

DE
I N V E N T I O N E
QVOTCVNQVE MEDIARVM PROPOR-
TIONALIVM CITRA RADICVM
EXTRACTIONEM.

Autore

L. E V L E R O.

P r o p o s i t i o I.

2. Vicissim ergo quantumuis series differen-
tiarum a proportione geometrica aberrauerit, series
terminorum ipsa proprius ad hanc proportionem
accedet.

Propositio II.

3. Inter duos numeros datam rationem $r : r'$
rementes medium proportionalem inuenire sine ex-
tracione radicis.

S o l u t i o.

Sint numeri propositi A et A^r , mediusque
proportionalis prope saltem versus $= B$; vt hi tres
numeri A, B, A^r progressionem a geometrica pa-
sum aberrantem constituant. Statuantur autem dif-
ferentiae pro lubitu: $B - A = a$ et $A^r - B = b$,
hincque colligitur $A(r-1) = a + b$ et $B(r-1) = a^r + b$,
ita vt sit

$$A = \frac{a+b}{r-1} \quad \text{et} \quad B = \frac{a^r+b}{r-1}$$

A a 3

eruntque differentiae $b - a = a(r-1) + z$ et $c - b$
 $= ar(r-1) - z$, quarum ratio en $\frac{ar(r-1) - z}{a(r-1) + z} = r$
 $= \frac{(r+1)z}{a(r-1)+z}$, cuius aberratio ab exponente r vi-
que maior est, quam rationis $\frac{b}{a} = r + \frac{z}{a}$. Vnde
criam facile intelligitur, si seriei a, b, c, d etc.
plures termini a ratione geometrica $1 : r$ aberrent,
in serie differentiarum maiores errores inesse debere.

Corollarium.

Si numeri a, b, c, d etc. sint continue proporcio-
nales, etiam differentiae $b-a, c-b, d-c$ etc.
erunt in proportione geometrica continua eiusdem
exponentis; ac si prior series a proportione geom-
etrica aberret, posterior multo magis aberrabit.

D e m o n s t r a t i o.

Prior propositionis pars in elementis est demon-
strata; pro altera autem parte ponamus exponentem
rationis geometricae $= r$ vt secundum propor-
tionem geometricam foret $b = ar, c = ar^2, d = ar^3$
etc. Sit autem $b = ar + z$ manente $c = ar^2$, ita
vt z sit error termini b a proportione geometrica,
erunt-

nihil autem impedit quominus numeri A et B in ratione $1:r-1$ augentur, ut in inferis habemamus:

$$A = a + b \quad \text{et} \quad B = ar + b$$

vnde sumtis pro fibitu binis numeris a et b , hi
tres numeri

$$a+b; \quad ar+b; \quad ar+br$$

quodcum primus est ad tertium in ratione data $1:r$ eo propius ad progressionem geometricam accedit.

quo minus numerorum assumtorum a et b ratio a ratione $1:V_r$ aberrauerit; Ieu fractio $\frac{a_r+b}{a+b}$ proprius ad valorem. V_r accedit, quam fractio $\frac{b}{a}$. Quo igitur valorem mediij proportionalis V_r inter 1 et r accuratius obtineamus, statuimus $a+b=a'$ et $a+r-b=b'$; atque fractio $\frac{a'+b'}{a'+b}$ adhuc proprius valorem V_r exhibebit simili ergo modo si porro statuimus.

$$a'+b'=a''; \quad a''+b''=a''' ; \quad a''' + b''' = a'''' \text{ etc.}$$

$$a'r+b'=b''; \quad a''r+b''=b''' ; \quad a'''r+b''' = b'''' \text{ etc.}$$

mechaniques $\frac{1}{2}$; $\frac{3}{4}$; $\frac{5}{6}$ etc. continuo accuratius valorem mediæ proportionalis $\sqrt[r]{}$ expriment.

COROLLA.

1

4. Cum igitur quæsio fit, de medio proportionali inter numeros $1:r$ sicutis pro habitu auctoribus numeris a et b fermentur inde duas series,

四
八

a, a', a'', a''', a'''' etc.

$$a' = a + b; \quad a'' = a' + b'; \quad a''' = a'' + b''; \quad a'''' = a''' + b'''$$

$$b' = ar + b; \quad b'' = a'r + b'; \quad b''' = a''r + b''; \quad b'''' = a'''r + b'''$$

et fractiones $\frac{b}{a^2}$, $\frac{b^2}{a^3}$, $\frac{b^{11}}{a^4}$, $\frac{b^{111}}{a^5}$, etc. continuo pro-

Coroll. 2.

5. Veli si constitutatur progressio a ratione geometrica continua quantumvis aberrans, cuius termini alterni sint in ratione $1:r$

a, b, ar, br, ar², br², etc.

卷之三

hinc binis terminis coniungendis noua formetur

haecque magis ad progressionem geometricam accedit.

Coroll. 3.

6. Si hic denuo bini termini coniungantur,

probit naec series :

hincque porro simili modo istae

$$a(3r+1) + b(r+3); ar(r+3) + b(3r+1); ar(3r+1)$$

$a(r(r+6r+1)+b(4r+4); ar(4r+4)+br(r+6r+1);$
 $ar(r(r+6r+1)+br(4r+4))$ etc.
 $a(5rr+10r+1)+b(r(r+10r+5); ar(r(r+10r+5)$
 $+b(5rr+10r+1);$ etc.
 quae continuo propius ad progressionem geometri-
 cam convergent.

Scholi on.

