EVOLVTIO INSIGNIS PARADOXI CIRCA AEQVALITATEM SVPERFICIERVM.

Auctore

L. EVLERO.

In doctrina linearum curuarum, si proponatur quantitas, cui arcus cuique abſciſſae indefinitae reſpondens aequalis eſſe debeat, linea curua inde ita determinatur vt plus vna problemati ſatisfacere neutiquam poſſit. Veluti ſi pro coordinatis orthogonalibus x et y, quarum illa x abſciſſam haec y applicatam denotet, eiusmodi linea curua quaeratur, cuius arcus abſciſſae x conueniens aequetur eiusdem functioni cuicunque X, problema perfecte determinatur, atque nonniſi vnicam lineam curuam admittit. Cum enim ſtatui oportat, $\surd(dx^2+dy^2)=dX$, poſito $dX=Pdx$, vbi P itidem erit functio data ipſius x, fiet $dy=dx\surd(PP-1)$ cuius formulae integratio aequationem determinatam pro linea curua quaeſita ſuppeditabit, ſiquidem conſtans per integrationem inuecta naturam curuae non afficit, ſed tantum eius ab axe diſtantiam definit. Ita propoſita linea curua quacunque praeter eam nulla datur alia, ipſi ita longitudine aequalis, vt arcus omnibus

bus abſciſſis reſpondentes ſint aequales. Quae enim a Geometris de aequalitate linearum curuarum paſſim ſunt inueſtigata, haec aequalitas non ad omnes arcus eidem abſciſſae reſpondentes extenditur; ſed pro vna tantum determinata abſciſſa ſeu etiam pluribus, nequaquam autem omnibus locum habere poteſt. Ex quo perſpicuum eſt non dari duas lineas curuas diuerſas, quae ad eundem axem relatae pro omnibus abſciſſis habeant arcus inter ſe aequales.

Haec ideo praemonenda duxi, quo clarius inſigne discrimen, quod inter lineas curuas et ſuperficies intercedit, perſpici poſſit. Cum enim ſuperficies perinde ad planum quoddam fixum ac lineae curuae ad axem rectilineum fixum referri earumque portiones cuique ſpatio in illo plano aſſumto imminentes indagari ſoleant; etiamſi hic pro quouis ſpatio quantitas ſuperficiei imminentis proponatur, inde tamen natura ſuperficiei neutiquam determinatur, ſed ſemper innumerabiles ſuperficies diuerſae exhiberi poſſunt, quarum portiones cuique ſpatio plani fixi imminentes ſint inter ſe aequales. Quae circumſtantia a natura linearum tantopere diſcrepans eo magis omni attentione digna videtur, quod inſigne paradoxon in doctrina ſolidorum complectitur. Ita ſuper baſi circulari hemiſphaerio conſtituto, ſuper eadem baſi innumerabilia alia ſolida extrui poſſe omnino mirum videbitur, quorum non ſolum tota ſuperficies aequalis ſit ſuperficiei

hemi-

hemisphaerii, sed etiam quorum superficies cuique portioni indefinitae basis imminens superficiei sphaericae eidem imminenti sit aequalis. Quin etiam si basi aliud planum oblique immineat, cuius proinde quaelibet portio ad basin cui imminet datam teneat rationem, infinita alia solida seu superficies siue conuexae siue concauae assignari possunt, quarum portiones quaeuis indefinitae ad basin cui imminent, eandem teneant rationem. Hoc igitur insigne paradoxon in Theoria solidorum hic accuratius examini subiicere constitui, cum inde haud leuia incrementa tam in ipsam hanc Theoriam quam in analysin redundatura videantur.

Primum ergo veritatem huius paradoxi euicturus, determinetur puncti cuiusuis superficiei situs ternis coordinatis orthogonalibus x, y, z, quarum binae priores sitae sint in plano fixo, tertia vero z illius puncti ab hoc plano distantiam exprimat. Cum iam natura superficiei aequatione inter has ternas coordinatas contineatur, ex ea valor ipsius z eliciatur, qui differentiatus praebeat $dz = p\,dx + q\,dy$; quo facto constat elementum superficiei hac formula $dx\,dy\sqrt{(1+pp+qq)}$ exprimi, imminet autem hoc elementum rectangulo infinite paruo baseos differentialibus dx et dy formato. Quodsi iam alia habeatur superficies, ex cuius aequatione inter easdem ternas coordinatas x, y et z prodeat $dz = r\,dx + s\,dy$, elementum huius superficiei eidem rectangulo

gulo $dx\,dy$ imminens erit $dx\,dy\sqrt{(1+rr+ss)}$; vnde manifestum est, si fuerit $rr+ss = pp+qq$, hoc illi fore aequale; et cum haec aequalitas in omnibus elementis locum habeat, etiam cuique spatio finito in plano fixo seu basi assumto aequa portio vtriusque superficiei imminebit. Verum quaestio superest principalis, vtrum haec aequalitas $rr+ss = pp+qq$ subsistere possit, quin simul sit $r = p$ et $s = q$, vnde eadem superficies prodiret; namque huic principali conditioni satisfieri oportet, vt formula $r\,dx + s\,dy$ integrationem admittat, quod an praeter casum $r = p$ et $s = q$ fieri possit non tam facile liquet. Omnis autem dubitatio vnico exemplo euanescet quo est $p = \frac{x}{a}$ et $q = \frac{y}{a}$, vt sit $z = \frac{xx+yy}{2a}$ si enim pro altera superficie capiatur $r = \frac{y}{a}$ et $s = \frac{x}{a}$, vnde vtique fit $rr+ss = pp+qq$, eius aequatio erit $z = \frac{xy}{a}$. En ergo duas superficies prorsus diuersas, alteram hac aequatione $2az = xx+yy$ alteram vero hac $az = xy$ contentam, quae ita inter se conueniunt, vt omnibus spatiis in basi assumtis in vtraque pares superficiei portiones immineant. Huiusmodi superficies congruentes appellabo, vnde nascitur haec quaestio maxime curiosa, quomodo proposita quacunque superficie, alias atque adeo omnes ei congruentes inuestigari oporteat. Quod problema latissimo sensu acceptum cum sit difficillimum, casus quos mihi quidem euoluere licuit, in sequentibus problematibus complectar.

