komme, so probire man die ersten Werthe, da dann sein wird: $x^2 = p^2r^2 + 2cpqrs + c^2q^2s^2$ und $y = p^2s^2 + 2pqrs + q^2r^2$, also $cy^2 = cp^2s^2 + 2cpqrs + cq^2r^2$, woraus man erhält: $x^2 - cy^2 = p^2r^2 - cp^2s^2 + c^2q^2s^2 - cq^2r^2$, welches mit dem gefundenen Producte $(p^2 - cq^2)(r^2 - cs^2)$ übereinstimmt.

177. Bis hieher haben wir das erste Glied bloß betrachtet. Nun wollen wir annehmen, daß dasselbe auch mit einem Buchstaben multiplicirt sei, und untersuchen, was die Formel $ax^2 + cy^2$ für Factoren erhalten könne.

Hier ist nun klar, daß unsere Formel dem Producte $(x\sqrt{a} + y\sqrt{-c})(x\sqrt{a} - y\sqrt{-c})$ gleich ist, welchen beiden Factoren demnach wiederum Factoren gegeben werden müssen. Hiebei aber tritt eine Schwierigkeit ein. Denn wenn man in der früheren Weise $x\sqrt{a} + y\sqrt{-c} = (p\sqrt{a} + q\sqrt{-c})(r\sqrt{a} + s\sqrt{-c}) = apr - cqs + ps\sqrt{-ac} + qr\sqrt{-ac}$, und $x\sqrt{a} - y\sqrt{-c} = (p\sqrt{a} - q\sqrt{-c})(r\sqrt{a} - s\sqrt{-c}) = apr - cqs - ps\sqrt{-ac} - qr\sqrt{-ac}$ annehmen wollte, woraus man erhielte $2x\sqrt{a} = 2apr - 2cqs$, und $2y\sqrt{-c} = 2ps\sqrt{-ac} + 2qr\sqrt{-ac}$, so würde man sowohl für x als y irrationale Werthe finden, welche hier keineswegs zugelassen werden können.

178. Dieser Schwierigkeit aber kann abgeholfen werden, wenn man setzt: $x\sqrt{a} + y\sqrt{-c} = (p\sqrt{a} + q\sqrt{-c})(r + s\sqrt{-ac}) = pr\sqrt{a} - cqs\sqrt{a} + qr\sqrt{-c} + aps\sqrt{-c}$ und $x\sqrt{a} - y\sqrt{-c} = (p\sqrt{a} - q\sqrt{-c})(r - s\sqrt{-ac}) = pr\sqrt{a} - cqs\sqrt{a} - qr\sqrt{-c} - aps\sqrt{-c}$; woraus nun für x und y folgende rationale Werthe gefunden werden: $x = pr - cqs$ und $y = qr + aps$. Alsdann aber wird unsere Formel folgende Factoren bekommen: $ax^2 + cy^2 = (ap^2 + cq^2)(r^2 + acs^2)$, von welchen nur einer dieselbe Form hat wie unsere Formel, der andere aber von einer ganz anderen Gattung ist.

179. Indessen stehen doch diese beiden Formeln in

einer sehr engen Verwandtschaft mit einander, indem alle Zahlen, die in der ersten Form enthalten sind, wenn sie mit einer Zahl von der zweiten Form multiplicirt werden, wiederum in die erste Form fallen. Wir haben auch schon gesehen, daß zwei Zahlen von der zweiten Form $x^2 + acy^2$, welche mit der obigen $x^2 + cy^2$ übereinkommt, mit einander multiplicirt, wieder eine Zahl von der zweiten Form geben.

Also ist nur noch zu untersuchen, wenn zwei Zahlen von der ersten Form $ax^2 + cy^2$ mit einander multiplicirt werden, zu welcher Form das Product alsdann gehört.

Daher wollen wir diese zwei Formeln von der ersten Art $(ap^2 + cq^2)(ar^2 + cs^2)$ mit einander multipliciren, und dann ist leicht einzusehen, daß ihr Product also dargestellt werden kann: $(apr + cqs)^2 + ac(ps - qr)^2$. Setzen wir nun hier $apr + cqs = x$ und $ps - qr = y$, so bekommen wir die Formel $x^2 + acy^2$, welche von der letzten Art ist; daher dann zwei Zahlen von der ersten Art $ax^2 + cy^2$, mit einander multiplicirt, eine Zahl von der zweiten Art geben, welches man kurz so darstellen kann. Die Zahlen von der ersten Art wollen wir durch I, die von der andern Art aber durch II bezeichnen. Nämlich I. I giebt II; I. II giebt I; II. II giebt II, woraus auch ferner erhellt, was herauskommen muß, wenn man mehrere solcher Zahlen mit einander multiplicirt; als I. I. I giebt I; I. I. II giebt II; I. II. II giebt I; II. II. II giebt II.

180. Um dies zu erläutern, sei $a = 2$ und $c = 3$, woraus folgende zwei Arten von Zahlen entstehen. Die erste ist in der Form $2x^2 + 3y^2$, die zweite aber in der Form $x^2 + 6y^2$ enthalten. Nun aber sind die Zahlen der ersteren bis auf 50 folgende:

I. 2, 3, 5, 8, 11, 12, 14, 18, 20, 21, 27, 29, 30, 32, 35, 44, 45, 48, 50. In der zweiten Art sind folgende Zahlen bis 50 enthalten:

II. 1, 4, 6, 7, 9, 10, 15, 16, 22, 24, 25, 28, 31, 33, 36, 40, 42, 49.

Wir wollen nun eine Zahl von der ersten Art z. B. 35 mit einer von der zweiten Art 31 multipliciren, so ist das Product 1085, welche Zahl gewiß in der Form $2x^2 + 3y^2$ enthalten ist, oder man kann für y eine Zahl von der Beschaffenheit finden, daß $1085 - 3y^2$ ein doppeltes Quadrat, nämlich $2x^2$ werde. Dies geschieht nun erstens, wenn $y = 3$, denn dann wird $x = 23$; ferner auch wenn $y = 11$, denn dann wird $x = 19$; drittens auch noch wenn $y = 13$, denn dann wird $x = 17$, und endlich viertens, wenn $y = 19$, denn dann wird $x = 1$. Man kann diese beiden Arten von Zahlen wiederum in einfache und zusammengesetzte abtheilen, indem diejenigen zusammengesetzt sind, welche aus zwei oder mehr kleineren Zahlen von der einen oder der andern Art bestehen. Also werden von der ersten Art die folgenden einfach sein: 2, 3, 5, 11, 29; zusammengesetzt aber folgende: 8, 12, 14, 18, 20, 27, 30, 32, 35, 40, 45, 48, 50 ꝛc.

Von der zweiten Art aber sind folgende einfach: 1, 7, 31, die übrigen sind alle zusammengesetzt, nämlich: 4, 6, 9, 10, 15, 16, 22, 24, 25, 28, 33, 36, 40, 42, 49.

Kapitel 12.

Von der Verwandlung der Formel $ax^2 + cy^2$ in Quadrate oder auch in höhere Potenzen.

181. Wir haben schon früher gesehen, daß Zahlen von der Form $ax^2 + cy^2$ oft unmöglich zu Quadraten gemacht werden können. So oft es aber möglich ist, kann diese Form in eine andere verwandelt werden, in welcher $a = 1$ ist. Es kann z. B. die Form $2p^2 - q^2$ ein Quadrat werden, sie läßt sich aber auch in solcher Art darstellen: $(2p + q)^2 - 2(p + q)^2$. Setzt man nun $2p + q = x$ und $p + q = y$, so kommt diese Formel $x^2 - 2y^2$ heraus, wo $a = 1$ und $c = -2$ ist. Eben solche Ver-

wandlung findet auch immer statt, so oft es möglich ist, derartige Formeln zu einem Quadrate zu machen.

Wenn daher die Formel $ax^2 + cy^2$ zu einem Quadrate oder einer andern höhern geraden Potenz gemacht werden soll, können wir sicher $a = 1$ setzen, und die übrigen Fälle als unmöglich ansehen.

182. Es sei daher die Formel $x^2 + cy^2$ vorgelegt, welche zu einem Quadrate gemacht werden soll. Da nun dieselbe aus den Factoren $(x + y\sqrt{-c})(x - y\sqrt{-c})$ besteht, so müssen dieselben entweder Quadrate, oder mit derselben Zahl multiplicirte Quadrate sein. Denn wenn das Product zweier Zahlen ein Quadrat sein soll, als z. B. pq, so wird erfordert, entweder, daß $p = r^2$ und $q = s^2$, das ist, daß jeder Factor für sich ein Quadrat sei, oder daß $p = mr^2$ und $q = ms^2$, also, daß die Factoren mit derselben Zahl multiplicirte Quadrate sind. Deswegen setze man $x + y\sqrt{-c} = m(p + q\sqrt{-c})^2$, so wird von selbst $x - y\sqrt{-c} = m(p - q\sqrt{-c})^2$. Daher bekommen wir $x^2 + cy^2 = m^2(p^2 + cq^2)^2$, und wird also ein Quadrat. Um aber x und y zu bestimmen, haben wir diese Gleichungen $x + y\sqrt{-c} = mp^2 + 2mpq\sqrt{-c} - mcq^2$ und $x - y\sqrt{-c} = mp^2 - 2mpq\sqrt{-c} - mcq^2$, wo offenbar x dem rationalen Theil, $y\sqrt{-c}$ aber dem irrationalen Theil gleich sein muß. Daher wird $x = mp^2 - mcq^2$; und $y\sqrt{-c} = 2mpq\sqrt{-c}$ oder $y = 2mpq$.

Setzt man also $x = mp^2 - mcq^2$ und $y = 2mpq$, so wird unsere Formel $x^2 + cy^2$ ein Quadrat, nämlich $m^2(p^2 + cq^2)^2$, dessen Wurzel $mp^2 + mcq^2$ ist.

183. Sollen die beiden Zahlen x und y unter sich untheilbar sein, oder keinen gemeinschaftlichen Theiler haben, so muß $m = 1$ gesetzt werden. Wenn daher $x^2 + cy^2$ ein Quadrat sein soll, so nimmt man nur $x = p^2 - cq^2$ und $y = 2pq$, da dann diese Formel dem Quadrate p^2

$+ cq^2$ gleich wird. Anstatt daß man setzt $x = p^2 - cq^2$, kann man auch $x = cq^2 - p^2$ setzen, weil beiderseits das Quadrat x^2 dasselbe bleibt. Dies sind nun eben diejenigen Formeln, die wir schon vorher auf ganz anderem Wege gefunden haben, wodurch die Richtigkeit der hier gebrauchten Methode bestätigt wird.

Denn nach der vorigen Methode, wenn $x^2 + cy^2$ ein Quadrat sein soll, setzt man die Wurzel $= x + \frac{py}{q}$ und dann bekommt man $x^2 + cy^2 = x^2 + \frac{2pxy}{q} + \frac{p^2y^2}{q^2}$, wo sich die x^2 aufheben, die übrigen Glieder aber, durch y dividirt und mit q^2 multiplicirt, geben $cq^2y = 2pqx + p^2y$, oder $cq^2y - p^2y = 2pqx$; man theile nun durch $2pq$ und durch y, so wird $\frac{x}{y} = \frac{cq^2 - p^2}{2pq}$. Da aber x und y untheilbar sein sollen, wie dies auch p und q sind, so muß x dem Zähler und y dem Nenner gleich sein, folglich $x = cq^2 - p^2$ und $y = 2pq$, wie vorher.

184. Diese Auflösung gilt, die Zahl c mag positiv oder negativ sein; hat dieselbe aber selbst Factoren, also wenn die gegebene Formel wäre $x^2 + acy^2$, welche ein Quadrat sein soll, so findet nicht nur die vorige Auflösung statt, welche $x = acq^2 - p^2$ und $y = 2pq$ giebt, sondern auch noch diese: $x = cq^2 - ap^2$ und $y = 2pq$; denn dann wird ebenfalls $x^2 + acy^2 = c^2q^4 + 2acp^2q^2 + a^2p^4 = (cq^2 + ap^2)^2$, welches auch geschieht, wenn man nimmt $x = ap^2 - cq^2$, weil das Quadrat x^2 in beiden Fällen dasselbe bleibt.

Diese neue Auflösung wird auch durch die hier gebrauchte Methode also gefunden. Man setze $x + y\sqrt{-ac} = (p\sqrt{a} + q\sqrt{-c})^2$ und $x - y\sqrt{-ac} = (p\sqrt{a} - q\sqrt{-c})^2$, damit herauskomme $x^2 + acy^2 = (ap^2 + cq^2)^2$ und also gleich einem Quadrate. Alsdann aber wird $x + y\sqrt{-ac} = ap^2 + 2pq\sqrt{-ac} - cq^2$ und $x - y\sqrt{-ac} = ap^2 - 2pq\sqrt{-ac} - cq^2$, woraus folgt $x =$

$ap^2 - cq^2$ und $y = 2pq$. Läßt sich also die Zahl ac auf mehrere Arten in zwei Factoren zerlegen, so kann man auch mehrere Auflösungen angeben.

185. Wir wollen dies durch einige bestimmte Formeln erläutern, und erstens die Formel $x^2 + y^2$ betrachten, welche ein Quadrat werden soll. Da nun hier $ac = 1$, so nehme man $x = p^2 - q^2$ und $y = 2pq$, so wird $x^2 + y^2 = (p^2 + q^2)^2$.

Soll zweitens die Formel $x^2 - y^2$ ein Quadrat werden, so ist $ac = -1$; man nehme also $x = p^2 + q^2$ und $y = 2pq$, da dann $x^2 - y^2 = (p^2 - q^2)^2$ wird.

Soll drittens die Formel $x^2 + 2y^2$ ein Quadrat werden, wo $ac = 2$, so nehme man $x = p^2 - 2q^2$ oder $x = 2p^2 - q^2$ und $y = 2pq$ und dann wird $x^2 + 2y^2 = (p^2 + 2q^2)^2$, oder $x^2 + 2y^2 = (2p^2 + q^2)^2$.

Soll viertens die Formel $x^2 - 2y^2$ ein Quadrat werden, wo $ac = -2$, so nehme man $x = p^2 + 2q^2$ und $v = 2pq$. Dann ist $x^2 - 2y^2 = (p^2 - 2q^2)^2$.

Soll fünftens die Formel $x + 6y^2$ ein Quadrat werden, wo $ac = 6$, und also entweder $a = 1$ und $c = 6$, oder $a = 2$ und $c = 3$; so kann man erstens setzen $x = p^2 - 6q^2$ und $y = 2pq$, da dann $x^2 + 6y^2 = (p^2 + 6q^2)^2$. Ferner kann man auch setzen $x = 2p^2 - 3q^2$ und $y = 2pq$, da dann $x^2 + 6y^2 = (2p^2 + 3q^2)^2$.

186. Sollte aber die Formel $ax^2 + cy^2$ zu einem Quadrate gemacht werden, so ist schon erörtert worden, daß dies nicht geschehen kann, wofern nicht schon ein Fall bekannt ist, in welchem diese Formel wirklich ein Quadrat wird. Dieser bekannte Fall sei daher, wenn $x = f$ und $y = g$, also daß $af^2 + cg^2 = h^2$; und alsdann kann unsere Formel in eine andere von dieser Art $t^2 + acu^2$ verwandelt werden, wenn man setzt $t = \frac{afx + cgy}{h}$ und $u =$

$\frac{gx - fy}{h}$; dann wird $t^2 = \frac{a^2f^2x^2 + 2acfgxy + c^2g^2y^2}{h^2}$ und $u^2 = \frac{g^2x^2 - 2fgxy + f^2y^2}{h^2}$, woraus folgt:

$$t^2 + acu^2 = \frac{a^2f^2x^2 + c^2g^2y^2 + acg^2x^2 + acf^2y^2}{h^2}$$

$= \frac{ax^2(af^2 + cg^2) + cy^2(af^2 + cg^2)}{h^2}$; da nun $af^2 + cg^2 = h^2$, so wird $t^2 + acu^2 = ax^2 + cy^2$; und so bekommt die vorgelegte Formel $ax^2 + cy^2$ die Form $t^2 + acu^2$, welche nach den hier gegebenen Regeln leicht zu einem Quadrate gemacht werden kann.

187. Nun wollen wir weiter gehen und sehen, wie die Formel $ax^2 + cy^2$, in der x und y unter sich untheilbar sein sollen, zu einem Cubus gemacht werden kann, wozu die vorigen Regeln keineswegs ausreichend sind, die hier angegebene Methode aber mit dem besten Erfolge angewandt werden kann. Hiebei ist noch dies besonders zu bemerken, daß diese Formel stets zu einem Cubus gemacht werden kann, die Zahlen a und c mögen beschaffen sein wie sie wollen, was bei den Quadraten nicht anging, wenn nicht schon ein Fall bekannt war. Dies gilt auch von allen andern geraden Potenzen; bei den ungeraden aber, als der dritten, fünften, siebenten &c. Potenz, ist die Auflösung immer möglich.

188. Wenn daher die Formel $ax^2 + cy^2$ zu einem Cubus gemacht werden soll, setze man auf ähnliche Weise wie vorher: $x\sqrt{a} + y\sqrt{-c} = (p\sqrt{a} + q\sqrt{-c})^3$ und $x\sqrt{a} - y\sqrt{-c} = (p\sqrt{a} - q\sqrt{-c})^3$; denn daraus wird das Product $ax^2 + cy^2 = (ap^2 + cq^2)^3$, und also unsere Formel ein Cubus. Es kommt aber nur darauf an, ob auch hier x und y auf rationale Art bestimmt werden können. Dies gelingt; denn wenn die angesetzten Cuben wirklich genommen werden, so erhalten wir diese zwei Gleichungen: $x\sqrt{a} + y\sqrt{-c} = ap^3\sqrt{a} + 3ap^2q\sqrt{-c} - 3cpq^2\sqrt{a} - cq^3\sqrt{-c}$, und $x\sqrt{a} - y\sqrt{-c} =$

$ap^3\sqrt{a} - 3ap^2q\sqrt{-c} - 3cpq^2\sqrt{a} + cq^3\sqrt{-c}$, woraus offenbar folgt, daß $x = ap^3 - 3cpq^2$, und $y = 3ap^2q - cq^3$.

Man suche z. B. zwei Quadrate x^2 und y^2, deren Summe $x^2 + y^2$ einen Cubus bilde. Weil nun hier $a = 1$ und $c = 1$, so bekommen wir $x = p^3 - 3pq^2$ und $y = 3p^2q - q^3$, und alsdann wird $x^2 + y^2 = (p^2 + q^2)^3$. Es sei nun $p = 2$ und $q = 1$, so wird $x = 2$ und $y = 11$; hieraus $x^2 + y^2 = 125 = 5^3$.

189. Wir wollen noch die Formel $x^2 + 3y^2$ betrachten, welche zu einem Cubus gemacht werden soll. Da nun hier $a = 1$ und $c = 3$, so wird $x = p^3 - 9pq^2$ und $y = 3p^2q - 3q^3$, und alsdann $x^2 + 3y^2 = (p^2 + 3q^2)^3$. Weil diese Formel oft vorkommt, wollen wir die leichteren Fälle hier angeben.

p	q	x	y	$x^2 + 3y^2$
1	1	8	0	$64 = 4^3$
2	1	10	9	$343 = 7^3$
1	2	35	18	$2197 = 13^3$
3	1	0	24	$1728 = 12^3$
1	3	80	72	$21952 = 28^3$
3	2	81	30	$9261 = 21^3$
2	3	154	45	$29791 = 31^3$

190. Wäre die Bedingung nicht gestellt, daß die beiden Zahlen x und y unter sich untheilbar sein sollen, so hätte die Aufgabe gar keine Schwierigkeit. Denn wenn $ax^2 + cy^2$ ein Cubus sein soll, setze man $x = tz$ und $y = uz$, so wird unsere Formel $at^2z^2 + cu^2z^2$, welche dem Cubus $\frac{z^3}{v^3}$ gleich gesetzt werde, woraus sogleich gefunden wird $z = v^3(at^2 + cu^2)$; folglich sind die gesuchten Werthe für x und y, $x = tv^3(at^2 + cu^2)$ und $y = uv^3(at^2 + cu^2)$, welche außer dem Cubus v^3 noch $at^2 + cu^2$ zum gemein-

schaftlichen Theiler haben. Diese Auflösung giebt $ax^2 + cy^2 = v^6 (at^2 + cu^2)^2 (at^2 + cu^2) = v^6 (at^2 + cu^2)^3$, welches offenbar der Cubus von $v^2 (at^2 + cu^2)$ ist.

191. Die hier gebrauchte Methode ist um so merkwürdiger, da wir durch Hülfe irrationaler und sogar imaginärer Formeln Auflösungen gefunden haben, für die einzig und allein rationale und sogar ganze Zahlen erfordert wurden. Noch merkwürdiger aber ist es, daß in denjenigen Fällen, in denen die Irrationalität verschwindet, unsere Methode nicht mehr stattfindet. Denn wenn z. B. $x^2 + cy^2$ ein Cubus sein soll, so kann man sicher schließen, daß auch die beiden irrationalen Factoren davon, nämlich $x + y\sqrt{-c}$ und $x - y\sqrt{-c}$, Cuben sein müssen, weil dieselben unter sich untheilbar sind, indem die Zahlen x und y keinen gemeinschaftlichen Theiler haben. Fiele aber die Irrationalität $\sqrt{-c}$ weg, wie wenn z. B. $c = -1$ wäre, so würde dieser Grund nicht mehr stattfinden, weil alsdann die beiden Factoren, nämlich $x + y$ und $x - y$ allerdings gemeinschaftliche Theiler haben könnten, obwohl x und y solche nicht haben, z. B. wenn beide ungerade Zahlen wären.

Wenn daher $x^2 - y^2$ ein Cubus sein soll, so ist nicht nöthig, daß sowohl $x + y$ als auch $x - y$ Cuben sind, sondern man könnte wohl setzen $x + y = 2p^3$ und $x - y = 4q^3$, da dann $x^2 - y^2$ unstreitig ein Cubus würde, nämlich $8p^3q^3$, dessen Cubikwurzel $2pq$ ist. Alsdann aber wird $x = p^3 + 2q^3$, und $y = p^3 - 2q^3$. Wenn aber die Formel $ax^2 + cy^2$ sich nicht in zwei rationale Factoren zertheilen läßt, so finden auch keine andern Auflösungen statt, als die hier gegeben worden sind.

192. Wir wollen diese Abhandlung durch einige merkwürdige Aufgaben erläutern:

I. Aufgabe. Man verlangt in ganzen Zahlen ein so beschaffenes Quadrat x^2, daß, wenn dazu 4 addirt wird,

ein Cubus herauskommt. Ein solches Quadrat ist 121. Ob es aber noch mehr derartige giebt, ist hier die Frage.

Da 4 ein Quadrat ist, so suche man erstens die Fälle, in denen $x^2 + y^2$ ein Cubus wird, welches, wie aus dem Vorhergehenden erhellt, geschieht, wenn $x = p^3 - 3pq^2$ und $y = 3p^2q - q^3$. Da nun hier $y^2 = 4$, so ist $y = \pm 2$, folglich muß $3p^2q - q^3 = + 2$ oder $3p^2q - q^3 = - 2$ sein. Im ersteren Fall wird also $q (3p^2 - q^2) = 2$, folglich q ein Theiler von 2. Es sei daher erstens $q = 1$, so wird $3p^2 - 1 = 2$, folglich $p = 1$ und also $x = 2$, und $x^2 = 4$.

Setzt man $q = 2$, so wird $6p^2 - 8 = \pm 2$; gilt das Zeichen $+$, so wird $6p^2 = 10$ und $p^2 = \frac{5}{3}$, woraus der Werth von p irrational würde und hier also keine Geltung hätte; gilt aber das Zeichen $-$, so wird $6p^2 = 6$ und $p = 1$, folglich $x = 11$. Mehr Fälle giebt es nicht, und also können nur zwei Quadrate angegeben werden, nämlich 4 und 121, welche, wenn dazu 4 addirt wird, Cuben werden.

193. II. Aufgabe. Man verlangt solche Quadrate in ganzen Zahlen, welche, wenn dazu 2 addirt wird, Cuben werden, wie bei dem Quadrate 25 geschieht. Ob es nun noch mehr derartige giebt, wird hier gefragt.

Da also $x^2 + 2$ ein Cubus sein soll, und 2 ein doppeltes Quadrat ist, so suche man erstens die Fälle, in denen die Formel $x^2 + 2y^2$ ein Cubus wird, welches aus der früheren Erörterung (188), wo $a = 1$ und $c = 2$, geschieht, wenn $x = p^3 - 6pq^2$ und $y = 3p^2q - 2q^3$. Da nun hier $y = \pm 1$, so muß $3p^2q - 2q^3 = q (3p^2 - 2q^2) = \pm 1$, und also q ein Theiler von 1 sein. Es sei demnach $q = 1$, so wird $3p^2 - 2 = \pm 1$; gilt das obere Zeichen, so wird $3p^2 = 3$ und $p = 1$, folglich $x = 5$; das untere Zeichen aber giebt für p einen irrationalen Werth, welcher hier keine Geltung hat; woraus folgt, daß

nur das einzige Quadrat 25 in ganzen Zahlen die verlangte Eigenschaft hat.

194. III. Aufgabe. Man verlangt solche fünffache Quadrate, daß, wenn dazu 7 addirt wird, ein Cubus herauskomme, oder daß $5x^2 + 7$ ein Cubus sei.

Man suche erstens diejenigen Fälle, da $5x^2 + 7y^2$ ein Cubus wird, welches nach unserer Erörterung (188), wo $a = 5$ und $c = 7$ ist, geschieht, wenn $x = 5p^3 - 21pq^2$ und $y = 15p^2q - 7q^3$. Weil nun hier $y = \pm 1$ sein soll, so wird $15p^2q - 7q^3 = q (15p^2 - 7q^2) = \pm 1$, da dann q ein Theiler von 1 sein muß, folglich $q = 1$; daher wird $15p^2 - 7 = \pm 1$, wo beide Fälle für p irrationale Werthe geben. Daraus kann aber doch nicht geschlossen werden, daß diese Aufgabe gar nicht möglich sei, weil p und q solche Brüche sein könnten, da $y = 1$ und x doch eine ganze Zahl würde. Dies geschieht wirklich, wenn $p = \frac{1}{2}$ und $q = \frac{1}{2}$; denn dann wird $y = 1$ und $x = 2$; mit andern Brüchen aber ist die Sache nicht möglich.