7. Totum ergo negotium huc redit, vt bin-
 nae series a, a', a'', a''' etc. b, b', b'', b''' etc.
 formentur quippe quarum termini homologi conti-
 nuo proprius rationem $1 : \sqrt{r}$ exhibebunt. Cum au-
 tem singuli termini post primos viramque litteram
 a et b inuoluant ita vt quilibet terminus virius-
 que hanc habiturus sit formam $Ma+Nb$, primum
 obseruo posteriorem seriem ex priori oriri, si loco
 litterarum a et b scribantur b et ar . Quare si
 prioris seriei terminus indici n respondens fuerit
 $a^{(n)} = Ma + Nb$, posterioris seriei terminus eidem
 indici n respondens erit $b^{(n)} = Mb + N ar$, ita vt
 fractio $\frac{a^{(n)} + Nb^{(n)}}{Ma + Nb}$ eo exactius valorem \sqrt{r} sit expre-
 sura, quo maior fuerit exponentis n , atque adeo sum-
 to $n = \infty$ versus valor \sqrt{r} prodire debeat. Ita si
 exempli gratia captiatur $r = 2$ series illae binae ita
 se habebunt:

$$\begin{array}{c} \frac{a}{b} \\ \hline \frac{2a+}{2a+} \end{array} \left| \begin{array}{l} a+b \\ b+4a+3b \\ \hline 3a+3b \end{array} \right| \left| \begin{array}{l} 4a+2b \\ 6a+4b \\ \hline 3a+ \end{array} \right| \left| \begin{array}{l} 10a+8b \\ 10b \\ \hline 8a+ \end{array} \right| \left| \begin{array}{l} 16b \\ 16b \\ \hline 8a+ \end{array} \right| \left| \begin{array}{l} 28a+16b \\ 16b \\ \hline 132a+76b \end{array} \right| \left| \begin{array}{l} 76a+44b \\ 76b \\ \hline 132b \end{array} \right|$$

3. Inuestigare legem progressionis binarum
 illarum serierum a, a', a'', a''' etc. et b, b', b'', b''' etc.
 quarum termini homologi continuo propius ratio-
 nem $1 : \sqrt{r}$ exprimunt.

Propositio III.

Quoniam nonimus omnes terminos binas lit-
 teras a et b ita complecti, vt in forma $Ma+Nb$
 continetur, ac si pro priori flatuatur in genere
 $a^{(n)} = Ma + Nb$ tum pro posteriori fore $b^{(n)} = Mb$
 + Nar

$+Nr$, hinc lex progressionis suppedit terminos sequentes:

$$a^{(n+1)} = (M+Nr)a + (M+N)b \text{ et}$$

$$b^{(n+1)} = (M+Nr)b + (M+N)r a$$

ex quo in legem progresionis vtriusque serci inquiri oportet. Quo igitur scrutemur, quemadmodum Princae seriei quilibet terminus definitur, consideremus hanc seriem sub ista forma generaliori
 $a + a'x + a''x^2 + a'''x^3 + a''''x^4 +$
cuius in infinitum continuatae summa fingatur $Pa + Qb$ et quoniam altera ex hac nascitur, dum loco a et b scribitur b et $r a$ erit

$$b + b'x + b''x^2 + b'''x^3 + b''''x^4 + \text{etc.} = Pb + Qra$$

Addantur haec series iuicem, et quia est

$$a + b = a'; a' + b' = a''; a'' + b'' = a''' \text{ etc. erit}$$

$$a' + a''x + a'''x^2 + a''''x^3 \text{ etc.} = (P+Qr)a + (P+Q)b$$

multiplicemus hanc seriem per x et a prima subtrahamus prodibitque

$$a = Pa + Qb - (P+Qr)ax - (P+Q)bx$$

Quoniam vero quantitates P et Q a litteris a et b non pendent, hinc duae resultant aequationes

$$1 = P - Px - Qrx \text{ et } 0 = Q - Px - Qrx$$

vnde deducimus has determinationes

$$P = \frac{1-x}{(1-x)^2 - rx^2} = \frac{1}{1-2x-(r-1)x^2} \text{ et}$$

$$Q = \frac{1-x}{1-2x-(r-1)x^2} = \frac{x}{1-2x-(r-1)x^2} \text{ et}$$

Quo-

Quocirca prior series $a + a'x + a''x^2 + a'''x^3 + \text{etc.}$ nascitur ex evolutione huius fractionis $\frac{a(1-x)+bx}{1-2x-(r-1)x^2}$, posterior vero $b + b'x + b''x^2 + b'''x^3 + \text{etc.}$ ex evolutione huius $\frac{b(1-x)+arx}{1-2x-(r-1)x^2}$ ita vt vtraque sit series recurrens secundi ordinis, scala relationis existente $2, (r-1)$, hincque pro serie priori a, a', a'', a''', a'''' etc. sit primo $a' = a+b$, tum vero $a'' = 2a'+(r-1)a$; $a''' = 2a''+(r-1)a'$ etc. ex hac vero nascitur altera ponendo $a=b$ et $b=ra$. Hinc adeo huius seriei terminum generalem definire licet ad quod valores quantitatum P et Q in fractiones simplices resolvi oportet. Cum igitur denominatoris communis factor sit $1-x-x\sqrt{r}=1-x(1+\sqrt{r})$, pro quantitate P statutur fractio simplex inde nata $= \frac{a}{1-x(1+\sqrt{r})}$, ac demonstrari fore $\frac{a}{1-x(1+\sqrt{r})} = \frac{1-x}{1-2x-(r-1)x^2}$ posito $1-x=x\sqrt{r}$, vnde sit $\frac{a}{1-x(1+\sqrt{r})} = \frac{1-x}{1-2x-(r-1)x^2}$ autem factor tantum \sqrt{r} negative accipi opus est, ita vt sit

