

CONSIDERATIONES

DE TRAIECTORIIS ORTHO-
GONALIBVS.

Auctore

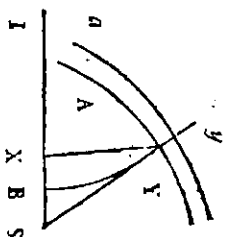
L. EYLLERO.

I.

Problema trajectoriarum orthogonalium, quod olim Geometricarum sagacitatem diu multumque exercuit, ita se habebat

*ut propositis infinitis lineis AY, ay
communiquadam lege contentis,
quaerantur aliae lineae BY y illas
normaliter traicientes*

ad quod solvendum sequentia momenta perpendi oportet.



1°. Cum lineae secandae communi quadam aequatione contineantur, haec aequatio praeter binas coordinatas $IX = x$ et $XY = y$, parametrum involvet p , quae pro eadem curva AY eundem valorem retineat, valore autem mutato reliquas curvas exhibeat.

2°. Hinc ista aequatio differentiata parametrum p quoque variabilem numerando huiusmodi formam inducet $Ldy = Mdx + Ndp$; unde pro eadem curva AY,

CONSID. DE TRAIECT. ORTHOGONAL. 47

AY, ob $dp = 0$, erit $\frac{dy}{dx} = \frac{N}{L}$; ideoque ducta ad eam recta normali YS fiet subnormalis $XS = \frac{N^2}{L}$.

3°. Verum haec eadem subnormalis XS pro curva secandae BY debet esse subtangens, unde retentis pro hac curva hisdem coordinatis $IX = x$, et $XY = y$, necesse est sit eius subtangens $\frac{ydx}{dy} = \frac{M^2}{L}$ ideoque $Ldx + Mdy = 0$.

4°. Pro lineis ergo secandis proposita aequatione inter coordinatas x, y et parametrum variabilem p , quae differentiata praebet $Ldy = Mdx + Ndp$, pro curvis secantibus haec habebitur aequatio differentialis $Ldx + Mdy = 0$.

II.

Totum ergo negotium huc est reductum, ut data huiusmodi aequatione differentiali $Ldy = Mdx + Ndp$, methodus inveniatur hanc aequationem $Ldx + Mdy = 0$ integrandi, in quo quidem nulla foret difficultas si quantitates L et M solas binas coordinatas x et y implicarent exclusâ parametro p , quia tum in ea duae tantum occurrerent variables x et y , et huiusmodi aequationum integratio merito hic tanquam concessa spectatur. Verum si quantitates L et M insuper parametrum p involvant, ita ut aequatio $Ldx + Mdy = 0$ tres contineat quantitates variables x, y et p , eius integrationem ne suscipere quidem licet, nisi simul cum altera aequatione data $Ldy = Mdx + Ndp$ coniungatur, indeque

deque una trium variabilium penitus extrudatur, ut aequatio differentialis inter duas tantum variabiles obtineatur. Quod nisi efficere licuerit, vix quicquam circa naturam trajectoriarum orthogonaliū definiiri poterit, quare quoties haec difficultas occurrit, problema hoc merito inter difficillima referri; tantumque abest ut hoc problema etiam olim summo studio sit tractatum, pro confecto sit habendum, ut potius etiam nunc maxima attentione dignum sit indicandum.

III.

Cum igitur totum negotium eo redeat, ut pro trajectoriis eiusmodi aequatio differentialis eliciatur, quae duas tantum quantitates variabiles contineat, praecipuos percurramus casus, quibus hunc scopum assequi licet.

1°. Ac primo quidem si aequatio pro curvis secandis ita exhiberi queat, ut parameter p per coordinatas x et y absolute definiatur, seu functioni cuiuspiam ipsarum x et y aequetur, haec aequatio differentia huiusmodi dabit formam $dp = P dx + Q dy$, in qua P et Q sunt functiones ipsarum x et y tantum quae cum forma $L dy = M dx + N dp$ comparata praebet $L = Q$, $M = -P$ et $N = 1$. Quare pro trajectoriis haec habebitur aequatio: $Q dx - P dy = 0$ duas tantum variabiles x et y involvens, cuius adeo integratio pro concessa haberi potest.

2°.

2°. Si aequatio pro curvis secandis ita exhiberi queat, ut applicata y aequetur functioni cuiuspiam ipsarum x et p , ex eiusque differentiatione prodeat $dy = P dx + R dp$, ita ut P et R sint functiones ipsarum x et p tantum, tum ob $L = 1$, $M = P$ et $N = -R$, pro trajectoriis habebitur aequatio $dx + P dy = 0$, quae ob $dy = P dx + R dp$ abit in hanc formam: $(1 + P P) dx + P R dp = 0$, duas tantum variabiles p et x implicantem.

3°. Si aequatio pro curvis secandis ita exhibeatur, ut abscissa x aequetur functioni cuiuspiam ipsarum y et p ex cuius differentiatione prodeat $dx = Q dy + R dp$, vbi Q et R sint functiones ipsarum y et p tantum tum ob $L = Q$, $M = 1$ et $N = -R$, natura trajectoriarum exprimetur hac aequatione $Q dx + dy = 0$, quae ob $dx = Q dy + R dp$ transformatur in hanc $(1 + Q Q) dy + Q R dp = 0$ inter y et p tantum.

IV.

Quoties ergo vel parameter p per ambas coordinatas x et y vel altera coordinatarum per alteram et parametrum definitur, inuentio trajectoriarum ad aequationem eiusmodi differentialem reducitur in qua duae tantum insunt quantitates variabiles, cuius propterea resolutio tanquam concessa poterit spectari, etiam si forte nulla etiam nunc patet via negotium expediendi. Hoc autem intelligendum est

Tom. XIV. Nou. Comm.