Problema I.

1. Si ſuperficies data fuerit plana ad baſin ſeu planum fixum vtcunque inclinata, inuenire omnes alias ſuperficies ipſi congruentes.

Solutio.

Cum ſuperficies data ſit plana eius natura tali aequatione exprimitur $z = a + mx + ny$, quae ad baſin inclinatur angulo, cuius ſecans eſt $\sqrt{(1 + mm + nn)}$. Hic ergo ob $dz = mdx + ndy$ eſt $p = m$ et $q = n$, ideoque $pp + qq$ conſtans. Statuatur ergo $r = \alpha \operatorname{cof.} \omega$ et $s = \alpha \operatorname{fin.} \omega$ exiſtente $\alpha = \sqrt{(mm + nn)}$, ac neceſſe eſt angulum eo ita per binas coordinatas in baſi aſſumtas x et y definiri vt formula $dz = \alpha dx \operatorname{cof.} \omega + \alpha dy \operatorname{fin.} \omega$ integrabilis euadat. Cum igitur per transformationem fiat

$$z = \alpha(x \operatorname{cof.} \omega + y \operatorname{fin.} \omega) + \alpha \int d\omega (x \operatorname{fin.} \omega - y \operatorname{cof.} \omega)$$

euidens eſt huic conditioni ſatisfieri, ſi fuerit $x \operatorname{fin.} \omega - y \operatorname{cof.} \omega$ functio quaecunque anguli ω. Denotet ergo in genere Ω functionem quamcunque anguli ω, ac ſtatuatur

$$x \operatorname{fin.} \omega - y \operatorname{cof.} \omega = a\Omega \text{ eritque } z = \alpha(x \operatorname{cof.} \omega + y \operatorname{fin.} \omega + a \int \Omega d\omega)$$

vbi notandum eſt litteram $\alpha = \sqrt{(mm + nn)}$ denotare tangentem anguli, quem planum propoſitum facit cum baſi.

Coroll.

Coroll. I.

2. Primum ergo patet ſi planum propoſitum baſi ſit parallelum, ideoque $\alpha = 0$, fore etiam $z = 0$, ſeu $z = \text{conſt.}$ ita vt omnes ſuperficies congruentes ſint etiam planae baſi parallelae; quod quidem per ſe eſt manifeſtum, cum tale planum ſit minimum, quod cuique baſis portioni imminere poſſit, neque propterea aliud detur ipſi aequale.

Coroll. 2.

3. Sin autem planum propoſitum baſi non ſit parallelum neque etiam perpendiculare, ita vt α valorem quemcunque finitum obtineat, tum vtique innumerabiles aliae ſuperficies congruentes aſſignari poſſunt: cum functio Ω penitus ab arbitrio noſtro pendeat.

Coroll. 3.

4. Quoniam formula $d\omega(x \operatorname{fin.} \omega - y \operatorname{cof.} \omega)$ integrabilis eſſe debet: haec conditio etiam impletur, ſi fuerit $d\omega = 0$, ideoque angulus ω conſtans; Sit ergo $\omega = \zeta$; fietque $z = \alpha(x \operatorname{cof.} \zeta + y \operatorname{fin.} \zeta) + \text{conſt.}$ quae eſt aequatio pro plano ad baſin aeque inclinato ac propoſitum: ratione autem interſectionis vtrumque ab eo diſcrepare poteſt.

Exemplum I.

5. Pro ſuperficiebus autem diuerſis inueniendis ſit primo $\int \Omega d\omega = 0$, hincque $\Omega = 0$; et ob

x ſin.

x fin. $\omega = y$ cof. ω fiet fin. $\omega = \frac{y}{\sqrt{(xx+yy)}}$ et cof. $\omega = \frac{x}{\sqrt{(xx+yy)}}$, vnde aequatio pro fuperficie prodit: $z = \alpha \sqrt{(xx+yy)}$, quae eſt ad fuperficiem conicam, cuius axis bafi perpendiculariter infiftit, latus vero inclinatur angulo cuius tangens eſt $= \alpha$. Cum enim hic omnia plana tangentia ad bafin fub eodem angulo inclinentur, ratio congruentiae eſt manifeſta.

Exemplum 2.

6. Sit $a\,\Omega = b$ fin $\omega +$ cof. ω erit $a \int \Omega\, d\omega = a - b$ cof. $\omega + c$ fin ω. Fit ergo x fin. $\omega - y$ cof $\omega = b$ fin. $\omega + c$ cof. ω, hinc: $\frac{\text{fin.}\,\omega}{\text{cof.}\,\omega} = \frac{y+c}{x-b}$ atque fin. $\omega = \frac{y+c}{\sqrt{(x-b)^2+(y+c)^2}}$ et cof. $\omega = \frac{x-b}{\sqrt{(x-b)^2+(y+c)^2}}$ vnde colligitur.

$$z = \alpha\left(\sqrt{((x-b)^2+(y+c)^2)} + a\right)$$

quae eſt pro fimili cono refpectu bafis vtcunque aliter conftituto, ita tamen vt eius axis bafi perpendiculariter infiftat.

Exemplum 3.