$$P = \frac{1}{1-x(1+\sqrt{r})} + \frac{1}{x(1-x(1+\sqrt{r}))}$$

Simili modo pro Q si fractio partialis ex denominatori factore $1-x(1+\sqrt{r})$ nata ponatur $\frac{a}{1-x(1+\sqrt{r})}$, reperitur $\frac{a}{1-x(1+\sqrt{r})} = \frac{1}{1-x(1+\sqrt{r})}$ posito $1-x=x\sqrt{r}$ indeque $\frac{a}{1-x(1+\sqrt{r})} = \frac{1}{1-x(1+\sqrt{r})}$. Quare ipsi \sqrt{r} binos valores tribuendo fit

$Q = \frac{1}{1-x(1+\sqrt{r})} - \frac{1}{x(1-x(1+\sqrt{r}))} = \frac{1}{x\sqrt{r}(1-x(1+\sqrt{r}))} + \frac{1}{x(1-x(1+\sqrt{r}))}$
sicque summa prioris seriei $a + a'x + a''x^2 + a'''x^3 + \text{etc.}$ erit

$$= \frac{a\sqrt{r}+b}{x\sqrt{r}(1-x(1+\sqrt{r}))} + \frac{a\sqrt{r}-b}{x\sqrt{r}(1-x(1+\sqrt{r}))}$$

Bb 2 cum

cum nunc ex vtraque parte progressio nascatur geometrica prodit nostrae seriei terminus generalis

$$\frac{a\sqrt{r}+b}{a\sqrt{r}}(1+\sqrt{r})^n x^n + \frac{a\sqrt{r}-b}{a\sqrt{r}}(1-\sqrt{r})^n x^n$$

ita vt sit indefinite.

$$a^{(n)} = \frac{a\sqrt{r}+b}{a\sqrt{r}}(1+\sqrt{r})^n + \frac{a\sqrt{r}-b}{a\sqrt{r}}(1-\sqrt{r})^n$$

et pro altera serie

$$b^{(n)} = \frac{b+a\sqrt{r}}{a\sqrt{r}}(1+\sqrt{r})^n + \frac{b-a\sqrt{r}}{a\sqrt{r}}(1-\sqrt{r})^n$$

C o r o l l .

9. Ex hoc termino generali demum plene conuincimur, fore sumto exponente n infinito $\frac{b^{(n)}}{a^{(n)}} = \sqrt{r}$,

cum enim tum potestas $(1-\sqrt{r})^n$ prae priori $(1+\sqrt{r})^n$ evanescat, erit vtique

$$\frac{b^{(n)}}{a^{(n)}} = \frac{b\sqrt{r}+ar}{a\sqrt{r}+b} = \sqrt{r}.$$

Vnde simus patet quo maior capiatur exponens n , eo propius ad veritatem accedi.

S c h o l i o n .

10. Eadem quidem veritas etiam hac ratione ostendi potest. Posito generatim $a^{(n)} = Ma + Nb$, erit

$$b^{(n)} = Mb + Nr, \text{ et termini sequentes : } \\ a^{(n+1)} = (M+Nr)a + (M+N)b \text{ et } b^{(n+1)} = (M+Nr)b + (M+N)a$$

Iam

Iam casu $n = \infty$, nullum dubium superesse potest, quin sit $\frac{b^{(n+1)}}{a^{(n+1)}} = \frac{b^{(n)}}{a^{(n)}}$; vnde necesse est sit :

$$\frac{(1+\sqrt{r})^n + (1-\sqrt{r})^n}{(a+b)^n} = \frac{Mb + Nr}{Ma + Nb}$$

Statuatur hic valor $= v$, et quia tum sit

$$\frac{M}{N} = \frac{b\sqrt{r}+ar}{a\sqrt{r}+b} \text{ et } \frac{m}{n} = \frac{ar+b\sqrt{r}-b\sqrt{r}-ar}{b+ar-a\sqrt{r}-a\sqrt{r}-b\sqrt{r}} \text{ seu} \\ \frac{M}{N} - v = \frac{a(\sqrt{r}-r)}{b+\sqrt{r}(a+b)\sqrt{r}}$$

vnde manifesto sequitur $v - r = 0$ et $v = \sqrt{r}$. Similiter vero etiam quantitatum M et N haec ratio peripicitur, quod sumto $n = \infty$ sit $\frac{n}{N} = v = \sqrt{r}$.

P r o p o s i t i o IV.

II. Inter duos numeros data rationem $r: r'$ tenentes duos medios proportionales in rationalibus proxime exhibere.

S o l u t i o n .

Sumantur bini numeri quicunque a et ar in ratione data inter eosque capiantur duo mediū quicunque b et c atque quantumvis relatio $a:b:c:ar$ a ratione geometrica discrepet, inde alias propius accedentes hoc modo elicemus. Quaerantur alii similes quarterni numeri $A:B:C:A'$ quorum illi sint differentiae, ita vt sit $B-A=a$; $C-B=b$ et $A'-C=c$, hincque $B=A+a$; $C=A+a+b$; et $A'-A=a+b+c$ seu $A=\frac{a+b+c}{r-1}$, $B=\frac{ar+a+b}{r-1}$, $C=\frac{ar+a+b+c}{r-1}$, qui

Bb 3

qui per $r-1$ multiplicati praebebunt hos quaternos numeros.