G

fi

si illae expressiones fuerint explicitae, siue sint algebraicae siue transcendentes, sin autem tantum per formulas integrales dentur, in quibus altera variabilium pro constante habeatur, tum aequationes inventae nullum praestant vltim, nisi forte peculiari artificio a formula integrali liberari queant. Veluti si pro curvis secandis huiusmodi habeatur aequatio $y = \int \sqrt{V} dx$, ubi V sit functio ipsarum x et p , in hac autem integratione parameter p vt constans spectetur: tum enim pro valore ipsius $dy = P dx + R dp$, habetur quidem $P = V$, sed quantitas R noua forma integrali implicatur dum fit $R = \int dx (\frac{dV}{dp})$, in qua integratione iterum sola x variabilis assumitur. Quare cum aequatio pro trajectoriis futura sit $(1 + V V) dx + V dp = \int dx (\frac{dV}{dp}) = 0$, ob hanc formulam integram minime patet, quomodo eius resolutionem institui conueniat.

V.

Quo haec difficultas clarius appareat casum singularem euoluam, quo aequationem pro trajectoriis exhibere licet et qui iam olim methodo perquam ingeniosa fuit erutus. Quaeritur scilicet, cuiusmodi functio ipsarum x et p debeat esse quantitas V , vt cum pro curuis secandis sit $y = \int \sqrt{V} dx$, aequatio pro trajectoriis $(1 + V V) dx + V dp = \int dx (\frac{dV}{dp}) = 0$, per certam quantitatem multiplicata integrabilis euadat.

dat. Sic iste multiplicator $\frac{\Pi}{V}$, existente Π functione ipsius p tantum, vt habeatur.

$$\frac{\Pi dx(1+VV)}{V} + dp \int \Pi dx (\frac{dV}{dp}) = 0$$

quoniam enim Π quantitatem x non involuit, erit verique

$$\Pi dp \int dx (\frac{dV}{dp}) = dp \int \Pi dx (\frac{dV}{dp}).$$

Iam statuatur huius formae integrale $= \int \frac{\Pi dx(1+VV)}{V}$ vt pro trajectoriis habeatur haec aequatio.

$$\int \frac{\Pi dx(1+VV)}{V} = C$$

et cum eius differentiale ex variabilitate vtriusque x et p natum fiat:

$$\frac{\Pi dx(1+VV)}{V} + dp p dx (\frac{1}{dp} d \frac{\Pi(1+VV)}{V}) = 0$$

Quare statui oportet:

$$\int \Pi dx (\frac{dV}{dp}) = \int dx (\frac{1}{dp} d \frac{\Pi(1+VV)}{V})$$

seu $\Pi (\frac{dV}{dp}) = (\frac{1}{dp} d \frac{\Pi(1+VV)}{V})$. Cum nunc in his differentialibus sola p vt variabilis, x vero vt constans spectetur facta euolutione prodit:

$$\Pi dV = \frac{\Pi dV(VV-1)}{VV} + \frac{d\Pi(1+VV)}{V} \text{ seu}$$

$$\frac{\Pi dV}{VV} = \frac{d\Pi(1+VV)}{V}, \text{ ideoque } \frac{d\Pi}{\Pi} = \frac{dV}{V(1+VV)} = \frac{dV}{V} - \frac{V dV}{1+VV}$$

vide integrando elicitur $\Pi = \frac{V^X}{V(1+VV)}$, loco constantis indroducta X functione ipsius x tantum. Hinc ergo fit $V = \frac{\Pi}{\sqrt{(X^2 - \Pi^2)}}$

VI.

En ergo casum fatis elegantem simulque non parum late patentem, quo trajectorias orthogonales exhibere licet etiam si aequatio pro curvis secandis sit $y = \int \frac{\pi dx}{\sqrt{(xx - \pi\pi)}}$ vbi X denotat functionem quamcunque abscissae x , atque Π functionem parametri p quamcunque, ita ut forte haec formula integralis nullo modo evolutionem admittat. Pro trajectoriis enim, ob $x + \sqrt{xx - \pi\pi} = \frac{xx}{xx - \pi\pi}$, habebitur ista aequatio $\int \frac{xx dx}{\sqrt{(xx - \pi\pi)}} = C$. quae pro diversis valoribus constantis C infinitas praebet curvas, quae omnes normaliter curvas datas traiciunt. Pro iis quidem aequatio inter coordinatas x et y eliceretur, si opae aequationis $y = \int \frac{\pi dx}{\sqrt{(xx - \pi\pi)}}$, parameter p eiusue functio Π eliminari posset verum ad constructionem aequatio inuenta iam maxime est accommodata. Pro quavis enim parametro, seu quovis valore litterae Π super axe describatur curva, cuius applicata $= \frac{xx}{\sqrt{(xx - \pi\pi)}}$, in eaque abscindatur area datae areae aequalis, cuius abscissa si fit $= x$, applicata trajectoriae erit $y = \int \frac{\pi dx}{\sqrt{(xx - \pi\pi)}}$: vel sufficit notasse has duas aequationes:

$$y = \int \frac{\pi dx}{\sqrt{(xx - \pi\pi)}} \quad \text{et} \quad C = \int \frac{xx dx}{\sqrt{(xx - \pi\pi)}}$$

vbi notetur C designare parametrum trajectoriarum.

VII.

VII.