195. IV. Aufgabe. Man suche solche Quadrate in ganzen Zahlen, welche, wenn sie doppelt genommen und davon 5 subtrahirt wird, einen Cubus ergeben; oder $2x^2 - 5$ soll ein Cubus sein.

Man suche erstens diejenigen Fälle auf, in denen $2x^2 - 5y^2$ ein Cubus wird, welches nach unserer früherer Erörterung (188), wo $a = 2$ und $c = -5$, geschieht, wenn $x = 2p^3 + 15pq^2$ und $y = 6p^2q + 5q^3$. Hier aber muß $y = \pm 1$, und folglich $6p^2q + 5q^3 = q (6p^2 + 5q^2) = \pm$ sein, welches in ganzen Zahlen nicht geschehen kann, und auch nicht einmal in Brüchen. Dieser Fall ist sehr merkwürdig, da dennoch eine Auflösung stattfindet, wenn nämlich $x = 4$. Denn dann wird $2x^2 - 5 = 27$, welches der Cubus von 3 ist. Es ist aber von der größten Wichtigkeit den Grund zu untersuchen.

196. Es ist also möglich, daß $2x^2 - 5y^2$ ein Cubus

sein kann, dessen Wurzel sogar die Form $2p^2 - 5q^2$ hat, wenn nämlich $x = 4$, $y = 1$ und $p = 2$, $q = 1$, und also haben wir einen Fall, wo $2x^2 - 5y^2 = (2p^2 - 5q^2)^3$, ungeachtet die beiden Factoren von $2x^2 - 5y^2$, nämlich $x\sqrt{2} + y\sqrt{5}$ und $x\sqrt{2} - y\sqrt{5}$, keine Cuben sind, da dieselben doch nach dieser Methode die Cuben von $p\sqrt{2} + q\sqrt{5}$ und $p\sqrt{2} - q\sqrt{5}$ sein sollten, indem in unserem Falle $x\sqrt{2} + y\sqrt{5} = 4\sqrt{2} + \sqrt{5}$, hingegen $(p\sqrt{2} + q\sqrt{5})^3 = (2\sqrt{2} + \sqrt{5})^3 = 46\sqrt{2} + 29\sqrt{5}$, welches keineswegs mit $4\sqrt{3} + \sqrt{5}$ übereinstimmt.

Es ist aber zu bemerken, daß die Formel $r^2 - 10s^2$ in unendlich vielen Fällen 1 oder -1 werden kann, wenn nämlich $r = 3$ und $s = 1$, ferner wenn $r = 19$ und $s = 6$, welche mit dieser Formel $2p^2 - 5q^2$ multiplicirt, wieder eine Zahl von der letzten Form giebt.

Es sei demnach $f^2 - 10g^2 = 1$, und statt wie oben zu setzen $2x^2 - 5y^2 = (2p^2 - 5q^2)^3$, können wir jetzt auch auf allgemeinere Art $2x^2 - 5y^2 = (f^2 - 10g^2) . (2p^2 - 5q^2)^3$ setzen, und die Factoren davon genommen, geben $x\sqrt{2} \pm y\sqrt{5} = (f \pm g\sqrt{10}) (p\sqrt{2} \pm q\sqrt{5})^3$. Es ist aber $(p\sqrt{2} \pm q\sqrt{5})^3 = (2p^3 + 15pq^2) \sqrt{2} \pm (6p^2q + 5q^3)\sqrt{5}$, wofür wir der Kürze halber schreiben wollen $A\sqrt{2} + B\sqrt{5}$, welches mit $f + g\sqrt{10}$ multiplicirt, $Af\sqrt{2} + Bf\sqrt{5} + 2Ag\sqrt{5} + 5Bg\sqrt{2}$ giebt, und dem $x\sqrt{2} + y\sqrt{5}$ gleich sein muß, woraus hervorgeht $x = Af + 5Bg$ und $y = Bf + 2Ag$. Da nun $y = \pm 1$ sein muß, so ist nicht unumgänglich nöthig, daß $6p^2q + 5q^3 = 1$ werde, sondern es genügt, wenn nur die Formel $Bf + 2Ag$, das ist $f (6p^2q + 5q^3) + 2g (2p^3 + 15pq^2)$ dem ± 1 gleich werde, wo f und g vielerlei Werthe haben können. Es sei z. B. $f = 3$ und $g = 1$, so muß die Formel $18p^2q + 15q^3 + 4q^3 + 30pq^2$ dem ± 1 gleich werden, oder es muß $4p^3 + 18p^2q + 30pq^2 + 15q^3 = \pm 1$ sein.

197. Diese Schwierigkeit, alle derartigen möglichen Fälle

herauszubringen, tritt aber nur alsdann ein, wenn in der Formel $ax^2 + cy^2$ die Zahl c negativ ist, weil alsdann die Formel $ax^2 + cy^2$ oder diese $x^2 - acy^2$, die mit ihr in einer genauen Verwandtschaft steht, 1 werden kann. Dies kann aber niemals geschehen, wenn c eine positive Zahl ist, weil $ax^2 + cy^2$ oder $x^2 + acy^2$ immer größere Zahlen giebt, je größer x und y genommen werden. Daher kann die hier vorgetragene Methode nur in solchen Fällen mit Vortheil gebraucht werden, wenn die beiden Zahlen a und c positiv genommen werden.

198. Wir kommen jetzt zur vierten Potenz und bemerken zuvörderst, daß, wenn die Formel $ax^2 + cy^2$ ein Biquadrat werden soll, die Zahl $a = 1$ sein muß. Denn wenn dieselbe kein Quadrat wäre, so wäre es entweder nicht möglich, diese Formel nur zu einem Quadrate zu machen, oder wenn es möglich wäre, so könnte dieselbe auch in die Form $t^2 + acu^2$ verwandelt werden. Daher beschränken wir die Frage nur auf diese letztere Form, mit welcher die obige $x^2 + cy^2$, wenn $a = 1$, übereinstimmt. Nun kommt es also darauf an, wie die Werthe von x und y beschaffen sein müssen, damit die Formel $x^2 + cy^2$ ein Biquadrat werde. Da nun dieselbe aus den beiden Factoren $(x + y\sqrt{-c})(x - y\sqrt{-c})$ besteht, so muß jeder auch ein Biquadrat von gleicher Art sein, daher gesetzt werden muß $x + y\sqrt{-c} = (p + q\sqrt{-c})^4$ und $x - y\sqrt{-c} = (p - q\sqrt{-c})^4$, wodurch unsere Formel dem Biquadrate $(p^2 + cq^2)^4$ gleich wird; die Buchstaben x und y selbst aber werden aus der Entwickelung dieser Formel leicht wie folgt bestimmt:

$$x + y\sqrt{-c} = p^4 + 4p^3q\sqrt{-c} - 6cp^2q^2 - 4cpq^3\sqrt{-c} + c^2q^4;$$

$$x - y\sqrt{-c} = p^4 - 4p^3q\sqrt{-c} - 6cp^2q^2 + 4cpq^3\sqrt{-c} + c^2q^4;$$

folglich $x = p^4 - 6cp^2q^2 + c^2q^4$ und $y = 4p^3q - 4cpq^3$.

199. Wenn also $x^2 + y^2$ ein Biquadrat werden soll, weil hier $c = 1$, haben wir die Werthe $x = p^4 - 6p^2q^2 + q^4$ und $y = 4p^3q - 4pq^3$, und alsdann wird $x^2 + y^2 = (p^2 + q^2)^4$ sein.

Setzen wir z. B. $p = 2$ und $q = 1$, so bekommen wir $x = 7$ und $y = 24$; hieraus wird $x^2 + y^2 = 625 = 5^4$.

Nimmt man ferner $p = 3$ und $q = 2$, so bekommt man $x = 119$ und $y = 120$, daraus wird $x^2 + y^2 = 13^4$.

200. Bei allen geraden Potenzen, wozu die Formel $ax^2 + cy^2$ gemacht werden soll, ist ebenfalls unumgänglich nöthig, daß die Formel zu einem Quadrate gemacht werden kann. Zu diesem Zwecke genügt es, daß man nur einen einzigen Fall wisse, in welchem dies geschieht. Alsdann kann die Formel, wie wir früher gesehen haben, in die Form $t^2 + acu^2$ verwandelt werden, wo das erste Glied nur mit 1 multiplicirt ist, und also, als in der Form $x^2 + cy^2$ enthalten, angesehen werden kann, welche hierauf auf ähnliche Weise zur sechsten Potenz, wie zu jeder andern noch höhern geraden Potenz gemacht werden kann.

201. Bei den ungeraden Potenzen aber ist diese Bedingung nicht nothwendig, sondern die Zahlen a und c mögen beschaffen sein, wie sie wollen, stets kann die Formel $ax^2 + cy^2$ zu jeder ungeraden Potenz gemacht werden. Denn verlangt man z. B. die fünfte Potenz, so braucht man nur $x\sqrt{a} + y\sqrt{-c} = (p\sqrt{a} + q\sqrt{-c})^5$, und $x\sqrt{a} - y\sqrt{-c} = (p\sqrt{a} - q\sqrt{-c})^5$ zu setzen, da dann offenbar $ax^2 + cy^2 = (ap^2 + cq^2)^5$ wird. Die fünfte Potenz von $p\sqrt{a} + q\sqrt{-c}$ ist $a^2p^5\sqrt{a} + 5a^2p^4q\sqrt{-c} - 10acp^3q^2\sqrt{a} - 10acp^2q^3\sqrt{-c} + 5c^2pq^4\sqrt{a} + c^2q^5\sqrt{-c}$, woraus sogleich geschlossen wird $x = a^2p^5 - 10acp^3q^2 + 5c^2pq^4$ und $y = 5a^2p^4q - 10acp^2q^3 + c^2q^5$.

Verlangt man also eine Summe von zwei Quadraten $x^2 + y^2$, die zugleich eine fünfte Potenz sei, so ist $a = 1$

und $c = 1$; folglich $x = p^5 - 10p^3q^2 + 5pq^4$ und $y = 5p^4q - 10p^2q^3 + q^5$. Nimmt man nun $p = 2$ und $q = 1$, so wird $x = 38$, und $q = 41$, und $x^2 + y^2 = 3125 = 5^5$.

Kapitel 13.

Von einigen Formeln der Art $ax^4 + by^4$, welche sich nicht zu einem Quadrat machen lassen.

202. Man hat sich alle Mühe gegeben zwei Biquadrate zu finden, deren Summe oder Differenz eine Quadratzahl würde. Allein alle Mühe war vergeblich, und endlich fand man sogar den Beweis, daß weder die Formel $x^4 + y^4$, noch die $x^4 - y^4$ jemals ein Quadrat werden kann, mit Ausnahme der beiden Fälle, in denen nämlich bei der ersteren entweder $x = 0$ oder $y = 0$, bei der andern aber entweder $y = 0$ oder $y = x$, in welchen Fällen die Sache offenbar vor Augen liegt. Daß aber in allen übrigen Fällen die Sache unmöglich sein soll, ist um so merkwürdiger, weil, wenn nur von einfachen Quadraten die Rede ist, unendlich viele Auflösungen stattfinden.

203. Um diesen Beweis gehörig vorzutragen, ist vor allen Dingen zu bemerken, daß die beiden Zahlen x und y als untheilbar unter sich angesehen werden können. Denn sollten dieselben einen gemeinschaftlichen Theiler z. B. d haben, so daß man setzen könnte $x = dp$ und $y = dq$, so würden unsere Formeln $d^4p^4 + d^4q^4$ und $d^4p^4 - d^4q^4$, welche, wenn sie Quadrate wären, auch, durch das Quadrat d^4 dividirt, Quadrate bleiben müssen, so daß auch die Formeln $p^4 + q^4$ und $p^4 - q^4$ Quadrate wären, wo nun die Zahlen p und q keinen weitern gemeinschaftlichen Theiler haben. Es genügt daher zu beweisen, daß diese Formeln, in dem Falle, da x und y unter sich untheilbar sind, keine Quadrate werden können, und alsdann erstreckt sich der Beweis von selbst auf alle Fälle, in denen auch x und y gemeinschaftliche Theiler haben.

204. Wir wollen daher mit der Summe zweier Biquadrate, nämlich mit der Formel $x^4 + y^4$, den Anfang machen, wo wir x und y als unter sich untheilbare Zahlen ansehen können. Um nun zu zeigen, daß $x^4 + y^4$ außer den vorher erwähnten Fällen kein Quadrat sein kann, wird der Beweis in folgender Art geführt.

Wenn Jemand den Satz läugnen wollte, so müßte er behaupten, daß solche Werthe für x und y möglich wären, wodurch $x^4 + y^4$ ein Quadrat würde, dieselben möchten auch so groß sein als sie wollten, weil in kleinen gewiß keine vorhanden sind.

Man kann aber deutlich zeigen, daß, wenn auch in den größten Zahlen solche Werthe für x und y vorhanden wären, aus denselben auch in kleinern Zahlen ebenfalls derartige Werthe erwiesen werden könnten, und aus diesen ferner in noch kleineren 2c. Da nun aber in kleinen Zahlen keine solchen Werthe vorhanden sind, außer den zwei vorher erwähnten, welche aber zu keinen anderen führen, so kann man sicher schließen, daß auch in größeren, ja sogar den allergrößten Zahlen, keine solche Werthe für x und y vorhanden sein können. Und in derselben Art wird auch der Satz von der Differenz zweier Biquadrate $x^4 - y^4$ bewiesen, wie wir sogleich zeigen wollen.

205. Um erstens zu zeigen, daß $x^4 + y^4$ kein Quadrat sein kann außer in den beiden Fällen, die an und für sich klar sind, sind folgende Sätze wohl zu bemerken.

I. Nehmen wir an, daß die Zahlen x und y untheilbar unter sich sind, oder keinen gemeinschaftlichen Theiler haben, so sind sie entweder beide ungerade, oder die eine ist gerade und die andere ungerade.

II. Beide aber können nicht ungerade sein, weil die Summe von zwei ungeraden Quadraten niemals ein Quadrat sein kann. Denn ein ungerades Quadrat ist stets in der Form $4n + 1$ enthalten, und also würde die Summe zweier ungeraden Quadrate die Form $4n + 2$ haben, welche sich durch 2, nicht aber durch 4 theilen läßt, und also kein Quadrat sein kann. Dieses aber gilt auch von zwei ungeraden Biquadraten.

III. Wenn daher $x^4 + y^4$ ein Quadrat wäre, so müßte das eine gerade, das andere aber ungerade sein. Wir haben aber oben gesehen, daß, wenn die Summe zweier Quadrate ein Quadrat sein soll, die Wurzel des einen durch $p^2 - q^2$, des andern aber durch $2pq$ ausgedrückt wird. Hieraus folgt, daß $x^2 = p^2 - q^2$ und $y^2 = 2pq$ sein müßte, und dann würde $x^4 + y^4 = (p^2 + q^2)^2$.

IV. Hier also würde y gerade, x aber ungerade sein. Da nun $x^2 = p^2 - q^2$, so muß auch von den Zahlen p und q die eine gerade, die andere aber ungerade sein. Die erstere p aber kann nicht gerade sein, weil sonst $p^2 - q^2$ als eine Zahl von der Form $4n - 1$ oder $4n + 3$, niemals ein Quadrat werden kann. Folglich müßte p ungerade, q aber gerade sein, wo es sich von selbst versteht, daß dieselben untheilbar unter sich sein müssen.

V. Da nun $p^2 - q^2$ ein Quadrat, nämlich dem x^2 gleich sein soll, so geschieht dieses, wie wir oben gesehen, wenn $p = r^2 + s^2$ und $q = 2rs$; denn dann wird $x^2 = (r^2 - s^2)^2$, und also $x = r^2 - s^2$.

VI. Allein y^2 muß auch ein Quadrat sein; da wir nun haben $y^2 = 2pq$, so wird jetzt $y^2 = 4rs\,(r^2 + s^2)$, welche Formel also ein Quadrat sein muß. Folglich muß auch $rs\,(r^2 + s^2)$ ein Quadrat sein, wo r und s unter sich untheilbare Zahlen sind, so daß auch die hier befindlichen drei Factoren, r, s, und $r^2 + s^2$, keinen gemeinschaftlichen Theiler unter sich haben können.

VII. Wenn aber ein Product aus mehr Factoren, die unter sich untheilbar sind, ein Quadrat sein soll, so muß jeder Factor für sich ein Quadrat sein; also setze man $r = t^2$ und $s = u^2$, dann muß auch $t^4 + u^4$ ein Quadrat sein. Wenn daher $x^4 + y^4$ ein Quadrat wäre, so würde

auch hier $t^4 + u^4$, das ist ebenfalls eine Summe von zwei Biquadraten, ein Quadrat sein. Hiebei ist zu bemerken, daß, weil hier $x^2 = (t^4 - u^4)^2$ und $y^2 = 4t^2u^2\,(t^4 + u^4)$, die Zahlen t und u offenbar weit kleiner sein würden als x und y, indem x und y sogar durch die vierten Potenzen von t und u bestimmt werden und also unstreitig weit größer sein müssen.

VIII. Wenn daher zwei Biquadrate wie x^4 und y^4 auch in den größten Zahlen vorhanden sein sollten, deren Summe ein Quadrat wäre, so könnte man daraus eine Summe von zwei weit kleineren Biquadraten ableiten, welche ebenfalls ein Quadrat wäre; und aus diesen könnte nachher noch eine kleinere derartige Summe geschlossen werden &c., bis man endlich auf sehr kleine Zahlen käme. Da nun aber in kleinen Zahlen keine solche Summe möglich ist, so folgt daraus offenbar, daß es auch in den größten Zahlen solche nicht giebt.

IX. Man könnte hier zwar einwenden, daß es in den kleinen Zahlen wirklich solche gebe, wie schon anfänglich bemerkt worden, nämlich wenn das eine Biquadrat Null wird; allein auf diesen Fall kommt man gewiß nicht, wenn man in solcher Art von den größten Zahlen immer zu kleinern zurückgeht. Denn wäre bei der kleineren Summe $t^4 + u^4$, entweder $t = 0$ oder $u = 0$, so würde auch bei der größern Summe nothwendig $y^2 = 0$ sein, welcher Fall hier nicht in Betracht kommt.

206. Nun kommen wir zu dem zweiten Hauptsatz, daß auch die Differenz zweier Biquadrate, als $x^4 - y^4$, niemals ein Quadrat werden kann, außer in den Fällen $y = 0$ und $y = x$. Zum Beweis sind folgende Punkte zu bemerken.

I. Sind die Zahlen x und y als untheilbar unter sich anzusehen, und also entweder beide ungerade oder die eine gerade und die andere ungerade. Da nun in beiden

Fällen die Differenz zweier Quadrate wieder ein Quadrat werden kann, so müssen diese zwei Fälle besonders erwogen werden.

II. Es seien also zuerst die beiden Zahlen x und y ungerade, und man setze $x = p + q$ und $y = p - q$; so muß nothwendig eine dieser Zahlen p und q ungerade, die andere aber gerade sein. Nun wird $x^2 - y^2 = 4pq$ und $x^2 + y^2 = 2p^2 + 2q^2$, folglich unsere Formel $x^4 - y^4 = 4pq\,(2p^2 + 2q^2)$, welche ein Quadrat sein soll, und also auch der vierte Theil davon $pq\,(2p^2 + 2q^2) = 2pq\,(p^2 + q^2)$, deren Factoren unter sich untheilbar sind. Folglich muß jeder dieser Factoren $2p$, q und $p^2 + q^2$ für sich ein Quadrat sein, weil nämlich die eine Zahl p gerade, die andere q aber ungerade ist. Man setze daher, um die beiden ersten zu Quadraten zu machen: $2p = 4r^2$ oder $p = 2r^2$, und $q = s^2$, wo s ungerade sein muß, dann wird der dritte Factor $4r^4 + s^4$ auch ein Quadrat sein müssen.

III. Da nun $s^4 + 4r^4$ eine Summe zweier Quadrate ist, von welchen s^4 ungerade, $4r^4$ aber gerade ist, so setze man die Wurzel des ersteren $s^2 = t^2 - u^2$, wo t ungerade und u gerade ist; die Wurzel des letzteren aber $2r^2 = 2tu$ oder $r^2 = tu$, wo t und u unter sich untheilbar sind.

IV. Weil nun $tu = r^2$ ein Quadrat sein muß, so muß sowohl t als u ein Quadrat sein; man setze demnach $t = m^2$ und $u = n^2$, wo m ungerade und n gerade ist, so wird $s^2 = m^4 - n^4$, so daß wieder eine Differenz von zwei Biquadraten, nämlich $m^4 - n^4$ ein Quadrat sein müßte. Es ist aber klar, daß diese Zahlen weit kleiner sein würden als x und y, weil r und s offenbar kleiner sind als x und y, und wiederum m und n kleiner als r und s. Wenn also die Lösung in den größten Zahlen möglich und $x^4 - y^4$ ein Quadrat wäre, so würde dieselbe in weit kleineren Zahlen auch noch möglich sein, und so immer fort, bis man endlich auf die kleinsten Zahlen käme, für welche die Lösung möglich ist.

V. Die kleinsten Zahlen aber, für die es möglich ist, sind, wenn das eine Biquadrat gleich 0 oder dem andern gleich ist. Im ersteren Fall müßte $n = 0$, folglich $u = 0$, ferner $r = 0$ und $p = 0$ und $x^4 - y^4 = 0$, oder $x^4 = y^4$ sein. Von einem solchen Falle ist aber hier nicht die Rede. Wäre aber $n = m$, so würde $t = u$, weiter $s = 0$, $q = 0$ und endlich auch $x = y$, welcher Fall hier nicht in Betracht kommt.

207. Man könnte hier einwenden, daß, da m ungerade und n gerade ist, die letztere Differenz der ersteren nicht mehr ähnlich sei, und man also daraus nicht weiter auf kleinere Zahlen den Schluß ziehen könnte. Es genügt aber, daß man von der ersteren Differenz auf die andere gekommen, und wir werden jetzt zeigen, daß auch $x^4 - y^4$ kein Quadrat sein kann, wenn das eine Biquadrat gerade und das andere ungerade ist.

I. Wäre das erstere x^4 gerade und y^4 ungerade, so wäre die Sache an sich nicht möglich, weil eine Zahl von der Form $4n + 3$ herauskäme, die kein Quadrat sein kann. Es sei daher x ungerade und y gerade, so muß $x^2 = p^2 + q^2$ und $y = 2pq$ sein. Denn so wird $x^4 - y^4 = p^4 - 2p^2q^2 + q^4 = (p^2 - q^2)^2$, wovon p und q das eine gerade, das andere aber ungerade sein muß.

II. Da nun $p^2 + q^2 = x^2$ ein Quadrat sein muß, so wird $p = r^2 - s^2$ und $q = 2rs$; folglich $x = r^2 + s^2$. Hieraus aber wird $y^2 = 2\,(r^2 - s^2)\,.\,2rs$ oder $y^2 = 4rs\,(r^2 - s^2)$, welches ein Quadrat sein muß, und also auch der vierte Theil davon, nämlich $rs\,(r^2 - s^2)$, wovon die Factoren unter sich untheilbar sind.

III. Man setze daher $r = t^2$ und $s = u^2$, so wird der dritte Factor $r^2 - s^2 = t^4 - u^4$, welcher ebenfalls ein Quadrat sein muß. Da nun derselbe auch eine Differenz von zwei Biquadraten ist, welche viel kleiner sind als die ersten, so erhält hiedurch der vorige Beweis seine völlige Stärke, so daß, wenn auch in den größten Zahlen die

Differenz zweier Biquadrate ein Quadrat wäre, daraus immer kleinere derartige Differenzen gefunden werden könnten, ohne gleichwohl auf die zwei offenbaren Fälle zu kommen. Dies ist daher gewiß auch in den größten Zahlen nicht möglich.

208. Der erste Theil dieses Beweises, da die Zahlen x und y beide ungerade genommen werden, kann in folgender Art abgekürzt werden. Wenn $x^4 - y^4$ ein Quadrat wäre, so müßte $x^2 = p^2 + q^2$ und $y^2 = p^2 - q^2$ sein, wo von den Buchstaben p und q der eine gerade, der andere aber ungerade wäre. Alsdann aber würde $x^2y^2 = p^4 - q^4$, folglich müßte $p^4 - q^4$ auch ein Quadrat sein, welches eine Differenz von zwei Biquadraten ist, deren eines gerade, das andere aber ungerade ist. Daß dieses aber unmöglich sei, ist in dem zweiten Theil des Beweises gezeigt worden.

209. Wir haben also die zwei Hauptsätze bewiesen, daß weder die Summe noch die Differenz zweier Biquadrate jemals eine Quadratzahl werden kann, abgesehen von einigen wenigen offenbaren Fällen.

Wenn daher auch andere Formeln, welche zu Quadraten gemacht werden sollen, so beschaffen sind, daß entweder eine Summe oder eine Differenz von zwei Biquadraten ein Quadrat werden müßte, so sind diese Formeln ebenfalls nicht möglich. So steht es z. B. mit den folgenden Formeln, welche wir hier anführen wollen.

I. Es ist nicht möglich, daß die Formel $x^4 + 4y^4$ ein Quadrat sei. Denn weil diese Formel eine Summe von zwei Quadraten ist, so müßte $x^2 = p^2 - q^2$ und $2y^2 = 2pq$ oder $y^2 = pq$ sein; da nun p und q untheilbar unter sich sind, so müßte jedes ein Quadrat sein. Setzt man daher $p = r^2$ und $q = s^2$, so wird $x^2 = r^4 - s^4$; also müßte eine Differenz von zwei Biquadraten ein Quadrat sein, welches nicht möglich ist.

II. Es ist auch nicht möglich, daß die Formel $x^4 - 4y^4$ ein Quadrat wird. Denn dann müßte $x^2 = p^2 + q^2$ und $2y^2 = 2pq$ sein, weil alsdann $x^4 - 4y^4 = (p^2 - q^2)^2$ herauskäme; da nun $y^2 = pq$, so müßte p und q jedes ein Quadrat sein. Setzt man nun $p = r^2$ und $q = s^2$, so wird $x^2 = r^4 + s^4$; folglich müßte eine Summe von zwei Biquadraten ein Quadrat sein, was nicht möglich ist.