$a' = a+b+c; b' = b+c+ar; c' = c+ar+br; a'r = ar+br+cr$
 qui iam multo proprius ad proportionem geometri-
 cam continuum accedent. Similiter ergo modo hinc
 alii noui $a'', b'', c'', a''r$ deriuabuntur sumendo:
 $a'' = a'+b'+c'; b'' = b'+c'+a'r; c'' = c'+a'r+b'r$

hincque denuo alii, qui continuo proprius proposito
 satisfacient. Totum ergo negotium reducitur ad
 formationem trium progressionum:

- I. $a, a', a'', a''', a'''' \dots a^{(n)}$
 - II. $b, b', b'', b''', b'''' \dots b^{(n)}$
 - III. $c, c', c'', c''', c'''' \dots c^{(n)}$
- quarum lex est 'tatis simplex quae quo viterius
 continuerunt, eo proprius quaterni numeri
 $a^{(n)} : b^{(n)} : c^{(n)} : r a^{(n)}$

proportionem geometricam continua exhibebunt,
 etiam si initio affinti a, b, c , *et* plurimum aberra-
 verint.

Coroll. I.

112. De his tribus seribus primum obseruo

figulos earum terminos, huiusmodi formam $L:M:N$
 p*Nr*-esse habuitos, ita ut quantitates L, M, N
 litteras pro arbitrio affintas x, b, c non induolant,
 sed a sola ratione proposta $x:r$ pendant.

Coroll.

13. Deinde si prime serie terminus quicun-
 que fuerit $a^{(n)} = La + Mb + Nc$, euidens est pro
 ferie secunda fore $b^{(n)} = Lb + Mc + Nr^a$, et pro
 ferie tertia $c^{(n)} = Lc + Mr^a + Nr^b$. Vnde sufficit
 harum trium serierum primae indolem explorauisse.

Scholiom.

14. Harum observationum ope intentio duarum medianarum proportionalium, quae quidem in rationalibus proxime satisficiat, expedite instituitur. Sunt enim exempli causa inter duos numeros rationem duplam tenentes duo medi proportionalis inuestigandi, et operatio numerica sumendis pro litteris a, b, c numeris 1, 1, 1 ob $r=2$ ita se habebit

a	1	3	12	48	177	681	2620	10080
b	1	4	15	58	223	858	3301	12700
c	1	5	19	73	281	1081	4159	16001
$2a$	2	6	24	92	354	1362	5240	20160
$2b$	2	8	30	116	446	1716	6602	25400

Hic quatuor postremi numeri

10080 : 12700 : 16001 : 20160

tam parum a proportione geometrica recedunt, vt si inter extremos per extractiounem radicis cubicae duo medi proportionales quaerantur, si ne parte quidem

quidem decies millesima a veritate aberent; est enim :

$$\frac{13700}{1000} = \sqrt[3]{\frac{2048 \cdot 1000}{1024 \cdot 1512}} = \sqrt[3]{(2 - \frac{1}{1014.52512})}$$

$$\text{ideoque } \sqrt[3]{2} = \frac{1}{\sqrt[3]{1024 + 102512 \sqrt[3]{4}}} \text{ vnde cum fiat } 12700$$

$\sqrt[3]{10080} \sqrt[3]{2} = \frac{1}{\sqrt[3]{1906}}$ error infra particulam decies millesimam vnitatis subsistit, ipsa autem fractio $\frac{13700}{1000}$ tantum particula $\frac{1}{1906 \cdot 1906} = \frac{1}{3697216}$ hoc est minore quam vicies millionesima vnitatis a vero valore $\sqrt[3]{2}$ deficit, tantum autem praecisorem oper logarithmorum attingere non licet. Vnde intelligitur, quantum vsum haec methodus praefare queat in radicibus cuiusvis dignitatis proxime exprimendis.

Propositio V.

15. Inuestigare legem harum trium progressionum :

a, a', a'' etc. b, b', b'' , etc. c, c', c'' etc. quarum termini homologi $a^{(n)} : b^{(n)} : c^{(n)}$ continuo propius proportionem $1 : \sqrt[3]{r} : \sqrt[3]{r^2}$ exprimunt.

Solutio.

Cum omnes termini ex terminis primo assuntis a, b et c ita componantur, vt sit $a^{(n)} = La + Mb + Nc$, erit

erit ex earum indeole $b^{(n)} = Lb + Mc + Nr$ et $c^{(n)} = Lc + Mr + Nr$ at lex progressionis præbet sequentes terminos :

$$\begin{aligned} d^{(n+1)} &= (L+Mr+Nr)a + (L+M+Nr)b + (L+M+Nr)c \\ b^{(n+1)} &= (L+Mr+Nr)b + (L+M+Nr)c + (L+M+Nr)a \\ c^{(n+1)} &= (L+Mr+Nr)c + (L+M+Nr)a + (L+M+Nr)b. \end{aligned}$$

Hinc si generalius statuamus :

$$\begin{aligned} a + a'x + a''x^2 + a'''x^3 + \text{etc.} &= Pa + Qb + Rc \text{ erit} \\ b + b'x + b''x^2 + b'''x^3 + \text{etc.} &= Pb + Qc + Rr a \\ c + c'x + c''x^2 + c'''x^3 + \text{etc.} &= Pc + Qra + Rrb. \end{aligned}$$