Verum his quae iam olim copiosissime sunt pertractata, diutius hic immorandum non censo; sed potius alias considerationes, ad quas me haec quaestio perduxit, in medium afferam. Ac primo quidem, quod per se est perspicuum observo lineas secandas et trajectorias inter se reciprocari; atque quaestionem circa duo eiusmodi systemata linearum veritari quae ad eundem axem descripta, se mutuo vbiq; ad angulos rectos interfecent. Vtrinque autem systematis natura exprimitur aequatione inter binas coordinatas x et y et parametrum, cuius variabilitas infinitas lineas suppeditat. Pro altero ergo systemate sit parameter $= p$, pro altero vero $= q$; vnde duas concipi oportet aequationes, alteram inter x, y et p , alteram vero inter x, y et q ; inter quas quatenam intercedere debeat relatio, ut propositae conditioni satisfiat, hic accuratius sum investigaturus. Supra autem vidimus, si pro altero systemate habeatur huiusmodi aequatio differentialis $Ldx + Mdx + Ndy = 0$, tum naturam alterius hac aequatione $Ndx - Mdy = 0$ expressum iri huiusque eius parametrum q ut constantem spectari.

VIII.

Quia nunc aequatio $Ndx - Mdy = 0$ duas tantum quantitates variables x et y continere intelligitur, et huius systematis parameter q in constante per integrationem accedente demum involu-

tur, aequatio differentialis pro altero systemate, etiam parametrum q pro variabili habendo, ita erit comparata: $Kdq + Ndx - Mdy = 0$. Hincque novimus aequationes differentiales pro utroque linearum systemate ita inter se esse connexas, ut sint:

$$Ldp + Mdx + Ndy = 0 \text{ et } Kdq + Ndx - Mdy = 0.$$

Si in illa p in hac vero q per x et y detur, et utraque aequatio ad integrabilitatem perducatur, formae prodibunt huiusmodi:

$$dp = M(Pdx + Qdy) \text{ et } dq = N(Qdx - Pdy)$$

vbi P et Q denotant functiones ipsarum x et y quascunque, M vero et N eiusmodi multiplicatores, qui illas formulas differentiales $Pdx + Qdy$ et $Qdx - Pdy$ integrabiles reddant. Quod cum semper fieri possit, hinc facile infinita huiusmodi systematum paria exhiberi possunt: veluti si sit $P = X$ functioni ipsius x et $Q = Y$ functioni ipsius y novae aequationes integratae ita se habebunt:

$$p = \int X dx + \int Y dy \text{ et } q = \int \frac{dx}{x} - \int \frac{dy}{y}.$$

IX.

Definiamus quoque ambas coordinatas per parametros p et q , et aequationes nostrae ita sicut comparatae

$$\begin{aligned} dx + \frac{Ldp + KNdq}{M + N} &= 0 \text{ et} \\ dy + \frac{LNdp - KMdq}{M + N} &= 0 \end{aligned}$$

quae

quae ad has formas conciniores reuocantur:

$$dx = PRdp + QSdq \text{ et } dy = PSdp - QRdq$$

atque hic iam P , Q , R et S denotant functiones ipsarum p et q eiusmodi, ut ambae formulae integrabiles euadant. Cum igitur x et y sint functiones ipsarum p et q erit

$$PR = \left(\frac{dx}{dp}\right); QS = \left(\frac{dx}{dq}\right); PS = \left(\frac{dy}{dp}\right); QR = -\left(\frac{dy}{dq}\right)$$

hinc colligitur ista insignis proprietas ut sit

$$\left(\frac{dx}{dp}\right)\left(\frac{dx}{dq}\right) + \left(\frac{dy}{dp}\right)\left(\frac{dy}{dq}\right) = 0$$

indeque porro haec quaestio maximi momenti, quomodo si pro altera coordinatarum x et y detur functio ipsarum p et q ipsi aequalis, inde functio ipsarum p et q alteri aequalis erui debeat: quae quaestio ad eam calculi integrabilis partem est referenda, quam demum excoli conuenit.

X.

Cum solutio huius aequationis admodum ardua videatur, operae erit pretium binas aequationes modo inuentas.

$$dx = PRdp + QSdq \text{ et } dy = PSdp - QRdq$$

alia metodo soluere. Imaginaria scilicet haud reformidantes inde colligimus:

$$dx + dyV - r = (R + SV - r)(Pdp - QdqV - r)$$

simili autem modo fit necesse est:

$$dx - dyV - r = (R - SV - r)(Pdp + QdqV - r).$$

Iam

Iam quaecunque fuerint P et Q functiones ipsarum p et q. multiplicator semper inueniri poterit hanc formulam ambiguum $Pdp + Qdq \sqrt{-1}$ integrabilem reddens: sit ergo M iste multiplicator et ponatur $\int M (Pdp + Qdq \sqrt{-1}) = T + V \sqrt{-1}$; atque pro $R + S \sqrt{-1}$ assumi oportet functionem quamcumque ipsius $T + V \sqrt{-1}$ in M ductam, unde facta integratione prodibit

$$x + y \sqrt{-1} = \text{funct. } (T + V \sqrt{-1}) \text{ et } x - y \sqrt{-1} = \text{funct. } (T - V \sqrt{-1})$$

hincque colligimus has formas integrales:

$$\begin{aligned} x = & \frac{1}{2} \Gamma : (T + V \sqrt{-1}) + \frac{1}{2} \Gamma : (T - V \sqrt{-1}) + \frac{1}{2 \sqrt{-1}} \Delta : (T + V \sqrt{-1}) \\ & - \frac{1}{2 \sqrt{-1}} \Delta : (T - V \sqrt{-1}) \\ y = & \frac{1}{2 \sqrt{-1}} \Gamma : (T + V \sqrt{-1}) - \frac{1}{2 \sqrt{-1}} \Gamma : (T - V \sqrt{-1}) + \frac{1}{2} \Delta : (T + V \sqrt{-1}) \\ & - \frac{1}{2} \Delta : (T - V \sqrt{-1}) \end{aligned}$$

quae semper ad realitatem reuocantur, quaecunque functiones his signis Γ et Δ denotentur.

XI.