III. Es ist auch nicht möglich, daß die Form $4x^4 - y^4$ ein Quadrat wird, weil alsdann y nothwendig eine gerade Zahl sein müßte. Setzt man nun $y = 2z$, so würde $4x^4 - 16z^4$ und folglich auch der vierte Theil davon $x^4 - 4z^4$ ein Quadrat sein müssen, was nach dem vorigen Fall unmöglich ist.

IV. Es ist auch nicht möglich, daß die Formel $2x^4 + 2y^4$ ein Quadrat wird; denn da dasselbe gerade sein müßte, und folglich $2x^4 + 2y^4 = 4z^2$ wäre, so würde $x^4 + y^4 = 2z^2$, und daher $2z^2 + 2x^2y^2 = x^4 + 2x^2y^2 + y^4$ und also ein Quadrat sein. Ebenso würde $2z^2 - 2x^2y^2 = x^4 - 2x^2y^2 + y^4$ und also auch ein Quadrat sein. Da nun sowohl $2z^2 + 2x^2y^2$ als auch $2z^2 - 2x^2y^2$ ein Quadrat sein würde, so müßte auch ihr Product $4z^4 - 4x^4y^4$, und also auch der vierte Theil davon ein Quadrat sein. Dieser vierte Theil aber ist $z^4 - x^4y^4$ und also eine Differenz von zwei Biquadraten, was nicht möglich ist.

V. Endlich kann auch die Formel $2x^4 - 2y^4$ kein Quadrat sein; denn da beide Zahlen x und y nicht gerade sind, weil sie sonst einen gemeinschaftlichen Theiler hätten, und auch nicht die eine gerade und die andere ungerade, weil sonst der eine Theil durch 4, der andere aber nur durch 2, und also auch die Formel selbst nur durch 2 theilbar sein würde, so müssen beide ungerade sein. Setzt man nun $x = p + q$ und $y = p - q$, so ist die eine von den Zahlen p und q gerade, die andere aber ungerade, und da $2x^4 - 2y^4 = 2(x^2 + y^2)(x^2 - y^2)$, so

bekommt man $x^2 + y^2 = 2p^2 + 2q^2 = 2(p^2 + q^2)$ und $x^2 - y^2 = 4pq$; also unsere Formel $16pq(p^2 + q^2)$, deren sechzehnter Theil, nämlich $pq(p^2 + q^2)$, folglich auch ein Quadrat sein müßte. Da nun die Factoren unter sich untheilbar sind, so müßte jeder für sich ein Quadrat sein. Setzt man nun für die beiden ersteren $p = r^2$ und $q = s^2$, so wird der dritte $r^4 + s^4$, welcher auch ein Quadrat sein müßte. Dies aber ist nicht möglich.

210. Auf gleiche Weise läßt sich auch beweisen, daß die Formel $x^4 + 2y^4$ kein Quadrat sein kann, wovon der Beweis in folgenden Sätzen besteht.

I. Kann x nicht gerade sein, weil alsdann y ungerade sein müßte, und die Formel sich nur durch 2, nicht aber durch 4 würde theilen lassen. Daher muß x ungerade sein.

II. Man setze also die Quadratwurzel unserer Formel $= x^2 + \frac{2py^2}{q}$, damit dieselbe ungerade werde; dann wird $x^4 + 2y^4 = x^4 + \frac{4px^2y^2}{q} + \frac{4p^2y^4}{q^2}$, wo sich die x^4 aufheben, die übrigen Glieder aber durch y^2 dividirt und mit q^2 multiplicirt, geben, $4pqx^2 + 4p^2y^2 = 2q^2y^2$ oder $4pqx^2 = 2q^2y^2 - 4p^2y^2$. Daraus wird $\frac{x^2}{y^2} = \frac{q^2 - 2p^2}{2pq}$, woraus folgt $x^2 = q^2 - 2p^2$ und $y^2 = 2pq$, welches dieselben Formeln sind, die wir schon früher gegeben haben.

III. Es müßte also $q^2 - 2p^2$ wieder ein Quadrat sein, welches nicht anders geschehen kann, als wenn $q = r^2 + 2s^2$ und $p = 2rs$; denn dann würde $x^2 = (r^2 - 2s^2)^2$; alsdann aber würde $4rs(r^2 + 2s^2) = y^2$, und also müßte auch der vierte Theil $rs(r^2 + 2s^2)$ ein Quadrat sein, und folglich r und s jedes besonders. Setzt man nun $r = t^2$ und $s = u^2$, so wird der dritte Factor $r^2 + 2s^2 = t^4 + 2u^4$, welches auch ein Quadrat sein müßte.

IV. Wäre daher $x^4 + 2y^4$ ein Quadrat, so würde auch $t^4 + 2u^4$ ein Quadrat sein, wo die Zahlen t und

u weit kleiner wären als x und y; und in solcher Art würde man auf immer kleinere Zahlen kommen können. Da nun in kleinen Zahlen diese Formel kein Quadrat sein kann, wie leicht zu probiren ist, so kann dieselbe auch in den größten Zahlen kein Quadrat sein.

211. Was hingegen die Formel $x^4 - 2y^4$ betrifft, so kann von derselben nicht bewiesen werden, daß sie kein Quadrat werden könnte; und wenn man auf ähnliche Art die Rechnung anstellt, so können sogar unendlich viele Fälle gefunden werden, in denen dieselbe wirklich ein Quadrat wird.

Denn wenn $x^4 - 2y^4$ ein Quadrat sein soll, so ist früher gezeigt worden, daß $x^2 = p^2 + 2q^2$ und $y^2 = 2pq$ sein wird, weil man alsdann $x^4 - 2y^4 = (p^2 - 2q^2)^2$ bekommt. Da nun auch $p^2 + 2q^2$ ein Quadrat sein muß, so geschieht dies, wenn $p = r^2 - 2s^2$ und $q = 2rs$; denn dann wird $x^2 = (r^2 + 2s^2)^2$. Allein hier ist wohl zu bemerken, daß dies auch geschehen würde, wenn man annähme $p = 2s^2 - r^2$ und $q = 2rs$, daher zwei Fälle hier in Erwägung zu ziehen sind.

I. Es sei zuerst $p = r^2 - 2s^2$ und $q = 2rs$, so wird $x = r^2 + 2s^2$; und weil $y^2 = 2pq$, so wird nun $y^2 = 4rs(r^2 - 2s^2)$ sein; und müßten also r und s Quadrate sein. Man setze deswegen $r = t^2$ und $s = u^2$, so wird $y^2 = 4t^2u^2(t^4 - 2u^4)$; also $y = 2tu\sqrt{(t^4 - 2u^4)}$ und $x = t^4 + 2u^4$; wenn daher $t^4 - 2u^4$ ein Quadrat ist, so wird auch $x^4 - 2y^4$ ein Quadrat; obgleich aber t und u kleinere Zahlen sind als x und y, so kann man doch nicht wie vorher schließen, daß $x^4 - 2y^4$ kein Quadrat sein könne, und zwar deswegen, weil man daher auf eine ähnliche Formel in kleineren Zahlen gelangt. Denn $x^4 - 2y^4$ kann ein Quadrat sein, ohne auf die Formel $t^4 - 2u^4$ zu kommen, weil dies noch auf andere Art geschehen kann, nämlich in dem andern Falle, den wir noch zu betrachten haben.

II. Es sei also $p = 2s^2 - r^2$ und $q = 2rs$, so wird zwar wie vorher $x^2 = r^2 + 2s^2$, allein für y bekommt man $y^2 = 2pq = 4rs(2s^2 - r^2)$. Setzt man nun $r = t^2$ und $s = u^2$, so bekommt man $y^2 = 4t^2u^2(2u^4 - t^4)$, folglich $y = 2tu\sqrt{(2u^4 - t^4)}$ und $x = t^4 + 2u^4$; woraus hervorgeht, daß unsere Formel $x^4 - 2y^4$ auch ein Quadrat werden könne, wenn diese $2u^4 - t^4$ ein Quadrat wird. Dies aber geschieht offenbar, wenn $t = 1$ und $u = 1$; und daher bekommen wir $x = 3$ und $y = 2$, woraus unsere Formel $x^4 - 2y^4$ wird $81 - 2 . 16 = 49$.

III. Wir haben auch früher gesehen, daß $2u^4 - t^4$ ein Quadrat wird, wenn $u = 13$ und $t = 1$, weil alsdann $\sqrt{(2u^4 - t^4)} = 239$. Setzt man nun diese Werthe für t und u, so erhalten wir einen neuen Fall für unsere Formel, nämlich $x = 1 + 2 . 13^4 = 57123$ und $y = 2 . 13 . 239 = 6214$.

IV. Sobald man aber Werthe für x und y gefunden hat, so kann man dieselben in den Formeln Nr. I. für t und u schreiben, da man dann wieder neue Werthe für x und y erhalten wird.

Weil wir nun $x = 3$ und $y = 2$ gefunden haben, so wollen wir in der Nr. I gegebenen Formel setzen $t = 3$ und $u = 2$, da dann $\sqrt{(t^4 - 2u^4)} = 7$, und wir bekommen folgende neue Werthe: $x = 81 + 2 . 16 = 113$ und $y = 2 . 3 . 2 . 7 = 84$. Hieraus erhalten wir $x^2 = 12769$, und $x^4 = 163047361$; ferner $y^2 = 7056$ und $y^4 = 49787136$, daher wird $x^4 - 2y^4 = 63473089$, wovon die Quadratwurzel 7967 ist, welche auch völlig übereintrifft mit der anfänglich angegebenen $p^2 - 2q^2$. Denn da $t = 3$ und $u = 2$, so wird $r = 9$ und $s = 4$, daher $p = 81 - 32 = 49$ und $q = 72$, woraus $p^2 - 2q^2 = 2401 - 10368 = -7967$.

Kapitel 14.

Auflösung einiger Aufgaben, die zu diesem Theil der Analytik gehören.

212. Wir haben bisher die Kunstgriffe erklärt, welche in diesem Theil der Analytik vorkommen und deren Kenntniß nöthig ist, um alle diejenigen Aufgaben, die hieher gehören, aufzulösen. Um dieses in ein helleres Licht zu stellen, wollen wir einige derartige Aufgaben hier vorlegen und die Auflösung derselben beifügen.

213. I. **Aufgabe.** Man suche eine Zahl, die so beschaffen ist, daß, wenn man dazu 1 addirt oder davon subtrahirt, in beiden Fällen ein Quadrat herauskommt.

Setzt man die gesuchte Zahl $= x$, so muß sowohl $x + 1$ als auch $x - 1$ ein Quadrat sein. Für das erstere setze man $x + 1 = p^2$, so wird $x = p^2 - 1$ und $x - 1 = p^2 - 2$, welches auch ein Quadrat sein muß. Man setze, die Wurzel davon sei $p - q$, so wird $p^2 - 2 = p^2 - 2pq + q^2$, wo sich die p^2 aufheben und gefunden wird $p = \frac{q^2 + 2}{2q}$. Daraus erhält man $x = \frac{q^4 + 4}{4q^2}$, wo man q nach Belieben und auch in Brüchen annehmen kann.

Man setze daher $q = \frac{r}{s}$, so erhalten wir $x = \frac{r^4 + 4s^4}{4r^2s^2}$, wovon wir einige kleinere Werthe angeben wollen:

wenn $r = 1$	2	1	3
und $s = 1$	1	2	1
so wird $x = \frac{5}{4}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{65}{16}$	$\frac{85}{36}$.

214. II. **Aufgabe.** Man suche eine derartige Zahl x, daß, wenn man dazu 2 beliebige Zahlen, z. B. 4 und 7 addirt, in beiden Fällen ein Quadrat herauskommt.

Es müssen also die beiden Formeln $x + 4$ und $x + 7$ Quadrate werden. Man setze daher für die erstere $x + 4 = p^2$, so wird $x = p^2 - 4$, die zweite Formel aber wird $x + 7 = p^2 + 3$, welche auch ein Quadrat sein muß. Man setze die Wurzel davon $= p + q$, so wird $p^2 + 3 = p^2$

$+ 2pq + q^2$, woraus gefunden wird $p = \frac{3 - q^2}{2q}$, folglich $x = \frac{9 - 22q^2 + q^4}{4q^2}$. Setzen wir für q einen Bruch wie $\frac{r}{s}$, so bekommen wir $x = \frac{9s^4 - 22r^2s^2 + r^4}{4r^2s^2}$, wo man für r und s alle beliebige ganze Zahlen annehmen kann.

Nimmt man $r = 1$ und $s = 1$, so wird $x = -3$, und daraus wird $x + 4 = 1$ und $x + 7 = 4$. Will man aber eine positive Zahl für x haben, so setze man $s = 2$ und $r = 1$, dann bekommt man $x = \frac{57}{16}$, woraus $x + 4 = \frac{121}{16}$ und $x + 7 = \frac{169}{16}$ wird. Will man ferner setzen $s = 3$ und $r = 1$, so bekommt man $x = \frac{133}{9}$, woraus $x + 4 = \frac{169}{9}$ und $x + 7 = \frac{196}{9}$. Soll das letzte Glied größer als das mittlere sein, so setze man $r = 5$ und $s = 1$, dann wird $x = \frac{21}{25}$, und daraus $x + 4 = \frac{121}{25}$ und $x + 7 = \frac{196}{25}$.

215. III. **Aufgabe.** Man suche einen solchen Bruch x, daß, wenn man denselben entweder zu 1 addirt oder von 1 subtrahirt, in beiden Fällen ein Quadrat herauskommt.

Da die beiden Formeln $1 + x$ und $1 - x$ Quadrate sein sollen, so setze man für die erstere $1 + x = p^2$, da wird $x = p^2 - 1$, und die andere Formel $1 - x = 2 - p^2$, welche ein Quadrat sein soll. Da nun weder das erste noch letzte Glied ein Quadrat ist, so muß man sehen, ob man einen Fall errathen kann, in welchem dies geschieht; ein solcher fällt aber gleich in die Augen, nämlich $p = 1$; deswegen setze man $p = 1 - q$, so daß $x = q^2 - 2q$, so wird unsere Formel $2 - p^2 = 1 + 2q - q^2$; davon setze man die Wurzel $= 1 - qr$, so bekommt man $1 + 2q - q^2 = 1 - 2qr + q^2r^2$; hieraus $2 - q = -2r + qr^2$ und $q = \frac{2r + 2}{r^2 + 1}$; demnach wird $x = \frac{4r - 4r^3}{(r^2 + 1)^2}$; weil r ein Bruch ist, setze man $r = \frac{t}{u}$, so wird $x = \frac{4tu^3 - 4t^3u}{(t^2 + u^2)^2} = \frac{4tu(u^2 - t^2)}{(t^2 + u^2)^2}$; also muß u größer sein als t.

Man setze daher $u = 2$ und $t = 1$, so wird $x = \frac{24}{25}$; setzt man $u = 3$ und $t = 2$, so wird $x = \frac{120}{169}$, und daraus $1 + x = \frac{289}{169}$ und $1 - x = \frac{49}{169}$, welche beide Quadrate sind.

216. IV. **Aufgabe.** Man suche solche Zahlen x, welche sowohl zu 10 addirt als auch von 10 subtrahirt, Quadrate hervorbringen.

Es müssen also die Formeln $10 + x$ und $10 - x$ Quadrate sein, welches nach der vorigen Weise geschehen könnte. Um aber einen andern Weg zu zeigen, bedenke man, daß auch das Product dieser Formel ein Quadrat sein muß, nämlich $100 - x^2$. Da nun hier das erste Glied schon ein Quadrat ist, setze man die Wurzel $= 10 - px$, so wird $100 - x^2 = 100 - 20px + p^2x^2$ und also $x = \frac{20p}{p^2 + 1}$. Hieraus aber folgt, daß nur das Product ein Quadrat wird, nicht aber jede Formel besonders. Wenn aber nur die eine ein Quadrat wird, so muß die andere nothwendig auch ein solches sein. Nun aber wird die erste $10 + x = \frac{10p^2 + 20p + 10}{p^2 + 1} = \frac{10(p^2 + 2p + 1)}{p^2 + 1}$; und weil $p^2 + 2p + 1$ schon ein Quadrat ist, so muß noch der Bruch $\frac{10}{p^2 + 1}$ ein Quadrat sein, folglich auch dieser $\frac{10p^2 + 10}{(p^2 + 1)^2}$. Es ist also nur nöthig, daß die Zahl $10p^2 + 10$ ein Quadrat werde, wo wiederum ein Fall, in dem es geschieht, errathen werden muß. Dieser ist, wenn $p = 3$ und deswegen setze man $p = 3 + q$, so bekommt man $100 + 60q + 10q^2$. Davon setze man die Wurzel $10 + qt$, so wird $100 + 60q + 10q^2 = 100 + 20qt + q^2t^2$, daraus $q = \frac{60 - 20t}{t^2 - 10}$, daraus $p = 3 + q$, und $x = \frac{20p}{p^2 + 1}$.

Setzt man $t = 3$, so wird $q = 0$ und $p = 3$, folglich $x = 6$, daher wird $10 + x = 16$ und $10 - x = 4$. Es sei aber $t = 1$, so wird $q = -\frac{40}{9}$ und $p = -\frac{13}{9}$

und $x = -\frac{234}{25}$. Man kann hier aber eben so gut setzen $x = +\frac{234}{25}$, und dann wird $10 + x = \frac{484}{25}$ und $10 - x = \frac{16}{25}$, welche beide Quadrate sind.

217. Anmerkung. Wollte man diese Aufgabe allgemein machen und für jede gegebene Zahl a solche Zahlen x verlangen, daß sowohl $a + x$ als $a - x$ ein Quadrat werden soll, so würde die Auflösung oft unmöglich werden, nämlich in allen Fällen, wo die Zahl a keine Summe von zwei Quadraten ist. Aber wir haben schon früher gesehen, daß von 1 bis 50 nur die folgenden Zahlen Summen von zwei Quadraten oder in der Form $x^2 + y^2$ enthalten sind: 1, 2, 4, 5, 8, 9, 10, 13, 16, 17, 18, 20, 25, 26, 29, 32, 34, 36, 37, 40, 41, 45, 49, 50. Die übrigen also, welche gleichfalls bis 50 sind: 3, 6, 7, 11, 12, 14, 15, 19, 21, 22, 23, 24, 27, 28, 30, 31, 33, 35, 38, 39, 42, 43, 44, 46, 47, 48, können nicht in zwei Quadrate zerlegt werden; so oft also a eine von diesen letztern Zahlen wäre, so oft würde auch die Lösung der Aufgabe unmöglich sein.

Um dies zu zeigen, wollen wir setzen $a + x = p^2$ und $a - x = q^2$, und dann giebt die Addition $2a = p^2 + q^2$, so daß $2a$ eine Summe von zwei Quadraten sein muß; ist aber $2a$ eine solche Summe, so muß auch a eine solche sein; wenn daher a keine Summe von zwei Quadraten ist, so ist es auch nicht möglich, daß $a + x$ und $a - x$ zugleich Quadrate sein können.

218. Wenn daher $a = 3$ wäre, so würde die Lösung der Aufgabe unmöglich sein, und zwar deswegen, weil 3 keine Summe von zwei Quadraten ist. Man könnte zwar einwenden, daß es vielleicht zwei Quadrate in Brüchen gebe, deren Summe 3 ausmacht; allein dieses ist auch nicht möglich, denn wäre $3 = \frac{p^2}{q^2} + \frac{r^2}{s^2}$ und man multiplicirte mit q^2s^2, so würde $3q^2s^2 = p^2s^2 + q^2r^2$, wo $p^2s^2 + q^2r^2$ eine Summe von zwei Quadraten, welche sich durch

3 theilen ließe; wir haben aber früher gesehen, daß eine Summe von zwei Quadraten keine anderen Theiler haben kann als solche, die selbst solche Summen sind.

Es lassen sich zwar die Zahlen 9 und 45 durch 3 theilen, allein dieselben sind auch durch 9 theilbar und sogar jedes der beiden Quadrate, woraus sie bestehen, weil nämlich $9 = 3^2 + 0^2$, und $45 = 6^2 + 3^2$, ein Fall, von dem hier nicht die Rede sein kann. Daher dieser Schluß seine Richtigkeit hat, daß, wenn eine Zahl a in ganzen Zahlen keine Summe von zwei Quadraten ist, dies auch nicht in Brüchen geschehen kann. Ist aber die Zahl a in ganzen Zahlen eine Summe von zwei Quadraten, so kann dieselbe auch in Brüchen in unendlich vielerlei Arten eine Summe von zwei Quadraten sein, was wir zeigen wollen.

219. V. Aufgabe. Man soll in beliebig viel Arten eine Zahl, die eine Summe von zwei Quadraten ist, in eine Summe von zwei anderen Quadraten zerlegen.

Die gegebene Zahl sei daher $f^2 + g^2$ und man soll zwei andere Quadrate, als x^2 und y^2 suchen, deren Summe $x^2 + y^2$ gleich sei der Zahl $f^2 + g^2$, also daß $x^2 + y^2 = f^2 + g^2$. Hier ist nun sogleich klar, daß, wenn x größer oder kleiner als f ist, y umgekehrt kleiner oder größer sein müßte als g. Man setze daher $x = f + pz$ und $y = g - qz$, so wird $f^2 + 2fpz + p^2z^2 + g^2 - 2gqz + q^2z^2 = f^2 + g^2$, wo sich die f^2 und g^2 aufheben, die übrigen Glieder aber durch z theilen lassen. Daher wird $2fp + p^2z - 2gq + q^2z = 0$ oder $p^2z + q^2z = 2gq - 2fp$, und also $z = \frac{2gq - 2fp}{p^2 + q^2}$, woraus für x und y folgende Werthe gefunden werden: $x = \frac{2gpq + f(q^2 - p^2)}{p^2 + q^2}$ und $y = \frac{2fpq + g(p^2 - q^2)}{p^2 + q^2}$, wo man für p und q alle möglichen Zahlen nach Belieben annehmen kann.

Es sei die gegebene Zahl 2, so daß $f = 1$ und $g = 1$, so wird $x^2 + y^2 = 2$, wenn $x = \frac{2pq + q^2 - p^2}{p^2 + q^2}$ und

$y = \frac{2pq + p^2 - q^2}{p^2 + q^2}$; setzt man $p = 2$ und $q = 1$, so wird $x = \frac{1}{5}$ und $y = \frac{7}{5}$.

220. VI. Aufgabe. Wenn die Zahl a eine Summe von zwei Quadraten ist, solche Zahlen x zu finden, daß sowohl $a + x$ als auch $a - x$ ein Quadrat wird.

Es sei die Zahl $a = 13 = 9 + 4$, und man setze $13 + x = p^2$ und $13 - x = q^2$, so giebt erstens die Addition $26 = p^2 + q^2$, die Subtraction aber $2x = p^2 - q^2$; also müssen p und q so beschaffen sein, daß $p^2 + q^2$ der Zahl 26 gleich werde, welche auch eine Summe von zwei Quadraten ist, nämlich $25 + 1$. Folglich muß die Zahl 26 in zwei Quadrate zerlegt werden, von denen das größere für p^2, das kleinere aber für q^2 genommen wird. Hieraus bekommt man erstens $p = 5$ und $q = 1$ und daraus wird $x = 12$; alsdann aber kann aus dem Obigen die Zahl 26 noch auf unendlich vielerlei Art in zwei Quadrate aufgelöst werden. Denn weil $f = 5$ und $g = 1$, finden wir, wenn wir in den obigen Formeln anstatt der Buchstaben p und q, t und u, für x und y aber die Buchstaben p und q schreiben, $p = \frac{2tu + 5(u^2 - t^2}{t^2 + u^2}$ und $q = \frac{10tu + t^2 - u^2}{t^2 + u^2}$. Nimmt man nur für t und u Zahlen nach Belieben an und bestimmt daraus die Buchstaben p und q, so erhält man die gesuchte Zahl $x = \frac{p^2 - q^2}{2}$.

Es sei z. B. $t = 2$ und $u = 1$, so wird $p = \frac{11}{5}$ und $q = \frac{23}{5}$; und daher $p^2 - q^2 = \frac{408}{25}$ und $x = \frac{204}{25}$.

221. Um aber diese Aufgabe allgemein aufzulösen, sei die gegebene Zahl $a = c^2 + d^2$, die gesuchte aber $= z$, so daß die Formeln $a + z$ und $a - z$ Quadrate werden sollen.

Nun setze man $a + z = x^2$ und $a - z = y^2$, so wird zuerst $2a = 2(c^2 + d^2) = x^2 + y^2$, und ferner $2z = x^2 - y^2$. Es müssen also die Quadrate x^2 und y^2 so be-

schaffen sein, daß $x^2 + y^2 = 2(c^2 + d^2)$, wo $2(c^2 + d^2)$ auch eine Summe von zwei Quadraten ist, nämlich $(c + d)^2 + (c - d)^2$. Man setze der Kürze halber $c + d = f$ und $c - d = g$, so daß $x^2 + y^2 = f^2 + g^2$ sein muß. Dies geschieht aber nach dem Obigen, wenn man nimmt $x = \frac{2gpq + f(q^2 - p^2)}{p^2 + q^2}$ und $y = \frac{2fpq + g(p^2 - q^2)}{p^2 + q^2}$; hieraus bekommt man die leichteste Auflösung, wenn man nimmt $p = 1$ und $q = 1$. Denn daraus wird $x = \frac{2g}{2} = g = c - d$, und $y = f = c + d$, und folglich $z = 2cd$. Hieraus wird nun offenbar $c^2 + d^2 + 2cd = (c + d)^2$ und $c^2 + d^2 - 2cd = (c - d)^2$. Um eine andere Auflösung zu finden, sei $p = 2$ und $q = 1$, dann wird $x = \frac{c - 7d}{5}$, und $y = \frac{7c + d}{5}$, wo sowohl c und d, als auch x und y negativ genommen werden können, weil nur ihre Quadrate vorkommen. Da nun x größer sein soll als y, so nehme man d negativ, und da wird $x = \frac{c + 7d}{5}$ und $y = \frac{7c - d}{5}$. Hieraus folgt $z = \frac{24d^2 + 14cd - 24c^2}{25}$, welcher Werth zu $a = c^2 + d^2$ addirt $\frac{c^2 + 14cd + 49d^2}{25}$ giebt, wovon die Quadratwurzel $\frac{c + 7d}{5}$ ist. Subtrahirt man aber z von a, so bleibt $\frac{49c^2 - 14cd + d^2}{25}$, wovon die Quadratwurzel $\frac{7c - d}{5}$ ist; jene ist nämlich x, diese aber y.