Addantur haec series inuicem, et quia est

$$\begin{aligned} a + b + c &= a', a' + b' + c' = a'', a'' + b'' + c'' = a''' \text{ erit} \\ a' + a''x + a'''x^2 + \text{etc.} &= (P + Qr + Rr)a + (P + Q + Rr)b \\ &\quad + (P + Q + R)c \end{aligned}$$

quae per x multiplicata et a prima subtrahita dat

$$a = Pa + Qb + Rc - (P + Qr + Rr)a x - (P + Q + Rr)b x - (P + Q + r)c x.$$

Quia autem quantitates P, Q, R litteras a, b, c non inuelunt, hinc deficiunt tres aequationes :

$$\begin{aligned} I. \quad a &= P - Px - Qrx - Rrx \\ II. \quad c &= Q - Px - Qrx - Rrx \text{ hincque } o = Q - R - R(r-1)x \\ III. \quad b &= R - Px - Qrx - Rx \quad i = P - R - (Q + R)(r-1)x \end{aligned}$$

Pro facilitiori resolutione statuamus $i - x + rx = z$ et sequens combinatio præbabit

I - II $\frac{1}{z} \equiv P - Qz$ hinc $Q \equiv Rz$
 II - III $\frac{1}{z} \equiv Q - Rx$ hinc $P \equiv r + Rxz$

Vnde fit

$$\text{III. } \frac{1}{z} \equiv R(r - x) - Px - Qx \equiv R(r - x - Rx - Rxz) - x$$

$$\text{ideoque } R \equiv \frac{x^2 - z^2}{r^2 - x^2 + z^2 + Rxz}, \text{ at est } x \equiv \frac{z - 1}{r - 1}.$$

Ergo $R \equiv \frac{x^2 - z^2}{r^2 - 1 - (z - 1)(r + z + Rx)} \equiv \frac{z - 1}{r - z}$ sicque prodit

$$P \equiv \frac{r + Rxz}{r - z}; \quad Q \equiv \frac{z - Rxz}{r - z}; \quad R \equiv \frac{z - 1}{r - z}$$

quarum formarum cum denominator sit

$$r - 1 - 3(r - 1)x - 3(r - 1)^2 x^2 - (r - 1)^3 x^3$$

$$\text{tut } (r - 1)(r - 3x - 3(r - 1)x^2 - (r - 1)^2 x^3)$$

perpetuum est nostas tres progressiones esse recurrentes scala relationis existente 3, 3(r - 1), (r - 1)²,

$$a^{(n)} \equiv 3 a^{(n-1)} + 3(r - 1)a^{(n-2)} + (r - 1)^2 a^{(n-3)}.$$

Nunc pro terminis generalibus harum progressio-
num fractiones P, Q, R in simplices resolvi oportet: quoniam autem denominatoris factor simplex

est $\sqrt[r]{r - z}$ simul vicem binorum reliquorum gerens,

fiquidem $\sqrt[r]{r}$ tres inuelit valores diuersos, sufficit

hunc vacuum factorem considerasse. Sit ergo ex
fractione R fracio simplex oriunda $\frac{a}{\sqrt[r]{r - z}}$, et nu-

merator erit A $\equiv \frac{z - 1}{\sqrt[r]{r^2 + z\sqrt[r]{r} + z^2}}$ posito $z \equiv \sqrt[r]{r}$, vn-
de fit $A \equiv \frac{\sqrt[r]{r} - 1}{\sqrt[r]{r^2 + z\sqrt[r]{r} + z^2}}$, ideoque

$$P \equiv \frac{1}{\sqrt[r]{r^2}}, \quad r - \sqrt[r]{r^2} \text{ etc. } Q \equiv \frac{1}{\sqrt[r]{r^2}}, \quad \frac{\sqrt[r]{r^2} - \sqrt[r]{r}}{\sqrt[r]{r^2 + z\sqrt[r]{r} + z^2}} \text{ etc. } R \equiv \frac{1}{\sqrt[r]{r^2}}, \quad \frac{\sqrt[r]{r} - 1}{\sqrt[r]{r^2 + z\sqrt[r]{r} + z^2}} \text{ etc.}$$

Restituatur pro z valor 1 + (r - 1)x, sitque $\frac{r - 1}{\sqrt[r]{r - 1}}$, ac fit

$$P \equiv \frac{1}{r}, \quad \frac{1}{1 - zx} + \text{etc. } Q \equiv \frac{1}{r}, \quad \frac{1}{1 - zx} + \text{etc. } R \equiv \frac{1}{r}, \quad \frac{1}{1 - zx} + \text{etc.}$$

Hinc cum fit $a + a'x + a''x^2 + \text{etc.} \equiv Pa + Qb + Rc$ sequitur fore

$$a^{(n)} \equiv \frac{1}{r} s^n \left(a + \frac{b}{\sqrt[r]{r}} + \frac{c}{\sqrt[r]{r^2}} \right) + \dots + \dots$$

vbi duo membra omissa ex primo ita formantur ut loco $\sqrt[r]{r}$ scribatur $\frac{-1 \pm \sqrt{r^2 - 3}}{2} \sqrt[r]{r}$, id quod etiam de $s \equiv \frac{r - 1}{\sqrt[r]{r - 1}}$ est intelligendum. Deinde vero probinis reliquis seriebus habebitur:

$$b^{(n)} \equiv \frac{1}{r} s^n (a \sqrt[r]{r} + b + \frac{c}{\sqrt[r]{r}} + \dots + \dots)$$

$$c^{(n)} \equiv \frac{1}{r} s^n (a \sqrt[r]{r^2} + b \sqrt[r]{r} + c) + \dots + \dots$$

C O R O H. I.

