

CONSIDÉRATIONS
SUR LE
PROBLEME DES TROIS CORPS. (*)

PAR MR. L. EULER.

1.

Le probleme où il s'agit de déterminer le mouvement de trois corps qui s'attirent mutuellement, selon l'hypothese Newtonienne, est devenu depuis quelque tems si fameux par les soins que les plus grands Géometres y ont employés, qu'on a déjà commencé à disputer, à qui la gloire de l'avoir le premier résolu appartenoit. Mais cette dispute est fort prématurée, & il s'en faut bien encore qu'on soit parvenu à une solution parfaite du probleme. Tout ce qu'on y a fait jusqu'ici est restreint à un cas très particulier, où le mouvement de chacun des trois corps suit à peu près les regles établies par *Kepler*; & dans ce cas même on s'est borné à déterminer le mouvement par approximation. Dans tous les autres cas, on ne sauroit se vanter qu'on puisse assigner seulement à peu près le mouvement des trois corps, lequel demeure encore pour nous un aussi grand mystere, que si l'on n'avoit jamais pensé à ce probieme.

2. Pour prouver clairement combien on est encore éloigné d'une solution complete de ce probleme, on n'a qu'à le comparer avec le cas où il n'y a que deux corps qui s'attirent mutuellement, & même avec le cas le plus simple, où il s'agit de déterminer le mouvement d'un corps pesant projeté d'une maniere quelconque dans le vuide. Et on conviendra aisément qu'il auroit été impossible de trouver

ver

(*) La le 4. Déc. 1765.



ver la parabole qu'un tel corps décrit, fans avoir connu préalablement la loi suivant laquelle un corps pesant tombe perpendiculairement en bas. Sans la découverte de Galilée, que la vitesse d'un tel corps tombant croît en raison de la racine quarrée de la hauteur, on ne feroit certainement jamais arrivé à la connoissance de la parabole qu'un corps jetté obliquement décrit dans le vuide.

3. Il en est de même du mouvement de deux corps en général qui s'attirent mutuellement, où il faut aussi commencer par déterminer le mouvement rectiligne dont ces corps s'approchent ou s'éloignent l'un de l'autre, avant qu'on puisse entreprendre de chercher les sections coniques que ces corps décriront étant jettés obliquement. Car, quoique le grand *Newton* ait suivi un ordre renversé dans ses recherches, personne ne sauroit douter qu'il n'eût jamais réussi à déterminer le mouvement curviligne, fans avoir été en état de déterminer le rectiligne.

4. De là je tire cette conséquence incontestable, qu'on ne sauroit espérer de résoudre le probleme des trois corps en général, à moins qu'on n'ait trouvé moyen de résoudre le cas où les trois corps se meuvent sur une ligne droite; ce qui arrive lorsqu'ils ont été disposés au commencement sur une ligne droite, & qu'ils y ont été, ou en repos, ou poussés selon la même direction. Donc, avant que d'entreprendre la solution du probleme des trois corps, tel qu'il est communément proposé, il est indispensablement nécessaire de s'appliquer au cas où le mouvement de tous les trois corps se fait sur la même ligne droite; & on peut bien être assuré que, tant que ce dernier probleme se refusera à nos recherches, on se flattera en vain de réussir dans la solution du premier. Dans des recherches si difficiles, il convient toujours de commencer par les cas les plus simples.

5. Or le cas où les trois corps se meuvent sur une même ligne droite, est sans contredit beaucoup plus simple que si ces corps décrivoient des lignes courbes, où il pourroit même arriver que ces



courbes ne se trouvaient point dans un même plan; ces circonstances doivent nécessairement rendre nos recherches beaucoup plus compliquées. Cela est si évident, qu'on sera bien surpris qu'aucun des grands Géometres qui se sont occupés de ce probleme, n'ait commencé ses recherches par le cas du mouvement rectiligne; mais la raison en est sans doute, qu'un tel mouvement ne se trouve point au monde, & que ces grands hommes se sont un peu hâtés d'appliquer le résultat de leurs travaux aux mouvemens réels du Ciel, sans vouloir entreprendre des recherches qui n'y auroient point un rapport immédiat.

6. Peut-être sera-t-on même tenté de croire que ce cas, à cause de sa simplicité, a été trop au dessous des forces de ces Géometres, & qu'ils en ont voulu laisser le développement à des génies moins élevés: mais ce sentiment seroit bien mal fondé, puisque la solution de ce cas est assujettie à de si grandes difficultés, qu'elles semblent n'avoir pû encore être surmontées par les plus grands Analystes. Il me paroît donc très important de mettre devant les yeux toutes ces difficultés, afin que ceux qui voudront encore s'occuper du grand probleme des trois corps puissent réunir leurs forces pour les surmonter, s'il est possible. Ces efforts seront d'autant plus utiles, qu'on ne sauroit espérer de parvenir jamais à une solution parfaite de ce probleme, à moins qu'on n'ait auparavant trouvé moyen de vaincre toutes les difficultés dont le cas du mouvement rectiligne est enveloppé; & encore alors peut-être ne sera-t-on pas fort avancé à l'égard du probleme général.

Du mouvement rectiligne de trois corps.

Pl. VIII.
Fig. 1.

7. Que les trois corps se meuvent donc sur la ligne droite EF, & qu'ils se trouvent à présent aux points A, B, C, les lettres A, B, C, étant prises en même tems pour marquer leurs masses respectives. Donc, posant les distances $AB = x$, & $BC = y$, le corps A sera poussé vers F par les forces accélératrices $\frac{B}{xx} + \frac{C}{(x+y)^2}$, le corps B sera poussé en même sens vers F par la force accélératrice

trice $= \frac{C}{yy} - \frac{A}{xx}$, & le corps C vers E par la force $= \frac{B}{yy} + \frac{A}{(x+y)^2}$.
 Considérons le corps B comme en repos, ou bien cherchons le mouvement respectif des deux autres A & C par rapport à celui-ci; & puisqu'il faut transporter en sens contraire les forces qui agissent sur B, aux deux autres, le corps A sera poussé vers B par la force $= \frac{A+B}{xx} - \frac{C}{yy} + \frac{C}{(x+y)^2}$, & le corps C vers B par la force $= \frac{B+C}{yy} - \frac{A}{xx} + \frac{A}{(x+y)^2}$.

8. Supposons maintenant l'élément du tems $= dt$, en le prenant constant, & les principes de mécanique nous fournissent d'abord ces deux équations :

$$I. \quad \frac{ddx}{dt^2} = -\frac{A+B}{xx} + \frac{C}{yy} - \frac{C}{(x+y)^2}$$

$$II. \quad \frac{ddy}{dt^2} = -\frac{B+C}{yy} + \frac{A}{xx} - \frac{A}{(x+y)^2}$$

où je ne m'embarrasse point du coefficient qu'il faudroit donner à l'élément dt , qui dépend de la maniere dont on veut exprimer le tems. C'est donc uniquement de la résolution de ces deux équations différentielles du second degré que dépend la détermination du mouvement des corps A & C, par rapport au corps B; de sorte que le probleme est réduit à une question purement analytique.