222. VII. Aufgabe. Man suche eine Zahl x von der Art, daß, wenn sowohl zu derselben selbst als auch zu ihrem Quadrate x^2, 1 addirt wird, in beiden Fällen ein Quadrat herauskomme.

Es müssen also die beiden Formeln $x + 1$ und $x^2 + 1$ zu Quadraten gemacht werden. Man setze daher für die erste $x + 1 = p^2$, so wird $x = p^2 - 1$, und die zweite Formel $x^2 + 1 = p^4 - 2p^2 + 2$, welche Formel ein Quadrat sein soll. Dieselbe ist aber von der Art, daß keine

Auflösung zu finden, wenn nicht schon ein Fall bekannt ist. Ein solcher Fall aber fällt sogleich in die Augen, nämlich wenn $p = 1$. Man setze daher $p = 1 + q$, so wird $x^2 + 1 = 1 + 4q^2 + 4q^3 + q^4$, welches auf vielerlei Art zu einem Quadrate gemacht werden kann.

I. Man setze erstens die Wurzel davon $1 + q^2$, so wird $1 + 4q^2 + 4q^3 + q^4 = 1 + 2q^2 + q^4$, daraus wird $4q + 4q^2 = 2q$ oder $4 + 4q = 2$ und $q = -\frac{1}{2}$, folglich $p = \frac{1}{2}$ und $x = -\frac{3}{4}$.

II. Setzt man die Wurzel $1 - q^2$, so wird $1 + 4q^2 + 4q^3 + q^4 = 1 - 2q^2 + q^4$, und daher $q = -\frac{3}{2}$ und $p = -\frac{1}{2}$, hieraus $x = -\frac{3}{4}$ wie vorher.

III. Setzt man die Wurzel $1 + 2q + q^2$, damit sich die ersten und die zwei letzten Glieder aufheben, so wird $1 + 4q^2 + 4q^3 + q^4 = 1 + 4q + 6q^2 + 4q^3 + q^4$, daraus wird $q = -2$ und $p = -1$, daher $x = 0$.

IV. Man kann aber auch die Wurzel setzen $1 - 2q - q^2$, dann wird $1 + 4q^2 + 4q^3 + q^4 = 1 - 4q + 2q^2 + 4q^3 + q^4$, daraus wird $q = -2$ wie vorher.

V. Damit sich die zwei ersten Glieder heben, sei die Wurzel $1 + 2q^2$; dann wird $1 + 4q^2 + 4q^3 + q^4 = 1 + 4q^2 + 4q^4$, und daraus $q = \frac{4}{3}$ und $p = \frac{7}{3}$, folglich $x = \frac{40}{9}$, woraus folgt $x + 1 = \frac{49}{9} = (\frac{7}{3})^2$ und $x^2 + 1 = \frac{1681}{81} = (\frac{41}{9})^2$.

Wollte man noch mehr Werthe für q finden, so müßte man eine von diesen hier gefundenen z. B. $-\frac{1}{2}$ nehmen, und ferner $q = -\frac{1}{2} + r$ setzen; daraus aber würde $p = \frac{1}{2} + r$; $p^2 = \frac{1}{4} + r + r^2$ und $p^4 = \frac{1}{16} + \frac{1}{2}r + \frac{3}{2}r^2 + 2r^3 + r^4$, folglich unsere Formel $\frac{25}{16} - \frac{3}{2}r - \frac{1}{2}r^2 + 2r^3 + r^4$, welche ein Quadrat sein soll, und daher auch mit 16 multiplicirt, nämlich $25 - 24r - 8r^2 + 32r^3 + 16r^4$. Davon setze man nun:

I. Die Wurzel $= 5 + fr \pm 4r^2$, so daß $25 - 24r - 8r^2 + 32r^3 + 16r^4 = 25 + 10fr \pm 40r^2 \pm 8fr^3 + 16r^4$
$+ f^2r^2$

$16r^4$. Da nun die ersten und letzten Glieder wegfallen, so bestimme man f so, daß auch die zweiten wegfallen, welches geschieht, wenn $-24 = 10f$ und also $f = -\frac{12}{5}$; alsdann geben die übrigen Glieder durch r^2 dividirt $-8 + 32r = \pm 40 + f^2 \pm 8fr$. Für das obere Zeichen hat man $-8 + 32r = 40 + f^2 + 8fr$, und daraus $r = \frac{48 + f^2}{32 - 8f}$. Da nun $f = -\frac{12}{5}$, so wird $r = \frac{21}{20}$, folglich $p = \frac{31}{20}$ und $x = \frac{561}{400}$, daraus wird $x + 1 = (\frac{31}{20})^2$, und $x^2 + 1 = (\frac{689}{400})^2$.

II. Gilt aber das untere Zeichen, so wird $-8 + 32r = -40 + f^2 - 8fr$, und daraus $r = \frac{f^2 - 32}{32 + 8f}$. Da nun $f = -\frac{12}{5}$, so wird $r = -\frac{41}{20}$, folglich $p = \frac{31}{20}$, woraus die vorige Gleichung hervorgeht.

III. Es sei die Wurzel $4r^2 + 4r \pm 5$, so daß $16r^4 + 32r^3 - 8r^2 - 24r + 25 = 16r^4 + 32r^3 \pm 40r^2 \pm 40r + 25$
$+ 16r^2$
wo die zwei ersten und die allerletzten Glieder wegfallen, die übrigen aber durch r dividirt, geben $-8r - 24 = \pm 40r + 16r \pm 40$, oder $-24r - 24 = \pm 40r \pm 40$. Wenn das obere Zeichen gilt, so wird $-24r - 24 = 40r + 40$, oder $0 = 64r + 64$, oder $0 = r + 1$, also $r = -1$ und $p = -\frac{1}{2}$, welchen Fall wir schon gehabt haben; und eben derselbe folgt auch aus dem untern Zeichen.

IV. Man setze die Wurzel $5 + fr + gr^2$ und bestimme f und g so, daß die drei ersten Glieder wegfallen. Da nun $25 - 24r - 8r^2 + 32r^3 + 16r^4 = 25 + 10fr + 10gr^2 + f^2r^2 + 2fgr^3 + g^2r^4$, so wird erstens $-24 = 10f$ und also $f = -\frac{12}{5}$, ferner $-8 = 10g + f^2$, und also $g = \frac{-8 - f^2}{10}$, oder $g = -\frac{344}{250} = -\frac{172}{125}$. Die beiden letzten Glieder aber durch r^3 dividirt, geben $32 + 16r = 2fg +$

g^2r und daraus $r = \frac{2fg - 32}{16 - g^2}$. Hier wird der Zähler $2fg - 32 = \frac{+24 \,.\, 172 - 32 \,.\, 625}{5 \,.\, 125} = \frac{-32 \,.\, 496}{625}$, oder dieser Zähler $= \frac{-16 \,.\, 32 \,.\, 31}{625}$; der Nenner aber giebt $16 - g^2 = (4 - g)(4 + g) = \frac{328}{125} \,.\, \frac{672}{125}$ oder $16 - g^2 = \frac{8 \,.\, 32 \,.\, 41 \,.\, 21}{25 \,.\, 625}$; daraus wird $r = -\frac{1550}{861}$, hieraus $p = -\frac{2239}{1722}$, und also ein neuer Werth für x, nämlich $x = p^2 - 1$ gefunden.

223. VIII. **Aufgabe.** Zu drei gegebenen Zahlen a, b und c eine solche Zahl x zu finden, welche zu jeder derselben addirt, ein Quadrat hervorbringt.

Es müssen also drei Formeln zu Quadraten gemacht werden, nämlich $x + a$, $x + b$ und $x + c$.

Man setze für die erstere $x + a = z^2$, so daß $x = z^2 - a$, so werden die beiden andern Formeln $z^2 + b - a$ und $z^2 + c - a$, von denen jede ein Quadrat sein soll. Hievon aber läßt sich keine allgemeine Auflösung geben, weil es sehr oft unmöglich ist, und die Möglichkeit einzig und allein auf der Beschaffenheit der beiden Zahlen $b - a$ und $c - a$ beruht. Denn wäre z. B. $b - a = 1$ und $c - a = -1$, das ist $b = a + 1$ und $c = a - 1$, so müßten $z^2 + 1$ und $z^2 - 1$ Quadrate werden, und z ohne Zweifel ein Bruch sein. Man setze daher $z = \frac{p}{q}$, so würden die beiden Formeln $p^2 + q^2$ und $p^2 - q^2$ Quadrate sein müssen, folglich müßte auch ihr Product, nämlich $p^4 - q^4$, ein Quadrat sein; daß aber dies nicht möglich ist, haben wir bereits früher gesehen.

Wäre ferner $b - a = 2$ und $c - a = -2$, also $b = a + 2$ und $c = a - 2$, so müßten, wenn man wiederum $z = \frac{p}{q}$ setzte, diese beiden Formeln $p^2 + 2q^2$ und $p^2 - 2q^2$ Quadrate werden, folglich auch ihr Product $p^4 - 4q^4$, welches ebenfalls nicht möglich ist.

Man setze überhaupt $b - a = m$ und $c - a = n$, ferner auch $z = \frac{p}{q}$, so müssen die Formeln $p^2 + mq^2$ und $p^2 + nq^2$ Quadrate sein; welches, wie wir eben gesehen, unmöglich ist, wenn entweder $m = +1$ und $n = -1$, oder wenn $m = +2$ und $n = -2$ ist.

Es ist auch ferner nicht möglich, wenn $m = f^2$ und $n = -f^2$, denn alsdann würde das Product derselben $p^4 - f^4q^4$ eine Differenz von zwei Biquadraten sein, welche niemals ein Quadrat werden kann.

Eben so, wenn $m = 2f^2$ und $n = -2f^2$, können auch die Formeln $p^2 + 2f^2q^2$ und $p^2 - 2f^2q^2$ nicht beide Quadrate werden, weil ihr Product $p^4 - 4f^4q^4$ auch ein Quadrat sein müßte; folglich wenn man $fq = r$ setzt, die Formel $p^4 - 4r^4$ herauskommt, für welche die Unmöglichkeit der Lösung auch früher gezeigt worden ist.

Wäre ferner $m = 1$ und $n = 2$, so daß die Formeln $p^2 + q^2$ und $p^2 + 2q^2$ Quadrate sein müßten, so setze man $p^2 + q^2 = r^2$ und $p^2 + 2q^2 = s^2$. Dann wird aus der ersteren $p^2 = r^2 - q^2$, und also die andere $r^2 + q^2 = s^2$. Daher müßte sowohl $r^2 - q^2$ als auch $r^2 + q^2$ ein Quadrat sein; und auch ihr Product $r^4 - q^4$ müßte ein Quadrat sein, welches unmöglich ist.

Hieraus sieht man nun genügend, daß es nicht leicht ist, solche Zahlen für m und n zu wählen, daß die Auflösung möglich wird. Das einzige Mittel solche Werthe für m und n zu finden, besteht darin, daß man derartige Fälle errathe, oder durch das folgende Verfahren bestimme.

Setzt man $f^2 + mg^2 = h^2$ und $f^2 + ng^2 = k^2$, so bekommt man aus der ersten $m = \frac{h^2 - f^2}{g^2}$, und aus der andern $n = \frac{k^2 - f^2}{g^2}$. Nimmt man nun für f, g, h und k Zahlen nach Belieben an, so bekommt man für m und n Werthe, welche die Auflösung möglich machen.

Es sei z. B. $h = 3$, $k = 5$, $f = 1$ und $g = 2$, so wird $m = 2$ und $n = 6$. Jetzt sind wir sicher, daß es möglich ist, die zwei Formeln $p^2 + 2q^2$ und $p^2 + 6q^2$ zu Quadraten zu machen, da dies geschieht, wenn $p = 1$ und $q = 2$. Die erste aber wird auf allgemeine Art ein Quadrat, wenn $p = r^2 - 2s^2$ und $q = 2rs$; denn dann wird $p^2 + 2q^2 = (r^2 + 2s^2)^2$. Die andere Formel aber wird alsdann $p^2 + 6q^2 = r^4 + 20r^2s^2 + 4s^4$, für welche ein Fall bekannt ist, in dem sie ein Quadrat wird, nämlich wenn $p = 1$ und $q = 2$, welcher ergiebt $r = 1$ und $s = 1$, oder überhaupt $r = s$; denn dann wird unsere Formel $25s^4$. Da wir nun diesen Fall wissen, so setzen wir $r = s + t$, so wird $r^2 = s^2 + 2st + t^2$ und $r^4 = s^4 + 4s^3t + 6s^2t^2 + 4st^3 + t^4$; daher unsere Formel $25s^4 + 44s^3t + 26s^2t^2 + 4st^3 + t^4$ sein wird. Davon sei die Wurzel $5s^2 + fst + t^2$, deren Quadrat $25s^4 + 10fs^3t + 10s^2t^2 + 2fst^3 + t^4 + f^2s^2t^2$ ist, wo sich die ersten und letzten Glieder aufheben. Man nehme nun f so an, daß sich auch die vorletzten aufheben, welches geschieht, wenn $4 = 2f$ und $f = 2$; alsdann geben die übrigen durch s^2t dividirt die Gleichung: $44s + 26t = 10fs + 10t + f^2t = 20s + 14t$, oder $2s = -t$ und $\frac{s}{t} = -\frac{1}{2}$. Daher wird $s = -1$ und $t = 2$, oder $t = -2s$, folglich $r = -2s$ und $r^2 = s^2$, welches der bekannte Fall selbst ist.

Man nehme f so an, daß sich die zweiten Glieder aufheben, welches geschieht, wenn $44 = 10f$, oder $f = \frac{22}{5}$; da dann die übrigen Glieder durch st^2 dividirt, geben $26s + 4t = 10s + f^2s + 2ft$, das ist $-\frac{64}{25}s = \frac{24}{5}t$, folglich $t = -\frac{7}{10}s$ und also $r = s + t = \frac{3}{10}s$, oder $\frac{r}{s} = \frac{3}{10}$; daher $r = 3$ und $s = 10$. Daher bekommen wir $p = 2s^2 - r^2 = 191$ und $q = 2rs = 60$, woraus unsere Formeln werden; $p^2 + 2q^2 = 43681 = 209^2$, und $p^2 + 6q^2 = 58081 = 241^2$.

224. Anmerkung. Noch mehr derartige Zahlen für m und n, welche unsere Formeln zu Quadraten machen, können nach der obigen Art gefunden werden. Es ist aber zu bemerken, daß das Verhältniß dieser Zahlen m und n nach Belieben angenommen werden kann. Es sei dieses Verhältniß wie a zu b, und man setze $m = az$ und $n = bz$, so kommt es nur darauf an, wie man z bestimmen soll, damit diese beiden Formeln $p^2 + azq^2$ und $p^2 + bzq^2$ zu Quadraten gemacht werden. Dieses wollen wir in der folgenden Aufgabe zeigen.

225. IX. Aufgabe. Wenn a und b gegebene Zahlen sind, die Zahl z zu finden, so daß sich die beiden Formeln $p^2 + azq^2$ und $p^2 + bzq^2$ zu Quadraten machen lassen, und zugleich die kleinsten Werthe für p und q zu bestimmen.

Man setze $p^2 + azq^2 = r^2$ und $p^2 + bzq^2 = s^2$, und multiplicire die erste mit b, die zweite aber mit a, so giebt die Differenz derselben die Gleichung: $(b - a)p^2 = br^2 - as^2$ und also $p^2 = \frac{br^2 - as^2}{b - a}$, welche Formel daher ein Quadrat sein muß. Da nun dies geschieht, wenn $r = s$, setze man um die Brüche wegzubringen: $r = s + (b - a)t$, so wird $p^2 = \frac{br^2 - as^2}{b - a} =$

$$\frac{bs^2 + 2b(b - a)st + b(b - a)^2t^2 - as^2}{b - a} = \frac{(b - a)s^2 + 2b(b - a)st + b(b - a)^2t^2}{b - a}$$

$= s^2 + 2bst + b(b - a)t^2$. Nun setze man $p = s + \frac{x}{y}t$, so wird $p^2 = s^2 + \frac{2x}{y} \cdot st + \frac{x^2}{y^2}t^2 = s^2 + 2bst + b(b - a)t^2$; wo sich die s^2 aufheben, die übrigen Glieder aber durch t dividirt und mit y^2 multiplicirt, geben: $2bsy^2 + b(b - a)ty^2 = 2sxy + tx^2$, daraus $t = \frac{2sxy - 2bsy^2}{b(b - a)y^2 - x^2}$, daher $\frac{t}{s} = \frac{2xy - 2by^2}{b(b - a)y^2 - x^2}$. Hieraus

bekommt man $t = 2xy - 2by^2$ und $s = b(b - a)y^2 - x^2$; ferner $r = 2(b - a)xy - b(b - a)y^2 - x^2$, und daraus $p = s + \frac{x}{y} \cdot t = b(b - a)y^2 + x^2 - 2bxy = (x - by)^2 - aby^2$. Da wir nun p nebst r und s gefunden haben, so bleibt noch übrig z zu suchen. Man subtrahire zu diesem Zwecke die erste Gleichung $p^2 + azq^2 + r^2$ von der andern $p^2 + bzq^2 = s^2$, so giebt der Rest $zq^2(b - a) = s^2 - r^2 = (s + r) \cdot (s - r)$. Da nun $s + r = 2(b - a)xy - 2x^2$ und $s - r = 2b(b - a)y^2 - 2(b - a)xy$;
oder $s + r = 2x((b - a)y - x)$ und
$s - r = 2(b - a)y(by - x)$, so wird:
$(b - a)zq^2 = 2x((b - a)y - x \cdot 2(b - a)y(by - x)$ oder
$zq^2 = 2x((b - a)y - x) \cdot 2y(by - x)$ oder
$zq^2 = 4xy((b - a)y - x)(by - x)$; folglich
$z = \frac{4xy((b - a)y - x)(by - x)}{q^2}$.

Daher muß für q^2 das größte Quadrat genommen werden, durch welches sich der Zähler theilen läßt. Für p aber haben wir schon gefunden $p = b(b - a)y^2 + x^2 - 2bxy = (x - by)^2 - aby^2$, woraus man sieht, daß diese Formeln leichter und einfacher werden, wenn man $x = v + by$ oder $x - by = v$ setzt. Denn dann wird $p = v^2 - aby^2$, und $z =$

$$\frac{4(v + by)y \cdot v(v + ay)}{q^2} \text{ oder } z = \frac{4vy(v + ay)(v + by)}{q^2},$$

wo die Zahlen v und y nach Belieben genommen werden können, und alsdann findet man zuerst q^2, indem dafür das größte Quadrat genommen wird, das in dem Zähler enthalten ist, woraus sich sodann z ergiebt. Nun wird $m = az$ und $n = bz$, endlich aber $p = v^2 - aby^2$, und hieraus bekommt man die gesuchten Formeln.

1. $p^2 + azq^2 = (v^2 - aby^2)^2 + 4avy(v + ay)(v + by)$, welche ein Quadrat ist, dessen Wurzel $r = -v^2 - 2avy - aby^2$.

II. Die zweite Formel aber wird $p^2 + bzq^2 = (v^2 - aby^2)^2 + 4bvy(v + ay)(v + by)$, welches auch ein Quadrat ist, dessen Wurzel $s = -v^2 - 2bvy - aby^2$, wo die Werthe von r und s auch positiv genommen werden können. Es wird förderlich sein, dies mit einigen Beispielen zu erläutern.

226. I. Beispiel. Es sei $a = -1$ und $b = +1$, und man suche Zahlen für z solcher Art, daß die zwei Formeln $p^2 - zq^2$ und $p^2 + zq^2$ Quadrate werden können. Die erste nämlich $= r^2$, und die zweite $= s^2$.

Hier wird $p = v^2 + y^2$, und man hat also, um z zu finden, die Formel $z = \frac{4vy(v - y)(v + y)}{q^2}$ zu betrachten, wo wir dann für v und y verschiedene Zahlen annehmen und daraus für z die Werthe suchen wollen, wie hier folgt.

	I.	II.	III.	IV.	V.	VI.
v	2	3	4	5	16	8
y	1	2	1	4	9	1
$v-y$	1	1	3	1	7	7
$v+y$	3	5	5	9	25	9
zq^2	4.6	4.30	16.15	9.16.5	36.25.16.7	16.9.14
q^2	4	4	16	9.16	36.25.16	16.9
z	6	30	15	5	7	14
p	5	13	17	41	337	65

woraus folgende Formeln aufgelöst und zu Quadraten gemacht werden können.

I. Können diese beiden Formeln zu Quadraten gemacht werden: $p^2 - 6q^2$ und $p^2 + 6q^2$, welches geschieht, wenn $p = 5$ und $q = 2$; denn dann wird die erste $= 25 - 24 = 1$; und die zweite $= 25 + 24 = 49$.

II. Können auch die beiden Formeln zu Quadraten gemacht werden: $p^2 - 30q^2$ und $p^2 + 30q^2$, welches geschieht, wenn $p = 13$ und $q = 2$; denn dann wird die erste

$= 169 - 120 = 49$, die zweite aber $= 169 + 120 = 289$.

III. Können auch die beiden Formeln $p^2 - 15q^2$ und $p^2 + 15q^2$ Quadrate werden, welches geschieht, wenn $p = 17$ und $q = 4$; denn dann wird die erste $= 289 - 240 = 49$, und die zweite $289 + 240 = 529$.

IV. Können auch die beiden Formeln $p^2 - 5q^2$ und $p^2 + 5q^2$ Quadrate werden, welches geschieht, wenn $p = 41$ und $q = 12$; denn dann wird die erste $1681 - 720 = 961 = 31^2$, die zweite aber $1681 + 720 = 2401 = 49^2$.

V. Können auch die beiden Formeln $p^2 - 7q^2$ und $p^2 + 7q^2$ Quadrate werden, welches geschieht, wenn $p = 337$ und $q = 120$; denn dann wird die erste $113569 - 100800 = 12769 = 113^2$, und die zweite $113569 + 100800 = 214369 = 463^2$.

VI. Können auch die beiden Formeln $p^2 - 14q^2$ und $p^2 + 14q^2$ Quadrate werden, welches geschieht, wenn $p = 65$ und $q = 12$; denn dann wird die erste $4225 - 2016 = 2209 = 47^2$, und die zweite $4225 + 2016 = 6241 = 79^2$.

227. II. **Beispiel.** Wenn die beiden Zahlen m und n sich verhalten wie $1 : 2$, das ist wenn $a = 1$ und $b = 2$, also $m = z$ und $n = 2z$, so sollen die Werthe für z gefunden werden, so daß die Formeln $p^2 + zq^2$ und $p^2 + 2zq^2$ zu Quadraten gemacht werden können.

Man hat nicht nöthig, hier die obigen allgemeinen Formeln zu gebrauchen, sondern dieses Beispiel kann sogleich auf das vorige gebracht werden. Denn setzt man $p^2 + zq^2 = r^2$ und $p^2 + 2zq^2 = s^2$, so bekommt man aus der ersten $p^2 = r^2 - zq^2$, welcher Werth für p^2 in der zweiten gesetzt, $r^2 + zq^2 = s^2$ giebt; folglich müssen die beiden Formeln $r^2 - zq^2$ und $r^2 + zq^2$ zu Quadraten gemacht werden können, welches der Fall des vorigen Beispieles ist. Also hat man auch hier für z folgende Werthe: 6, 30, 15, 5, 7, 14 2c.

Eine solche Verwandelung kann auch allgemein angestellt werden. Wenn wir annehmen, daß die beiden Formeln $p^2 + mq^2$ und $p^2 + nq^2$ zu Quadraten gemacht werden können, so wollen wir $p^2 + mq^2 = r^2$ und $p^2 + nq^2 = s^2$ setzen. Dann giebt die erste $p^2 = r^2 - mq^2$, und also die zweite $s^2 = r^2 - mq^2 + nq^2$ oder $r^2 + (n - m) q^2 = s^2$; wenn daher die ersten Formeln möglich sind, so sind auch diese $r^2 - mq^2$ und $r^2 + (n - m) q^2$ möglich; und da wir m und n unter sich vertauschen können, so sind auch diese möglich: $r^2 - nq^2$ und $r^2 + (m - n) q^2$. Sind aber jene Formeln unmöglich, so sind auch diese unmöglich.

228. III. **Beispiel.** Es seien die Zahlen m und n wie $1 : 3$, oder $a = 1$ und $b = 3$, also $m = z$ und $n = 3z$, so daß die Formeln $p^2 + zq^2$ und $p^2 + 3zq^2$ zu Quadraten gemacht werden sollen.

Weil hier $a = 1$ und $b = 3$, so wird die Sache möglich, so oft $zq^2 = 4vy(v + y)(v + 3y)$, und $p = v^2 - 3y^2$. Man nehme daher für v und y folgende Werthe:

	I.	II.	III.	IV.	V.
v	1	3	4	1	16
y	1	2	1	8	9
$v + y$	2	5	5	9	25
$v - 3y$	4	9	7	25	43
zq^2	16.2	4.9.30	4.4.35	4.9.25.4.2	4.9.16.25.49
q^2	16	4.9	4.4	4.4.9.25	4.9.16.25
z	2	30	35	2	43
p	2	3	13	191	13

Hier haben wir nun zwei Fälle für $z = 2$, daraus wir auf zweierlei Art die Formeln $p^2 + 2q^2$ und $p^2 + 6q^2$ zu Quadraten machen können; erstens geschieht dies, wenn $p = 2$ und $q = 4$, folglich auch wenn $p = 1$ und $q = 2$; denn dann wird $p^2 + 2q^2 = 9$ und $p^2 + 6q^2 = 25$. Ferner geschieht es auch, wenn $p = 191$ und $q = 60$, denn dann wird $p^2 + 2q^2 = (209)^2$ und $p^2 + 6q^2 = (241)^2$. Ob aber nicht auch $z = 1$ sein könnte, welches geschehen würde, wenn für zq^2 ein Quadrat herauskäme, ist schwer zu entscheiden. Wollte man nun die Frage erörtern, ob die beiden Formeln $p^2 + q^2$ und $p^2 + 3q^2$ zu Quadraten gemacht werden können oder nicht, so könnte man die Untersuchung auf folgende Art anstellen.