Hic quidem litterae T et V denotant functiones binarum parameterum p et q sed minime arbitrarias, definiuntur enim ex formula differentiali $Pdp + Qdq \sqrt{-1}$, ubi P et Q necessario sunt quantitates reales. Verumtamen sine hac conditione indoles illarum quantitatum T et V erui potest, considerando quod esse debeat $(\frac{dx}{dp}) (\frac{dx}{dq}) + (\frac{dy}{dp}) (\frac{dy}{dq}) = 0$.

Cum

DE TRAECTORIIS ORTHOGONALIBVS. 57

Cum enim inuenerimus:

$$x + y \sqrt{-1} = \Sigma : (T + V \sqrt{-1}), \text{ et } x - y \sqrt{-1} = \Theta : (T - V \sqrt{-1})$$

ent differentiano:

- I. $(\frac{dx}{dp}) + (\frac{dy}{dp}) \sqrt{-1} = ((\frac{dT}{dp}) + (\frac{dV}{dp}) \sqrt{-1}) \Sigma' : (T + V \sqrt{-1})$
- II. $(\frac{dx}{dq}) + (\frac{dy}{dq}) \sqrt{-1} = ((\frac{dT}{dq}) + (\frac{dV}{dq}) \sqrt{-1}) \Sigma' : (T + V \sqrt{-1})$
- III. $(\frac{dx}{dp}) - (\frac{dy}{dp}) \sqrt{-1} = ((\frac{dT}{dp}) - (\frac{dV}{dp}) \sqrt{-1}) \Theta' : (T - V \sqrt{-1})$
- IV. $(\frac{dx}{dq}) - (\frac{dy}{dq}) \sqrt{-1} = ((\frac{dT}{dq}) - (\frac{dV}{dq}) \sqrt{-1}) \Theta' : (T - V \sqrt{-1})$

colligantur hinc producta I x IV et III x II in unam summam ac reperierit:

$$2 (\frac{dx}{dp}) (\frac{dx}{dq}) + 2 (\frac{dy}{dp}) (\frac{dy}{dq}) = 2 ((\frac{dT}{dp}) (\frac{dT}{dq}) + (\frac{dV}{dp}) (\frac{dV}{dq}))$$

$$\Sigma' \Theta' (T + V \sqrt{-1}) \Theta' (T - V \sqrt{-1})$$

ideoque functiones T et V ita sunt comparatae; ut sit

$$(\frac{dT}{dp}) (\frac{dT}{dq}) + (\frac{dV}{dp}) (\frac{dV}{dq}) = 0.$$

XII.

Hinc ergo intelligimus pro T et V eiusmodi functiones ipsarum p et q sumi debere, quae iam ipsae idoneos valores pro coordinatis x et y praebent. Quare inuentis iam duobus valoribus binis linearum se mutuo orthogonaliter secantium systemata exhibentibus, $x = f$ et $y = g$ existentibus, et H eiusmodi functionibus biparum parameterorum p et q ut sit $(\frac{dx}{dp}) (\frac{dx}{dq}) + (\frac{dy}{dp}) (\frac{dy}{dq}) = 0$ hinc facillime inuenta alia saluam systemam pariter Tom. XIV. Nou. Comm. H derivan-

derivantur, quae binis sequentibus aequationibus continentur

$$x = \frac{1}{2} \Gamma : (t + uV - 1) + \frac{1}{2} \Gamma : (t - uV - 1) - \frac{1}{2\sqrt{1-\Gamma}} \Delta : (t + uV - 1) + \frac{1}{2\sqrt{1-\Gamma}} \Delta : (t - uV - 1)$$

$$y = \frac{1}{2\sqrt{1-\Gamma}} \Gamma : (t + uV - 1) - \frac{1}{2\sqrt{1-\Gamma}} \Gamma : (t - uV - 1) + \frac{1}{2} \Delta : (t + uV - 1) + \frac{1}{2} \Delta : (t - uV - 1)$$

quam formam magis complicatam ideo elegeri, ut imaginaria singulis functionibus euoluendis sponte se destruant.

XIII.

Haec formulae eo magis ad praxin sunt accommodatae, quod eadem operatione infinitae solutiones obtineri queant. Prodeant enim pro Γ variis functionibus determinatis fumendis ex forma $\frac{1}{2} \Gamma : (t + uV - 1) + \frac{1}{2} \Gamma : (t - uV - 1)$ hi valores $T; T'; T''; T'''$ etc. ex hac vero $\frac{1}{2\sqrt{1-\Gamma}} \Gamma : (t + uV - 1) - \frac{1}{2\sqrt{1-\Gamma}} \Gamma : (t - uV - 1)$ hi $V; V'; V''; V'''$ etc. atque valores quaestioni satisfaciendes erunt sequentes

$$x = \alpha T + \beta T' + \gamma T'' + \delta T''' - \epsilon V - \zeta V' - \eta V'' - \theta V'''$$

$$y = \alpha V + \beta V' + \gamma V'' + \delta V''' + \epsilon T + \zeta T' + \eta T'' + \theta T'''$$

vbi litterae $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon, \zeta, \eta, \theta$ denotant coefficients quoscunque. Probe autem notandum est valores homologos $V, V',$ item T', V' etc. ex iisdem functionibus Γ : simulque omnes ex iisdem litteris t et u esse formandas. Neque enim hinc in genere concludere

tere licet si satisfaciant valores $x = T, y = V,$ tum vero etiam alii quicunque $x = R, y = S$ inde quoque hos $x = \alpha T + \beta R$ et $y = \alpha V + \beta S$ esse satisfacturos; hoc enim non valet nisi functiones R et S ex iisdem litteris t et u sint natae atque functiones T et V . Hinc probe cauendum est, ne superioribus formis generalibus plus tribuatur, quam fas est.

XIV.