9. Avant que d'entreprendre la résolution de ces équations, je remarque qu'il y a un cas où toutes les difficultés s'évanouissent; car il est aisé de voir qu'un cas seroit possible où les distances x & y conserveroient toujours le même rapport entr'elles. Pour trouver ce cas, posons $y = nx$, & nous aurons

$$-n(A+B) + \frac{C}{n} - \frac{Cn}{(1+n)^2} = -\frac{B-C}{nn} + A - \frac{A}{(n+1)^2},$$

ou bien

$$n^3 (nn + 3n + 3) A + (n^5 + 2n^4 + n^3 - nn - 2n - 1) B - (3nn + 3n + 1) C = 0,$$

d'où il est aisé de trouver entre les masses A, B, C, le juste rapport, le nombre n étant donné, pour que ce cas puisse avoir lieu. Mais, si les masses sont données, pour trouver le nombre n il faut résoudre cette équation du cinquième degré :

$$(A+B)n^5 + (3A+2B)n^4 + (3A+B)n^3 - (B+3C)nn - (2B+3C)n - B - C = 0,$$

& alors, posant $A + B - \frac{C}{nn} + \frac{C}{(1+n)^2} = E$, on aura pour

$$\text{le mouvement } \frac{dx^2}{2dt^2} = E \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{a} \right) \text{ \& } dt \sqrt{2E} = \frac{-dx \sqrt{ax}}{V(a-x)}.$$

10. Ayant donc trouvé la juste valeur du nombre n , de sorte qu'on ait toujours $y = nx$, ce cas aura lieu quand au commencement les distances BA & BC auront été comme 1 à n , & que les vitesses imprimées alors vers B auront eu le même rapport. Alors le mouvement du corps A vers B fera le même que celui d'un corpuscule infiniment petit vers un corps dont la masse seroit $= E$; & pour mieux déterminer ce mouvement, on n'a qu'à mettre $x = a \cos \Phi^2$, pour avoir $dt \sqrt{2E} = 2a^{\frac{3}{2}} d\Phi \cos \Phi^2$, & partant $t \sqrt{2E} = a^{\frac{3}{2}} (\Phi + \sin \Phi \cos \Phi)$, où a marque la distance AB au commencement, lorsqu'il étoit $t = 0$ & $\Phi = 0$, en supposant que le corps A s'est trouvé alors en repos. Il arrivera donc jusqu'en B, faisant $\Phi = 90^\circ = \frac{\pi}{2}$, après le tems t déterminé par cette égalité: $t \sqrt{2E} =$



$a^{\frac{3}{2}} \frac{\pi}{2}$. Cette maniere de représenter le mouvement, en y introduisant des arcs de cercle, semble être la plus propre à ce dessein.

11. Mais retournons à nos deux équations générales du §. 8, & je remarque qu'on en peut former une troisième équation, qui admette l'intégration. Pour cet effet, multiplions la première par $\alpha dx + \xi dy$ & l'autre par $\xi dx + \gamma dy$, & leur somme sera :

$$\begin{aligned} & \frac{\alpha dx ddx + \xi dy ddx + \xi dx ddy + \gamma dy ddy}{dt^2} = \\ & - \frac{\alpha(A + C) dx}{xx} + \frac{\alpha C dx}{yy} - \frac{\alpha C dx - \xi C dy}{(x + y)^2} \\ & - \frac{\xi(A + B) dy}{xx} + \frac{\xi C dy}{yy} - \frac{\xi A dx - \gamma A dy}{(x + y)^2} \\ & + \frac{\xi A dx}{xx} - \frac{\xi(B + C) dx}{yy} \\ & + \frac{\gamma A dy}{xx} - \frac{\gamma(B + C) dy}{yy} \end{aligned}$$

dont le premier membre est intégrable, son intégrale étant

$$\frac{\alpha dx^2 + 2\xi dx dy + \gamma dy^2}{2 dt^2}.$$

12. Pour rendre aussi intégrable l'autre membre, faisons

$\gamma A = \beta(A + B)$; $\alpha C = \beta(B + C)$ & $\alpha C + \xi A = \xi C + \gamma A$, dont la dernière égalité est déjà renfermée dans les deux précédentes: prenant donc $\xi = AC$, nous aurons $\gamma = C(A + B)$ & $\alpha = A(B + C)$, & l'intégrale de l'autre membre se trouvera :

$$\frac{\alpha(A + B) - \xi A}{x} + \frac{\gamma(B + C) - \xi C}{y} + \frac{\alpha C + \xi A}{x + y},$$

puis,



puis, substituant pour α , β , γ , les valeurs trouvées se changent en cette forme:

$$\frac{AB(A+B+C)}{x} + \frac{BC(A+B+C)}{y} + \frac{AC(A+B+C)}{x+y},$$

& partant notre équation intégrale sera:

$$\frac{A(B+C)dx^2 + 2ACdx dy + C(A+B)dy^2}{2dt^2} = (A+B+C) \left(\Gamma + \frac{AB}{x} + \frac{BC}{y} + \frac{AC}{x+y} \right),$$

où Γ est la quantité constante, introduite par l'intégration.

13. Si, d'une manière semblable, nous pouvons trouver encore une autre équation intégrale, on n'auroit alors qu'à en éliminer l'élément dt , pour avoir une équation différentielle du premier degré entre les deux variables x & y ; & on seroit certainement bien avancé dans la solution de ce problème, quand même cette équation seroit encore assujettie à de très grandes difficultés. Mais il y a peu d'espérance de parvenir seulement à ce point; au moins toutes les peines que je me suis données pour découvrir encore une autre combinaison, qui conduisît à une équation intégrable, ont été inutiles. Je ne vois donc pas d'autre route que d'éliminer dans les équations différentielles du second degré l'élément dt^2 , par le moyen de sa valeur trouvée ici:

$$\frac{1}{dt^2} = \frac{2(A+B+C) \left(\Gamma + \frac{AB}{x} + \frac{BC}{y} + \frac{AC}{x+y} \right)}{A(B+C)dx^2 + 2ACdx dy + C(A+B)dy^2}.$$

14. Mais il faut bien remarquer qu'il n'est pas permis de substituer simplement cette valeur dans l'une ou l'autre des équations du §. 8; car, puisque l'élément dt y est supposé constant, on ne gagneroit rien, parce que cette supposition y demeureroit toujours enveloppée. Pour cette raison il convient auparavant de délivrer les dites équations

équations de cette condition, que l'élément du tems dt y est supposé constant. Pour cet effet, puisque la formule $\frac{ddx}{dt}$ y est posée pour $d \cdot \frac{dx}{dt}$, en ne prenant aucun élément constant, au lieu de $\frac{ddx}{dt}$ il faut écrire $\frac{ddx}{dt} - \frac{dx ddt}{dt^2}$, d'où les équations du §. 8. seront exprimées ainsi:

$$\begin{aligned} \text{I.} \quad \frac{ddx}{dt^2} - \frac{dx ddt}{dt^3} &= -\frac{A - B}{xx} + \frac{C}{yy} - \frac{C}{(x + y)^2} \\ \text{II.} \quad \frac{ddy}{dt^2} - \frac{dy ddt}{dt^3} &= -\frac{B - C}{yy} + \frac{A}{xx} - \frac{A}{(x + y)^2}, \end{aligned}$$

où aucun différentiel n'est supposé constant.