229. Man soll also untersuchen, ob die beiden Formeln $p^2 + q^2$ und $p^2 + 3q^2$ zu Quadraten gemacht werden können oder nicht. Man setze $p^2 + q^2 = r^2$ und $p^2 + 3q^2 = s^2$, so sind folgende Punkte zu betrachten:

I. Können die Zahlen p und q als untheilbar unter sich angesehen werden; denn wenn sie einen gemeinschaftlichen Theiler hätten, so würden die Formeln noch Quadrate bleiben, wenn p und q dadurch getheilt würden.

II. Kann p keine gerade Zahl sein. Denn dann würde q ungerade, und also die zweite Formel eine Zahl von der Art $4n + 3$ sein, welche kein Quadrat werden kann; daher ist p nothwendig ungerade und p^2 eine Zahl von der Art $8n + 1$.

III. Da nun p ungerade ist, so muß aus der ersten Formel q nicht nur gerade, sondern sogar durch 4 theilbar sein, damit q^2 eine Zahl von der Art $16n$, und $p^2 + q^2$ von der Art $8n + 1$ werde.

IV. Ferner kann p nicht durch 3 theilbar sein; denn dann würde p^2 sich durch 9 theilen lassen, q^2 aber nicht, folglich $3q^2$ nur durch 3, nicht aber durch 9, und also auch $p^2 + 3q^2$ durch 3, nicht aber durch 9, und demnach kein Quadrat sein; folglich kann die Zahl p nicht durch 3 theilbar sein, daher p^2 von der Art $3n + 1$ sein wird.

V. Da sich p nicht durch 3 theilen läßt, so muß sich q durch 3 theilen lassen; denn wäre q nicht durch 3 theilbar, so wäre q^2 eine Zahl von der Art $3n + 1$, und daher $p^2 + q^2$ von der Art $3n + 2$, welche kein Quadrat sein kann. Folglich muß q durch 3 theilbar sein.

VI. Auch kann p nicht durch 5 theilbar sein; denn wäre dieses der Fall, so wäre q nicht durch 5 theilbar und q^2 eine Zahl von der Art $5n + 1$ oder $5n + 4$, also $3q^2$ eine Zahl von der Art $5n + 3$ oder $5n + 2$, und von welcher Art auch $p^2 + 3q^2$ sein würde, so könnte diese Formel kein Quadrat sein; daher denn p nothwendig nicht durch 5 theilbar sein kann, und also p^2 eine Zahl von der Art $5n + 1$ oder $5n + 4$ sein muß.

VII. Da nun p nicht durch 5 theilbar ist, so wollen wir sehen, ob sich q durch 5 theilen läßt oder nicht. Wäre q nicht theilbar durch 5, so wäre q^2 von der Art $5n + 2$ oder $5n + 3$, wie wir gesehen haben, und da p^2 entweder $5n + 1$ oder $5n + 4$, so würde $p^2 + 3q^2$ sein, entweder $5n + 1$ oder $5n + 4$, eben wie p^2; es sei $p^2 = 5n + 1$, so müßte $q^2 = 5n + 4$ sein, weil sonst $p^2 + q^2$ kein Quadrat sein könnte. Alsdann aber wäre $3q^2 = 5n + 2$, und $p^2 + 3q^2 = 5n + 3$, welches kein Quadrat sein kann; wäre aber $p^2 = 5n + 4$, so müßte $q^2 = 5n + 1$ und $3q^2 = 5n + 3$ sein, folglich $p^2 + 3q^2 = 5n + 2$, welches auch kein Quadrat sein kann; woraus folgt, daß q durch 5 theilbar sein muß.

VIII. Da nun q erstens durch 4, ferner durch 3, und drittens auch durch 5 theilbar sein muß, so muß q eine Zahl von der Form $4 . 3 . 5m$ oder $q = 60m$ sein; daher unsere Formeln $p^2 + 3600m^2 = r^2$ und $p^2 + 10800m^2 = s^2$ sein würden. Die erste von der zweiten subtrahirt giebt $7200m^2 = s^2 - r^2 = (s + r)(s - r)$; so daß $s + r$ und $s - r$ Factoren sein müssen von $7200m^2$; wobei zu bemerken ist, daß sowohl s als r ungerade Zahlen und unter sich untheilbar sein müssen.

IX. Es sei demnach $7200m^2 = 4fg$ oder die Factoren davon $2f$ und $2g$, und man setze $s + r = 2f$ und $s - r = 2g$, so wird $s = f + g$, und $r = f - g$; da dann f und g unter sich untheilbar sein müssen, und die eine gerade und die andere ungerade. Da nun $fg = 1800m^2$, so muß man $1800m^2$ in zwei Factoren zerlegen, deren einer gerade, der andere aber ungerade ist, beide aber unter sich keinen gemeinschaftlichen Theiler haben.

X. Ferner ist auch zu bemerken, daß da $r^2 = p^2 + q^2$ und also r ein Theiler von $p^2 + q^2$ ist, die Zahl $r = f - g$ auch eine Summe von zwei Quadraten sein, und weil dieselbe ungerade, in der Form $4n + 1$ enthalten sein muß.

XI. Nehmen wir erstens $m = 1$ an, so wird $fg = 1800 = 8 \,.\, 9 \,.\, 25$, woraus folgende Zerlegungen entstehen: $f = 1800$ und $g = 1$, oder $f = 200$ und $g = 9$, oder $f = 72$ und $g = 25$, oder $f = 225$ und $g = 8$; aus der ersten wird $r = f - g = 1799 = 4n + 3$; nach der zweiten würde $r = f - g = 191 = 4n + 3$; nach der dritten würde $r = f - g = 47 = 4n + 3$; nach der vierten aber $r = f - g = 217 = 4n + 1$; daher die drei ersten wegfallen, und nur die vierte übrig bleibt; woraus man überhaupt schließen kann, daß der größere Factor ungerade, der kleinere aber gerade sein muß; aber hier kann auch der Werth $r = 217$ nicht eintreten, weil sich diese Zahl durch 7 theilen läßt, die keine Summe von zwei Quadraten ist.

XII. Nimmt man $m = 2$, so wird $fg = 7200 = 32 \,.\, 225$; daher nimmt man $f = 225$ und $g = 32$, also daß $r = f - g = 193$, welche Zahl wohl eine Summe von zwei Quadraten ist und also probirt zu werden verdient. Da nun $q = 120$ und $r = 193$, so wird, weil $p^2 = r^2 - q^2 = (r + q) \,.\, (r - q)$, also $r + q = 313$ und $r - q = 73$. Also sieht man wohl, daß für p^2 kein Quadrat herauskommt, weil diese Factoren keine Quadrate sind. Wollte man sich die Mühe geben, für m noch andere Zahlen zu nehmen, so würde sie vergeblich sein, wie wir noch zeigen wollen.

230. Lehrsatz. Es ist nicht möglich, daß die beiden

Formeln $p^2 + q^2$ und $p^2 + 3q^2$ zugleich Quadrate werden; oder in den Fällen, da die eine ein Quadrat wird, ist die andere gewiß keines.

Dies wird also bewiesen.

Da p ungerade und q gerade ist, wie wir gesehen haben, so kann $p^2 + q^2$ nicht anders ein Quadrat sein, als wenn $q = 2rs$ und $p = r^2 = s^2$; die andere aber $p^2 + 3q^2$ kann nicht anders ein Quadrat sein, als wenn $q = 2tu$ und $p = t^2 - 3u^2$ oder $p = 3u^2 - t^2$. Weil nun in beiden Fällen q ein doppeltes Product sein muß, so setze man für beide $q = 2abcd$ und nehme für die erste $r = ab$ und $s = cd$; für die zweite aber $t = ac$ und $u = bd$, so wird für die erste $p = a^2b^2 - c^2d^2$, für die zweite aber $p = a^2c^2 - 3b^2d^2$, oder $p = 3b^2d^2 - a^2c^2$, welche beide Werthe identisch sein müssen; daher bekommen wir entweder $a^2b^2 - c^2d^2 = a^2c^2 - 3b^2d^2$, oder $a^2b^2 - c^2d^2 = 3b^2d^2 - a^2c^2$; wobei zu bemerken ist, daß die Zahlen a, b, c und d überhaupt kleiner sind als p und q. Wir müssen also jeden dieser beiden Fälle besonders erwägen. Aus dem ersten erhalten wir $a^2b^2 + 3b^2d^2 = a^2c^2 + c^2d^2$ oder $b^2(a^2 + 3d^2) = c^2(a^2 + d^2)$; daraus wird $\frac{b^2}{c^2} = \frac{a^2 + d^2}{a^2 + 3d^2}$, welcher Bruch ein Quadrat sein muß. Hier kann aber der Zähler und Nenner keinen andern gemeinschaftlichen Theiler haben als 2, weil die Differenz zwischen beiden $2d^2$ ist. Sollte daher 2 ein gemeinschaftlicher Theiler sein, so müßte sowohl $\frac{a^2 + b^2}{2}$ als auch $\frac{a^2 + 3d^2}{2}$ ein Quadrat sein. Beide Zahlen aber a und d sind in diesem Fall ungerade und also ihre Quadrate von der Form $8n + 1$; daher die letztere Formel $\frac{a^2 + 3d^2}{2}$ die Form $4n + 2$ haben wird und kein Quadrat sein kann. Folglich kann 2 kein gemeinschaftlicher Theiler sein, sondern der Zähler $a^2 + d^2$ und der Nenner $a^2 + 3d^2$

sind unter sich untheilbar. Daher muß jeder für sich ein Quadrat sein. Weil nun diese Formeln den ersten ähnlich sind, so folgt, daß, wenn die ersten Quadrate wären, auch in kleinern Zahlen ähnliche Formeln Quadrate sein würden, und so könnte man immer zu kleineren Zahlen gelangen. Da es nun in kleineren Zahlen solche nicht giebt, so könnte man schließen, daß es auch solche in den größten Zahlen nicht geben kann.

Dieser Schluß ist aber nur insofern richtig, als auch der obige zweite Fall $a^2b^2 - c^2d^2 = 3b^2d^2 - a^2c^2$ auf einen gleichen führt. Hieraus aber wird $a^2b^2 + a^2c^2 = 3b^2d^2 + c^2d^2$, oder $a^2(b^2 + c^2) = d^2(3b^2 + c^2)$, und daher $\frac{a^2}{d^2} = \frac{b^2 + c^2}{3b^2 + c^2} = \frac{c^2 + b^2}{c^2 + 3b^2}$, welcher Bruch ein Quadrat sein muß, so daß dadurch der vorige Schluß vollkommen bestätigt wird; indem, wenn es in den größten Zahlen solche Fälle gäbe, da $p^2 + q^2$ und $p^2 + 3q^2$ Quadrate wären, dergleichen auch in den kleinsten Zahlen vorhanden sein müßten, was doch nicht stattfindet.

231. XII. Aufgabe. Man soll drei solche Zahlen x, y und z finden, daß, wenn je zwei mit einander multiplicirt werden und zum Product 1 addirt wird, ein Quadrat herauskommt.

Es müssen also diese drei Formeln zu Quadraten gemacht werden: I. $xy + 1$; II. $xz + 1$; III. $yz + 1$.

Man setze für die beiden letzteren $xz + 1 = p^2$ und $yz + 1 = q^2$, so findet man daraus $x = \frac{p^2 - 1}{z}$ und $y = \frac{q^2 - 1}{z}$, woraus die erste Formel $\frac{(p^2 - 1)(q^2 - 1)}{z^2} + 1$ wird, welche ein Quadrat sein soll, und also auch mit z^2 multiplicirt, das ist $(p^2 - 1)(q^2 - 1) + z^2$, welche leicht dazu gemacht werden kann. Denn setzt man die Wurzel davon $= z + r$, so bekommt man $(p^2 - 1)(q^2 - 1) = 2rz + r^2$, und daher $z = \frac{(p^2 - 1)(q^2 - 1) - r^2}{2r}$,

wo für p, q und r beliebige Zahlen angenommen werden können.

Es sei z. B. $r = -pq - 1$, so wird $r^2 = p^2q^2 + 2pq + 1$ und $z = \frac{-2pq - p^2 - q^2}{-2pq - 2} = \frac{p^2 + 2pq + q^2}{2pq + 2}$, folglich $x = \frac{(p^2 - 1)(2pq + 2)}{p^2 + 2pq + q^2} = \frac{2(pq + 1)(p^2 - 1)}{(p + q)^2}$, und $y = \frac{2(pq + 1)(q^2 - 1)}{(p + q)^2}$.

Will man aber ganze Zahlen haben, so setze man für die erste Formel $xy + 1 = p^2$ und nehme $z = x + y + q$, so wird die zweite Formel $x^2 + xy + xq + 1 = x^2 + qx + p^2$; die dritte aber wird $xy + y^2 + qy + 1 = y^2 + qy + p^2$, welche offenbar Quadrate werden, wenn man $q = \pm 2p$ nimmt; denn dann wird die zweite $x^2 \pm 2px + p^2$, wovon die Wurzel $x \pm p$ ist, die dritte aber wird $y^2 \pm 2py + p^2$, wovon die Wurzel $y \pm p$ ist; daher haben wir diese sehr einfache Auflösung: $xy + 1 = p^2$ oder $xy = p^2 - 1$, welches für jede Zahl, die für p angenommen wird, leicht geschehen kann; und alsdann ist die dritte Zahl auf doppelte Art entweder $z = x + y + 2p$ oder $z = x + y - 2p$, was wir durch folgende Beispiele erläutern wollen:

I. Man nehme $p = 3$, so wird $p^2 - 1 = 8$. Nun setze man $x = 2$ und $y = 4$, so wird entweder $z = 12$ oder $z = 0$; und also sind die drei gesuchten Zahlen 2, 4 und 12.

II. Es sei $p = 4$, so wird $p^2 - 1 = 15$. Nun nehme man $x = 5$ und $y = 3$, so wird $z = 16$ oder $z = 0$. Die drei gesuchten Zahlen sind 3, 5 und 16.

III. Es sei $p = 5$, so wird $p^2 - 1 = 24$. Nun nehme man $x = 3$ und $y = 8$, so wird $z = 21$, oder auch $z = 1$; woraus folgende Zahlen hervorgehen, entweder 1, 3 und 8, oder 3, 8 und 21.

232. XIII. Aufgabe. Man suche drei ganze Zahlen

y, x und z, die so beschaffen sind, daß, wenn zu dem Producte von je zweien eine gegebene Zahl a addirt wird, jedesmal ein Quadrat herauskommt.

Es müssen also die drei Formeln Quadrate werden: I. $xy + a$; II. $xz + a$; III. $yz + a$. Nun setze man für die erste $xy + a = p^2$, und nehme $z = x + y + q$, so wird die zweite $x^2 + xy + xq + a = x^2 + xq + p^2$ und die dritte $xy + y^2 + yq + a = y^2 + qy + p^2$, welche beide Quadrate werden, wenn $q = \pm 2p$; so daß $z = x + y \pm 2p$, und daher für z zwei Werthe gefunden werden können.

233. XIV. **Aufgabe.** Man verlangt vier ganze Zahlen x, y, z und v solcher Art, daß, wenn zum Product von je zweien eine gegebene Zahl a addirt wird, jedesmal ein Quadrat herauskommt.

Es müssen also folgende sechs Formeln zu Quadraten gemacht werden: I. $xy + a$; II. $xz + a$; III. $yz + a$; IV. $xv + a$; V. $yv + a$; VI. $zv + a$. Nun setze man für die erste $xy + a = p^2$ und nehme $z = x + y + 2p$, so wird die zweite und dritte Formel ein Quadrat. Ferner nehme man $v = x + y - 2p$, so wird auch die vierte und die fünfte ein Quadrat, und es bleibt also nur noch die sechste übrig, welche $x^2 + 2xy + y^2 - 4p^2 + a$ sein wird, und ein Quadrat sein muß. Da nun $p^2 = xy + a$, so wird die letzte Formel $x^2 - 2xy + y^2 - 3a$, folglich müssen auch die beiden Formeln zu Quadraten gemacht werden: I. $xy + a = p^2$ und II. $(x - y)^2 - 3a$. Von der letzteren sei die Wurzel $(x - y) - q$, so wird $(x - y)^2 - 3a = (x - y)^2 - 2q(x - y) + q^2$, und dann wird $-3a = -2q(x - y) + q^2$ und folglich $x - y = \frac{q^2 + 3a}{2q}$ oder $x = y + \frac{q^2 + 3a}{2q}$; hieraus wird $p^2 = y^2 + \frac{q^2 + 3a}{2q} y + a$. Man nehme $p = y + r$, so wird $2ry + r^2 = \frac{q^2 + 3a}{2q} y + a$, oder $4qry + 2qr^2 = (q^2 +$

$3a) y + 2aq$, oder $2qr^2 - 2aq = (q^2 + 3a) y - 4qry$ und $y = \frac{2qr^2 - 2aq}{q^2 + 3a - 4qr}$, wo q und r nach Belieben angenommen werden können, und es also nur darauf ankommt, daß für x und y ganze Zahlen herauskommen. Denn weil $p = y + r$, so werden auch z und v ganze Zahlen sein. Hier kommt es aber hauptsächlich auf die Beschaffenheit der gegebenen Zahl a an, und allerdings könnte der Umstand, daß nur ganze Zahlen verlangt werden, einige Schwierigkeit machen; allein es ist zu bemerken, daß diese Auflösung schon dadurch sehr eingeschränkt ist, daß wir den Buchstaben z und v die Werthe $x + y \pm 2p$ gegeben haben, während dieselben offenbar noch viele andere haben könnten. Wir wollen zu diesem Behufe über diese Aufgabe folgende Betrachtungen anstellen, welche auch in andern Fällen ihren Nutzen haben können.

I. Wenn $xy + a$ ein Quadrat sein soll und also $xy = p^2 - a$, so müssen die Zahlen x und y immer in der Form $r^2 - as^2$ enthalten sein. Wenn wir daher $x = b^2 - ac^2$ und $y = d^2 - ae^2$ setzen, so wird $xy = (bd - ace)^2 - a(be - cd)^2$. Ist nun $be - cd = \pm 1$, so wird $xy = (bd - ace)^2 - a$, und also $xy + a = (bd - ace)^2$.

II. Setzen wir nun ferner $z = f^2 - ag^2$ und nehmen die Zahlen f und g so an, daß $bg - cf = \pm 1$ und auch $dg - ef = \pm 1$, so werden auch die Formeln $xz + a$ und $yz + a$ Quadrate werden. Es kommt also nur darauf an, solche Zahlen für b, c und d, e und auch für f und g zu finden, daß die obige Eigenschaft erfüllt werde.

III. Wir wollen diese drei Paar Buchstaben durch die Brüche darstellen: $\frac{b}{c}$, $\frac{d}{e}$ und $\frac{f}{g}$, welche daher so beschaffen sein müssen, daß die Differenz zwischen je zweien durch einen Bruch ausgedrückt werde, dessen Zähler = 1. Denn da $\frac{b}{c} - \frac{d}{e} = \frac{be - dc}{ce}$, so muß dessen Zähler,

wie wir gesehen haben, allerdings ± 1 sein. Man kann hier einen dieser Brüche nach Belieben annehmen, und leicht einen andern dazu finden, so daß die gegebene Bedingung erfüllt wird.

Es sei z. B. der erste $\frac{b}{c} = \frac{3}{2}$, so muß der zweite $\frac{d}{e}$ diesem beinahe gleich sein. Es sei $\frac{d}{e} = \frac{4}{3}$, so wird die Differenz $z = \frac{1}{6}$. Man kann auch diesen zweiten Bruch aus dem ersten auf allgemeine Art bestimmen; denn da $\frac{3}{2} - \frac{d}{e} = \frac{3e - 2d}{2e}$, so muß $3e - 2d = 1$, also $2d = 3e - 1$ und $d = e + \frac{e - 1}{2}$ sein. Man nehme daher $\frac{e - 1}{2} = m$ oder $e = 2m + 1$, so bekommen wir $d = 3m + 1$ und unser zweiter Bruch wird $\frac{d}{e} = \frac{3m + 1}{2m + 1}$ sein. Eben so kann auch zu jedem ersten Bruch der zweite gefunden werden, wie man aus folgenden Beispielen ersieht:

$\frac{b}{c} =$	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{7}{3}$	$\frac{8}{5}$	$\frac{11}{4}$	$\frac{13}{8}$	$\frac{17}{7}$
$\frac{d}{e} =$	$\frac{3m+1}{2m+1}$	$\frac{5m+2}{3m+1}$	$\frac{7m+2}{3m+1}$	$\frac{8m+3}{5m+2}$	$\frac{11m+3}{4m+1}$	$\frac{13m+5}{8m+3}$	$\frac{17m+5}{7m+2}$

IV. Hat man zwei solche Brüche für $\frac{b}{c}$ und $\frac{d}{e}$ gefunden, so ist es ganz leicht, dazu einen dritten $\frac{f}{g}$ zu finden, welcher zu den beiden ersten in gleichem Verhältnisse steht. Man braucht nur $f = b + d$ und $g = c + e$ zu setzen, so daß $\frac{f}{g} = \frac{b + d}{c + e}$. Denn da aus den zwei ersten $be - cd = \pm 1$ ist, so wird $\frac{f}{g} - \frac{b}{c} = \frac{\pm 1}{c^2 + ce}$. Eben so wird auch der zweite weniger dem dritten $\frac{f}{g} - \frac{d}{e} = \frac{be - cd}{e^2 + ce} = \frac{\pm 1}{e^2 + e^2}$.

V. Hat man nun drei solche Brüche gefunden $\frac{b}{c}$, $\frac{d}{e}$ und $\frac{f}{g}$, so kann man daraus sogleich unsere Aufgabe

für drei Zahlen x, y und z auflösen, so daß die drei Formeln $xy + a$, $xz + a$ und $yz + a$ Quadrate werden. Denn man braucht nur $x = b^2 - ac^2$, $y = d^2 - ae^2$ und $z = f^2 - ag^2$ zu setzen. Man nehme z. B. aus der obigen Tafel $\frac{b}{c} = \frac{5}{3}$ und $\frac{d}{e} = \frac{7}{4}$, so wird $\frac{f}{e} = \frac{12}{7}$; woraus man $x = 25 - 9a$, $y = 49 - 16a$ und $z = 144 - 49a$ erhält; denn dann wird $xy + a = 1225 - 840a + 144a^2 = (35 - 12a)^2$; ferner wird $xz + a = 3600 - 2520a + 441a^2 = (60 - 21a)$ und $yz + a = 7056 - 4704a + 784a^2 = (64 - 28a)^2$.

234. Sollen aber nach dem Inhalt der Aufgabe vier derartige Zahlen x, y, z und v gefunden werden, so muß man zu den drei obigen Brüchen noch einen vierten hinzufügen. Es seien demnach die drei ersten $\frac{b}{c}$, $\frac{d}{e}$, $\frac{f}{g} = \frac{b + d}{c + e}$, und man setze den vierten Bruch $\frac{h}{k} = \frac{d + f}{e + g} = \frac{2d + b}{2e + c}$, so daß er mit dem zweiten und dritten in dem gehörigen Verhältnisse stehe. Wenn man nun $x = b^2 - a^2c^2$, $y = d^2 - ae^2$, $z = f^2 - ag^2$ und $v = h^2 - ak^2$ nimmt, so werden schon folgende Bedingungen erfüllt: I. $xy + a = \square$;*) II. $xz + a = \square$; III. $yz + a = \square$; IV. $yv + a = \square$; V. $zv + a = \square$; es bleibt also nur noch übrig, daß auch $xv + a$ ein Quadrat werde, welches von selbst nicht geschieht, weil der erste Bruch zu dem vierten nicht in dem gehörigen Verhältniß steht. Es ist daher nöthig, in den drei ersten Brüchen noch die unbestimmte Zahl m beizubehalten, und dieselbe so zu bestimmen, daß auch $xv + a$ ein Quadrat werde.

VI. Man nehme daher aus obiger Tabelle den ersten Fall und setze $\frac{b}{c} = \frac{3}{2}$ und $\frac{d}{e} = \frac{3m + 1}{2m + 1}$, so wird $\frac{f}{g} =$

*) $\square$ bedeutet hier stets eine Quadratzahl.

$\frac{3m+4}{2m+3}$ und $\frac{h}{k} = \frac{6m+5}{4m+4}$. Hieraus wird $x = 9 - 4a$ und $v = (6m+5)^2 - a(4m+4)^2$, also $xv + a = 9(6m+5)^2 - 4a(6m+5)^2 - 9a(4m+4)^2 + 4a^2(4m+4)^2$ oder $xv + a = 9(6m+5)^2 - a(288m^2 + 538m + 243) + 4a^2(4m+4)^2$, welche leicht zu einem Quadrat gemacht werden kann, weil m^2 mit einem Quadrat multiplicirt ist; wobei wir uns aber nicht aufhalten wollen.

VII. Man kann auch solche Brüche, die nöthig sind, auf allgemeinere Art angeben. Denn es sei $\frac{b}{c} = \frac{l}{1}$, $\frac{d}{e} = \frac{nl-1}{n}$, so wird $\frac{f}{g} = \frac{nl+l-1}{n+1}$ und $\frac{g}{h} = \frac{2nl+l-2}{2n+1}$. Man setze für den letzten Bruch $2n+1 = m$, so wird derselbe $\frac{lm-2}{m}$, folglich aus dem ersten $x = ll - a$ und aus dem letzten $v = (lm-2)^2 - am^2$. Also bleibt nur noch übrig, daß $xv + a$ ein Quadrat werde. Da nun $v = (ll - a)m^2 - 4lm + 4$ und also $xv + a = (ll - a)^2 m^2 - 4(ll - a)lm + 4ll - 3a$, welches ein Quadrat sein muß. Davon setze man nun die Wurzel $(ll - a)m - p$, wovon das Quadrat $(ll-a)^2 m^2 - 2(ll - a)mp + p^2$, woraus wir $-4(ll - a)lm + 4ll - 3a = -2(ll - a)mp + p^2$ und $m = \frac{p^2 - 4ll + 3a}{(ll-a)(2p-4l)}$ erhalten. Man nehme $p = 2l + q$, so wird $m = \frac{4lq + q^2 + 3a}{2q(ll-a)}$, wo für l und q beliebige Zahlen genommen werden können.