Valores simpliciores litterarum T et V ex iam inuentis quantitatibus idoneis t et u formandi, ex potestatis loco functionis Γ substitutis nascuntur atque ita se habebunt:

$$T = t \quad \left| \quad T = t - u \quad \left| \quad T = t^2 - 3tu \quad \left| \quad T = t^3 - 6t^2u + u^3 \right. \right. \right.$$

$$V = u \quad \left| \quad V = 2tu \quad \left| \quad V = 3tu^2 - u^3 \quad \left| \quad V = 4t^2u - 4tu^2 \right. \right. \right.$$

ex potestatis vero negativis oriuntur:

$$T = \frac{1}{t + u} \quad \left| \quad T = \frac{t - u}{(t + u)^2} \quad \left| \quad T = \frac{t^2 - 3tu}{(t + u)^3} \quad \left| \quad T = \frac{t^3 - 6t^2u + u^3}{(t + u)^4} \right. \right. \right.$$

$$V = \frac{u}{t + u} \quad \left| \quad V = \frac{2tu}{(t + u)^2} \quad \left| \quad V = \frac{3tu^2 - u^3}{(t + u)^3} \quad \left| \quad V = \frac{4t^2u - 4tu^2}{(t + u)^4} \right. \right. \right.$$

vbi obseruare licet si ponatur $t = v \cos \Phi$ et $u = v \sin \Phi$ tum omnes hos valores in istis formulis simplicibus contineri

$$T = v^n \cos n \Phi \quad \text{et} \quad V = v^n \sin \Phi$$

Totum ergo negotium huc redit ut pro t et u eiusmodi idoneae functiones ipsarum p et q obtineantur, ut fiat

$$\left(\frac{dt}{dp} \right) \left(\frac{dt}{dq} \right) + \left(\frac{du}{dp} \right) \left(\frac{du}{dq} \right) = 0.$$

XV.

XV.

Seu quod eodem rehit sumtis pro P et Q functionibus quibuscunque ipsarum p et q , consideretur formula differentialis $P dp + Q dq \sqrt{-1}$, et quaeratur multiplicator eam reddens integrabilem tum integrale ex parte reali et imaginaria constituis comparatur cum formula $t + u \sqrt{-1}$, indeque utriusque litterae t et u valor idoneus elicietur Vnde primum obferuo si P sit functio solius p et Q solius q , prodire $t = fP dp$ et $u = fQ dq$. Quoniam autem hae formae $\int P dp$ et $\int Q dq$ aequae pro parametrīs amborum systematum linearum haberi possunt atque ipsae quantitates p et q , idem est ac si hinc statueremus $t = p$ et $u = q$, neque etiam latius patere, censeudi est haec positio $t = ap + b$ et $u = \gamma q + \delta$. Interim tamen si sumamus $P = 1$ et $Q = 1$ formula $dp + dq \sqrt{-1}$ non solam dat $t = p$ et $u = q$, sed quia illa formula per $m + n \sqrt{-1}$ multiplicata manet integrabilis, et integrale est $m^2 p + n^2 q + m^2 p \sqrt{-1} + m^2 n q \sqrt{-1}$, hinc etiam hi obtinentur valores:

$$t = m p - n q \quad \text{et} \quad u = n p + m q.$$

qui utique latius patere videntur, verumtamen, quia valores inde maros T, T', T'' et V, V', V'' etc. combinare licet, non aliae lineae inde nascuntur, atque ex simplicibus valoribus $t = p$ et $u = q$.

XVI.

DE TRAECTORIIS ORTHOGONALIBVS. 61

XVI.

Statuamus ergo $t = p$ et $u = q$, et percurramus simpliciora linearum systemata se mutuo ad angulos rectos secantium: ac primo quidem occurrunt hae formae:

$$x = ap - eq \quad \text{et} \quad y = a'q + e'p$$

vnde eliminando primo q tum vero p ambo linearum systemata his aequationibus continebuntur:

$$ax + ey = (aa' + ee')p \quad \text{et} \quad ay - ex = (aa' + ee')q$$

utrumque continens infinitas lineas rectas inter se parallelas quarum quaelibet rectas alterius systematis normaliter secat qui sane idubio casus est simplicissimus.

XVII.

Sumatur secundo $T = t - u$ et $V = 2tu$, et quia binis terminis iungendis lineae tactum ad alium axem transferuntur statuamus simpliciter $x = pp - qq$ et $y = 2pq$; vnde cum sit $V(x + y) = pp + qq$, elidendo alternatim q et p , pro binis linearum systematibus adipiscimur has aequationes

$$V(x + y) + x = 2pp \quad \text{et} \quad V(x + y) - x = 2qq.$$

Quare si loco $2pp$ et $2qq$ simpliciter scribamus p et q hae aequationes ita se habebunt:

$$yy = pp - 2px \quad \text{et} \quad yy = qq + 2qx.$$

H 3

Viraque aequatio infinitas continet parabolas super communi axe ex eodem foco descriptas, dum alterius systematis parabola dextrorsum, alterius vero sinistrorsum excurrunt; quae est pulcherrima parabolarum proprietas, sine dubio iam olim obseruata. Praeterea obseruo etiam præcedentes valores $T = p$ et $V = q$ cum his combinentur, tamen easdem parabolas esse prodituras.

XVIII.

Statuamus nunc $T = t^2 - 3tu$ et $V = 3tu - u^2$, formemusque has aequationes:

$$x = p^2 - 3pq \quad \text{et} \quad y = 3ppq - q^2$$

quarum haec dat $p = \sqrt{\frac{x + q^2}{3q}}$, qui valor in prima substitutus praebet: $x = \frac{2}{3q} - \frac{1}{3q} \sqrt{\frac{x + q^2}{3q}}$, et sum-
tis quadratis:

$$27q^2xx = y^2 - 15qyy + 48q^2y + 64q^3$$

scribamus q et p loco q^2 et p^2 , et aequationes pro ambobus linearum systematibus erunt:

$$27qxx = y^2 - 15qyy + 48q^2y - 64q^3$$

$$27pyy = -x^2 + 15pxx - 48ppx + 64p^3$$

quae autem ad proprietates agnoscendas commodius ita repraesentantur:

$$x = \frac{y - 2q}{3} \sqrt{\frac{y + q}{3q}} \quad \text{et} \quad y = \frac{x + 2p}{3} \sqrt{\frac{p - x}{3p}}$$

quae

quae aequationes dant lineas terti ordinis, quae pro utroque systemate sunt eiusdem naturae, dum coordinatae tantum permutantur.