15. De ces deux équations éliminons d'abord le second différentiel ddt , pour avoir cette équation:

$$\frac{dy ddx - dx ddy}{dt^2} = \frac{-(A + B)dy - A dx}{xx} + \frac{(B + C)dx - C dy}{yy} + \frac{A dx - C dy}{(x + y)^2},$$

où il est maintenant permis d'écrire, au lieu de dt^2 , la valeur trouvée ci-dessus, ce qui nous conduit à cette équation:

$$\frac{2(A + B + C) \left(\Gamma + \frac{AB}{x} + \frac{BC}{y} + \frac{AC}{x + y} \right) (dy ddx - dx ddy)}{A(B + C)dx^2 + 2ACdx dy + C(A + B)dy^2} = \frac{-(A + B)dy - A dx}{xx} + \frac{(B + C)dx + C dy}{yy} + \frac{A dx - C dy}{(x + y)^2}.$$

Voilà donc une seule équation différentielle du second degré entre les deux variables x & y , qui contient la solution de notre problème, &



tout se réduit à la découverte d'une méthode par laquelle on puisse rendre cette équation intégrable.

16. Quelque compliquée que paroisse cette équation, je pourrois produire des exemples assez semblables, où l'intégration a réussi; je crois donc qu'on ne doit point désespérer du succès. On peut rendre cette équation plus simple, & la délivrer des différentiels du second degré, en posant $dx = p dy$, pour avoir $dy dx - dx dy = dy^2 dp$, & notre équation prendra cette forme:

$$\frac{2(A + B + C) \left(\Gamma + \frac{AB}{x} + \frac{BC}{y} + \frac{AC}{x+y} \right) dp}{A(B + C)pp + 2ACp + C(A + B)} + \frac{A+B+Ap}{xx} dy - \frac{(B+C)p-C}{yy} dy + \frac{C-Ap}{(x+y)^2} dy = 0,$$

à laquelle satisfait, comme on le voit d'abord, une certaine valeur constante prise pour p . Car, supposant $p = n$, ou bien $x = ny$, on aura

$$\frac{A + B + An}{nn} - (B + C)n - C + \frac{C - An}{(n + 1)^2} = 0,$$

d'où l'on tire le même cas d'intégrabilité que j'ai déjà développé ci-dessus, où la valeur du nombre n doit être d'une équation du cinquième degré.

17. Pour mieux approfondir la nature de cette équation, développons quelques cas dont la résolution est déjà connue d'ailleurs, ce qui arrive lorsque la masse d'un des trois corps est presque infinie par rapport aux autres, puisqu'alors chacun des deux autres y est porté tout comme si l'autre n'existoit point; de sorte que ce cas doit revenir à celui où il n'y auroit que deux corps. Supposons donc infinie la masse du corps B, & écrivant ΔB au lieu de Γ , nous aurons à résoudre cette équation:

Evolution du cas où B = ∞.

$$\frac{2\left(\Delta + \frac{A}{x} + \frac{C}{y}\right) dp}{A p p + C} + \frac{dy}{x x} - \frac{p dy}{y y} = 0 \text{ (ayant posé } dx = p dy)$$

ce qui nous assure que l'intégration ne sauroit se refuser à nos recherches, quoique les méthodes ordinaires nous prêtent peu de secours pour y arriver: Je reviens donc à la méthode que j'ai expliquée autrefois, où il s'agit de trouver un multiplicateur qui rende cette équation intégrable.

18. Quelques circonstances me font juger qu'un tel multiplicateur pourroit être une fonction de la seule quantité p , qui soit $= P$, & partant cette équation intégrable:

$$\frac{2\left(\Delta + \frac{A}{x} + \frac{C}{y}\right) P dp}{A p p + C} + \frac{P dy}{x x} + \frac{P p dy}{y y} = 0:$$

soit donc $2 \int \frac{P dp}{A p p + C} = Q$, aussi fonction de p , & le premier

membre de l'intégrale sera $\left(\Delta + \frac{A}{x} + \frac{C}{y}\right) Q$. Soit donc l'équation intégrale entière

$$\left(\Delta + \frac{A}{x} + \frac{C}{y}\right) Q + V = 0,$$

où il est évident que la partie V ne sauroit renfermer p , mais qu'elle est fonction des seules quantités x & y . De là nous aurons:

$$\frac{P dy}{x x} - \frac{P p dy}{y y} = - \frac{A Q p dy}{x x} - \frac{C Q dy}{y y} + dV,$$

où $dV = \frac{(P + A Q p) dy}{x x} + \frac{(C Q - P p) dy}{y y}$, & partant in-

tegrable; ce qui ne sauroit arriver à moins qu'il ne fût $P + A Q p$

$= ap$, & $CQ - Pp = \mathfrak{E}$, ou bien $dV = \frac{adx}{xx} + \frac{\mathfrak{E}dy}{yy}$,
& par conséquent

$$V = \gamma - \frac{a}{x} + \frac{\mathfrak{E}}{y}.$$

19. Ces deux conditions nous fournissent :

$$Q = \frac{ap - P}{Ap} = \frac{\mathfrak{E} + Pp}{C};$$

donc $(aC - \mathfrak{E}A)p = P(App + C)$, & $P = \frac{(aC - \mathfrak{E}A)p}{App + C}$;

par conséquent $Q = \frac{app + \mathfrak{E}}{App + C}$. Or il faut qu'il soit

$$Q = 2 \int \frac{P dp}{App + C}, \text{ ou bien } dQ = \frac{2P dp}{App + C} = \frac{2(aC - \mathfrak{E}A)p dp}{(App + C)^2},$$

ce qui étant précisément d'accord avec la valeur de Q , l'équation intégrale cherchée sera :