Tab. III. Fig. 1. 7. Plano bafis in ipfa tabula affumto, fit recta AX axis abfciffarum x, et $XY = y$; iuncta AB ipfi AX normali fumatur angulus $BAM = \omega$, et defcripta curua quacunque EM, exprimat radius AM eam functionem ipfius; ω quam per $a\,\Omega$ indicaui. Ad hanc AM cadat recta YM normaliter et ob angulum $ATM = \omega$, fiet $AM = x$ fin. $\omega - y$ cof. ω, prorfus vt folutio inuenta poftulat. Tum vero erit $MY = x$ cof. $\omega + y$ fin. ω. Porro radio AM iungatur normaliter recta $MV = \int AM.\,d\omega$ eritque $z = \alpha(YM + MV) = \alpha\, YV$: fcilicet in puncto bafis Y erigi debet perpendicularis aequalis ipfi α. YV eaque pertinget ad fuperficiem quaefitam. Vel fi fuper recta VY perpendiculariter conftituatur angulus cuius tangens $= \alpha$, vertice in ipfo puncto V exiftente, latus furfum vergens totum fitum erit in fuperficie quaefita. Simili modo fi fuper alia quacunque recta $v\,m\,O$ conftituatur planum ad bafin normale, in eoque ex v ducatur recta cum $v\,O$ faciens angulum, cuius tangens $= \alpha$, etiam haec recta tota in fuperficiem quaefitam cadet ficque tota fuperficies facile determinabitur.

Scholion.

8. Conftructio haec attentius confiderari meretur. Primo igitur curua EMm circa punctum A pro arbitrio eſt defcripta, et rectae cuique ceu radio AM normaliter iuncta eſt recta MY, in qua vltra M producta capi debet $MV = \int AM.\,d\omega$, atque ex puncto V facile educitur recta, quae tota in fuperficiem quaefitam incidit. Hic animaduerto fi radius Am ipfi AM fit proximus, ideoque ang. $MAm = d\omega$, fore rectam $mv = MV + AM.\,d\omega$. at eſt $M\mu = AM.\,d\omega$, hincque $mv = \mu V$. Quod fi ergo recta vm priorem VM fecet in O erit elementum Vv arculus circularis centro O defcriptus. Hinc

Hinc loco curuae E M pro arbitrio describi potest curua $V v$, ad quam sufficit in singulis punctis V, v normaliter eduxisse rectas VO, vo, super quibus deinceps angulos, quorum tangens $= \alpha$, erigi oportet. Hinc ergo colligitur sequens facillima constructio.

Constructio omnium superficierum planae congruentium.

9. Super plano pro basi assumto describatur pro lubitu linea curua quaecunque B P F, ad cuius singula puncta P in plano basis ducantur normales P Q Y, euolutam illius curuae C Q G tangentes in Q. Ad punctum autem Q basi normaliter insistat recta Q S, vt sit $QS = \alpha PQ$, tum recta P S tota erit sita in superficie quaesita. Haec ergo constructio adhuc breuius ita enunciari potest:

Descripta in plano pro basi assumto ad lubitum curua quacunque B P F, ad eius singula puncta P extra basin educantur rectae et ad hanc curuam normales et ad ipsam basin inclinatae sub angulo cuius tangens $= \alpha$ tum omnes istae rectae in infinitum productae totae erunt sitae in superficie congruente, ideoque eam determinabunt.

Ratio huius constructionis etiam per se est euidens; cum enim omnes rectae SP in superficiem inventam cadant eoque in curua B P F terminentur, etiam

etiam omnia plana tangentia hanc curuam tangent, ideoque ad basin sub angulo cuius tangens $= \alpha$ inclinantur vnde superficiei portiuncula baseos elemento $dx\,dy$ imminens erit $= dx\,dy \sqrt{(1 + \alpha\alpha)}$.

Scholion.

10. Imprimis autem hic notasse iuuabit hanc constructionem latissime patere, cum descriptio curuae B P F prorsus ab arbitrio nostro pendeat, quod ita est interpretandum, vt pro ea non solum curuas regulares aequatione quapiam contentas siue algebraicas siue transcendentes accipere liceat, sed etiam ex pluribus partibus diuersarum linearum vtcunque compositas, quin etiam lineas libero manus ductu vtcunque descriptas. Ita si eius loco perimeter trianguli accipiatur, prodibit superficies pyramidis: circulus autem semper dat superficiem conicam.

Problema 2.

11. Si superficies data hac aequatione $2az = xx + yy$ exprimatur, inuenire omnes superficies alias illi congruentes.

Solutio.

Cum pro superficie data sit $a\,dz = x\,dx + y\,dy$, ponatur pro quaesitis $a\,dz = r\,dx + s\,dy$, atque necesse est sit $rr + ss = xx + yy$, vnde eiusmodi valores pro r et s elici oportet, vt formula $r\,dx$

$r\,dx + s\,dy$ integrationem admittat. Ac casus quidem statim obuii sunt primo $r = y$ et $s = x$, vnde oritur $az = xy$, deinde $r = x$ et $s = -y$, vnde fit $2az = xx - yy$ quae autem a priori non est diuersa, dum mutando binarum x et y in basi directionem similem recipiunt formam; ac generaliter quidem ponendo $x = X\,\text{cos.}\,\zeta - Y\,\text{sin.}\,\zeta$ et $y = X\,\text{sin.}\,\zeta + Y\,\text{cos.}\,\zeta$, prior dat

$$az = XX\,\text{sin.}\,\zeta\,\text{cos.}\,\zeta + XY(\text{cos.}\,\zeta^2 - \text{sin}\,\zeta^2) - YY\,\text{sin.}\,\zeta\,\text{cos.}\,\zeta \text{ seu}$$

$$2az = XX\,\text{sin.}\,2\zeta + 2XY\,\text{cos.}\,2\zeta - YY\,\text{sin.}\,2\zeta$$

quae sumto angulo 2ζ recto manifesto in formam posteriorem abit. Vt autem alias superficies eliciamus, statuamus $rr = xx + 2v$ et $ss = yy - 2v$. Hinc cum sit $az = \int r\,dx + \int s\,dy$ habebimus

$$\int r\,dx = \int dx\,\sqrt{(xx+2v)} = \tfrac{1}{2}x\sqrt{(xx+2v)} + vl(x + \sqrt{(xx+2v)}) - \int dv\,l(x + \sqrt{(xx+2v)})$$

$$\int s\,dy = \int dy\,\sqrt{(yy-2v)} = \tfrac{1}{2}y\sqrt{(yy-2v)} - vl(y + \sqrt{(yy-2v)}) + \int dv\,l(y + \sqrt{(yy-2v)})$$