16. Si n sit numerus praegrandis, bina membra omissa prae primis hic appositis euaneantur; ex quo

quo perspicuum est tum fore $a^{(n)} : b^{(n)} : c^{(n)} = r :$
 $\sqrt[n]{r} : \sqrt[n]{r}$; in quo ipso tota vis methodi hic tradi-
tae consistit.

COROLL. 2.

17. Natura harum serierum recurrentium ter-
tii ordinis ideo imprimis notari meretur; quod fra-
ctiones principales P, Q, R tam concinne in fra-
ctiones simplices resoluere licuit, atque ex terminis
generalibus inde derivatis natura harum serierum
facile perspicitur.

Scholion.

18. Hinc ratio istam methodum ad plures
medias proportionales extendendi ita iam est mani-
festa, vt superfluum fore omnia ratiocinia, quibus
operationes virupiae annuntiatur, repetere. Quam
ob rem inventionem plurium medianarum propor-
tionalium inter duos numeros datam rationem $r : r$
tenentes, nunc quidem satis succincte exponere at-
que adeo binas propositiones cuique casui tribuendas
commode in unam contrahere poterimus.

Propositio VI.

19. Inter duos numeros rationem datam $r : r$
tenentes, tres medias continue proportionales in ra-
tionalibus proxime exhibere.

Solutio.

Solutio.

Sumtis in ratione data duobus numeris a et
 b , c , d , vt habeantur hi quinque numeri quantum-
vis a scopo aberrantes :

$$a : b : c : d : r a.$$

Hinc formentur alii hac legi vt sit

$$a' = a + b + c + d$$

$$b' = b + c + d + r a$$

$$c' = c + d + r a + r b$$

$$d' = d + r a + r b + r c$$

qui constituent progressionem iam multo proprius ad
scopum attingentem hanc :

$$a' : b' : c' : d' : r a'$$

ex quibus porro eidem lege alii noui quaerantur,
indeque denuo alii, quo pacto continuo proprius ad
proportionem geometricam continuam accedetur, ita
vt aberratio tandem omni afigibili minor euadat.

Singulae porro harum serierum

$$a, a', a'', a''', a'''' etc.$$

$$b, b', b'', b''', b'''' etc.$$

$$c, c', c'', c''', c'''' etc.$$

$$d, d', d'', d''', d'''' etc.$$

sunt recurrentes quarti ordinis secundum scalam re-
lationis : $4, 6(r-1), 4(r-1)^2, (r-1)^3$.

C. 3

Deni-

Denique harum scrierum termini generales, posito

$$\text{breuitatis gratia } \frac{r}{\sqrt[r-1]{r}} = r + \sqrt[r]{r^2} + \sqrt[r]{r^3} = s$$

erunt

$$a^{(n)} = \frac{a\sqrt[r]{r^3} + b\sqrt[r]{r^2} + c\sqrt[r]{r} + d}{\sqrt[r]{r^n}} + \text{etc.}$$

$$b^{(n)} = \frac{a\sqrt[r]{r^3} + b\sqrt[r]{r^2} + c\sqrt[r]{r} + d}{\sqrt[r]{r^n}} + \text{etc.}$$

$$c^{(n)} = \frac{a\sqrt[r]{r^3} + b\sqrt[r]{r^2} + c\sqrt[r]{r} + d}{\sqrt[r]{r^n}} + \text{etc.}$$

$$d^{(n)} = \frac{a\sqrt[r]{r^3} + b\sqrt[r]{r^2} + c\sqrt[r]{r} + d}{\sqrt[r]{r^n}} + \text{etc.}$$

$$d^{(n)} = \frac{a\sqrt[r]{r^3} + b\sqrt[r]{r^2} + c\sqrt[r]{r} + d}{\sqrt[r]{r^n}} + \text{etc.}$$

quorum expressionum prima tantum membra apponui, dum ex his reliqua facile formantur, loco eius tunc reliquos valores substituendo.

Ceterum si flattuatur

$$a + a'x + a''x^2 + a'''x^3 + a''''x^4 + \text{etc.} = Pa + Qb + Rc + Sd$$

ac breuitatis gratia fiat $x - x + rx = z$ reperitur vt

$$P = \frac{r}{r-z}, Q = \frac{z^2}{r-z}, R = \frac{z^3}{r-z}, S = \frac{z^4}{r-z}$$

vnde simul reliquarum similium scrierum à litteris a, b, c, d incipientium summae exhibentur.

Exemplum.

20. Inter duos numeros rationem duplamentes, tres medi proportionales sequenti modo reperiuntur :

<i>a</i>	1	4	22	116	613	3240	17124	90504
<i>b</i>	1	5	26	138	729	3853	20364	107628
<i>c</i>	16	31	164	867	4582	24217	127992	
<i>d</i>	17	37	195	1031	5449	28799	152209	
2 <i>a</i>	2	34	232	1256	5480	34248	181008	

Vbi ultimi numeri tam prope progressionem geometricam in ratione $1 : \sqrt[2]{2}$ procedentem constituent, quam fieri potest, numeris non maioribus adhibendis. Ita satis exacte erit $\frac{1031}{5449} = \sqrt[2]{2}$ seu per 12 reducendo $\frac{1031}{5449} = \sqrt[2]{2}$ cuius error longe infra partem millionesimam levitatis sufficit.

Scholion I.