$$\left(\Delta + \frac{A}{x} + \frac{C}{y} \right) \cdot \frac{app + \mathfrak{E}}{App + C} + \gamma - \frac{a}{x} - \frac{\mathfrak{E}}{y} = 0,$$

ou bien

$$\Delta (app + \mathfrak{E}) + \gamma (App + C) + \frac{\mathfrak{E}A - aC}{x} + \frac{(aC - \mathfrak{E}A)pp}{y} = 0$$

où les constantes a , \mathfrak{E} , γ , de même que Δ , peuvent être prises à volonté, & partant l'intégrale aura cette forme :

$$E + Fpp + \frac{1}{x} - \frac{pp}{y} = 0, \text{ où } \Delta = AE - CF.$$

20. Or, pour ce cas, ayant $\Gamma = \Delta B = B(AE - CF)$, l'élément du tems dt doit être déterminé par cette équation :

$$dt^2 = \frac{A dx + C dy^2}{2B \left(AE - CF + \frac{A}{x} + \frac{C}{y} \right)} = \frac{(App + C) dy^2}{2B \left(AE - CF + \frac{A}{x} + \frac{C}{y} \right)};$$

mais l'équation trouvée donne

$$pp = \left(E + \frac{1}{x} \right) : \left(\frac{1}{y} - F \right);$$

cette valeur y étant substituée fournit celle-ci :

$$dt^2 = dy^2; 2B \left(\frac{1}{y} - F \right), \text{ ou } dt \sqrt{2B} = \frac{dy \sqrt{y}}{\sqrt{(1 - Fy)}}.$$

Ensuite, puisque $pp = \frac{dx^2}{dy^2}$, on aura :

$$\frac{x dx^2}{1 + Ex} = \frac{y dy^2}{1 - Fy} \text{ ou } \frac{dx \sqrt{x}}{\sqrt{(1 + Ex)}} = \frac{dy \sqrt{y}}{\sqrt{(1 - Fy)}} = dt \sqrt{2B},$$

d'où l'on voit clairement que l'un & l'autre des corps A & C suit le même mouvement vers le corps B, tout comme si l'autre n'existoit point. De la même manière, on développera les cas où la masse A, ou C, seroit presque infiniment grande par rapport aux autres, de sorte qu'il seroit superflu d'en faire le calcul.

21. Essayons donc la même méthode pour intégrer l'équation générale du §. 16; pour cet effet multiplions-la par une fonction de p qui soit = P , pour avoir cette équation: *Essai pour l'intégration de l'équation générale.*

$$\frac{2(A + B + C) \left(\Gamma + \frac{AB}{x} + \frac{BC}{y} + \frac{AC}{x+y} \right) P dp}{A(B + C)pp + 2ACp + C(A + B)} + \frac{(A+B+Ap)Pdy}{xx} - \frac{(C+(B+C)p)Pdy}{yy} + \frac{(C-Ap)Pdy}{(x+y)^2} = 0,$$

que nous supposons intégrable. Posons l'intégrale

$$2(A + B + C) \int \frac{P dp}{A(B + C)pp + 2ACp + C(A + B)} = Q, \quad \&$$

Cc 3

& soit l'équation intégrale cherchée

$$\left(\Gamma + \frac{AB}{x} + \frac{BC}{y} + \frac{AC}{x+y} \right) Q + V = 0,$$

d'où nous aurons:

$$dV = \frac{ABQ p dy}{xx} - \frac{BCQ dy}{yy} - \frac{ACQ (1+p) dy}{(x+y)^2} =$$

$$\frac{(A+B+Ap)P dy}{xx} - \frac{(C+(B+C)p)P dy}{yy} + \frac{(C-Ap)P dy}{(x+y)^2}.$$

22. Comme la lettre V ne sauroit renfermer p , posons

$$V = \frac{a}{x} + \frac{\epsilon}{y} + \frac{\gamma}{x+y} + \delta,$$

& nous aurons à remplir les conditions suivantes:

$$- ap = (A + B + Ap) P + ABQ p$$

$$- \epsilon = - (C + (B + C) p) P + BCQ$$

$$- \gamma(1+p) = (C - Ap) P + ACQ(1+p).$$

Éliminons-en Q , ce qui peut se faire en deux manières:

$$(\epsilon A - aC) p = (A(B+C)pp + 2ACp + C(A+B)) P$$

$$(\epsilon A - \gamma B)(1+p) = (A(B+C)pp + 2ACp + C(A+B)) P,$$

d'où l'on voit qu'on ne sauroit satisfaire à la fois à ces deux conditions, ce qui est une marque évidente, que cette méthode ne réussit point pour l'équation générale. Ou bien le multiplicateur qui la rend intégrable, n'est pas simplement une fonction de la quantité p .

23. Comme dans le cas $B = \infty$, l'intégrale a été réduite à cette forme: $E + Fpp + \frac{I}{x} - \frac{Pp}{y} = 0$, on pourroit penser que l'intégrale de notre équation générale auroit peut-être une telle forme:

$$\frac{I}{x+y} = \frac{P}{x} + \frac{Q}{y} + R,$$

où

où P, Q & R feroient de certaines fonctions de la quantité p . Mais, en substituant pour $\frac{1}{x+y}$ cette valeur, & pour $\frac{dy}{(x+y)^2}$ celle-ci

$$\frac{Pp dy}{(1+p)xx} + \frac{Qdy}{(1+p)yy} - \frac{1}{1+p} \left(\frac{dP}{x} + \frac{dQ}{y} + dR \right),$$

on s'apercevra aisément qu'il n'est pas possible de satisfaire à l'équation différentielle de cette manière. D'où l'on peut conclure que l'intégrale ne sauroit être exprimée d'une façon si simple, & que sa forme sera beaucoup plus compliquée & renfermera peut-être des quantités transcendentes.

24. En employant de cette sorte la méthode des multiplicateurs on voit bien que ce n'est pas la constante Γ qui en empêche le succès : cependant il n'y a aucun doute que, posant cette constante $\Gamma = 0$, l'équation ne doive devenir beaucoup plus facile à résoudre, & partant il fera toujours très raisonnable de commencer par ce cas, puisque, tant qu'on ne trouve pas moyen de le résoudre, on entreprendroit en vain la résolution de l'équation générale. Posons donc $\Gamma = 0$, Considération du cas $\Gamma = 0$. pour avoir à résoudre cette équation :

$$\frac{2(A+B+C) \left(\frac{AB}{x} + \frac{BC}{y} + \frac{AC}{x+y} \right) dp}{A(B+C)pp + 2ACp + C(A+B)} + \frac{A+B+Ap}{xx} dy - \frac{(B+C)p - C}{yy} dy + \frac{C - Ap}{(x+y)^2} dy = 0,$$

qui a cette belle propriété, que les deux variables x & y remplissent partout le même nombre de dimensions, ou bien que cette équation est du nombre de celles qu'on nomme homogènes.