XIX.

Consideremus etiam functiones ex potestatibus negatiuis natas siveque $T = \frac{t}{t+u}$ et $V = \frac{u}{t+x}$ atque ob $t = p$ et $u = q$, habebimus;

$$x = \frac{p}{p+q} \quad \text{et} \quad y = \frac{q}{p+q}$$

Hinc fit $xx + yy = \frac{p+q}{p+q}$, ideoque pro ambobus linearum systematibus habebimus has aequationes:

$$x = p(xx + yy) \quad \text{et} \quad y = q(xx + yy).$$

Formam vtriusque parametri ita immutemus ut statuamus $p = \frac{1}{2}p$ et $q = \frac{1}{2}q$, et bina linearum systemata his aequationibus exprimentur:

$$xx + yy = 2px \quad \text{et} \quad xx + yy = 2qy$$

quae praesent circulorum bina systemata.

XX.

Euoluamus etiam ex eodem genere sequentes formulas, siveque

$$x = \frac{p^2 - q^2}{(p+q)^2} \quad \text{et} \quad y = \frac{2pq}{(p+q)^2}$$

Hinc primo clicimus:

$$xx + yy = \frac{1}{(p+q)^2} \quad \text{ita ut sit}$$

$$\frac{xx+yy}{xx+yy} = \frac{p^2 - q^2}{xx+yy} \quad \text{et} \quad \frac{y}{xx+yy} = 2pq.$$

Dein-

Deinde cum sit $p^2 - q^2 = \frac{1}{\sqrt{(x+y)^2}}$ reperimus

$$2pp = \frac{x + \sqrt{(xx+yy)}}{xx+yy} \text{ et } 2qq = \frac{\sqrt{(xx+yy)} - x}{xx+yy}$$

scribamus nunc $\frac{1}{p}$ et $\frac{1}{q}$ loco $2pp$ et $2qq$, et bina linearum systemata his aequationibus exprimuntur

$$xx+yy = px + p\sqrt{(xx+yy)} \text{ et } xx+yy = q\sqrt{(xx+yy)} - qx$$

quae reducuntur ad has:

$$\begin{aligned} (xx+yy) - 2px(xx+yy) &= pp^2y; \text{ seu } yy = \frac{1}{p}pp - px - xy \\ &+ p\sqrt{(xx+yy)} \\ (xx+yy)^2 + 2qx(xx+yy) &= qq^2y; \text{ seu } yy = \frac{1}{q}qq - qx - xy \\ &- q\sqrt{(xx+yy)}. \end{aligned}$$

Haec adeo duo linearum systemata sub eadem communi aequatione quarti ordinis continentur, dum in altero tantum parameter negativae accipitur.

XXI.

Haec solutio ideo omni attentione digna videtur quod in genere per integrationem est eruta, atque adeo ad solutionem huius problematis maxime accommodata:

Invenire ea linearum algebraicarum systemata quarum trajectoriese iidem sint tenae algebraicae.

Quamvis enim aequatio pro illis lineis inter coordinatas x et y consideratur, enodatio huius questionis frustra suscipitur; potiusque artificium, ad hunc scopum perveniens in eo est firma, quod

vtam-

DE TRAIECTORIIS ORTHOGONALIBVS. 65

vtamque coordinatam per binas parametros variabiles vtriusque systematis reuocauimus. Solutio igitur huius problematis ita se habet, vt ex quouis casu inuento facillime infiniti alii assignari queant. Sunt enim t et u eiusmodi functionis parametrorum p et q , quae iam coordinatas binorum systematum referant ita vt fit:

$$\left(\frac{d^2t}{dx^2}\right) + \left(\frac{d^2u}{dy^2}\right) \left(\frac{d^2u}{dx^2}\right) = 0.$$

Tum aliae quotcunque coordinatae x et y obtinebuntur, sumendo $x+y\sqrt{-1} = f: (t+u\sqrt{-1})$, vnde si t et u iam sint functiones algebraicae, omnes functiones algebraicae formulae $t+u\sqrt{-1}$, pariter pro x et y functiones algebraicas praebunt.

XXII.

Totum ergo negotium huc redit, vt primo casus simpliciores pro t et u innotescant; ac simplicissimi quidem se statim offerentes sunt $t = p$ et $u = q$, vel etiam $t = ap + \delta q$ et $u = \gamma p + \delta q$, qui iam vberissimam messem binorum systematum algebraicorum largiuntur.

Tum vero hic casus singularis notari meretur

$$t = \sqrt{p(a+q)} \text{ et } u = \sqrt{q(b-p)}$$

qui quomodo satisfaciat sumendis differentialibus intelligitur:

$$\begin{aligned} \left(\frac{d^2t}{dx^2}\right) &= \frac{\sqrt{1+p}}{\sqrt{p}}; \left(\frac{d^2t}{dy^2}\right) = \frac{\sqrt{p}}{\sqrt{a+q}} \text{ hinc } \left(\frac{d^2t}{dx^2}\right) \left(\frac{d^2t}{dy^2}\right) = \frac{1}{\sqrt{ap}} \\ \left(\frac{d^2u}{dx^2}\right) &= \frac{\sqrt{1-p}}{\sqrt{p}}; \left(\frac{d^2u}{dy^2}\right) = \frac{\sqrt{1-p}}{\sqrt{b-p}} \text{ hinc } \left(\frac{d^2u}{dx^2}\right) \left(\frac{d^2u}{dy^2}\right) = -\frac{1}{\sqrt{bp}} \end{aligned}$$