Wäre z. B. $a = 1$, so nehme man $l = 2$, dann wird $m = \frac{4q + q^2 + 3}{6q}$. Setzt man $q = 1$, so wird $m = \frac{4}{3}$ und $m = 2n + 1$; wir wollen aber hiebei nicht verweilen, sondern zur folgenden Aufgabe übergehen.

235. XV. Aufgabe. Man verlangt drei solche Zahlen

x, y und z, daß sowohl die Summe als auch die Differenz von je zweien ein Quadrat werde.

Es müssen also die folgenden sechs Formeln zu Quadraten gemacht werden: I. $x + y$; II. $x + z$; III. $y + z$; IV. $x - y$; V. $x - z$; VI. $y - z$. Man fange bei den drei letzten an, und setze $x - y = p^2$, $x - z = q^2$ und $y - z = r^2$, so bekommen wir aus den beiden letzten $x = q^2 + z$ und $y = r^2 + z$, daher die erste $x - y = q^2 - r^2 = p^2$, oder $q^2 = p^2 + r^2$ giebt, so daß die Summe der Quadrate $p^2 + r^2$ ein Quadrat sein muß, nämlich q^2, welches geschieht, wenn $p = 2ab$ und $r = a^2 - b^2$, denn dann wird $q = a^2 + b^2$. Wir wollen aber die Buchstaben p, q und r beibehalten und die drei ersten Formeln betrachten, aus welchen dann erstens $x + y = q^2 + r^2 + 2z$; zweitens $x + z = q^2 + 2z$; drittens $y + z = r^2 + 2z$. Man setze für die erste $q^2 + r^2 + 2z = t^2$, so ist $2z = t^2 - q^2 - r^2$. Daher dann noch diese zwei Formeln zu Quadraten gemacht werden müssen: $t^2 - r^2 = \square$ und $t^2 - q^2 = \square$, das ist $t^2 - (a^2 - b^2)^2 = \square$ und $t^2 - (a^2 + b^2)^2 = \square$, welche folgende Gestalt annehmen: $t^2 - a^4 - b^4 + 2a^2b^2$ und $t^2 - a^4 - b^4 - 2a^2b^2$. Weil nun sowohl $c^2 + d^2 + 2cd$ als auch $c^2 + d^2 - 2cd$ ein Quadrat ist, so sieht man, daß wir unsern Endzweck erreichen, wenn wir $t^2 - a^4 - b^4$ mit $c^2 + d^2$ und $2a^2b^2$ mit $2cd$ vergleichen. Um dieses zu bewerkstelligen, wollen wir setzen $cd = a^2b^2 = f^2g^2h^2k^2$ und nehmen $c = f^2g^2$ und $d = h^2k^2$; $a^2 = f^2h^2$ und $b^2 = g^2k^2$ oder $a = fh$ und $b = gk$, woraus die erste Gleichung $t^2 - a^4 - b^4 = c^2 + d^2$ die Form erhält: $t^2 - f^4h^4 - g^4k^4 = f^4g^4 + h^4k^4$ und also $t^2 = f^4g^4 + f^4h^4 + h^4k^4 + g^4k^4$, das ist $t^2 = (f^4 + k^4)(g^4 + h^4)$, welches Product also ein Quadrat sein muß, wovon aber die Auflösung schwer fallen dürfte.

Wir wollen daher die Sache auf eine andere Art an-

greifen, und aus den drei ersteren Gleichungen $x - y = p^2$; $x - z = q^2$; $y - z = r^2$ die Buchstaben y und z bestimmen, welche $y = x - p^2$ und $z = x - q^2$ sein werden, so daß $q^2 = p^2 + r^2$. Nun werden die ersten Formeln $x + y = 2x - p^2$; $x + z = 2x - q^2$; und $y + z = 2x - p^2 - q^2$; für diese letzte setze man $2x - p^2 - q^2 = t^2$, so daß $2x = t^2 + p^2 + q^2$ und nur noch die Formeln $t^2 + q^2$ und $t^2 + p^2$ übrig bleiben, welche zu Quadraten gemacht werden müssen. Da nun aber $q^2 = p^2 + r^2$ sein muß, so setze man $q = a^2 + b^2$ und $p = a^2 - b^2$, dann wird $r = 2ab$; woraus unsere Formeln sein werden:

I. $t^2 + (a^2 + b^2)^2 = t^2 + a^4 + b^4 + 2a^2b^2 = \square$
II. $t^2 + (a^2 - b^2)^2 = t^2 + a^4 + b^4 - 2a^2b^2 = \square$.

Vergleichen wir nun hier wiederum $t^2 + a^4 + b^4$ mit $c^2 + d^2$, und $2a^2b^2$ mit $2cd$, so erreichen wir unsern Endzweck; wir setzen daher, wie vorher $c = f^2g^2$, $d = h^2k^2$ und $a = fh$, $b = gk$, dann wird $cd = a^2b^2$, und muß noch sein $t^2 + f^4h^4 + g^4k^4 = c^2 + d^2 = f^4g^4 + h^4k^4$; woraus folgt $t^2 = f^4g^4 - f^4h^4 + h^4k^4 - g^4k^4 = (f^4 - k^4)(g^4 - h^4)$. Die Sache kommt also darauf an, daß zwei Differenzen zwischen zwei Biquadraten gefunden werden, wie $f^4 - k^4$ und $g^4 - h^4$, welche mit einander multiplicirt, ein Quadrat bilden.

Wir wollen zu diesem Zwecke die Formel $m^4 - n^4$ betrachten und zusehen, was für Zahlen daraus entstehen, wenn für m und n gegebene Zahlen genommen werden, und wollen dabei die Quadrate, die darin enthalten sind, besonders bemerken. Weil nun $m^4 - n^4 = (m^2 - n^2)(m^2 + n^2)$, so wollen wir daraus folgende Tabelle machen:

Tabelle
für die Zahlen, welche in der Form $m^4 - n^4$ enthalten sind.

m^2	n^2	$m^2 - n^2$	$m^2 + n^2$	$m^4 - n^4$
4	1	3	5	3 . 5
9	1	8	10	16 . 5
9	4	5	13	5 . 13
16	1	15	17	3 . 5 . 17
16	9	7	25	25 . 7
25	1	24	26	16 . 3 . 13
25	9	16	34	16 . 2 . 17
49	1	48	50	25 . 16 . 2 . 3
49	16	33	65	3 . 5 . 11 . 13
64	1	63	65	9 . 5 . 7 . 13
81	49	32	130	64 . 5 . 13
121	4	117	125	25 . 9 . 5 . 13
121	9	112	130	16 . 2 . 5 . 7 . 13
121	49	72	170	144 . 5 . 17
144	25	119	169	169 . 7 . 17
169	1	168	170	16 . 3 . 5 . 7 . 17
169	81	88	250	25 . 16 . 5 . 11
225	64	161	299	289 . 7 . 23

Hieraus können wir schon einige Auflösungen geben. Man nehme nämlich $f^2 = 9$ und $k^2 = 4$, so wird $f^4 - k^4 = 13 . 5$; ferner nehme man $g^2 = 81$ und $h^2 = 49$, so wird $g^4 - h^4 = 64 . 5 . 13$, woraus $t^2 = 64 . 25 . 169$; folglich $t = 520$. Da nun $t^2 = 270400$; $f = 3$; $g = 9$; $k = 2$; $h = 7$, so bekommen wir $a = 21$; $b = 18$; hieraus $p = 117$, $q = 765$ und $r = 756$; daraus findet man $2x = t^2 + p^2 + q^2 = 869314$ und also $x = 434657$; daher ferner $y = x - p^2 = 420968$, und endlich $z = x - q^2 = -150568$; welche Zahl auch positiv genommen werden kann, weil alsdann die Summe in die Differenz und umgekehrt die Differenz in die Summe verwandelt werden. Folglich sind unsere drei gesuchten Zahlen:

$$x = 434657$$
$$y = 420968$$
$$z = 150568$$

daher wird $x + y = 855625 = (925)^2$
$x + z = 585225 = (765)^2$
$y + z = 571536 = (756)^2$
und weiter $x - y = 13689 = (117)^2$
$x - z = 284089 = (533)^2$
$y - z = 270400 = (520)^2$

Noch andere Zahlen können aus der obigen Tabelle gefunden werden, wenn wir $f^2 = 9$, $k^2 = 4$, und $g^2 = 121$, $h^2 = 4$ setzen; denn daraus wird $t^2 = 13 . 5 . 5 . 13 . 9 . 25 = 9 . 25 . 25 . 169$, so daß $t = 3 . 5 . 5 . 13 = 975$. Weil nun $f = 3$, $g = 11$, $k = 2$ und $h = 2$, so wird $a = fh = 6$ und $b = gk = 22$; hieraus wird $p = a^2 - b^2 = -448$, $q = a^2 + b^2 = 520$ und $r = 2ab = 264$. Daher bekommen wir $2x = t^2 + p^2 + q^2 = 950625 + 200704 + 270400 = 1421729$, daher $x = \frac{1421729}{2}$, daraus $y = x - p^2 = \frac{1020321}{2}$ und $z = x - q^2 = 880929$. Nun ist zu bemerken, daß, wenn diese Zahlen die gesuchte Eigenschaft haben, dieselben mit jedem Quadrat multiplicirt, die nämliche Eigenschaft beibehalten müssen. Man nehme also die gefundenen Zahlen viermal größer, so werden die drei folgenden gleichfalls Genüge leisten: $x = 2843458$, $y = 2040642$ und $z = 1761858$, welche größer sind als die vorhergehenden; so daß jene für die kleinsten möglichen gehalten werden können.

236. XVI. Aufgabe. Man verlangt drei derartige Quadratzahlen, daß die Differenz zwischen je zweien ein Quadrat bilde.

Die vorige Auflösung dient uns auch, um diese Aufgabe zu lösen. Denn wenn x, y und z solche Zahlen sind, daß diese Formeln Quadrate werden: I. $x + y$; II. $x - y$; III. $x + z$; IV. $x - z$; V. $y + z$; VI. $y - z$; so wird auch das Product der ersten und zweiten $x^2 - y^2$ ein

Quadrat, ebenso auch das Product der dritten und vierten $x^2 - z^2$, und endlich auch das Product der fünften und sechsten $y^2 - z^2$ ein Quadrat sein. Daher werden die drei hier gesuchten Quadrate x^2, y^2 und z^2 sein. Allein diese Zahlen werden sehr groß, und es giebt ohne Zweifel weit kleinere, weil es eben nicht nöthig ist, daß, um $x^2 - y^2$ zu einem Quadrate zu machen, auch $x + y$ und $x - y$ jedes besonders ein Quadrat sein muß, indem z. B. $25 - 9$ ein Quadrat ist, während doch weder $5 + 3$ noch $5 - 3$ ein Quadrat ist. Wir wollen also diese Aufgabe besonders auflösen und zuerst bemerken, daß für das eine Quadrat 1 gesetzt werden kann. Denn wenn $x^2 - y^2$, $x^2 - z^2$ und $y^2 - z^2$ Quadrate sind, so bleiben dieselben auch Quadrate, wenn sie durch z^2 dividirt werden; daher diese Formeln zu Quadraten gemacht werden müssen: $\frac{x^2}{z^2} - \frac{y^2}{z^2} = \square$, $\frac{x^2}{z^2} - 1 = \square$, und $\frac{y^2}{z^2} - 1 = \square$. Also kommt es nur auf diese zwei Brüche $\frac{x}{z}$ und $\frac{y}{z}$ an. Nimmt man nun $\frac{x}{z} = \frac{p^2 + 1}{p^2 - 1}$ und $\frac{y}{z} = \frac{q^2 + 1}{q^2 - 1}$, so werden die beiden letzteren Bedingungen erfüllt; denn dann wird $\frac{x^2}{z^2} - 1 = \frac{4p^2}{(p^2 - 1)^2}$ und $\frac{y^2}{z^2} - 1 = \frac{4q^2}{(q^2 - 1)^2}$. Es bleibt also nur noch übrig, die erste Formel zu einem Quadrate zu machen, welche $\frac{x^2}{z^2} - \frac{y^2}{z^2} = \frac{(p^2 + 1)^2}{(p^2 - 1)^2} - \frac{(q^2 + 1)^2}{(q^2 - 1)^2} = \left(\frac{p^2 + 1}{p^2 - 1} + \frac{q^2 + 1}{q^2 - 1}\right) \left(\frac{p^2 + 1}{p^2 - 1} - \frac{q^2 + 1}{q^2 - 1}\right)$ ist. Hier wird nun der erste Factor $= \frac{2(p^2q^2 - 1)}{(p^2 - 1)(q^2 - 1)}$, der zweite aber $= \frac{2(q^2 - p^2)}{(p^2 - 1)(q^2 - 1)}$, wovon das Product $\frac{4(p^2q^2 - 1)(q^2 - p^2)}{(p^2 - 1)^2 (q^2 - 1)^2}$ ist. Weil nun der Nenner schon ein Quadrat und der Zähler mit dem Quadrat 4 multiplicirt ist, so ist noch nöthig, diese Formel $(p^2q^2 - 1)(q^2 - p^2)$, oder auch diese $(p^2q^2 - 1)(\frac{q^2}{p^2} - 1)$ zu einem

Quadrate zu machen; welches geschieht, wenn genommen wird $pq = \frac{f^2 + g^2}{2fg}$ und $\frac{q}{p} = \frac{h^2 + k^2}{2hk}$, da dann jeder Factor besonders ein Quadrat wird. Hieraus ist nun $q^2 = \frac{f^2 + g^2}{2fg} . \frac{h^2 + k^2}{2hk}$; folglich müssen diese zwei Brüche mit einander multiplicirt ein Quadrat bilden, und also auch wenn dieselben mit $4f^2g^2 . h^2k^2$ multiplicirt werden, das ist $fg(f^2 + g^2) hk(h^2 + k^2)$; welche Formel derjenigen, die vorher gefunden worden, vollkommen ähnlich wird, wenn man $f = a + b$, $g = a - b$, $h = c + d$ und $k = c - d$ setzt. Denn dann kommt $2(a^4 - b^4) . 2(c^4 - d^4) = 4(a^4 - b^4)(c^4 - d^4)$, welches, wie wir gesehen haben, geschieht, wenn $a^2 = 9$, $b^2 = 4$, $c^2 = 81$ und $d^2 = 49$, oder $a = 3$, $b = 2$, $c = 9$ und $d = 7$. Hieraus wird $f = 5$, $g = 1$, $h = 16$ und $k = 2$, und daher $pq = \frac{13}{5}$ und $\frac{q}{p} = \frac{260}{64} = \frac{65}{16}$. Diese zwei Gleichungen mit einander multiplicirt geben $q^2 = \frac{65}{16} . \frac{13}{5} = \frac{13 . 13}{16}$, folglich $q = \frac{13}{4}$, daher wird $p = \frac{4}{5}$. Dadurch bekommen wir $\frac{x}{z} = \frac{p^2 + 1}{p^2 - 1} = -\frac{41}{9}$ und $\frac{y}{z} = -\frac{q^2 + 1}{q^2 - 1} = \frac{185}{153}$. Da nun $x = -\frac{41z}{9}$ und $y = \frac{185z}{153}$, so nehme man, um ganze Zahlen zu bekommen, $z = 153$, dann wird $x = -697$ und $y = 185$, folglich sind die drei gesuchten Quadratzahlen folgende:

$x^2 = 485809$; denn dann wird $x^2 - y^2 = 451584 = (672)^2$
$y^2 = 34225$; " " " $y^2 - z^2 = 10816 = (104)^2$
$z^2 = 23409$; " " " $x^2 - z^2 = 462400 = (680)^2$

Diese Quadrate sind viel kleiner, als wenn wir von den in der vorigen Aufgabe gefundenen drei Zahlen x, y und z die Quadrate hätten nehmen wollen.

237. Man könnte hier einwenden, daß diese Auflösung durch ein bloßes Probiren gefunden sei, indem uns dazu die obige Tabelle behülflich gewesen ist. Wir haben

uns aber dieses Mittels nur bedient, um die kleinste Auflösung zu finden. Wollte man aber darauf nicht sehen, so können durch Hülfe der oben gegebenen Regeln unendlich viele Auflösungen gegeben werden. Da es nämlich bei der letzteren Aufgabe darauf ankommt, daß das Product $(p^2q^2 - 1)(\frac{q^2}{p^2} - 1)$ zu einem Quadrate gemacht werde, weil alsdann $\frac{x}{z} = \frac{p^2 + 1}{p^2 - 1}$ und $\frac{y}{z} = \frac{q^2 + 1}{q^2 - 1}$ sein wird, so setze man $\frac{q}{p} = m$ oder $q = mp$, da dann unsere Formel $(m^2p^4 - 1)(m^2 - 1)$ sein wird, welche offenbar ein Quadrat wird, wenn $p = 1$; und dieser Werth wird uns auf andere führen, wenn wir $p = 1 + s$ setzen, alsdann aber muß diese Formel $(m^2 - 1) . (m^2 - 1 + 4m^2s + 6m^2s^2 + 4m^2s^3 + m^2s^4)$ ein Quadrat sein, und also auch wenn dieselbe durch das Quadrat $(m^2 - 1)^2$ dividirt wird, da dann herauskommt: $1 + \frac{4m^2s}{m^2 - 1} + \frac{6m^2s^2}{m^2 - 1} + \frac{4m^2s^3}{m^2 - 1} + \frac{m^2s^4}{m^2 - 1}$. Man setze hier der Kürze halber $\frac{m^2}{m^2 - 1} = a$, so daß diese Formel $1 + 4as + 6as^2 + 4as^3 + as^4$ ein Quadrat werden soll. Es sei die Wurzel davon $1 + fs + gs^2$, deren Quadrat $1 + 2fs + 2gs^2 + f^2s^2 + 2fgs^3 + g^2s^4$ ist, und man bestimme f und g so, daß die drei ersten Glieder wegfallen, welches geschieht, wenn $4a = 2f$ oder $f = 2a$, und $6a = 2g + f^2$, folglich $g = \frac{6a - f^2}{2} = 3a - 2a^2$, so geben die zwei letzten Glieder diese Gleichung: $4a + as = 2fg + g^2s$, woraus gefunden wird $s = \frac{4a - 2fg}{g^2 - a} = \frac{4a - 12a^2 + 8a^3}{4a^4 - 12a^3 + 9a^2 - a}$, also $s = \frac{4 - 12a + 8a^2}{4a^3 - 12a^2 + 9a - 1}$, welcher Bruch durch $a - 1$ gehoben $s = \frac{4(2a - 1)}{4a^2 - 8a + 1}$ giebt. Dieser Werth giebt uns schon unendlich viel Auflösungen, weil die Zahl m, aus dem $a = \frac{m^2}{m^2 - 1}$ entstanden, nach Belieben genommen werden kann, was durch einige Beispiele erläutert werden soll.

I. Es sei $m = 2$, so wird $a = \frac{4}{9}$ und daher $s = 4 \cdot \frac{\frac{5}{9}}{-\frac{23}{9}} = -\frac{20}{23}$ und hieraus $p = -\frac{27}{23}$, folglich $q = -\frac{54}{23}$; endlich $\frac{x}{z} = \frac{940}{420}$ und $\frac{y}{z} = \frac{6005}{4947}$.

II. Es sei $m = \frac{3}{2}$, so wird $a = \frac{9}{5}$ und $s = 4 \cdot \frac{\frac{12}{5}}{-\frac{11}{25}} = -\frac{240}{11}$, daher $p = -\frac{240}{11}$ und $q = \frac{747}{22}$; woraus die Brüche $\frac{x}{z}$ und $\frac{y}{z}$ gefunden werden können.

Ein besonderer Fall verdient noch bemerkt zu werden, wenn a ein Quadrat ist, wie es geschieht, wenn $m = \frac{5}{3}$, denn alsdann wird $a = \frac{25}{16}$. Man setze wieder der Kürze halber $a = b^2$, so daß unsere Formel $1 + 4b^2s + 6b^2s^2 + 4b^2s^3 + b^2s^4$ sein wird. Davon sei die Wurzel $1 + 2b^2s + bs^2$, deren Quadrat $1 + 4b^2s + 2bs^2 + 4b^4s^2 + 4b^3s^3 + b^2s^4$ ist, wo sich die zwei ersten und die letzten Glieder aufheben; die übrigen aber durch s^2 dividirt, geben $6b^2 + 4b^2s = 2b + 4b^4 + 4b^3s$, daraus $s = \frac{6b^2 - 2b - 4b^4}{4b^3 - 4b^2} = \frac{3b - 1 - 2b^3}{2b^2 - 2b}$; welcher Bruch noch durch $b - 1$ gehoben werden kann, da dann $s = \frac{1 - 2b - 2b^2}{2b}$ und $p = \frac{1 - 2b^2}{2b}$ sich ergiebt.

Man hätte die Wurzel dieser obigen Formel auch setzen können $1 + 2bs + bs^2$, deren Quadrat $1 + 4bs + 2bs^2 + 4b^2s^2 + 4b^2s^3 + b^2s^4$ ist, wo sich die ersten und zwei letzten Glieder aufheben, die übrigen aber durch s dividirt geben $4b^2 + 6b^2s = 4b + 2bs + 4b^2s$. Da nun $b^2 = \frac{25}{16}$ und $b = \frac{5}{4}$, so bekäme man daraus $s = -2$ und $p = -1$, folglich $p^2 - 1 = 0$; woraus nichts gefunden wird, weil $z = 0$ würde.

Im vorigen Fall aber, da $p = \frac{1 - 2b^2}{2b}$, wenn $m = \frac{5}{3}$ und daher $a = \frac{25}{16} = b^2$, folglich $b = \frac{5}{4}$, kommt $p = \frac{17}{20}$ und $q = mp = \frac{17}{12}$, folglich $\frac{x}{z} = \frac{689}{111}$ und $\frac{y}{z} = \frac{433}{145}$.

238. XVII. Aufgabe. Man sucht drei Quadratzahlen x^2, y^2 und z^2, die so beschaffen sind, daß die Summe von je zweien wieder ein Quadrat bildet.

Da nun diese drei Formeln $x^2 + y^2$, $x^2 + z^2$ und $y^2 + z^2$ zu Quadraten gemacht werden sollen, so theile man dieselben durch z^2, um die drei folgenden zu erhalten: I. $\frac{x^2}{z^2} + \frac{y^2}{z^2} = \square$; II. $\frac{x^2}{z^2} + 1 = \square$; III. $\frac{y^2}{z^2} + 1 = \square$. Dann wird den zwei letzteren genügt, wenn $\frac{x}{z} = \frac{p^2 - 1}{2p}$ und $\frac{y}{z} = \frac{q^2 - 1}{2q}$. Hieraus wird die erste Formel $\frac{(p^2-1)^2}{4p^2} + \frac{(q^2 - 1)^2}{4q^2}$, welche also auch mit 4 multiplicirt ein Quadrat werden muß, also $\frac{(p^2 - 1)^2}{p^2} + \frac{(q^2 - 1)^2}{q^2}$; oder auch mit p^2q^2 multiplicirt $q^2(p^2 - 1)^2 + p^2(q^2 - 1)^2 = \square$, welches nicht wohl geschehen kann, wenn man nicht einen Fall kennt, in dem diese Formel ein Quadrat wird. Allein ein solcher Fall läßt sich nicht wohl errathen, daher man zu andern Kunstgriffen seine Zuflucht nehmen muß, von denen wir einige anführen wollen.

I. Da sich die Formel also ausdrücken läßt: $q^2(p + 1)^2(p - 1)^2 + p^2(q + 1)^2(q - 1)^2 = \square$, so mache man, daß sich dieselbe durch das Quadrat $(p + 1)^2$ theilen lasse. Dies geschieht, wenn man $q - 1 = p + 1$ oder $q = p + 2$ nimmt, da dann $q + 1 = p + 3$ sein wird, woher unsere Formel $(p + 2)^2(p + 1)^2(p - 1)^2 + p^2(p + 3)^2(p + 1)^2 = \square$ wird, welche durch $(p + 1)^2$ dividirt ein Quadrat sein muß, nämlich $(p + 2)^2(p - 1)^2 + p^2(p + 3)^2$, welcher in die Form $2p^4 + 8p^3 + 6p^2 - 4p + 4$ aufgelöst wird. Weil nun hier das letzte Glied ein Quadrat ist, setze man die Wurzel $2 + fp + gp^2$ oder $gp^2 + fp + 2$, deren Quadrat $g^2p^4 + 2fgp^3 + 4gp^2 + f^2p^2 + 4fp + 4$ ist, wo man f und g so bestimmen muß, daß die drei letzten Glieder wegfallen. Dies ge-

schieht, wenn $-4 = 4f$, oder $f = -1$ und $6 = 4g + 1$, oder $g = \frac{5}{4}$, da dann die ersten Glieder durch p^3 dividirt, $2p + 8 = g^2p + 2fg = \frac{25}{16}p - \frac{5}{2}$ geben, woraus gefunden wird $p = -24$ und $q = -22$. Daher erhalten wir $\frac{x}{z} = \frac{p^2 - 1}{2p} = -\frac{575}{48}$ oder $x = -\frac{575}{48}z$, und $\frac{y}{z} = \frac{q^2 - 1}{2q} = \frac{483}{44}$ oder $y = -\frac{483}{44}z$.

Man nehme nun $z = 16 \cdot 3 \cdot 11$, so wird $x = 575 \cdot 11$ und $y = 483 \cdot 12$. Daher sind die Wurzeln der drei gesuchten Quadrate folgende:

$x = 6325 = 11 \cdot 23 \cdot 25$; denn hieraus wird:

$x^2 + y^2 = 23^2(275^2 + 252^2) = 23^2 \cdot 373^2$.

$y = 5796 = 12 \cdot 21 \cdot 23$. Dieses giebt

$x^2 + z^2 = 11^2(575^2 + 48^2) = 11^2 \cdot 577^2$.

$z = 528 = 3 \cdot 11 \cdot 16$. Hieraus wird:

$y^2 + z^2 = 12^2(483^2 + 44^2) = 12^2 \cdot 485^2$.