25. Ayant déjà posé $dx = p dy$, posons outre cela $x = sy$, & puisque $p dy = s dy + y ds$, nous en tirons $\frac{dy}{y} = \frac{ds}{p-s}$. Or l'équation elle-même à résoudre prendra cette forme :

2(A

$$\frac{2(A+B+C) \left(\frac{AB}{s} + BC + \frac{AC}{s+1} \right) dp}{A(B+C)pp + 2ACp + C(A+B)} + \frac{A+B+Ap}{ss} \cdot \frac{dy}{y}$$

$$- (C + (B+C)p) \frac{dy}{y} + \frac{C - Ap}{(s+1)^2} \cdot \frac{dy}{y} = 0,$$

où l'on n'a qu'à substituer pour $\frac{dy}{y}$ la valeur $\frac{ds}{p-s}$, pour obtenir une équation différentielle du premier degré entre les deux variables p & s , qui est :

$$\frac{2(A+B+C) \left(\frac{AB}{s} + BC + \frac{AC}{s+1} \right) dp}{A(B+C)pp + 2ACp + C(A+B)} + \frac{ds}{p-s} \left(\frac{A+B+Ap}{ss} \right.$$

$$\left. - C - (B+C)p + \frac{C - Ap}{(s+1)^2} \right) = 0,$$

& se réduit à cette forme :

$$\frac{2(A+B+C)s(s+1)(p-s)dp}{A(B+C)pp + 2ACp + C(A+B)} + \frac{ds((A+B)(s+1)^2 - Cs^3(s+2))}{BCss + (AB+BC+AC)s + AB} = 0.$$

26. Partageons cette équation dans les deux membres suivans :

$$\frac{2(A+B+C)pdp}{A(B+C)pp + 2ACp + C(A+B)} + \frac{ds((A+B)(s+1)^2 - Cs^3(s+2))}{s(s+1)(BCss + (AB+BC+AC)s + AB)} =$$

$$\frac{2(A+B+C)sdp}{A(B+C)pp + 2ACp + C(A+B)} + \frac{pds((B+C)ss(s+1)^2 - A(2s+1))}{s(s+1)(BCss + (AB+BC+AC)s + AB)},$$

dont le premier est intégrable de lui-même, & le dernier le devient en le divisant par ps . Cette équation, quoique différentielle du premier degré, semble être assujettie à de plus grandes difficultés que la précédente du second degré; puisqu'ici même, dans le cas où l'on



l'on fait $B = \infty$, l'équation n'en devient presque point plus traitable. Car on aura bien :

$$\frac{2(p-s)dp}{App + C} + \frac{(1-pss)ds}{s(Cs + A)} = 0,$$

qui est certainement intégrable, quoique la route pour la résoudre paroisse fort cachée. Cependant on verra que cette valeur $s = \frac{1}{pp} y$ satisfait, ou en est une intégrale particulière.

27. Mais c'est d'une manière bien singulière que nous connoissons l'intégrale de cette équation

$$\frac{2(p-s)dp}{App - C} + \frac{(1-pss)ds}{s(Cs + A)} = 0;$$

nous ne savons autre chose sinon que, posant $x = sy$ ou $s = \frac{x}{y}$, de sorte que $\frac{dy}{y} = \frac{ds}{p-s}$, on aura par le §. 19.

$$\frac{1}{x} - \frac{pp}{y} = n(App + C) \text{ à cause de } AE - CF = 0,$$

$$\& \text{ de là } \int \frac{dx \sqrt{x}}{\sqrt{(1-nCx)}} = \int \frac{dy \sqrt{y}}{\sqrt{(1+nAy)}}. \text{ Mais nous ne sau-}$$

rions développer de cette équation le rapport entre les quantités p & s . Voilà donc un exemple bien remarquable d'une équation différentielle dont nous connoissons la construction, quoiqu'une méthode directe pour l'en déduire nous semble manquer, de sorte qu'on ne sauroit douter de ce côté que l'analyse ne soit encore susceptible d'un progrès très considérable.

28. Il est bon d'observer aussi que, quoiqu'on suppose ou $A = 0$ ou $C = 0$, la résolution de cette équation ne se trouve pas dégagée de tout embarras. Car soit $A = 0$ pour avoir cette équation :

tion: $2pdp - 2sdp - pds + \frac{ds}{ss} = 0$, dont la solution ne
faute pas certainement d'abord aux yeux, quoiqu'on sache que la valeur
 $pps = 1$ lui convienne. Cependant on arrivera au but en posant
 $p = \frac{z}{\sqrt{s}}$, d'où l'on tire

$$\frac{2zdz}{s} + \frac{ds}{ss} (1 - zz) - 2dz\sqrt{s} = 0, \text{ ou bien}$$

$$\frac{ds}{s\sqrt{s}} + \frac{2zdz}{(1-zz)s\sqrt{s}} = \frac{2dz}{1-zz}, \text{ qui étant multipliée par } (1-zz)^{\frac{3}{2}}$$

donne l'intégrale $-\frac{2}{3}s^{-\frac{2}{3}}(1-zz)^{\frac{3}{2}} = 2\int dz\sqrt{(1-zz)}$, ou

$$s^{\frac{2}{3}} = -\frac{(1-zz)\sqrt{(1-zz)}}{3\int dz\sqrt{(1-zz)}}, \text{ \& } \sqrt{s} = \frac{-\sqrt{(1-zz)}}{\sqrt[3]{3\int dz\sqrt{(1-zz)}}},$$

$$\text{\& } p = \frac{-2\sqrt[3]{3\int dz\sqrt{(1-zz)}}}{\sqrt{(1-zz)}}.$$

De là, à cause de $\frac{1}{x} - \frac{pp}{y} = \text{Const.}$ ou $\frac{1}{y} \left(\frac{1}{s} - pp \right) = a$,

on aura $y = \frac{1}{a} \sqrt[3]{(3\int dz\sqrt{(1-zz)})^2}$, & $x = sy = \frac{1-zz}{a}$.

29. A cause de cet embarras, nonobstant que la chose en elle-même soit fort aisée, je conclus qu'il ne convient en aucune maniere de conduire la solution de notre probleme de la façon que je viens de faire. Soit que la constante Γ évanouisse ou non, il n'est jamais à propos de poser $x = sy$, & d'introduire cette quantité s dans le calcul; aussi, pour peu qu'on réfléchisse sur la nature de la question, on verra que les deux distances x & y sont trop peu liées entr'elles pour qu'on puisse faire entrer leur rapport dans le calcul. Chacune de ces distances est plutôt immédiatement liée avec le tems t , & par cette raison je
ne



ne fais pas si l'on ne feroit pas beaucoup mieux de ne point bannir du calcul l'élément du tems dt . Il est vrai qu'on ne voit pas alors comment on pourroit parvenir à une solution; mais c'est principalement aux Géometres à employer tous leurs efforts pour trouver une autre route, qui conduise à la solution du probleme.