21. In Musicis similis quaestio de undecim mediis proportionalibus inter rationem duplam inveniendis tractari solet, vt hinc omnia semitonia vnius Octave inter se aequalia reddantur; quod temperamentum eti principiis harmoniae aduersatur, tamen non abs re fore arbitror eius solutionem ex iisdem principiis petitam hic apponere :

A ..	112210	3532	59879	9985921
B ..	113222	3742	62911	1057971
H ..	114235	3964	66653	1120882
C ..	115249	4199	706171	1187535
C ^r ..	116264	4448	748161	1258152
D ..	117280	4712	792641	1332968
D ^r ..	118297	4992	839761	1412232
E ..	119315	5289	889681	1496208
F ..	120334	5604	942571	1585176
F ^r ..	121354	5938	998611	1679433
G ..	122375	6292	1057991	1779294
G ^r ..	123397	6667	1120911	1885093
a ..	224420	7064	118758	1997184

Vltima columna tam parum a progressione geometrica recedit, vt error ne ad millionesimam partem assurgere sit censendum.

S ch o l i o n.

22. Quae hacenus sunt tradita facile ad quoniam medios proportionales inueniendos in genero accommodari possunt, in quo negotio hoc impri- mis notari meretur, quod series numerorum, quibus solutio continetur non solum sint recurrentes, sed etiam denominator fractionum, ex quibus na- scuntur semper in factores resoluti queat, ad quemque etiam gradum ascendat: vnde egregia exempla aequationum altioris gradus solutionem: admittentium colliguntur, quibus conjectura mea circa formam

formam radicum cuiusque gradus olim prolata pulcherrime confirmatur. Verum methodus hic exposita multo latius extendi potest, quemadmodum in sequente propositione sum ostensurus; ita vt inde adhuc maiora subsidia in Analysis redundatura vi- deantur.

P r o p o s i t i o VII.

23. Methodum malto latius patentem exhibere, cuius ope inter duos numeros datam rationem $r : r'$ tenentes quotcunque medii proportionales in rationalibus proxime inueniri queant.

S o l u t i o.

Inter duos numeros a et ar datam rationem tenentes vt ante totidem mediis pro lubitu accipiatur, quot medios proportionales asignari oportet. Ponamus autem quatuor medios inueniri debere, quoniam hinc vis methodi clarus perspicetur, quam si rem generaliter tractare velimus. Constituta ergo pro hoc casu ad lubitum tali progressionem

$$a : b : c : d : e : ar : br : cr : dr : er : ar^2 \text{ etc.}$$

suntantur pro arbitrio quinque indices $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon$ per quos inde noua similiis progressionis formetur:

$$a' : b' : c' : d' : e' : ar' : br' : cr' : dr' : er' : ar'^2 \text{ etc.}$$

hac lege vt sit

$$\begin{aligned}a' &\equiv \alpha a + \beta b + \gamma c + \delta d + \epsilon e \\b' &\equiv \alpha b + \beta c + \gamma d + \delta e + \epsilon ar \\c' &\equiv \alpha c + \beta d + \gamma e + \delta ar + \epsilon br \\d' &\equiv \alpha d + \beta e + \gamma ar + \delta br + \epsilon cr \\e' &\equiv \alpha e + \beta ar + \gamma br + \delta cr + \epsilon dr\end{aligned}$$

Tum vero per eosdem indices ex hac progressiore denuo alia formetur noua, atque ita porro, vt hac ratione frequentes series obtineantur

$$\begin{aligned}a + a'x + a''x^2 + a'''x^3 + \text{etc.} &= Pa + Qbx + Rx + Sdx + Tx \\b + b'x + b''x^2 + b'''x^3 + \text{etc.} &= Pb + Qcx + Rd + Se + Tar \\c + c'x + c''x^2 + c'''x^3 + \text{etc.} &= Pd + Qex + Rar + Sbr + Tcr \\d + d'x + d''x^2 + d'''x^3 + \text{etc.} &= Pe + Qar + Rbr + Sbr + Tdr \\e + e'x + e''x^2 + e'''x^3 + \text{etc.} &= Pe + Qar + Rbr + Sbr + Tdr\end{aligned}$$

vnde ex lege praescripta valores litterarum P, Q, R, S, T quae a litteris arbitriariis a, b, c, d, e sunt immunes, et tantum ab indicibus $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon$ vna cum quantitate x et ratione proposita $i : r$ pendent, ita determinantur vt sit :

$$\begin{aligned}\frac{P}{x} - 1 &\equiv \alpha P + \beta Tr + \gamma Sr + \delta Rr + \epsilon Qr \\Q &\equiv \alpha Q + \beta P + \gamma Tr + \delta Sr + \epsilon Rr \\R &\equiv \alpha R + \beta Q + \gamma P + \delta Tr + \epsilon Sr \\S &\equiv \alpha S + \beta R + \gamma Q + \delta P + \epsilon Tr \\T &\equiv \alpha T + \beta S + \gamma R + \delta Q + \epsilon P\end{aligned}$$

ex quibus aequalitatibus quidem valores harum litterarum admodum perplexi elicuntur, ita vt denominator communis hujusmodi formam sit habiturus :

$$1 - Ax - Bx^2 - Cx^3 - Dx^4 - Ex^5$$

indicium praebens series illas esse recurrentes ex eadem scala relationis oriundas. Verum quod hic potissimum est notandum, hunc denominator semper in factores simplices resoluere licet, qui inter se ita erunt similes, vt ex quinis ipsius V^r valibus simili modo formentur. Scilicet si breuitatis gratia ponatur

$$\alpha + \beta V^r + \gamma V^r^2 + \delta V^r^3 + \epsilon V^r^4 = s$$

vbi etiam s quinos valores diuersos fortitut erit $i - sr$ factor simplex illius denominatoris, simul omnes quinque in se inuoluiens. Hinc ergo singulas fractiones, quibus litterae illae P, Q, R, S, T exprimuntur in quinque fractiones simples resoluere licet, quae ita concinne expresse reperiuntur :