Tom. XIV. Nou. Comm. I

I

ex

ex quo propterea etiam infinitas alias solutiones derivare licet. Ipse autem hic casus pulcherrima duo systemata linearum secundi ordinis suppeditat: posito enim:

$$xx = ap + pq \text{ et } yy = bq - pq \text{ ob } xx + yy = qp + bq$$

pro utroque systemate procedunt hae aequationes:

$$1^{\circ}. p(xx + yy) - bxx + at(b - p) = 0$$

$$2^{\circ}. q(xx + yy) + ayy - bq(a + q) = 0$$

quarum haec est pro infinitis ellipsis, illa vero ob $b > p$ pro infinitis hyperbolis super communi axe ex eodem centro descriptis.

XXIII.

Supra iam offendi (14) quomodo ex huiusmodi valoribus idoneis pro t et u cognitis infinitos valores $T, V, T', V', T'', V'',$ etc. elicere licet, ex quibus deinceps porro infinita alia systematum paria formari queant, sumendo

$$x = aT - \epsilon V + \delta T' - \zeta V' + \gamma T'' - \eta V'' \text{ etc.}$$

$$y = aV + \epsilon T + \delta V' + \zeta T' + \gamma V'' + \eta T'' \text{ etc.}$$

Hos quidem valores T et V ibi ex solis potestati- bus formulae $t + uV - 1$ elici, ponendo $T + VV - 1 = (t + uV - 1)^n$ eodem autem jure aliis quibus- cunque functionibus vri licet. Veluti si ponamus $T + VV - 1 = \frac{f + \epsilon(t + uV - 1)}{b + k(t + uV - 1)}$ $\frac{f + \delta t + \epsilon uV - 1}{b + k(t + uV - 1)}$, de- nominatorem primo realem reddamus tum vero adijcitur:

$$T =$$

$$T = \frac{(f + \epsilon t) / (b + k t) + \epsilon k u u}{(b + k t)^2 + k k u u} \text{ et } V = \frac{(\epsilon b - f k) u}{(b + k t)^2 + k k u u}$$

vbi notasse iuvabit, cum sit $T - VV - 1 = \frac{f + \delta t - \epsilon u V - 1}{b + k t - k u V - 1}$ hinc enim colligitur:

$$TT + VV = \frac{f k + \delta b + \epsilon k t}{k(b + k t)} T = \frac{\epsilon(f + \delta t)}{k(b + k t)}$$

tum, vero etiam $T(b + k t) - k u V = f + \delta t$ et $TT + VV = \frac{(\epsilon b - f k V + \epsilon k u T - \epsilon k u}{k k u}$ item $k T + \frac{(b + k t)^V}{k k u} - g = 0$

XXIV.

Applicemus hanc evolutionem ad casus sim- pliciores ac ponamus primo $t = p$ et $u = q$, et pro T et V ipsas coordinatas x et y sumendo binae possentiae aequationes praebent

$$xx + yy = \frac{(f + \delta p) x + \epsilon q y}{b + k p} = \frac{(f + \delta p) x + \epsilon q y}{b + k p}$$

quarum prior solam parametrum p continens, iam alterum linearum systema exhibet, quae quidem omnes crunt circuli. Tum vero ob $p = \frac{f - b x + k t y}{k x - g}$ pro altero systemate oritur haec aequatio: facta reductione.

$$xx + yy = \frac{(\epsilon b - f k) y + \epsilon k t x - \delta g q}{k k q}$$

quae etiam infinitos circulos complectitur:

Pro altero casu faciamus $a = 0, b = c c$, et loco p et q scribamus $p p$ et $q q$ vt habeamus $t = p q$ et $u = q V (c c - p p)$ hinc ergo fiet

$$xx + yy = \frac{(f k + \epsilon b + \epsilon k p^2) x - \delta (f + \epsilon p q)}{k, a + \epsilon p t} ; b + k p q) x - k q y V (c c - p p)$$

$$= f + \delta p q, \text{ tum vero etiam:}$$

$$xx+yy = \frac{(gb-fk)y+gkxv+(c-p)^2 \frac{gk}{k^2} v^2 (x-p)}{kk_1 v (c-p)} \text{ et } kx + \frac{(b+kp)y-g}{q v (c-p)} = 0$$

Vnde cum sit $q = \frac{b^2}{(g-kx) v (c-p)} - \frac{b^2}{(g-kx) v (c-p) - kp}$ clauditur

pro altero systemate haec aequatio:

$$x x - y y = \frac{(gb+fk)x}{b k} - \frac{(gb-fk)py}{bk v (c-p)} - \frac{fg}{b k}$$

Quae cum hac forma representari queat:

$$x x + y y = p y - a a \text{ pro circulis}$$

alterius systematis aequatio erit

$$x x + y y = q x + a a \text{ idem pro circulis.}$$

Talibus circulis in mappis mundi meridiani et paralleli referri solent.

XXV.