30. On voit par-là qu'on est encore bien éloigné de la solution du cas le plus simple du probleme des trois corps, qui a lieu sans doute lorsque leur mouvement se fait sur la même ligne droite; & partant à plus forte raison il s'en faut beaucoup qu'on soit déjà arrivé à une solution parfaite de ce grand probleme. On comprend plutôt qu'on est encore à peine avancé au delà du premier pas. Ce premier pas renferme quelques propriétés générales, qui conviennent non seulement au mouvement de trois corps qui s'attirent mutuellement, mais qui ont également lieu, quelque grand que soit le nombre des corps. Comme il est très important de connoître ces propriétés générales, quoiqu'elles ne suffisent pas à la détermination du mouvement, dès que le nombre des corps va au delà de deux, je vai les déduire des premières formules que les principes mécaniques nous fournissent, afin qu'on voie clairement jusqu'à quel point on est déjà avancé dans ces recherches.

PROPRIÉTÉS GÉNÉRALES

*du mouvement des corps qui s'attirent mutuellement,
quelque grand que soit leur nombre.*

31. Considérons quatre corps, dont les masses soient A, B, C, D, & qui se trouvent à présent aux points A, B, C, D représentés dans la Figure; & qui par leur mouvement soient transportés en a , b , c , d pendant l'élément du tems dt , en parcourant les espaces infiniment petits Aa , Bb , Cc , Dd . Or, en vertu de l'attraction mutuelle, le corps A est poussé à la fois par les forces accélératrices suivantes :

$$\text{selon } AB = \frac{B}{AB^2}; \text{ selon } AC = \frac{C}{AC^2}; \text{ selon } AD = \frac{D}{AD^2},$$

D d 2

&



& de la même manière chacun des autres corps est sollicité par trois semblables forces accélératrices. Ce que je dis ici de quatre corps s'appliquera sans aucune difficulté aux cas où le nombre des corps seroit ou plus grand ou plus petit; aussi n'envisagé-je point ces quatre corps comme existans dans un même plan, pour rendre ces recherches aussi générales qu'il est possible.

32. Quel que puisse être le mouvement de ces quatre corps, je le rapporte à un point fixe O, pris à volonté dans l'espace absolu, par lequel je fais passer trois lignes droites, pareillement fixes, OL, OM, ON, perpendiculaires entr'elles, pour représenter par-là trois plans fixes LOM, LON & MON, & y rapporter les lieux de nos corps à chaque instant; ce qui se fait pour chaque corps par trois coordonnées parallèles aux trois directions fixes OL, OM & ON. Nommons donc ces coordonnées

$$\begin{aligned} \text{pour le corps A} & \text{ - - } OX = x; \quad XY = y; \quad YA = z \\ \text{pour le corps B} & \text{ - - } OX' = x'; \quad X'Y' = y'; \quad Y'B = z' \\ \text{pour le corps C} & \text{ - - } OX'' = x''; \quad X''Y'' = y''; \quad Y''C = z'' \\ \text{pour le corps D} & \text{ - - } OX''' = x'''; \quad X'''Y''' = y'''; \quad Y'''D = z'''. \end{aligned}$$

Soient de plus les espaces infiniment petits parcourus dans l'élément du tems dt , $Aa = ds$; $Bb = ds'$; $Cc = ds''$; $Dd = ds'''$.

33. Cela posé, il est clair d'abord qu'on aura

$$\begin{aligned} dsdds &= dxddx + dyddy + dzddz = \frac{1}{2}d.Aa^2 \\ ds'dds' &= dx'ddx' + dy'ddy' + dz'ddz' = \frac{1}{2}d.Bb^2 \\ ds''dds'' &= dx''ddx'' + dy''ddy'' + dz''ddz'' = \frac{1}{2}d.Cc^2 \\ ds''''dds'''' &= dx''''ddx'''' + dy''''ddy'''' + dz''''ddz'''' = \frac{1}{2}d.Dd^2. \end{aligned}$$

Ensuite les distances entre les corps seront déterminées par les formules suivantes:

$$AB^2 = (x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2$$

$$AC^2 = (x'' - x)^2 + (y'' - y)^2 + (z'' - z)^2$$

$$AD^2 = (x''' - x)^2 + (y''' - y)^2 + (z''' - z)^2$$

$$BC^2 = (x'' - x')^2 + (y'' - y')^2 + (z'' - z')^2$$

$$BD^2 = (x''' - x')^2 + (y''' - y')^2 + (z''' - z')^2$$

$$CD^2 = (x''' - x'')^2 + (y''' - y'')^2 + (z''' - z'')^2,$$

d'où l'on tire les différentiels de ces distances :

$$d.AB = \frac{(x' - x)(dx' - dx) + (y' - y)(dy' - dy) + (z' - z)(dz' - dz)}{AB},$$

& pareillement les autres.

34. Considérons d'abord la force accélératrice $\frac{B}{AB^2}$, dont le corps A est attiré par le corps B selon la direction AB, & décomposant cette force selon les trois directions fixes OL, OM, ON, on trouvera que le corps A est sollicité selon ces directions par les forces accélératrices suivantes,

$$\text{selon OL,} = \frac{B(x' - x)}{AB^3}; \text{ selon OM,} = \frac{B(y' - y)}{AB^3}; \text{ selon ON,} = \frac{B(z' - z)}{AB^3}.$$

On n'a qu'à y ajouter les forces, selon les mêmes directions, qui résultent de l'attraction des autres corps, exercées sur le corps A, pour avoir toutes les forces qui y agissent. Ensuite on fera la même chose pour chacun des autres corps; & les principes du mouvement fourniront autant d'équations qu'il y a de forces qui agissent sur chaque corps.