$$\begin{aligned}P &= \frac{1}{s(i - sr)} + \dots + \dots + \dots + \dots \\Q &= \frac{i}{s(i - sr)V^r} + \dots + \dots + \dots + \dots \\R &= \frac{s(i - sr)V^r}{s(i - sr)V^r} + \dots + \dots + \dots + \dots \\S &= \frac{s(i - sr)V^r}{s(i - sr)V^r} + \dots + \dots + \dots + \dots \\T &= \frac{s(i - sr)V^r}{s(i - sr)V^r} + \dots + \dots + \dots + \dots\end{aligned}$$

vbi quaterna membra punctis indicata ex primis ipſi $\sqrt[r]{r}$ quatuor reliquos valores tribuendo, sunt iupplenda.

Hinc iam quinque serierum a numeris arbitriis a, b, c, d, e incipientium termini generales formari possunt, qui etiam ponendo breuitatis gratia

$$a\sqrt[r]{r^5} + b\sqrt[r]{r^3} + c\sqrt[r]{r^2} + d\sqrt[r]{r} + e = k$$

(vbi quoque quantitas k quinque valores inuoluere est existimanda) sequenti modo concinne exprimuntur :

$$\begin{aligned} a^{(n)} &= \frac{k}{s\sqrt[r]{r^4}} s^n + \dots + \dots + \dots + \dots \\ b^{(n)} &= \frac{k}{s\sqrt[r]{r^3}} s^n + \dots + \dots + \dots + \dots \\ c^{(n)} &= \frac{k}{s\sqrt[r]{r^2}} s^n + \dots + \dots + \dots + \dots \\ d^{(n)} &= \frac{k}{s\sqrt[r]{r}} s^n + \dots + \dots + \dots + \dots \\ e^{(n)} &= \frac{k}{s} s^n + \dots + \dots + \dots + \dots \end{aligned}$$

vbi quaterna membra omissa simili modo vt supra ex primis constitui oportet.

Hinc iam id in quo cardo rei versatur, intellectus scilicet si series illae in infinitum continetur, vt exponus n in infinitum ex crescere, tum respectu eius membra, in quo ipſi $\sqrt[r]{r}$ valor realis posse

positius tribuitur, reliqua eluanescere, sicque maneficio numeros $a^{(n)}, b^{(n)}, c^{(n)}, d^{(n)}, e^{(n)}$ progressio nem geometricam constituere. Verum hic probe est notandum, illam euaneſcentiam locum non habere nisi indices $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon$ sint positioi, quemadmodum hinc etiam casus supra tragoſatus resultat, si hi indices vniati aequales statuantur.

S ch o l i o n.

24. Circa hanc solutionem generalem obser vari conuenit, quod si valores litterarum P, Q, R, S, T ex formulis inuentis euoluantur, earumque denominator communis ad nihilum redigatur, vt posito $x = \frac{z}{s}$ huiusmodi prodeat aequatio quinti gradus :

$$z^5 - Az^4 - Bz^3 - Cz^2 - Dz - E = 0$$

tum huius aequationis radicem fore

$$z = a + \beta\sqrt[r]{r} + \gamma\sqrt[r]{r^2} + \delta\sqrt[r]{r^3} + \epsilon\sqrt[r]{r^4}$$

in qua forma simul omnes quinque radices continguntur si modo pro $\sqrt[r]{r}$ eius quinque valores successiue substituantur. Cum igitur haec radices eam ipsam habeant formam, quam olim conjectura eram affectus, hinc multo confidentius affirmare poterimus, omnium aequationum cuiuscunque gradus radices eo modo exprimi, quem conjectura mea indicat. Quod si

indices $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon$ unitati sequentur aequatio quinti gradus fit ex superioribus :

$$z^5 - 5z^4 - 10(r-1)z^3 - 10(r-1)^2z^2 - 5(r-1)^3z - (r-1)^4 = 0$$

cuius radix erit $z = 1 + \sqrt[5]{r} + \sqrt[5]{r^2} + \sqrt[5]{r^3} + \sqrt[5]{r^4}$.

$$\text{Seu posito } z = y + 1 \text{ erit huius aequationis}$$

$$y^5 - 10ry^4 + 10r(r+1)y^3 + 5r(r(r+r+1))y + r(r^3 + r^2 + r + 1)$$

$$\text{radix } y = \sqrt[5]{r} + \sqrt[5]{r^2} + \sqrt[5]{r^3} + \sqrt[5]{r^4}.$$

Auctore

AND. IOH. LEXELL.

I.

Ex occasione aequationis differentialis $a^n d^n y - y dx^n = 0$, cuius integrali inveniendo nuper eram intentus, incidi in methodum eam integrandi, haud inelegantem, quippe quae non solum eo nomine se commendabat, quod pro speciali isto exemplo videbatur esse faciliora; sed etiam quia optimo cum successu applicari posset, ad periciendam integrationem aequationis differentialis supra propostae, quae formae est generalis et inumeras sub se complectitur. Deinceps vero cum perspicerem, a summis Mathematicis, imprimis ab Illustr. Eulero in Tom. VII. Miscellan. Berolin. et Tom. III. Nov. Comment. Acad. Imper. Petropol. antea iam traditas fuisse, hanc aequationem integrandi Methodos, merito dubius haesui, vtrum quae ad hanc materiem illustrandam meditatus eram, publicae luci committerem, an non fatius foret, eadem penitus