quare vt summa fiat integrabilis, sumi oportet pro $l\frac{y + \sqrt{(yy-2v)}}{x + \sqrt{(xx+2v)}}$ functionem quampiam ipsius v quae sit lV, eritque $az = \frac{1}{2}x\sqrt{(xx+2v)} + \frac{1}{2}y\sqrt{(yy-2v)} - vlV + \int dv\,lV$ existente $\frac{y+\sqrt{(yy-2v)}}{x+\sqrt{(xx+2v)}} = V$, sicque introducendo nouam variabilem v, eiusque functionem quamcunque assumendo ad quoduis basis punctum perpendiculum erigi potest vsque ad superficiem quaesitam pertingens. Notandum autem est esse $-vlV + \int dv\,lV = -\int\frac{v\,dV}{V}$, ita vt logarithmus ex calculo egrediatur. Verum hic ingens incommodum occurrit, quod relatio inter x, y et v nimis difficulter expediatur; ex quo aliam solutionem adiungo.

Alia Solutio.

12. Cum esse debeat $rr + ss = xx + yy$ statuamus:

$x = v\,\text{cos.}\,\Phi$, $y = v\,\text{sin.}\,\Phi$, $r = v\,\text{cos.}\,\omega$ et $s = v\,\text{sin.}\,\omega$ eritque

$dx = dv\,\text{cos.}\,\Phi - v\,d\Phi\,\text{sin.}\,\Phi$ et $dy = dv\,\text{sin.}\,\Phi + v\,d\Phi\,\text{cos.}\,\Phi$ hincque

$a\,dz = v\,dv\,\text{cos.}(\Phi - \omega) - vv\,d\Phi\,\text{sin.}(\Phi - \omega)$. Iam cum sit

$\int v\,dv\,\text{cos.}(\Phi - \omega) = \tfrac{1}{2}vv\,\text{cos.}(\Phi - \omega) + \tfrac{1}{2}\int vv(d\Phi - d\omega)\,\text{sin.}(\Phi - \omega)$

erit $az = \tfrac{1}{2}vv\,\text{cos.}(\Phi - \omega) - \tfrac{1}{2}\int vv(d\Phi + d\omega)\,\text{sin.}(\Phi - \omega)$

quod vltimum membrum integrabile esse nequit, nisi sit $vv\,\text{sin.}(\Phi - \omega)$ functio anguli $\Phi + \omega$. Statuo ergo secundum signandi modum iam passim receptum, $vv\,\text{sin.}(\Phi - \omega) = F' : (\Phi + \omega)$, vt fiat

$$2az = vv\,\text{cos.}(\Phi - \omega) - F : (\Phi + \omega)$$

existente $d.\,F : (\Phi + \omega) = (d\Phi + d\omega)\,F' : (\Phi + \omega)$.

Vel introducantur alii bini anguli μ et ν vt sit $\Phi = \frac{\mu + \nu}{2}$ et $\omega = \frac{\mu - \nu}{2}$, hincque habebitur

$$v = \sqrt{\frac{F' : \mu}{\text{sin.}\,\nu}};\quad x = v\,\text{cos.}\,\Phi,\ y = v\,\text{sin.}\,\Phi \text{ tandemque}$$

$$2az = \frac{F' : \mu}{\text{tang.}\,\nu} - F : \mu$$

quae

quae ſolutio multo eſt ſimplicior; nihilo tamen minus tertiam ſubiungo.

Solutio tertia.

13. Cum eſſe debeat $rr+ss=xx+yy$, ponatur

$$r=x\,\text{coſ.}\,\omega+y\,\text{ſin.}\,\omega \quad \text{et} \quad s=x\,\text{ſin.}\,\omega-y\,\text{coſ.}\,\omega$$

eritque $adz=xdx\,\text{coſ.}\,\omega+(ydx+xdy)\,\text{ſin.}\,\omega-ydy\,\text{coſ.}\,\omega$ ideoque

$$az=\tfrac{1}{2}xx\,\text{coſ.}\,\omega-\tfrac{1}{2}yy\,\text{coſ.}\,\omega+xy\,\text{ſin.}\,\omega-\int d\omega(xy\,\text{coſ.}\,\omega-\tfrac{1}{2}(xx-yy)\,\text{ſin.}\,\omega).$$

Sit itaque Ω functio quaecunque anguli ω, ſtatuaturque $2xy\,\text{coſ.}\,\omega-(xx-yy)\,\text{ſin.}\,\omega=\Omega$ eritque

$$2az=(xx-yy)\,\text{coſ.}\,\omega+2xy\,\text{ſin}\,\omega-\int\Omega\,d\omega$$

quae ſolutio praecedentes ſimplicitate multum ſuperat.

Coroll. 1.

14. Si in hac vltima ſolutione ponatur $x=v\,\text{coſ.}\,\Phi$ et $y=v\,\text{ſin.}\,\Phi$ erit $xx-yy=vv\,\text{coſ.}\,2\Phi$ et $2xy=vv\,\text{ſin.}\,2\Phi$; ex quo ſolutio ita his duabus aequationibus erit contenta

$$vv\,\text{ſin.}(2\Phi-\omega)=\Omega \quad \text{et} \quad 2az=vv\,\text{coſ.}(2\Phi-\omega)-\int\Omega\,d\omega$$

vbi pro Ω functio quaecunque anguli ω accipi poteſt.

Coroll. 2.

15. Caſus euolutu facillimus habetur, ponendo $\Omega=A\,\text{coſ.}\,\omega+B\,\text{ſin.}\,\omega$ vnde fit $\int\Omega\,d\omega=A\,\text{ſin.}\,\omega-B\,\text{coſ.}\,\omega$. Hinc poſtrema ſolutio dat $(2xy-A)\,\text{coſ.}\,\omega=(xx-yy+B)\,\text{ſin.}\,\omega$ vnde elicitur:

$$\text{ſin.}\,\omega=\frac{2xy-A}{\sqrt{((xx+yy)^2-4Axy+2B(xx-yy)+AA+BB)}}=\frac{2xy-A}{V}$$

$$\text{coſ.}\,\omega=\frac{xx-yy+B}{\sqrt{((xx+yy)^2-4Axy+2B(xx-yy)+AA+BB)}}=\frac{xx-yy+B}{V}$$

ſcribendo V loco formulae radicalis. Hincque fit

$$2az=\sqrt{((xx+yy)^2-4Axy+2B(xx-yy)+AA+BB)}.$$

Coroll. 3.