35. De là, prenant constant l'élément du tems dt , on tirera les équations suivantes :

$$\begin{array}{l}
 \text{I. } \frac{ddx}{dt^2} = \frac{B(x' - x)}{AB^3} + \frac{C(x'' - x)}{AC^3} + \frac{D(x''' - x)}{AD^3} \\
 \text{II. } \frac{ddy}{dt^2} = \frac{B(y' - y)}{AB^3} + \frac{C(y'' - y)}{AC^3} + \frac{D(y''' - y)}{AD^3} \\
 \text{III. } \frac{ddz}{dt^2} = \frac{B(z' - z)}{AB^3} + \frac{C(z'' - z)}{AC^3} + \frac{D(z''' - z)}{AD^3}
 \end{array}
 \left. \vphantom{\begin{array}{l} \text{I.} \\ \text{II.} \\ \text{III.} \end{array}} \right\} \begin{array}{l} \text{pour} \\ \text{le corps} \\ \text{A.} \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 \text{IV. } \frac{ddx'}{dt^2} = \frac{C(x'' - x')}{BC^3} + \frac{D(x''' - x')}{BD^3} + \frac{A(x - x')}{BA^3} \\
 \text{V. } \frac{ddy'}{dt^2} = \frac{C(y'' - y')}{BC^3} + \frac{D(y''' - y')}{BD^3} + \frac{A(y - y')}{BA^3} \\
 \text{VI. } \frac{ddz'}{dt^2} = \frac{C(z'' - z')}{BC^3} + \frac{D(z''' - z')}{BD^3} + \frac{A(z - z')}{BA^3}
 \end{array}
 \left. \vphantom{\begin{array}{l} \text{IV.} \\ \text{V.} \\ \text{VI.} \end{array}} \right\} \begin{array}{l} \text{pour} \\ \text{le corps} \\ \text{B.} \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 \text{VII. } \frac{ddx''}{dt^2} = \frac{D(x''' - x'')}{CD^3} + \frac{A(x - x'')}{CA^3} + \frac{B(x' - x'')}{CB^3} \\
 \text{VIII. } \frac{ddy''}{dt^2} = \frac{D(y''' - y'')}{CD^3} + \frac{A(y - y'')}{CA^3} + \frac{B(y' - y'')}{CB^3} \\
 \text{IX. } \frac{ddz''}{dt^2} = \frac{D(z''' - z'')}{CD^3} + \frac{A(z - z'')}{CA^3} + \frac{B(z' - z'')}{CB^3}
 \end{array}
 \left. \vphantom{\begin{array}{l} \text{VII.} \\ \text{VIII.} \\ \text{IX.} \end{array}} \right\} \begin{array}{l} \text{pour} \\ \text{le corps} \\ \text{C.} \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 \text{X. } \frac{ddx'''}{dt^2} = \frac{A(x - x''')}{DA^3} + \frac{B(x' - x''')}{DB^3} + \frac{C(x'' - x''')}{DC^3} \\
 \text{XI. } \frac{ddy'''}{dt^2} = \frac{A(y - y''')}{DA^3} + \frac{B(y' - y''')}{DB^3} + \frac{C(y'' - y''')}{DC^3} \\
 \text{XII. } \frac{ddz'''}{dt^2} = \frac{A(z - z''')}{DA^3} + \frac{B(z' - z''')}{DB^3} + \frac{C(z'' - z''')}{DC^3}
 \end{array}
 \left. \vphantom{\begin{array}{l} \text{X.} \\ \text{XI.} \\ \text{XII.} \end{array}} \right\} \begin{array}{l} \text{pour} \\ \text{le corps} \\ \text{D.} \end{array}$$

Voilà



Voilà donc douze équations par lesquelles le mouvement de tous les quatre corps est déterminé, d'où l'on voit que pour tout autre nombre de corps on auroit toujours trois fois autant d'équations, ayant outre le tems t autant de quantités inconnues & variables.

36. Comme aucune de ces équations n'est intégrable, tout revient à en former, par certaines combinaisons, de nouvelles équations qui admettent l'intégration, & si l'on en pouvoit tirer douze équations de cette nature, le problème seroit parfaitement résolu. Mais il s'en faut beaucoup qu'on puisse pousser la solution à ce point de perfection: & il faut bien se contenter du nombre d'équations intégrales que les méthodes connues peuvent fournir. Or d'abord des équations I, IV, VII, X on tirera celle-ci:

$$\frac{A dx + B dx' + C dx'' + D dx'''}{dt^2} = 0,$$

où les autres membres se détruisent tous mutuellement. Cette équation donne donc par l'intégration:

$$A dx + B dx' + C dx'' + D dx''' = a dt,$$

& ensuite: $Ax + Bx' + Cx'' + Dx''' = at + \mathcal{A}$,

laquelle équation renferme un très beau rapport entre les coordonnées parallèles à la direction OL.

37. La même chose réussit pour les coordonnées parallèles aux deux autres directions OM & ON, de sorte que nous aurons en tout d'abord ces trois formules différentielles du premier degré:

$$A dx + B dx' + C dx'' + D dx''' = a dt$$

$$A dy + B dy' + C dy'' + D dy''' = b dt$$

$$A dz + B dz' + C dz'' + D dz''' = \gamma dt.$$

& de là ces trois formules algébriques :

$$Ax + Bx' + Cx'' + Dx''' = \alpha t + \mathfrak{A}$$

$$Ay + By' + Cy'' + Dy''' = \beta t + \mathfrak{B}$$

$$Az + Bz' + Cz'' + Dz''' = \gamma t + \mathfrak{C},$$

qui nous donnent à connoître que le commun centre d'inertie des quatre corps se meut uniformément suivant chacune des trois directions OL, OM, ON, & partant que son mouvement se fait uniformément sur une ligne droite, comme on le fait déjà depuis longtemps.

28. Formons maintenant les équations suivantes :

$$\frac{y d d x - x d d y}{d t^2} = \frac{B(x'y - y'x)}{A B^2} + \frac{C(x''y - y''x)}{A C^2} + \frac{D(x'''y - y'''x)}{A D^3}$$

$$\frac{y' d d x' - x' d d y'}{d t^2} = \frac{C(x''y' - y''x')}{B C^2} + \frac{D(x'''y' - y'''x')}{B D^2} + \frac{A(x y' - y x')}{B A^2}$$

$$\frac{y'' d d x'' - x'' d d y''}{d t^2} = \frac{D(x'''y'' - y'''x'')}{C D^2} + \frac{A(x y'' - y x'')}{C A^2} + \frac{B(x' y'' - y' x'')}{C B^2}$$

$$\frac{y''' d x''' - x''' d y'''}{d t^2} = \frac{A(x y''' - x y''')}{D A^2} + \frac{B(x' y''' - y' x''')}{D B^2} + \frac{C(x'' y''' - y'' x''')}{D C^2},$$

où l'on pourra faire encore en sorte que les derniers membres se détruisent tous entr'eux, & il en résultera cette équation intégrable :

$$\frac{A(y d d x - x d d y)}{d t^2} + \frac{B(y' d d x' - x' d d y')}{d t^2} + \frac{C(y'' d d x'' - x'' d d y'')}{d t^2} + \frac{D(y''' d d x''' - x''' d d y''')}{d t^2} = 0.$$

39. De cette manière on obtiendra encore trois équations intégrales, qui seront :

$$A(y d x$$

$$A(ydx - xdy) + B(y'dx' - x'dy') + C(y''dx'' - x''dy'') + D(y''''dx'''' - x''''dy''') = \delta dt$$

$$A(zdy - ydz) + B(z'dy' - y'dz') + C(z''dy'' - y''dz'') + D(z''''dy'''' - y''''dz''') = \epsilon dt$$

$$A(xdz - zdx) + B(x'dz' - z'dx') + C(x''dz'' - z''dx'') + D(x''''dz'''' - z''''dx''') = \zeta dt,$$

dont les intégrales peuvent encore être représentées par les aires des projections faites sur les trois plans fixes LOM, MON & NOL, de la route que chaque corps décrit, ces aires étant terminées par l'arc de chaque projection décrit dans le tems t , & les deux rayons vecteurs tirés au point O. Quelque plan donc qu'on prenne pour y faire ces projections, on multiplie chaque aire indiquée par la masse du corps auquel elle appartient, & la somme de tous ces produits est toujours proportionnelle au tems pendant lequel ces aires ont été décrites. Cette propriété générale est analogue à celle que *Newton* a démontrée pour le mouvement d'un corps qui est sollicité vers un point fixe.