II. Man kann noch auf unendlich viele Arten es möglich machen, daß unsere Formel durch ein Quadrat theilbar wird. Man setze z. B. $(q + 1)^2 = 4(p + 1)^2$ oder $q + 1 = 2(p + 1)$ das ist $q = 2p + 1$ und $q - 1 = 2p$, woraus unsere Formel $(2p + 1)^2(p + 1)^2(p - 1)^2 + p^2 \cdot 4 \cdot (p + 1)^2(4p^2) = \square$ wird, welche durch $(p + 1)^2$ getheilt, $(2p + 1)^2(p - 1)^2 + 16p^4 = \square$ oder $20p^4 - 4p^3 - 3p^2 + 2p + 1 = \square$ giebt, woraus aber nichts gefunden werden kann.

III. Man setze daher $(q - 1)^2 = 4(p + 1)^2$, oder $q - 1 = 2(p + 1)$, so wird $q = 2p + 3$ und $q + 1 = 2p + 4$, oder $q + 1 = 2(p + 2)$; woher unsere Formel durch $(p + 1)^2$ getheilt, sein wird: $(2p + 3)^2(p - 1)^2 + 16p^2(p + 2)^2$, das ist $9 - 6p + 53p^2 + 68p^3 + 20p^4$; davon sei die Wurzel $3 - p + gp^2$, deren Quadrat $9 - 6p + 6gp^2 + p^2 - 2gp^3 + g^2p^4$ ist. Man nehme nun, um auch die dritten Glieder verschwinden zu machen, $53 = 6g + 1$ oder $g = \frac{26}{3}$, so werden die übrigen Glieder durch p dividirt, $20p + 68 = g^2p - 2g$ oder $\frac{676}{9}p - \frac{52}{3}$,

geben, daher $p = \frac{48}{31}$ und $q = \frac{189}{31}$, woraus wiederum eine Auflösung folgt.

IV. Man setze $q - 1 = \frac{4}{3}(p - 1)$, so wird $q = \frac{4}{3}p - \frac{1}{3}$ und $q + 1 = \frac{4}{3}p + \frac{2}{3} = \frac{2}{3}(2p + 1)$: daher wird unsere Formel durch $(p - 1)^2$ dividirt, $\frac{(4p - 1)^2}{9}(p + 1)^2 + \frac{64}{81}p^2(2p + 1)^2$ sein, welche mit 81 multiplicirt, $9(4p - 1)^2(p + 1)^2 + 64p^2(2p + 1)^2 = 400p^4 + 472p^3 + 73p^2 - 54p + 9$ wird, wo sowohl das erste als auch das letzte Glied Quadrate sind. Man setze daher die Wurzel $20p^2 - 9p + 3$, deren Quadrat $400p^4 - 360p^3 + 201p^2 + 120p^2 - 54p + 9$, und daher erhält man $472p + 73 = -360p + 201$, also $p = \frac{2}{13}$ und $q = \frac{8}{39} - \frac{1}{3}$.

Man kann auch für die obige Wurzel $20p^2 + 9p - 3$ setzen, wovon das Quadrat $400p^4 + 360p^3 - 120p^2 + 81p^2 - 54p + 9$, mit unserer Formel verglichen, giebt: $472p + 73 = 360p - 39$, und daraus $p = -1$, welcher Werth aber uns nicht nützt.

V. Man kann auch machen, daß sich unsere Formel sogar durch beide Quadrate $(p + 1)^2$ und $(p - 1)$ zugleich theilen läßt. Man setze zu diesem Zwecke $q = \frac{pt + 1}{p + t}$. Dann wird $q + 1 = \frac{pt + p + t + 1}{p + t} = \frac{(p + 1)(t + 1)}{p + t}$ und $q - 1 = \frac{pt - p - t + 1}{p + t} = \frac{(p - 1)(t - 1)}{p + t}$. Hieraus wird nun unsere Formel durch $(p + 1)^2(p - 1)^2$ dividirt $= \frac{(pt + 1)^2}{(p + t)^2} + p^2 \frac{(t + 1)^2(t - 1)^2}{(p + t)^4}$, welche mit dem Quadrat $(p + t)^4$ multiplicirt noch ein Quadrat sein muß, nämlich $(pt + 1)^2(p + t)^2 + p^2(t + 1)^2(t - 1)^2$ oder $t^2p^4 + 2t(t^2 + 1)p^3 + 2t^2p^2 + (t^2 + 1)^2p^2 + (t^2 - 1)^2p^2 + 2t(t^2 + 1)p + t^2$; wo sowohl das erste als letzte Glied Quadrate sind. Man setze daher die Wurzel $tp^2 + (t^2 + 1)p - t$, wovon das Quadrat $t^2p^4 + 2t(t^2 + 1)p^3 - 2t^2p^2 + (t^2 + 1)^2p^2 - 2t(t^2 + 1)$

$p + t^2$ mit unserer Formel verglichen, giebt: $2t^2p + (t^2 + 1)^2 p + (t^2 - 1)^2 p + 2t(t^2 + 1) = -2t^2p + (t^2 + 1)^2 p - 2t(t^2 + 1)$, oder $4t^2p + (t^2 - 1)^2 p + 4t(t^2 + 1) = 0$, oder $(t^2 + 1)^2 p + 4t(t^2 + 1) = 0$, das ist $t^2 + 1 = -\frac{4t}{p}$; woraus wir erhalten $p = \frac{-4t}{t^2 + 1}$. Hieraus wird $pt + 1 = -\frac{3t^2 + 1}{t^2 + 1}$ und $p + t = \frac{t^3 - 3t}{t^2 + 1}$, folglich $q = -\frac{3t^2 + 1}{t^3 + 3t}$, wo t nach Belieben angenommen werden kann.

Es sei z. B. $t = 2$, so wird $p = -\frac{8}{5}$ und $q = -\frac{13}{14}$; woraus wir $\frac{x}{z} = \frac{p^2 - 1}{2p} = +\frac{39}{80}$ und $\frac{y}{z} = \frac{q^2 - 1}{2q} = -\frac{117}{44}$ oder $x = \frac{3 \,.\, 13}{4 \,.\, 4 \,.\, 5} z$ und $y = \frac{9 \,.\, 13}{4 \,.\, 11} z$ finden. Man nehme nun $z = 4 \,.\, 4 \,.\, 5 \,.\, 11$, so wird $x = 3 \,.\, 13 \,.\, 11$ und $y = 4 \,.\, 5 \,.\, 9 \,.\, 13$; also sind die Wurzeln der drei gesuchten Quadrate: $x = 3 \,.\, 11 \,.\, 13 = 429$; $y = 4 \,.\, 5 \,.\, 9 \,.\, 13 = 2340$ und $z = 4 \,.\, 4 \,.\, 5 \,.\, 11 = 880$. Diese sind noch kleiner als die oben gefundenen.

Aus diesen aber wird:

$x^2 + y^2 = 3^2 \,.\, 13^2 (121 + 3600) = 3^2 \,.\, 13^2 \,.\, 61^2$;
$x^2 + z^2 = 11^2 \,.\, (1521 + 6400) = 11^2 \,.\, 89^2$;
$y^2 + z^2 = 20^2 \,.\, (13689 + 1936) = 20^2 \,.\, 125^2$.

VI. Zuletzt bemerken wir noch bei dieser Aufgabe, daß aus jeder Auflösung ganz leicht noch eine andere gefunden werden kann. Denn, wenn diese Werthe gefunden worden: $x = a$, $y = b$ und $z = c$, so daß $a^2 + b^2 = \square$, $a^2 + c^2 = \square$ und $b^2 + c^2 = \square$, so werden auch die folgenden Werthe genügen: $x = ab$, $y = bc$ und $z = ac$, denn dann wird:

$$x^2 + y^2 = a^2b^2 + b^2c^2 = b^2 (a^2 + c^2) = \square$$
$$x^2 + z^2 = a^2b^2 + a^2c^2 = a^2 (b^2 + c^2) = \square$$
$$x^2 + z^2 = a^2c^2 + b^2c^2 = c^2 (a^2 + b^2) = \square.$$

Da wir nun eben gefunden $x = a = 3 \,.\, 11 \,.\, 13$; $y = b$

$= 4 \,.\, 5 \,.\, 9 \,.\, 13$ und $z = c = 4 \,.\, 4 \,.\, 5 \,.\, 11$, so erhalten wir daraus nach dieser Auflösung:

$x = ab = 3 \,.\, 4 \,.\, 5 \,.\, 9 \,.\, 11 \,.\, 13 \,.\, 13$;
$y = bc = 4 \,.\, 4 \,.\, 4 \,.\, 5 \,.\, 5 \,.\, 9 \,.\, 11 \,.\, 13$;
$y = ac = 3 \,.\, 4 \,.\, 4 \,.\, 5 \,.\, 11 \,.\, 11 \,.\, 13$.

Diese lassen sich alle drei durch $3 \,.\, 4 \,.\, 5 \,.\, 11 \,.\, 13$ theilen, und also auf folgende Formel bringen: $x = 9 \,.\, 13$, $y = 3 \,.\, 4 \,.\, 4 \,.\, 5$ und $z = 4 \,.\, 11$, das ist $x = 117$, $y = 240$, und $z = 44$, welche noch kleiner sind als die vorigen; daher wird aber:

$$x^2 + y^2 = 71289 = 267^2$$
$$x^2 + z^2 = 15625 = 125^2$$
$$y^2 + z^2 = 59536 = 244^2.$$

239. XVIII. Aufgabe. Man verlangt zwei Zahlen x und y solcher Art, daß, wenn man die eine zum Quadrat der andern addirt, ein Quadrat herauskommt, also daß die beiden Formeln $x^2 + y$ und $y^2 + x$ Quadrate sein sollen.

Wollte man sogleich für die erstere $x^2 + y = p^2$ setzen und daraus $y = p^2 - x^2$ ableiten, so würde die zweite Formel $p^4 - 2p^2x^2 + x^4 + x = \square$, wovon die Auflösung nicht leicht in die Augen fällt.

Man setze aber zugleich für beide Formeln $x^2 + y = (p - x)^2 = p^2 - 2px + x^2$ und $y^2 + x = (q - y)^2 = q^2 - 2qy + y^2$, woraus wir dann diese zwei Gleichungen erhalten: I. $y + 2px = p^2$ und II. $x + 2qy = q^2$, aus welchen x und y leicht gefunden werden können. Man findet nämlich $x = \frac{2qp^2 - q^2}{4pq - 1}$ und $y = \frac{2pq^2 - q^2}{4pq - 1}$, wo man p und q nach Belieben annehmen kann. Man setze z. B. $p = 2$ und $q = 3$, so bekommt man die zwei gesuchten Zahlen $x = \frac{15}{23}$ und $y = \frac{32}{23}$. Denn hier wird $x^2 + y = \frac{225}{529} + \frac{32}{23} = \frac{961}{529} = (\frac{31}{23})^2$ und $y^2 + x = \frac{1024}{529} + \frac{15}{23} = \frac{1369}{529} = (\frac{37}{23})^2$.

Man nehme ferner $p = 1$ und $q = 3$, so wird $x = -\frac{3}{11}$

und $y = \frac{9}{11}$. Weil aber eine Zahl negativ ist, könnte man diese Auflösung nicht gelten lassen. Man setze $p = 1$ und $q = \frac{3}{2}$, so wird $x = \frac{3}{20}$ und $y = \frac{7}{10}$, denn dann wird $x^2 + y = \frac{9}{400} + \frac{7}{10} = \frac{289}{400} = (\frac{17}{20})^2$ und $y^2 + x = \frac{49}{100} + \frac{3}{20} = \frac{64}{100} = (\frac{8}{10})^2$.

240. XIX. Aufgabe. Zwei Zahlen zu finden, deren Summe ein Quadrat und deren Quadrate addirt ein Biquadrat sind.

Diese Zahlen seien x und y, und weil $x^2 + y^2$ ein Biquadrat sein muß, so mache man dasselbe zuvörderst zu einem Quadrat, welches geschieht, wenn $x = p^2 - q^2$ und $y = 2pq$, denn dann wird $x^2 + y^2 = (p^2 + q^2)^2$. Damit nun dies ein Biquadrat werde, muß $p^2 + q^2$ ein Quadrat sein. Daher setze man ferner $p = r^2 - s^2$ und $q = 2rs$, so wird $p^2 + q^2 = (r^2 + s^2)^2$; folglich $x^2 + y^2 = (r^2 + s^2)^4$ und also ein Biquadrat. Alsdann aber wird $x = r^4 - 6r^2s^2 + s^4$ und $y = 4r^3s - 4rs^3$. Also bleibt noch übrig, daß die Formel $x + y = r^4 + 4r^3s - 6r^2s^2 - 4rs^3 + s^4$ ein Quadrat werde. Man setze davon die Wurzel $r^2 + 2rs + s^2$, und also unsere Formel gleich diesem Quadrat $r^4 + 4r^3s + 6r^2s^2 + 4rs^3 + s^4$, wo sich die zwei ersten und letzten Glieder aufheben; die übrigen aber durch rs^2 dividirt, geben $6r + 4s = -6r - 4s$ oder $12r + 8s = 0$; also $s = -\frac{12r}{8} = -\frac{3}{2}r$. Oder man kann die Wurzel auch $r^2 - 2rs + s^2$ setzen, damit die vierten Glieder wegfallen. Da nun das Quadrat hievon $r^4 - 4r^3s + 6r^2s^2 - 4rs^3 + s^4$ ist, so geben die übrigen Glieder durch r^2s dividirt $4r - 6s = -4r + 6s$, oder $8r = 12s$, folglich $r = \frac{3}{2}s$; wenn nun $r = 3$ und $s = 2$, so würde $x = -119$ negativ.

Ferner wollen wir $r = \frac{3}{2}s + t$ setzen, so wird für unsere Formel:

$r^2 = \frac{9}{4}s^2 + 3st + t^2$, $r^3 = \frac{27}{8}s^3 + \frac{27}{4}s^2t + \frac{9}{2}st^2 + t^3$

$$\begin{aligned}
\text{folglich } r^4 &= \tfrac{81}{16}s^4 + \tfrac{27}{2}s^3t + \tfrac{27}{2}s^2t^2 + 6st^3 + t^4\\
+ 4r^3s &= \tfrac{27}{2}s^4 + 27s^3t + 18s^2t^2 + 4st^3\\
- 6r^2s^2 &= -\tfrac{27}{2}s^4 - 18s^3t - 6s^2t^2\\
- 4rs^3 &= -6s^4 - 4s^3t\\
+ s^4 &= + s^4; \text{ also unsere Formel:}
\end{aligned}$$

$$\tfrac{1}{16}s^4 + \tfrac{37}{2}s^3t + \tfrac{51}{2}s^2t^2 + 10st^3 + t^4,$$

welche ein Quadrat sein muß, und also auch, wenn sie mit 16 multiplicirt wird. Man bekommt dann $s^4 + 296s^3t + 408s^2t^2 + 160st^3 + 16t^4$. Hievon setze man die Wurzel $s^2 + 148st - 4t^2$, deren Quadrat $s^4 + 296s^3t + 21896s^2t^2 - 1184st^3 + 16t^4$ ist. Hier heben sich die zwei ersten und letzten Glieder auf, die übrigen aber durch st^2 dividirt, geben $21896s - 1184t = 408s + 160t$ und also $\frac{s}{t} = \frac{1344}{21488} = \frac{336}{5372} = \frac{84}{1343}$. Also nehme man $s = 84$ und $t = 1343$, folglich $r = 1469$; und aus diesen Zahlen $r = 1469$ und $s = 84$ finden wir $x = r^4 - 6r^2s^2 + s^4 = 4565486027761$ und $y = 1061652293520$.

Kapitel 15.

Auflösung der Aufgaben, in denen Cuben verlangt werden.

241. In dem vorigen Kapitel sind solche Aufgaben vorgekommen, in denen gewisse Formeln zu Quadraten gemacht werden mußten, und wir hatten Gelegenheit, verschiedene Kunstgriffe zu erklären, durch welche die oben gegebenen Regeln zur Anwendung gebracht werden können. Nun bleibt noch übrig, solche Aufgaben zu betrachten, in denen gewisse Formeln zu Cuben gemacht werden sollen. Dazu sind auch schon im vorigen Kapitel Regeln gegeben worden, welche aber jetzt durch die Auflösung der folgenden Aufgaben in ein helleres Licht gesetzt werden sollen.

242. I. Aufgabe. Man verlangt zwei Cuben x^3 und y^3, deren Summe wiederum ein Cubus sein soll.

Da also $x^3 + y^3$ ein Cubus werden soll, so muß auch diese Formel durch den Cubus y^3 dividirt, noch ein Cubus sein, also $\frac{x^3}{y^3} + 1 =$ Cubus. Man setze $\frac{x}{y} = z - 1$, so bekommen wir $z^3 - 3z^2 + 3z$, welches ein Cubus sein soll. Wollte man nun nach den obigen Regeln die Cubikwurzel $z - u$ setzen, deren Cubus $z^3 - 3uz^2 + 3u^2z - u^3$ ist, und u so bestimmen, daß auch die zweiten Glieder wegfielen, so würde $u = 1$, die übrigen Glieder aber würden geben: $3z = 3u^2z - u^3 = 3z - 1$, woraus z als unendlich große Zahl gefunden wird, welcher Werth uns nicht hilft. Man lasse aber u unbestimmt, so bekommen wir diese Gleichung: $-3z^2 + 3z = -3uz^2 + 3u^2z - u^3$; aus welcher quadratischen Gleichung der Werth von z bestimmt werde. Wir bekommen aber $3uz^2 - 3z^2 = 3u^2z - 3z - u^3$, das ist $= 3(u-1)z^2 = 3(u^2-1)z - u^3$, oder $z^2 = (u+1)z - \frac{u^3}{3(u-1)}$, woraus gefunden wird $z = \frac{u+1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{u^2+2u+1}{4} - \frac{u^3}{3(u-1)}\right)}$ oder $z = \frac{u+1}{2} \pm \sqrt{\frac{-u^3+3u^2-3u-3}{(12(u-1)}}$.

Es kommt also darauf an, daß dieser Bruch zu einem Quadrat gemacht werde; wir wollen daher den Bruch oben und unten mit $3(u-1)$ multipliciren, damit unten ein Quadrat komme, nämlich $\frac{-3u^4+12u^3-18u^2+9}{36(u-1)^2}$, von welchen Quadrate also der Zähler noch ein Quadrat werden muß. In demselben ist zwar das letzte Glied schon ein Quadrat. Setzt man aber nach der Regel die Wurzel davon $gu^2 + fu + 3$, wovon das Quadrat $g^2u^4 + 2fgu^3 + 6gu^2 + f^2u^2 + 2fu + 9$ ist, und macht die drei letzten Glieder verschwinden, so wird erstens $0 = 2f$, das ist $f = 0$, und dann $6g + f^2 = -18$, und daher $g = -3$. Alsdann geben die zwei ersten Glieder durch u^3 dividirt $-3u + 12 = g^2u + 2fu = 9u$; und daher $u = 1$, welcher Werth zu nichts führt. Wollen wir nun weiter $u = 1 + t$ setzen,

so wird unsere Formel $-12t - 3t^4$, welche ein Quadrat sein soll, was nur geschehen kann, wenn t negativ ist. Es sei also $t = -s$, so wird unsere Formel $12s - 3s^4$, welche in dem Fall $s = 1$ ein Quadrat wird. Alsdann aber wäre $t = -1$ und $u = 0$, woraus nichts gefunden werden kann. Man mag auch die Sache angreifen wie man will, so wird man niemals einen solchen Werth finden, der uns zu unserem Endzweck führt. Hieraus kann man schon ziemlich sicher schließen, daß es nicht möglich ist, zwei Cuben zu finden, deren Summe ein Cubus ist. Dies kann aber auch in folgender Art bewiesen werden.

243. **Lehrsatz.** Es ist nicht möglich zwei Cuben zu finden, deren Summe oder deren Differenz ein Cubus wäre.

Hier ist vor allen Dingen zu bemerken, daß, wenn die Summe unmöglich ist, die Differenz auch unmöglich sein muß. Denn wenn es unmöglich ist, daß $x^3 + y^3 = z^3$, so ist es auch unmöglich, daß $z^3 - y^3 = x^3$. Nun aber ist $z^3 - y^3$ die Differenz zweier Cuben. Es genügt also, die Unmöglichkeit blos von der Summe, oder auch nur von der Differenz zu zeigen, weil das andere daraus folgt. Der Beweis selbst aber wird aus folgenden Sätzen bestehen.

I. Kann man annehmen, daß die Zahlen x und y unter sich untheilbar sind. Denn wenn sie einen gemeinschaftlichen Theiler hätten, so würden sich die Cuben durch den Cubus desselben theilen lassen. Wäre z. B. $x = 2a$, und $y = 2b$, so würde $x^3 + y^3 = 8a^3 + 8b^3$, und wäre dies ein Cubus, so müßte auch $a^3 + b^3$ ein Cubus sein.

II. Da nun u und y keinen gemeinschaftlichen Theiler haben, sind diese beiden Zahlen entweder beide ungerade, oder die eine gerade, und die andere ungerade. Im erstern Fall müßte z gerade sein; im andern Fall aber müßte z ungerade sein. Also sind von den drei Zahlen x, y und z immer zwei ungerade und eine gerade. Wir wollen da-

her zu unserm Beweise die beiden ungeraden nehmen, weil es sich gleich bleibt, ob wir die Unmöglichkeit der Summe oder der Differenz zeigen, indem die Summe in die Differenz verwandelt wird, wenn die eine Wurzel negativ wird.

III. Es seien also x und y zwei ungerade Zahlen; dann wird sowohl ihre Summe als auch ihre Differenz gerade sein. Man setze daher $\frac{x+y}{2} = p$ und $\frac{x-y}{2} = q$, so wird $x = p + q$ und $y = p - q$, woraus hervorgeht, daß von den zwei Zahlen p und q die eine gerade, die andere aber ungerade sein muß. Daher aber wird $x^3 + y^3 = 2p^3 + 6pq^2 = 2p(p^2 + 3q^2)$; es muß also bewiesen werden. daß dieses Product $2p(p^2 + 3q^2)$ kein Cubus sein kann, Sollte aber die Sache von der Differenz bewiesen werden, so würde $x^3 - y^3 = 6p^2q + 2q^3 = 2q(q^2 + 3p^2)$, welche Formel der vorigen ganz ähnlich ist, indem nur die Buchstaben p und q vertauscht sind, daher es genügt, die Unmöglichkeit der Formel $2p(p^2 + 3q^2)$ zu zeigen, weil daraus nothwendig folgt, daß weder die Summe noch die Differenz von zwei Cuben ein Cubus werden kann.

IV. Wäre nun $2p(p^2 + 3q^2)$ ein Cubus, so wäre derselbe gerade und also durch 8 theilbar; folglich müßte auch der achte Theil unserer Formel eine ganze Zahl und dazu ein Cubus sein, nämlich $\frac{1}{4}p(p^2 + 3q^2)$. Weil nun von den Zahlen p und q die eine gerade, die andere aber ungerade ist, so wird $p^2 + 3q^2$ eine ungerade Zahl sein und sich nicht durch 4 theilen lassen, woraus folgt, daß sich p durch 4 theilen lassen muß und also $\frac{p}{4}$ eine ganze Zahl sei.

V. Wenn nun dieses Product $\frac{p}{4} \cdot (p^2 + 3q^2)$ ein Cubus sein sollte, so müßte jeder Factor besonders, nämlich $\frac{p}{4}$ und $p^2 + 3q^2$, ein Cubus sein, wenn nämlich dieselben keinen gemeinschaftlichen Theiler haben. Denn

wenn ein Product von zwei Factoren, die unter sich untheilbar sind, ein Cubus sein soll, so muß nothwendig jeder für sich ein Cubus sein. Wenn dieselben aber einen gemeinschaftlichen Theiler haben, so muß letzterer besonders betrachtet werden. Hier ist demnach die Frage, ob die beiden Factoren p und $p^2 + 3q^2$ nicht einen gemeinschaftlichen Factor haben könnten, was also untersucht wird. Hätten dieselben einen gemeinschaftlichen Theiler, so würden auch p^2 und $p^2 + 3q^2$ denselben gemeinschaftlichen Theiler haben, und also auch ihre Differenz, welche $3q^2$ ist, mit dem p^2 denselben gemeinschaftlichen Theiler haben. Da nun p und q unter sich untheilbar sind, so können die Zahlen p^2 und $3q^2$ keinen andern gemeinschaftlichen Theiler haben als 3, welches geschieht, wenn sich p durch 3 theilen läßt.

VI. Wir haben daher zwei Fälle zu erwägen. Der erste ist, wenn die Factoren p und $p^2 + 3q^2$ keinen gemeinschaftlichen Theiler haben, welches immer geschieht, wenn sich p nicht durch 3 theilen läßt. Der andere Fall aber ist, wenn dieselben einen gemeinschaftlichen Theiler haben, welches geschieht, wenn sich p durch 3 theilen läßt, da dann beide durch 3 theilbar sein werden. Diese zwei Fälle müssen sorgfältig von einander unterschieden werden, weil man den Beweis für jeden besonders führen muß.

VII. **Erster Fall.** Es sei daher p nicht durch 3 theilbar und also unsere beiden Factoren $\frac{p}{4}$ und $p^2 + 3q^2$ unter sich untheilbar, so müßte jeder für sich ein Cubus sein. Wir wollen daher $p^2 + 3q^2$ zu einem Cubus machen, welches geschieht, wenn man, wie früher gezeigt worden, $p + q\sqrt{-3} = (t + u\sqrt{-3})^3$ und $p - q\sqrt{-3} = (t - u\sqrt{-3})^3$ setzt, damit dadurch $p^2 + 3q^2 = (t^2 + 3u^2)^3$ und also ein Cubus werde. Hieraus aber wird $p = t^3 - 9tu^2 = t(t^2 - 9u^2)$, und $q = 3t^2u - 3u^3 = 3u(t^2 - u^2)$. Weil nun q eine ungerade Zahl ist, so muß u auch ungerade, t aber gerade sein, weil sonst $t^2 - u^2$ eine gerade Zahl würde.