16. Cum in tertia ſolutione formula $d\omega(xy\,\text{coſ.}\,\omega-\tfrac{1}{2}(xx-yy)\,\text{ſin.}\,\omega)$ integrabilis effici debeat, euidens eſt hoc fieri ſi angulus ω conſtans accipiatur. Sit ergo $\omega=\zeta$ prodibitque ſolutio iam ſupra indicata $2az=(xx-yy)\,\text{coſ.}\,\zeta+2xy\,\text{ſin.}\,\zeta$.

Conſtructio generalis.

17. Poſitis $AX=x$ et $XY=y$ erit pro coroll. 1. $AY=v$ et angulus $XAY=\Phi$. Ducatur AV vt ſit ang. $YAV=XAY=\Phi$ et ſumta $AD=a$, capiatur AV tertia proportionalis ad AD et AY, vt fiat $AV=\frac{vv}{a}$. Ad alteram axis partem ſtatuatur angulus $XAM=90°-\omega$, erit angulus $VAM=90°+2\Phi-\omega$, ex V ad AM ducatur normalis VM, eritque $AM=-\frac{vv}{a}\,\text{ſin.}(2\Phi-\omega)$, ideoque $\Omega=-AM.a$, et $VM=\frac{vv}{a}\,\text{coſ.}(2\Phi-\omega)$. Ex hac ergo conſtructione colligitur Tab. III. Fig. 3.

$$2az=a.VM-a\int AM\,d\omega \quad \text{ſeu} \quad 2z=VM+\int AM.d\omega$$

ſumafumatur ergo $MP = \int AM.\, d\omega$ vt fiat $z = VP$, ac fupra iam vidimus, in quacunque curua fuerit punctum M, curuam CPG punctum P continentem ita effe comparatam, vt recta MP ad eam fit normalis. Quare relecta curua BMF eius loco curvam CPG pro arbitrio affumere licet, vnde haec conftructio conficietur.

Sumta in bafi recta AX, in eaque $AD = a$, ad lubitum defcribatur curua quaecunque CPG, ad quam in quouis puncto P ducatur normalis indefinita PV, in qua fumto puncto quocunque V ductaque recta AV bifecetur angulus DAV recta AY cuius longitudo fumatur media proportionalis inter AD et AV, et in puncto Y ad bafin perpendiculariter erigatur recta femiffi ipfius PV aequalis, quae ad fuperficiem quaefitam pertinget. Si hoc modo in fingulis normalibus PV in infinitum productis omnia puncta euoluantur, omnia fuperficiei ex curua CPG oriundae puncta determinabuntur.

Scholion.

18. Solutio huius problematis multo eft difficilior quam praecedentis, cum reductio formulae $r dx + s dy$ ad integrabilitatem, ita vt fit $rr + ss = xx + yy$ haud exigua artificia requirat. Qui autem alios cafus tentare voluerit, faepe tantas offendet difficultates, quibus fuperandis omnis fagacitas Analytica vix fufficere videtur. Quare folutionem generalem etiamnunc vix fperare licet; quae huc redit vt propofita formula integrabili $p dx + q dy$, inueftigetur alia formula $r dx + s dy - dz$ itidem integrabilis, ita vt fit $rr + ss = pp + qq$. Statui quidem poffet $r = p \cos\omega + q \sin\omega$ et $s = q \cos\omega - p \sin\omega$, fieretque

$$dz = (p dx + q dy) \cos\omega + (q dx - p dy) \sin\omega$$

vbi cum $p dx + q dy$ fit integrabile ftatuatur integrale $= u$ eritque $z = u \cos\omega + \int (u d\omega + q dx - p dy) \sin\omega$. Neque vero patet quomodo angulum ω per x et y definire liceat vt haec formula integrabilis euadat. Quare eiusmodi cafus euoluam, vbi mihi quidem difficultates fuperare licuit.

Problema 3.

19. Si fuperficies data hac exprimatur aequatione $dz = X dx + Y dy$, vbi X per folam x et Y per folam Y detur, inuenire omnes fuperficies ifti congruentes.

Solutio.

Quod fi ergo pro fuperficiebus quaefitis ponatur

$dz = r dx + s dy$, neceffe eft fit $rr + ss = XX + YY$ ftatuatur ergo $r = \sqrt{(XX + 2v)}$ et $s = \sqrt{(YY - 2v)}$ vt fiat $z = \int (dx \sqrt{(XX + 2v)} + dy \sqrt{(YY - 2v)})$

Iam

Iam quaeratur integrale formulae $dx\sqrt{(XX+2v)}$ sumta quantitate v constante, quod sit $=P$, ita vt P sit functio ipsarum x et v, quam tanquam datam spectare licet; ea igitur differentiata prodeat $dP=dx\sqrt{(XX+2v)}+R\,dv$, vbi quidem constat fore $R=\int\frac{dx}{\sqrt{(XX+2v)}}$ quantitate v pro constante habita. Simili modo spectata v vt constante quaeratur quantitas $Q=\int dy\sqrt{(YY-2v)}$, eaque denuo differentiata vtraque y et v pro variabili habita prodeat $dQ=dy\sqrt{(YY-2v)}+S\,dv$, eritque $S=-\int\frac{dy}{\sqrt{(YY-2v)}}$, quae ergo quantitates pariter erunt cognitae. Hinc facta substitutione habebitur.

$$z=\int(dP-R\,dv+dQ-S\,dv)=P+Q-\int(R+S)\,dv$$

et nunc formulam $(R+S)\,dv$ integrabilem reddi oportet quod aliter fieri nequit nisi $R+S$ sit functio ipsius v. Sit itaque V functio quaecunque ipsius v, et sumatur $R+S=V$, eritque $z=P+Q-\int V\,dv$, in quibus aequationibus constructio generalis omnium superficierum congruentium continetur.

