zeta + 0,3020\zeta\zeta \end{aligned}$$

& les valeurs différentielles

$$\begin{aligned} \frac{dX}{d\zeta} &= + 36,090 - 10,208 \zeta \\ \frac{dY}{d\zeta} &= + 40,316 + 11,235 \zeta \\ \frac{dZ}{d\zeta} &= + 5,1982 + 0,6041 \zeta. \end{aligned}$$

5. J'observe donc que si l'on ne veut se servir que des trois premiers termes des formules pour X, Y, Z, on ne sauroit passer par un intervalle d'un jour entier, puisque les termes négligés seroient encore trop considérables. Il ne conviendrait donc point de prendre ces intervalles plus grands que de 2 heures; on les pourroit prendre plus grands, si l'on vouloit encore introduire dans le calcul les valeurs $\frac{dP}{d\zeta}$, $\frac{dQ}{d\zeta}$, $\frac{dR}{d\zeta}$, mais alors le calcul même deviendroit plus embarrassé.



Fig. 1.

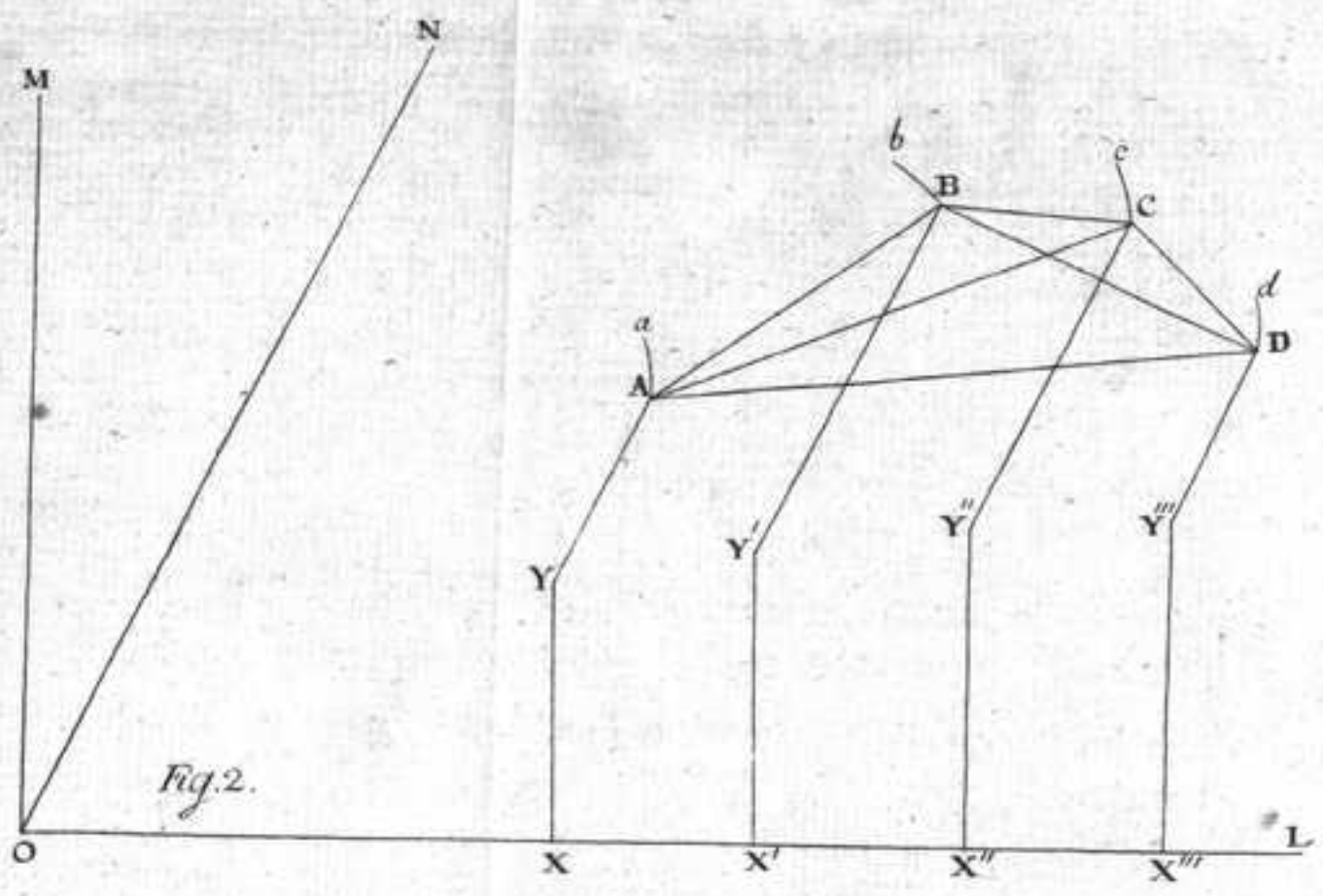
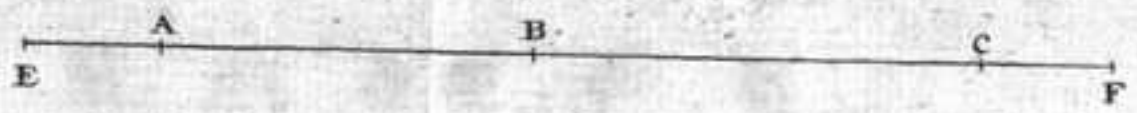


Fig. 2.

Fig. 3.