40. Cette propriété devient encore infiniment plus générale en considérant que, tant le point O, que la position des plans, dépend entièrement de notre bon plaisir: d'où nous tirons le Théoreme suivant:

Quelque grand que soit le nombre des corps qui s'attirent mutuellement, & de quelque mouvement qu'ils soient portés, quand on décrit sur un plan quelconque les projections orthogonales des courbes que les corps décrivent, & qu'on en prend les aires décrites autour d'un point pris à volonté sur ce plan pour un tems quelconque, en multipliant chacune de ces aires par la masse du corps auquel elle convient, la somme de tous ces produits sera proportionnelle au tems.

Ce beau Théoreme a lieu non seulement quand les corps s'attirent mutuellement en raison réciproque du quarré des distances, mais aussi quand l'attraction suit toute autre raison des distances: pourvu qu'à

distances égales l'attraction soit proportionnelle à la masse du corps attirant.

41. Voilà donc déjà six équations intégrales pour un nombre quelconque de corps qui s'attirent mutuellement: mais on peut encore en trouver une septième de la manière suivante. Puisque $dx ddx + dy ddy + dz ddd = ds dds = \frac{1}{2} d. Aa^2$, on verra qu'en assemblant des équations du §. 35. la valeur de la formule $\frac{A ds dds + B ds' dds' + C ds'' dds'' + D ds''' dds'''}{dt^2}$, les parties

qui ont AB^3 pour dénominateur produiront cette forme:

$$\frac{A. B}{AB^3} \cdot \left[- (x' - x) (dx' - dx) - (y' - y) (dy' - dy) - (z' - z) (dz' - dz) \right],$$

qui par le §. 33 se changera en celle-ci:

$$\frac{A. B}{AB^3} (-AB. d. AB) = -\frac{A. B. d. AB}{AB^2} = A. B d. \frac{1}{AB},$$

dont l'intégrale est par conséquent $= \frac{A. B}{AB}$, où le numérateur est le produit des deux masses A & B , & le dénominateur leur distance AB .

42. Comme l'intégration réussit pareillement dans les autres parties divisées par AC^3 , AD^3 , BC^3 , BD^3 , CD^3 , en introduisant une constante arbitraire Δ , on obtiendra cette équation intégrale renfermant les espaces élémentaires Aa , Bb , Cc , Dd , parcourus dans le tems infiniment petit dt :

$$\frac{A. Aa^2 + B. Bb^2 + C. Cc^2 + D. Dd^2}{2 dt^2} = \Delta + \frac{A. B}{AB} + \frac{A. C}{AC} + \frac{A. D}{AD} + \frac{B. C}{BC} + \frac{B. D}{BD} + \frac{C. D}{CD},$$



où il faut remarquer que, dans le premier membre, $\frac{Aa}{dt}$ exprime la vitesse du corps A; $\frac{Bb}{dt}$ celle du corps B; $\frac{Cc}{dt}$ celle du corps C, & $\frac{Dd}{dt}$ celle du corps D; de sorte que le premier membre tout entier représente la somme des forces vives de tous les corps ensemble.

43. On observera donc que la force vive totale de tous les corps qui agissent les uns sur les autres par leurs forces attractives, est toujours proportionnelle à une expression composée d'une quantité constante Δ , & d'autres termes, dont chacun est le produit des masses de deux corps divisés par leur distances: il y aura donc autant de tels termes, qu'il y a de combinaisons de deux à deux des corps proposés, de sorte que si en général le nombre des corps est $= n$, le nombre de ces termes sera $= \frac{n \cdot n - 1}{2}$; qui dans le cas de quatre corps est donc $= 6$, comme on voit par l'expression trouvée. Pour la quantité constante Δ , on voit bien qu'elle dépend de l'état primitif imprimé aux corps. Ensuite on voit aussi en général que, plus les corps s'approchent entr'eux, plus la somme de leurs forces vives doit devenir grande. Or, au contraire, à mesure que les corps s'éloignent entr'eux, la somme de leurs forces vives diminuera.

44. Voilà donc en tout sept équations intégrales qu'on a pu découvrir jusqu'ici en général, quelque grand que soit le nombre des corps. Pour le cas de deux corps, où l'on n'a que 6 équations principales, il semble qu'on pourroit se passer de la septième équation intégrale, & que les six premières devroient suffire pour déterminer le mouvement; mais alors il arrive que ces six ne renferment que cinq déterminations, & que la sixième devient identique, de sorte qu'on est obligé de se servir principalement de la septième pour résoudre le problème. La chose est aussi fort claire d'elle-même; car, puisque les six premières équations intégrales auroient également lieu quand même



l'attraction ne suivroit pas la raison inverse quarrée des distances, il est évident qu'elles ne sauroient jamais être suffisantes pour procurer une solution.

45. Mais, dès qu'il est question de trois corps, dont le mouvement est déterminé par 9 équations, les sept équations intégrales que je viens de trouver ne suffisent plus pour en tirer une solution parfaite; il faudroit encore au moins en découvrir deux nouvelles, auxquelles on n'a pu encore parvenir, malgré tous les soins que les plus grands Géometres se sont donnés. La méthode dont je me suis servi ici, en cherchant certaines combinaisons entre les équations principales détaillées dans le §. 35, qui conduisent à quelque équation intégrable, semble entièrement épuisée, & il faudra sans doute chercher une route tout à fait nouvelle. Dans l'état où l'Analyse se trouve, il semble même impossible de dire si l'on en est encore fort éloigné ou non; mais il est bien certain que, dès qu'on sera arrivé à ce point, l'Analyse en retirera de beaucoup plus grands avantages, que l'Astronomie ne sauroit s'en promettre, à cause de la grande complication dont tous les élémens seront entrelacés selon toute apparence, de sorte que pour la pratique on ne pourra presque en espérer aucun secours.