Problema 4.

20. Si pro superficie data coordinata ad basin perpendicularis exprimatur functione homogenea n dimensionum ipsarum x et y, inuestigare omnes superficies ipsi congruentes.

Solutio.

Ponatur $y=ux$, et aequatio pro superficie data talem habebit formam $a^{n-1}z=x^n\,U$ existente U functio-

functione ipsius u tantum, quae ergo erit data. Hinc fit.

$$a^{n-1}dz=nx^{n-1}U\,dx+x^n\,dU.$$

ab ob $dy=u\,dx+x\,du$, erit:

$$a^{n-1}dz=x^{n-1}\left(nU\,dx+\frac{dU}{du}dy-\frac{u\,dU}{du}dx\right)$$

ita vt sit $p=x^{n-1}\left(nU-\frac{u\,dU}{du}\right)$ et $q=x^{n-1}\frac{dU}{du}$.

hincque $pp+qq=x^{2n-2}\left(nnUU-\frac{2nuU\,dU}{du}+\frac{(1+uu)\,dU^2}{du^2}\right)$

Statuatur $nnUU-\frac{2nuU\,dU}{du}+\frac{(1+uu)\,dU^2}{du^2}=VV$, ita vt etiam V sit functio data ipsius u: et iam pro superficiebus quaesitis constituatur haec aequatio differentialis

$$a^{n-1}dz=x^{n-1}(r\,dx+s\,dy)$$

ac necesse est vt sit $rr+ss=VV$. Nunc pro y substituto valore ux, fit.

$$a^{n-1}dz=x^{n-1}((r+su)\,dx+xs\,du)$$

hincque prius membrum integrando per x.

$$a^{n-1}z=\tfrac{1}{n}x^n(r+su)+\int x^n\left(s\,du-\frac{dr-s\,du-u\,ds}{n}\right)$$

Statuatur $r=V\,\text{cos.}\,\Phi$ et $s=V\,\text{sin.}\,\Phi$, vt habeatur

$$na^{n-1}z=x^nV(\text{cos.}\Phi+u\,\text{sin.}\Phi)+\int x^n((n-1)V\,du\,\text{sin}\,\Phi$$
$$+V\,d\Phi(\text{sin.}\Phi-u\,\text{cos.}\Phi)-dV(\text{cos.}\Phi+u\,\text{sin.}\Phi))$$

Hic formula differentialis $(n-1)V\,du\,\text{sin.}\,\Phi+V\,d\Phi(\text{sin.}\,\Phi-u\,\text{cos.}\,\Phi)-dV(\text{cos.}\,\Phi+u\,\text{sin.}\,\Phi)$ duas tantum variabiles u et Φ complectitur, dabitur

tur ergo multiplicator M itidem functio ipsarum u et Φ qui eam reddat integrabilem: sit ergo

$$M((n-1)V du \text{ sin.} \Phi + V d\Phi (\text{sin.} \Phi - u \text{ cos.} \Phi) - dV(\text{cos.} \Phi + u \text{ sin.} \Phi)) = dS$$

et S etiam erit functio assignabilis ipsarum u et Φ, inde cum sit

$$na^{n-1}z = x^n V(\text{cos.} \Phi + u \text{ sin.} \Phi) + \int \frac{x^n dS}{M}$$

euidens est hanc formulam integrabilem esse non posse nisi sit $\frac{x^n}{M}$ functio ipsius S. Ponamus ergo

$x^n = MF' : S$ fietque $na^{n-1}z = x^n V(\text{cos.} \Phi + u \text{ sin.} \Phi) + F : S$.

Per binas porro variabiles u et Φ, determinantur M et S, hincque porro x et $y = ux$, atque z, vnde ob functionem arbitrariam hic indroductam haec solutio est generalis.

Scholion 1.

21. Hic modo prorsus singulari euenit, vt casu $n = 0$ haec solutio locum non inueniat, neque etiam patet quomodo huic incommodo occurri possit. Quod hic eo magis mirum videtur, cum alioquin huiusmodi casus alio modo tractati satis facile expediantur. Interim haec duo problemata latissime patent, et ex III. casus resolui possunt quibus superficies data est cylindrica, ex IV. vero quibus

quibus est conica, qui etiamsi videantur facillimi, tamen solutiones hinc resultantes formulas transcendentes valde complicatas inuoluunt, vt inde superficies congruentes simpliciores nullo modo elicere liceat. Verum neuter horum casuum ad superficiem sphaericam accommodari potest cuius natura cum hac aequatione $z = V(aa - xx - yy)$ exprimatur, pro aequatione superficierum congruentium $dz = rdx + sdy$ fieri debet $rr + ss = \frac{xx + yy}{aa - xx - yy}$; quomodocunque autem hinc quantitates r et s definiantur, haud patet quomodo formula $rdx + sdy$ ad integrabilitatem perduci possit. Dubium tamen est nullum, quin dentur infinitae superficies sphaericae congruentes.

Scholion 2.