Ne iste calculus tantopere fiat molestus, si in genere velimus ponere $t = \sqrt{p(a+q)}$ et $u = \sqrt{q(b-p)}$, primo hinc tam p quam q per t et u exprimamus vnde sequentes nascentur aequationes

$$0 = bit - p(tt+uu) - ap'b - p \text{ et } 0 = auu + q(tt+uu) - bq(a+q)$$

Iam loco T et V capiendo ipsas coordinatas x et y ex formulis superioribus colligemus:

$$t = \frac{(fk+gb)x - fe - bk(x+yy)}{kk_1(x+yy) - gkx + eg} = \frac{(kx-eg)(f-bx) - bky}{(kx-eg)^2 + kky^2}$$

$$u = \frac{(gb-fk)y}{(kx-eg)^2 + kky^2}$$

Ponamus ad calculum contrahendum

$$f-bx = br \text{ et } kx-eg = ks \text{ vt sit } fk-gb = bk(r+s) \text{ atque}$$

$$t =$$

$$s = \frac{b}{k} \cdot \frac{rs-yy}{ss+yy}; u = \frac{b}{k} \cdot \frac{r+s}{s} \cdot \frac{y}{s+yy} \text{ ideoque}$$

$$tt+uu = \frac{b^2}{k^2} \cdot \frac{rs+yy}{ss+yy} + \frac{r^2+rs+ss+yy}{(ss+yy)^2} = \frac{b^2}{k^2} \cdot \frac{rs+yy}{ss+yy}$$

Nunc quia r et s abicissam x involuunt, aequationes pro binis linearum systematibus ita erunt comparatae.

I. $0 = b(rs-yy)^2 - p(rr+yy)(ss+yy) - \frac{ap'b}{k} = E(ss+yy)^2$

II. $0 = a'(r+s)^2 yy + q'(rr+yy)(ss+yy) - \frac{ak}{k} = E'(ss+yy)^2$

quae ambae ad lineas quarti ordinis referuntur.

Nunc casu $a = 0$, cuius euolutio ante valde erat difficilis posterior aequatio per $s + yy$ diuisa statim dat

$$0 = rr + yy - \frac{ekka+g^2}{b} (ss+yy) \text{ seu } bb(rr+yy) = bkkq(ss+yy)$$

quae ob $r = \frac{f}{b} - x$ et $s = x - \frac{k}{b}$ manifesto est ad circulum, prior vero ob $(rr+yy)(ss+yy) = (rs-yy)^2 + (r+s)^2 yy$ abit in hanc: $0 = (b-p)(r-s-yy)^2 - p(r+s)^2 yy$,

$$\text{feu } rs-yy = (r+s)y \sqrt{\frac{p}{b}} \text{ pariter pro circulo.}$$

XXVI.

Ex solutione autem generali supra data etiam hanc quaestionem elegantissimam enodare poterimus, quam alia methodo vix tractare liceat.

Invenire eiusmodi bina systemata linearum se mutuo normaliter secantium, quae ambo sub eadem aequatione continentur, ita ut prouti parametro valor

tribuatur vel positivus vel negativus ambo inde nascantur systemata.

Casum simplicissimum huic conditioni satisficientem iam supra §. 17. sumus adepti, quo haec aequatio $yy = pp - 2px$, prout parameter p vel positivae vel negativae accipitur, duas parabolarum series exhibet, quae se mutuo ad angulos rectos interfecant.

XXVII.

Solutionem autem latius patentem reperiemus, si ponamus

$$\begin{aligned} x+y^{\gamma}-1 &= (p+q^{\gamma}-1)^2 = (pp-qq+2pq^{\gamma}-1)^2 \\ & \text{quae forma permutandis parametris } p \text{ et } q, \text{ abit in} \\ (qq-p^{\beta}+2pq^{\gamma}-1)^2 &= (-1)^2 (pp-qq-2pq^{\gamma}-1)^2 \\ &= (-1)^2 (x-y^{\gamma}-1) \end{aligned}$$

ideoque tum $x+y^{\gamma}-1$ abit vel in $x-y^{\gamma}-1$ vel in $-x+y^{\gamma}-1$ prout n fuerit vel numerus par vel impar. Illo autem casu tantum applicata y hoc vero tantum abscissa x negativae accipitur, et vtroque curvae manent eadem, seu sub eadem aequatione contentae. Ex quo si litterae α , β , γ , etc. denotent numeros impares quoscunque, geminam solutionem hanc consequimur:

$$\text{I. } x+y^{\gamma}-1 = A(p+q^{\gamma}-1)^{\alpha} + B(p+q^{\gamma}-1)^{\beta} + C(p+q^{\gamma}-1)^{\gamma} \text{ etc.}$$

$$\text{II. } x+y^{\gamma}-1 = A(p+q^{\gamma}-1)^{\alpha} + B(p+q^{\gamma}-1)^{\beta} + C(p+q^{\gamma}-1)^{\gamma} \text{ etc.}$$

in

DE TRAIECTORIIS ORTHOGONALIBVS. 71

in priori scilicet omnes exponentes sunt numeri impariter pares, in posteriori vero pariter pares: litterae autem α , β , γ etiam numeros negativos atque adeo fractos, dummodo numeratores et denominatores sint impares denotare possunt. Generalius vero hae duae ita exhiberi possunt, ut posito $pp-qq+2pq^{\gamma}-1 = R$ formula $x+y^{\gamma}-1$ aequari debeat functioni vel impari vel pari ipsius R .

XXVIII.

Adiungere insuper liceat hoc problema.

Invenire eiusmodi curvas secundas, ut curvae secantes ab illis non aliter discrepent nisi quod coordinatae x et y inter se permutantur: seu ut eadem litterae ad axem priori normalem translatae illas normales traiciant.

Solvetur hoc problema ope huius formulae

$$x+y^{\gamma}-1 = A(p+q^{\gamma}-1)^{\alpha} + B(p+q^{\gamma}-1)^{\beta} + C(p+q^{\gamma}-1)^{\gamma}$$

si loco exponentium α , β , γ capiuntur numeri impares vel formae $4i+1$ vel formae $4i+3$. Huius autem duplicis generis numeros impars in eadem forma inter se neutiquam permiscere licet. Unde $x+y^{\gamma}-1$ aequari debet eiusmodi functioni impari ipsius $p+q^{\gamma}-1$, in qua nullae aliae occurrant potestates, nisi quarum exponentes sint vel omnes formae $4i+1$, vel omnes formae $4i+3$.