22. Casum autem, quo superficies proposita est sphaerica, aliosque similes expediri posse obseruaui, si in plano fixo pro basi assumto binae coordinatae non orthogonales capiantur, sed altera sumatur recta ex puncto fixo educta, altera vero angulo eius positionem determinante contineatur. Tab. III. Fig. 4. Sit igitur C hoc punctum fixum, et recta CA positione data, et pro puncto quocunque in basi assumto V statuatur recta $CV = v$ et angulus $ACV = \Phi$; perpendiculum autem in V insistens ad superficiem pertingens sit z, quod ita per v et Φ exprimatur vt sit $dz = pdv + qd\Phi$; consideretur primo angulus Φ constans et sumto $Vv = dv$ perpendiculum puncto v insistens erit $z + pdv$ vnde tangens

tangens in rectae VC punctum Q incidet vt sit $VQ = \frac{z}{p}$. Tum consideretur distantia v vt constans, et sumto angulo $VCu = d\Phi$ vt sit $Vu = v d\Phi$ perpendiculum puncto u insistens erit $= z + q d\Phi$; quare in recta VP ad CV normali tangens incidet in P vt sit $VP = \frac{zv}{q}$ vnde planum tangens basin secabit recta PQ, ad quam ex V demisso perpendiculo VR, erit $VR = \frac{VP.VQ}{PQ} = \frac{zv}{\surd(qq + ppvv)}$ ideoque anguli quem planum tangens facit cum basi, tangens $= \surd(pp + \frac{qq}{vv})$ et secans $- \surd(1 + pp + \frac{qq}{vv})$. Quare cum in basi spatiolum rectangulare $vVuo$ sit $= vdvd\Phi$, elementum superficiei ipsi imminens habebitur $= vdvd\Phi \surd(1 + pp + \frac{qq}{vv})$, ex quo alia superficies aequatione $dz = rdv + sd\Phi$ expresse illi erit congruens si fuerit $rr + \frac{ss}{vv} = pp + \frac{qq}{vv}$. Verum etiam hanc substitutionem in analysi praecedente instituere licet, vti ex solutione problematis sequentis perspicietur.

Problema 5.

23. Si superficies proposita fuerit sphaerica radio $= a$ descripta, inuestigare omnes superficies ipsi congruentes.

Solutio.

Cum aequatio pro superficie sphaerica sit $z = \surd(aa - xx - yy)$ posito $dz = p dx + q dy$ erit $p = \frac{-x}{\surd(aa - xx - yy)}$ et $q = \frac{-y}{\surd(aa - xx - yy)}$ vnde $pp + qq = \frac{xx + yy}{aa - xx - yy}$. Quare si pro superficiebus quaesitis aequatio sumatur $dz = rdx + sdy$, oportet sit $rr + ss = \frac{xx + yy}{aa - xx - yy}$. Nunc vero statuatur $x = v\,\mathrm{cos}.\Phi$ et $y = v\,\mathrm{sin}.\Phi$, vt fiat $rr + ss = \frac{vv}{aa - vv}$, eritque $dz = dv(r\,\mathrm{cos}.\Phi + s\,\mathrm{sin}\,\Phi) + vd\Phi(s\,\mathrm{cos}.\Phi - r\,\mathrm{sin}.\Phi)$, pro qua breuitatis gratia scribatur $dz = Rdv + Svd\Phi$, vbi perspicuum est etiam fieri oportere $RR + SS = \frac{vv}{aa - vv}$, vnde idoneos valores pro R et S erui conuenit, vt formula $Rdv + Svd\Phi$ integrationem admittat. Hoc autem per problema tertium praestari posse manifestum est. Ponatur enim $S = \frac{t}{v}$ et $R = \surd(\frac{vv}{aa - vv} - \frac{tt}{vv})$ et habebitur

$$dz = dv\surd(\frac{vv}{aa - vv} - \frac{tt}{vv}) + t d\Phi, \text{ seu}$$

$$z = t\Phi + \int(dv\surd(\frac{vv}{aa - vv} - \frac{tt}{vv}) - \Phi dt).$$

Quaeratur eiusmodi functio ipsarum v et t, vt fiat

$$dP = dv\surd(\frac{vv}{aa - vv} - \frac{tt}{vv}) + Q dt$$

ita vt sit $P = \int dv\surd(\frac{vv}{aa - vv} - \frac{tt}{vv})$ sumto t constante et $Q = -t\int\frac{dv}{vv\surd(\frac{vv}{aa - vv} - \frac{tt}{vv})}$ sumto pariter t constante.

Tum igitur fit $z = t\Phi + \int(dP - Qdt - \Phi dt)$ seu

$$z = P + t\Phi - \int dt(Q + \Phi).$$

Quo circa necesse est sit $Q + \Phi =$ functioni ipsius t quae sit T, vnde fit $\Phi = T - Q$ et

$$z = P + Tt - Qt - \int T dt = P - Qt + \int t dT.$$

 Scho-

Scholion.

24. En ergo ſolutionem huius problematis difficillimi vnde ſimul patet ſimili, modo problema multo generalius quo $rr + ss$ ſeu $RR + SS$ aequari debeat functioni cuicunque ipſius v reſolui potuiſſe. Verum cum hic valores litterarum P et Q nonniſi maxime tranſcendentaliter aſſignari poſſint, neutiquam patet, quomodo vnica ſaltem ſuperficies ſimplicior inueniri queat, quae ſphaericae ſit congruens. Ceterum hic artificia, quibus hactenus formulam $r\,dx + s\,dy$ ad integrabilitatem reuocare licuit diſtinctius expoſuiſſe iuuabit. Hic autem primum obſeruandum eſt in hac formula ternas variabiles contineri, praeter x et y ſcilicet vnam nouam in litteris r et s inuolutam, cuius relatio ad $x\,y$ ea quaeritur; qua illa formula integrabilis reddatur. Artificia autem hic adhibenda eo redeunt, vt per idoneas ſubſtitutiones ternae nouae variabiles t, u et w introducantur, quaeſtioque eo redigatur, vt huiusmodi formula $M\,dt + N\,du$ integrabilis ſit efficienda, tertium enim differentiale dw ſemper eliminare licet, ita vt haec variabilis w tantum in quantitatibus finitis M et N contineatur. Tum autem ſequentibus caſibus ſolutionem elicere licebit,

1°. Si alterutra quantitatum M et N euaneſcat, namque ſi $N = 0$, vt formula $M\,dt$ ſit integrabilis, neceſſe eſt quantitatem M functioni ipſius t aequari; facto igitur $M = F' : t$, vnde relatio inter ternas variabiles t, u et w generaliſſime definitur, erit $\int M\,dt = F : t$.

2°. Si formula $M\,dt + N\,du$ huiusmodi formam habeat $S(P\,dt + Q\,du)$, vbi P et Q ſint functiones tantum binarum variabilium t et u, tertia vero w in ſolo factore S contineatur. Tum enim ſemper inueniri poteſt multiplicator R vt ſit $R(P\,dt + Q\,du) = dV$ ſicque quantitas V definiri queat, quae erit functio ipſarum t et u. Hoc modo formula abit in, $\frac{S\,dV}{R}$, ac iam ſtatui debet $S = RF' : V$, formulaeque integrale fiet $\int \frac{S}{R} dV = F : V$

3°. Reſolutio quoque ſuccedit ſi quantitas M tantum ſit functio binarum t et u tertiaque w in ſola N inſit, tum enim eiusmodi functionem binarum t et u quae ſit V inuenire licet, vt ſit $dV = M\,dt + S\,du$ hoc modo formula propoſita hanc induit formam $dV + (N - M)\,du$: ſicque capi debet $N = M + F' : u$ et integrale erit $V + F : u$.

4°. Si tertia variabilis w ita in vtramque quantitatem M et N ingrediatur, vt binae functiones ipſarum t et u puta P et Q dentur, quibus haec forma $MQ + NP$ a variabili w immunis reddatur, tum ſolutio ſequenti modo obtineri poterit.

$$dt = \frac{Q\,dp - R\,dq}{PQ - RS} \text{ et } du = \frac{P\,dq - S\,dp}{PQ - RS}.$$

Con-

Consideretur formula differentialis $P\,dt - Q\,du$, quae multiplicatore R integrabilis reddatur; ponaturque $dv = R(P\,dt - Q\,du)$, eritque v functio cognita ipsarum t et u, vnde vicissim t per u et v definiatur ac fiet $dt = \frac{Q\,du}{P} + \frac{dv}{PR}$. Quare formula proposita erit:
$\frac{MQ + NP}{P} du + \frac{M\,dv}{PR}$, vbi $\frac{MQ + NP}{P}$ est functio ipsarum u et v tantum sicque resolutio per n°. 4 absoluetur.

Scholion. 2.

25. De his integrationibus imprimis notandum est, eas esse generalissimas, dum functiones maxime generales cuiuspiam variabilis in integralia introducuntur, pro quibus adeo functiones nullo continuitatis vinculo contentas, quae vt supra videmus ex libero manus ductu nascuntur, assumere licet. Quin etiam omnium huius generis quaestionum criterium in hoc consistit, vt tales functiones prorsus ab arbitrio nostro pendentes in earum solutiones introducantur.

DE

DE SVMMIS SERIERVM NVMEROS BERNOVLLIANOS INVOLVENTIVM.

Auctore

L. EVLERO.

1.

Quantopere sint notatu digni numeri ab Inuentore *Bernoulliani* vocati, quippe quibus olim *Iacobus Bernoulli* in Arte coniectandi est vsus ad progressiones potestatum numerorum naturalium summandas, cum ab aliis, qui serierum doctrinam nouis inuentis locupletauerunt, tum etiam a me abunde est ostensum, vbi per eosdem numeros serierum potestatum reciprocarum summas expressas dedi. *Bernoullius* quidem progressionem horum numerorum ob calculi molestiam non vltra quintum terminum continuauit, qui sunt $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{30}$, $\frac{1}{42}$, $\frac{1}{30}$, $\frac{5}{66}$, atque Auctori vsque ad vndecimas potestates summandas sufficiebant. Postquam autem satis concinnam huius progressionis legem detexissem, 17 eius primores terminos assignaui. Ipsos vero numeros *Bernoullianos* respectiue per numeros 6, 10, 14, 18, 22 etc. multiplico quo denominatores fiant simplicio-

 res,

Consideretur formula differentialis $P\,dt - Q\,du$, quae multiplicatore R integrabilis reddatur; ponaturque $dv = R(P\,dt - Q\,du)$, eritque v functio cognita ipsarum t et u, vnde vicissim t per u et v definiatur ac fiet $dt = \frac{Q\,du}{P} + \frac{dv}{PR}$. Quare formula proposita erit:

$\frac{MQ+NP}{P}du + \frac{M\,dv}{PR}$, vbi $\frac{MQ+NP}{P}$ est functio ipsarum u et v tantum sicque resolutio per n°. 4 absoluetur.

Scholion. 2.

25. De his integrationibus imprimis notandum est, eas esse generalissimas, dum functiones maxime generales cuiuspiam variabilis in integralia introducuntur, pro quibus adeo functiones nullo continuitatis vinculo contentas, quae vt supra videmus ex libero manus ductu nascuntur, assumere licet. Quin etiam omnium huius generis quaestionum criterium in hoc consistit, vt tales functiones prorsus ab arbitrio nostro pendentes in earum solutiones introducantur.

DE

DE SVMMIS SERIERVM NVMEROS BERNOVLLIANOS INVOLVENTIVM.

Auctore

L. EVLERO.

1.

Quantopere sint notatu digni numeri ab Inuentore *Bernoulliani* vocati, quippe quibus olim *Iacobus Bernoulli* in Arte coniectandi est vsus ad progressiones potestatum numerorum naturalium summandas, cum ab aliis, qui serierum doctrinam nouis inuentis locupletauerunt, tum etiam a me abunde est ostensum, vbi per eosdem numeros serierum potestatum reciprocarum summas expressas dedi. *Bernoullius* quidem progressionem horum numerorum ob calculi molestiam non vltra quintum terminum continuauit, qui sunt $\frac{1}{6}, \frac{1}{30}, \frac{1}{42}, \frac{1}{30}, \frac{5}{66}$, atque Auctori vsque ad vndecimas potestates summandas sufficiebant. Postquam autem satis concinnam huius progressionis legem detexissem, 17 eius primores terminos assignaui. Ipsos vero numeros *Bernoullianos* respectiue per numeros 6, 10, 14, 18, 22 etc. multiplico quo denominatores fiant simplicio-

 res,