VIII. Da nun $p^2 + 3q^2$ zu einem Cubus gemacht und gefunden worden $p = t\,(t^2 - 9u^2) = t\,(t + 3u)\,(t - 3u)$, so müßte jetzt noch $\frac{p}{4}$ und also auch $2p$ ein Cubus sein; daher die Formel $2t\,(t + 3u)\,(t - 3u)$ ein Cubus sein müßte. Hier ist aber zu bemerken, daß t erstens eine gerade Zahl und nicht durch 3 theilbar ist, weil sonst auch p durch 3 theilbar sein würde, welcher Fall hier ausdrücklich ausgenommen ist. Also sind die drei Factoren $2t$, $t + 3u$ und $t - 3u$ unter sich untheilbar, und deswegen müßte jeder für sich ein Cubus sein. Man setze daher $t + 3u = f^3$ und $t - 3u = g^3$, so wird $2t = f^3 + g^3$. Nun aber ist $2t$ auch ein Cubus, und folglich hätten wir hier zwei Cuben f^3 und g^3, deren Summe wieder ein Cubus wäre, welche offenbar ungleich viel kleiner wären, als die anfänglich angenommenen Cuben x^3 und y^3. Denn nachdem wir gesetzt haben $x = p + q$ und $y = p - q$, jetzt aber p und q durch die Buchstaben t und u bestimmt haben, so müssen die Zahlen p und q viel größer sein, als t und u.

IX. Wenn es also zwei solche Cuben in den größten Zahlen gäbe, so könnte man auch in viel kleineren Zahlen ebenfalls derartige angeben, deren Summe auch ein Cubus wäre, und in solcher Art könnte man auf immer kleinere derartige Cuben kommen. Da es nun in kleinen Zahlen derartige Cuben gewiß nicht giebt, so sind sie auch in den allergrößten nicht möglich. Dieser Schluß wird dadurch bekräftigt, daß auch der andere Fall eben dahin führt, wie wir sogleich sehen werden.

X. **Zweiter Fall.** Es sei nun p durch 3 theilbar, q aber nicht, und man setze $p = 3r$, so wird unsere Formel $\frac{3r}{4} \cdot (9r^2 + 3q^2)$, oder $\frac{9}{4}r\,(3r^2 + q^2)$, welche beide

Factoren unter sich untheilbar sind, weil sich $3r^2 + q^2$ weder durch 2 noch durch 3 theilen läßt, und r eben so wohl gerade sein muß als p. Deswegen muß jeder von diesen beiden Factoren für sich ein Cubus sein.

XI. Machen wir nun den zweiten $3r^2 + q^2$ oder $q^2 + 3r^2$ zu einem Cubus, so finden wir, wie vorher, $q = t\,(t^2 - 9u^2)$ und $r = 3u\,(t^2 - u^2)$. Dabei ist zu bemerken, daß, weil q ungerade war, hier auch t ungerade, u aber eine gerade Zahl sein muß.

XII. Weil nun $\frac{9r}{4}$ auch ein Cubus sein muß und auch mit dem Cubus $\frac{8}{27}$ multiplicirt, so muß $\frac{2r}{3}$, das ist $2u\,(t^2 - u^2) = 2u\,(t + u)\,(t - u)$ ein Cubus sein, welche drei Factoren unter sich untheilbar und also jeder für sich ein Cubus sein müßten. Wenn man aber $t + u = f^3$ und $t - u = g^3$ setzt, so folgt daraus $2u = f^3 - g^3$, welches auch ein Cubus sein müßte, indem $2u$ ein Cubus ist. In solcher Art hätte man zwei weit kleinere Cuben f^3 und g^3, deren Differenz ein Cubus wäre, und folglich auch solche, deren Summe ein Cubus wäre. Denn man braucht nur $f^3 - g^3 = h^3$ zu setzen, so wird $f^3 = h^3 + g^3$, und also hätte man zwei Cuben, deren Summe ein Cubus wäre. Hiedurch wird nun der obige Schluß vollkommen bestätigt, daß es auch in den größten Zahlen keine Cuben giebt, deren Summe oder Differenz ein Cubus wäre, und zwar deswegen, weil sie in den kleinsten Zahlen nicht anzutreffen sind.

244. Weil es nun nicht möglich ist, zwei solche Cuben zu finden, deren Summe oder Differenz ein Cubus wäre, so fällt auch unsere erste Aufgabe weg, und man pflegt hier vielmehr den Anfang mit der Aufgabe zu machen, wie drei Cuben gefunden werden sollen, deren Summe ein Cubus ist. Man kann aber zwei derselben nach Belieben annehmen, so daß nur der dritte gefunden werden soll. Diese Aufgabe wollen wir jetzt erörtern.

245. II. **Aufgabe.** Es wird zu zwei gegebenen Cuben a^3 und b^3 noch ein dritter Cubus x^3 gesucht, welcher mit denselben zusammen wiederum einen Cubus bildet.

Es soll also die Formel $a^3 + b^3 + x^3$ ein Cubus werden, welches nicht anders geschehen kann, als wenn schon ein Fall bekannt ist. Ein solcher Fall aber bietet hier sich von selbst dar, nämlich $x = -a$, daher setze man $x = y - a$; dann wird $x^3 = y^3 - 3ay^2 + 3a^2y - a^3$, und daher unsere Formel, die ein Cubus werden soll, $y^3 - 3ay^2 + 3a^2y + b^3$, deren erstes und letztes Glied schon ein Cubus ist. Man kann daher sogleich zwei Auflösungen finden.

I. Nach der ersten setze man die Wurzel davon $y + b$, deren Cubus $y^3 + 3by^2 + 3b^2y + b^3$ ist; woraus wir $-3ay + 3a^2 = 3by + 3b^2$ bekommen, daher $y = \frac{a^2 - b^2}{a + b} = a - b$; folglich $x = -b$, welcher uns zu Nichts dient.

II. Man kann aber die Wurzel auch $b + fy$ setzen, wovon der Cubus $f^3y^3 + 3bf^2y^2 + 3b^2fy + b^3$ ist; und f so bestimmen, daß auch die dritten Glieder wegfallen. Dies geschieht, wenn $3a^2 = 3b^2f$ oder $f = \frac{a^2}{b^2}$, da dann die zwei ersten Glieder, durch y^2 dividirt, geben: $y - 3a = f^3y + 3bf^2 = \frac{a^6y}{b^6} + \frac{3a^4}{b^3}$, welche mit b^6 multiplicirt, $b^6y - 3ab^6 = a^6y + 3a^4b^3$ giebt. Daraus wird gefunden $y = \frac{3a^4b^3 + 3ab^6}{b^6 - a^6} = \frac{3ab^3\,(a^3 + b^3)}{b^6 - a^6} = \frac{3ab^3}{b^3 - a^3}$, und also $x = y - a = \frac{2ab^3 + a^4}{b^3 - a^3} = a \cdot \frac{2b^3 + a^3}{b^3 - a^3}$.

Wenn also die beiden Cuben a^3 und b^3 gegeben sind, so haben wir hier die Wurzel des dritten gesuchten Cubus gefunden, und damit dieselbe positiv werde, braucht man nur b^3 als den größeren Cubus anzunehmen, was wir durch einige Beispiele erläutern wollen.

I. Es seien die beiden gegebenen Cuben 1 und 8, so daß $a = 1$ und $b = 2$. Dann wird die Formel $9 + x^3$ ein Cubus, wenn $x = \frac{17}{7}$; denn dann wird $9 + x^3 = \frac{8000}{343} = (\frac{20}{7})^3$.

II. Es seien die beiden gegebenen Cuben 8 und 27, so daß $a = 2$ und $b = 3$, so wird die Formel $35 + x^3$ ein Cubus, wenn $x = \frac{124}{19}$.

III. Es seien die beiden gegebenen Cuben 27 und 64, so daß $a = 3$ und $b = 4$, so wird die Formel $91 + x^3$ ein Cubus, wenn $x = \frac{465}{37}$.

Wollte man zu zwei gegebenen Cuben noch mehrere derartige dritte finden, so müßte man in der ersten Formel $a^3 + b^3 + x^3$ ferner setzen $x = \frac{2ab^3 + a^4}{b^3 - a^3} + z$. Alsdann würde man wieder auf eine ähnliche Formel kommen, aus der sich neue Werthe für z bestimmen ließen, welches aber zu weitläufigen Rechnungen führen würde.

246. Bei dieser Aufgabe tritt aber ein merkwürdiger Fall ein, wenn die beiden gegebenen Cuben einander gleich sind oder $b = a$. Denn dann bekommen wir $x = \frac{3a^4}{0}$, das ist eine unendlich große Zahl, und erhalten also keine Auflösung. Daher hat die Aufgabe $2a^3 + x^3$ zum Cubus zu machen, noch nicht aufgelöst werden können. Es sei z. B. $a = 1$ und also unsere Formel $2 + x^3$, so ist zu bemerken, daß, was man auch immer für Veränderungen vornehmen mag, alle Bemühungen vergeblich sind, und nimmer daraus ein geeigneter Werth für x gefunden werden kann; woraus sich schon ziemlich sicher schließen läßt, daß zu einem doppelten Cubus kein Cubus gefunden werden kann, welcher mit jenem zusammen einen Cubus bildet, oder daß die Gleichung $2a^3 + x^3 = y^3$ unmöglich ist. Aus derselben aber folgt diese $2a^3 = y^3 - x^3$, und daher ist es auch nicht möglich zwei Cuben zu finden, deren Differenz ein doppelter Cubus wäre, welches auch von der Summe

zweier Cuben behauptet und in folgender Art bewiesen werden kann.

247. **Lehrsatz.** Weder die Summe, noch die Differenz zweier Cuben kann jemals einem doppelten Cubus gleich werden, oder die Formel $x^3 \pm y^3 = 2z^3$ ist an sich selbst unmöglich, außer in dem Fall $y = x$, welcher für sich klar ist.

Hier können wieder x und y als untheilbar unter sich angenommen werden, denn wenn sie einen gemeinschaftlichen Theiler hätten, so müßte auch z dadurch theilbar sein und also die ganze Gleichung durch den Cubus davon getheilt werden können. Weil nun $x^3 \pm y^3$ eine gerade Zahl sein soll, so müssen beide Zahlen x und y ungerade sein, daher sowohl ihre Summe als auch ihre Differenz gerade sein wird. Man setze also $\frac{x+y}{2} = p$ und $\frac{x-y}{2} = q$, so wird $x = p + q$ und $y = p - q$; da dann von den Zahlen p und q die eine gerade, die andere aber ungerade sein muß. Hieraus folgt aber $x^3 + y^3 = 2p^3 + 6pq^2 = 2p(p^2 + 3q^2)$, und $x^3 - y^3 = 6p^2q + 2q^3 = 2q(3p^2 + q^2)$, welche beide Formeln einander völlig ähnlich sind. Daher wird es genügen, zu zeigen, daß die Formel $2p(p^2 + 3q^2)$ kein doppelter Cubus, und also diese $p(p^2 + 3q^2)$ kein Cubus sein kann, wovon der Beweis in folgenden Sätzen enthalten ist.

I. Hier kommen wieder zwei Fälle in Betracht, von denen der erste eintritt, wenn die zwei Factoren p und $p^2 + 3q^2$ keinen gemeinschaftlichen Theiler haben, da dann jeder für sich ein Cubus sein muß. Der andere Fall aber tritt ein, wenn dieselben einen gemeinschaftlichen Theiler haben, welcher, wie wir früher gesehen, kein anderer sein kann als 3.

II. **Erster Fall.** Es sei daher p nicht theilbar durch 3, und also die beiden Factoren unter sich untheilbar, so mache man erstens $p^2 + 3q^2$ zu einem Cubus, welches geschieht, wenn $p = t(t^2 - 9u^2)$ und $q = 3u$

$(t^2 - u^2)$, so daß noch der Werth von p ein Cubus sein muß. Da nun t durch 3 nicht theilbar ist, weil sonst p auch durch 3 theilbar sein würde, so sind die beiden Factoren t und $t^2 - 9u^2$ unter sich untheilbar, und muß folglich jeder für sich ein Cubus sein.

III. Der letztere aber hat wieder zwei Factoren, nämlich $t + 3u$ und $t - 3u$, welche unter sich untheilbar sind, erstens weil sich t nicht durch 3 theilen läßt, ferner aber weil von den Zahlen t und u die eine gerade und die andere ungerade ist. Denn wenn beide ungerade wären, so würde nicht nur p, sondern auch q ungerade werden, was nicht geschehen kann. Folglich muß auch jeder von diesen Factoren $t + 3u$ und $t - 3u$ für sich ein Cubus sein.

IV. Man setze daher $t + 3u = f^3$ und $t - 3u = g^3$, so wird $2t = f^3 + g^3$. Nun aber ist t für sich ein Cubus, welcher $= h^3$ sei, so daß $f^3 + g^3 = 2h^3$ wäre, das ist, wir hätten zwei weit kleinere Cuben, nämlich f^3 und g^3, deren Summe auch ein doppelter Cubus wäre.

V. **Zweiter Fall.** Es sei nun p durch 3 theilbar und also q nicht. Man setze demnach $p = 3r$, so wird unsere Formel $3r(9r^2 + 3q^2) = 9r(3r^2 + q^2)$, welche Factoren jetzt unter sich untheilbar sind und es muß daher jeder ein Cubus sein.

VI. Um nun den letzteren $q^2 + 3r^2$ zu einem Cubus zu machen, setze man $q = t(t^2 - 9u^2)$ und $r = 3u(t^2 - u^2)$. Alsdann muß wieder von den Zahlen t und u die eine gerade, die andere aber ungerade sein, weil sonst die beiden Zahlen q und r gerade würden. Hieraus aber bekommen wir den ersten Factor $9r = 27u(t^2 - u^2)$, welcher ein Cubus sein müßte, und folglich auch durch 27 dividirt, nämlich $u(t^2 - u^2)$, das ist $u(t + u)(t - u)$.

VII. Weil nun auch diese drei Factoren unter sich untheilbar sind, so muß jeder für sich ein Cubus sein. Setzt man demnach für die beiden letzteren $t + u = f^3$

und $t - u = g^3$, so bekommt man $2u = f^3 - g^3$. Weil nun auch u ein Cubus sein muß, so erhalten wir in weit kleineren Zahlen zwei Cuben f^3 und g^3, deren Differenz gleichfalls ein doppelter Cubus wäre.

VIII. Weil es nun in kleinen Zahlen keine derartigen Cuben giebt, deren Summe oder Differenz ein doppelter Cubus wäre, so ist klar, daß es auch in den größten Zahlen keine giebt.

IX. Man könnte zwar einwenden, daß, da es in kleinern Zahlen gleichwohl einen solchen Fall gebe, nämlich wenn $f = g$, der obige Schluß unrichtig wäre. Allein wenn $f = g$ wäre, so hätte man in dem ersten Fall $t + 3u = t - 3u$ und also $u = 0$, folglich wäre auch $q = 0$, und da wir gesetzt hatten $x = p + q$ und $y = p - q$, so wären auch die zwei ersten Cuben x^3 und y^3 schon einander gleich gewesen, welcher Fall ausdrücklich ausgenommen worden ist. Eben so müßte auch in dem andern Fall, wenn $f = g$ wäre, $t + u = t - u$ und also wiederum $u = 0$ sein, daher auch $r = 0$ und folglich $p = 0$, da dann wiederum die beiden ersten Cuben x^3 und y^3 einander gleich würden, von welchem Fall aber keineswegs die Rede ist.

248. III. **Aufgabe.** Man verlangt auf allgemeine Art drei Cuben x^3, y^3 und z^3, deren Summe wiederum einen Cubus bildet.

Wir haben schon gesehen, daß man zwei von diesen Cuben als bekannt annehmen und daraus immer den dritten bestimmen kann, wenn nur die beiden erstern einander nicht gleich wären; allein nach der obigen Methode findet man in jedem Fall nur einen Werth für den dritten Cubus und es würde sehr schwer fallen, daraus noch mehrere ausfindig zu machen.

Wir sehen also hier alle drei Cuben als unbekannt an; und um eine allgemeine Auflösung zu geben, setzen wir

$x^3 + y^3 + z^3 = v^3$, und bringen den einen von den ersteren auf die andere Seite, damit wir $x^3 + y^3 = v^3 - z^3$ bekommen, welcher Gleichung in folgender Art Genüge geschehen kann.

I. Man setze $x = p + q$ und $y = p - q$, so wird, wie wir gesehen, $x^3 + y^3 = 2p(p^2 + 3q^2)$. Ferner setze man $v = r + s$ und $z = r - s$, so wird $v^3 - z^3 = 2s(s^2 + 3r^2)$. Daher dann $2p(p^2 + 3q^2) = 2s(s^2 + 3r^2)$, oder $p(p^2 + 3q^2) = s(s^2 + 3r^2)$ sein muß.

II. Wir haben früher gesehen, daß eine Zahl $p^2 + 3q^2$ keine andern Theiler hat, als diejenigen, welche selbst in eben dieser Form enthalten sind. Weil nun diese beiden Formeln $p^2 + 3q^2$ und $s^2 + 3r^2$ nothwendig einen gemeinschaftlichen Theiler haben müssen, so sei derselbe $= t^2 + 3u^2$.

III. Zu diesem Zwecke setze man $p^2 + 3q^2 = (f^2 + 3g^2)(t^2 + 3u^2)$ und $s^2 + 3r^2 = (h^2 + 3k^2)(t^2 + 3u^2)$. Alsdann wird $p = ft + 3gu$ und $q = gt - fu$ sein, folglich $p^2 = f^2t^2 + 6fgtu + 9g^2u^2$ und $q^2 = g^2t^2 - 2fgtu + f^2u^2$; hieraus $p^2 + 3q^2 = (f^2 + 3g^2)t^2 + (3f^2 + 9g^2)u^2$, das ist $p^2 + 3q^2 = (f^2 + 3g^2)(t^2 + 3u^2)$.

IV. Eben so erhalten wir aus der andern Formel $s = ht + 3ku$ und $r = kt - hu$, woraus diese Gleichung entsteht: $(ft + 3gu)(f^2 + 3g^2)(t^2 + 3u^2) = (ht + 3ku)(h^2 + 3k^2)(t^2 + 3u^2)$, welche durch $t^2 + 3u^2$ dividirt, giebt: $ft(f^2 + 3g^2) + 3gu(f^2 + 3g^2) = ht(h^2 + 3k^2) + 3ku(h^2 + 3k^2)$ oder $ft(f^2 + 3g^2) - ht(h^2 + 3k^2) = 3ku(h^2 + 3k^2) - 3gu(f^2 + 3g^2)$, woraus wir $t = \frac{3k(h^2 + 3k^2) - 3g(f^2 + 3g^2)}{f(f^2 + 3g^2) - h(h^2 + 3k^2)}u$ erhalten.

V. Um nun ganze Zahlen zu bekommen, nehme man $u = f(f^2 + 3g^2) - h(h^2 + 3k^2)$, damit $t = 3k(h^2 + 3k^2) - 3g(f^2 + 3g^2)$ sei, wo man die vier Buchstaben f, g, h und k nach Belieben annehmen kann.

VI. Hat man nun aus diesen vier Zahlen die Werthe für t und u gefunden, so erhält man daraus: I. $p = ft + 3gu$, II. $q = gt - fu$, III. $s = ht + 3ku$, IV. $r = kt - hu$, und hieraus endlich für die Auflösung unserer Aufgabe: $x = p + q$, $y = p - q$, $z = r - s$ und $v = r + s$, welche Auflösung so allgemein ist, daß darin alle möglichen Fälle enthalten sind, weil in dieser ganzen Rechnung keine willkürliche Einschränkung gemacht worden ist.

Der ganze Kunstgriff besteht darin, daß unsere Gleichung durch $t^2 + 3u^2$ theilbar gemacht wurde, wodurch die Buchstaben t und u durch eine Gleichung ersten Grades bestimmt werden konnten. Die Anwendung dieser Formeln kann in unendlich vielen Arten gemacht werden. Wir wollen einige Beispiele anführen.

I. Es sei $k = 0$ und $h = 1$, so wird $t = -3g(f^2 + 3g^2)$ und $u = s(f^2 + 3g^2) - 1$; hieraus also $p = -3fg(f^2 + 3g^2) + 3fg(f^2 + 3g^2) - 3g = -3g$, und $q = -(f^2 + 3g^2)^2 + f$, ferner $s = -3g(f^2 + 3g^2)$ und $r = -f(f^2 + 3g^2) + 1$, woraus wir endlich bekommen: $x = -3g - (f^2 + 3g^2)^2 + f$; $y = -3g + (f^2 + 3g^2)^2 - f$; $z = (3g - f)(f^2 + 3g^2) + 1$ und endlich $v = -(3g + f)(f^2 + 3g^2) + 1$. Nun wollen wir $f = -1$ und $g = +1$ setzen, dann bekommen wir $x = -20$, $y = 14$, $z = 17$ und $v = -7$; daher haben wir diese Gleichung $-20^3 + 14^3 + 17^3 = -7^3$ oder $14^3 + 17^3 + 7^3 = 20^3$.

II. Es sei $f = 2$, $g = 1$ und also $f^2 + 3g^2 = 7$; ferner $h = 0$ und $k = 1$, also $h^2 + 3k^2 = 3$, so wird $t = -12$ und $u = 14$ sein. Hieraus wird $p = 2t + 3u = 18$, $q = t - 2u = -40$, $r = t = -12$ und $s = 3u = 42$; daher bekommen wir $x = p + q = -22$, $y = p - q = 58$, $z = r - s = -54$ und $v = r + s = 30$; so daß $-22^3 + 58^3 - 54^3 = 30^3$, oder $58^3 = 30^3 + 54^3 + 22^3$. Da sich nun alle Wurzeln durch 2 theilen lassen, so wird auch $29^3 = 15^3 + 27^3 + 11^3$ sein.

III. Es sei $f = 3$, $g = 1$, $h = 1$ und $k = 1$, also

$f^2 + 3g^2 = 12$ und $h^2 + 3k^2 = 4$, so wird $t = -24$ und $u = 32$, welche sich durch 8 theilen lassen; und da es hier nur auf ihr Verhältniß ankommt, so wollen wir $t = -3$ und $u = 4$ setzen. Hieraus bekommen wir $p = 3t + 3u = +3$; $q = t - 3u = -15$; $r = t - u = -7$ und $s = t + 3u = +9$. Hieraus wird $x = -12$ und $y = 18$, $z = -16$ und $v = 2$, so daß $-12^3 + 18^3 - 16^3 = 2^3$ oder $18^3 = 16^3 + 12^3 + 2^3$; oder auch durch 2 gehoben, $9^3 = 8^3 + 6^3 + 1^3$.

IV. Setzen wir $g = 0$ und $k = h$, so daß f und h nicht bestimmt werden. Dann wird $f^2 + 3g^2 = f^2$ und $h^2 + 3k^2 = 4h^2$; also bekommen wir $t = 12h^3$ und $u = f^3 - 4h^3$; daher ferner $p = st = 12fh^3$; $q = -f^4 + 4fh^3$; $r = 12h^4 - hf^3 + 4h^4 = 16h^4 - hf^3$ und $s = 3hf^3$; daraus endlich $x = p + q = 16fh^3 - f^4$; $y = p - q = 8fh^3 + f^4$; $z = r - s = 16h^4 - 4hf^3$, und $v = r + s = 16h^4 + 2hf^3$. Nehmen wir nun $f = h = 1$, so erhalten wir $x = 15$, $y = 9$, $z = 12$ und $v = 18$, welche durch 3 gehoben, geben $x = 5$, $y = 3$ $z = 4$ und $v = 6$, so daß $3^3 + 4^3 + 5^3 = 6^3$.

Hiebei ist merkwürdig, daß die drei Wurzeln 3, 4, 5 um Eins steigen. Wir wollen untersuchen, ob es noch mehr derartige giebt.

249. IV. Aufgabe. Man verlangt drei Zahlen in einer arithmetischen Reihe, deren Differenz $= 1$, so daß die Cuben derselben Zahlen addirt, wieder einen Cubus hervorbringen.

Es sei x die mittlere dieser Zahlen, so wird die kleinere $= x - 1$ und die größere $= x + 1$. Die Cuben derselben addirt geben nun $3x^3 + 6x = 3x(x^2 + 2)$, welches ein Cubus sein soll. Hiezu ist nun nöthig, daß ein Fall bekannt sei, in dem dies geschieht, und nach einigem Probiren findet man $x = 4$. Daher setzen wir nach den früher gegebenen Regeln $x = 4 + y$, dann wird $x^2 = 16 + 8y + y^2$

und $x^3 = 64 + 48y + 12y^2 + y^3$, woraus unsere Formel $216 + 150y + 36y^2 + 3y^3$ wird, wo das erste Glied ein Cubus ist, das letzte aber nicht. Man setze daher die Wurzel $6 + fy$ und mache, daß die beiden ersten Glieder wegfallen. Da nun der Cubus davon $216 + 108fy + 18f^2y + f^3y^3$ ist, so muß $150 = 108f$, also $f = \frac{25}{18}$ sein. Die übrigen Glieder aber durch y^2 dividirt geben: $36 + 3y = 18f^2 + f^3y = \frac{25^2}{18} + \frac{25^3}{18^3}y$, oder $18^3 . 36 + 18^3 . 3y = 18^2 . 25^2 + 25^3 y$ oder $18^3 . 36 - 18^2 . 25^2 = 25^3 y - 18^3 . 3y$, daher $y = \frac{18^3 . 36 - 18^2 . 25^2}{25^3 - 3 . 18^3} = \frac{18^2(18 . 36 - 25^2)}{25^3 - 3 . 18^2}$, und also $y = -\frac{324 . 23}{1871} = -\frac{7452}{1871}$; folglich $x = \frac{32}{1871}$.

Da es beschwerlich scheinen möchte, diese Reduction zu einem Cubus weiter zu verfolgen, so ist zu bemerken, daß die Aufgabe immer auf Quadrate gebracht werden kann. Denn da $3x(x^2 + 2)$ ein Cubus sein soll, so setze man denselben $= x^3y^3$, da man dann $3x^2 + 6 = x^2y^3$ und also $x^2 = \frac{6}{y^3 - 3} = \frac{36}{6y^3 - 18}$ erhält. Da nun der Zähler dieses Bruchs schon ein Quadrat ist, so ist nur noch nöthig, den Nenner $6y^3 - 18$ zu einem Quadrat zu machen, wozu wiederum nöthig ist, einen Fall zu errathen. Weil sich aber 18 durch 9 theilen läßt, 6 aber nur durch 3, so muß y sich auch durch 3 theilen lassen. Man setze deswegen $y = 3z$, so wird unser Nenner $= 162z^3 - 18$, welcher durch 9 dividirt, nämlich $18z^3 - 2$, noch ein Quadrat sein muß. Dieses geschieht nun offenbar, wenn $z = 1$; man setze daher $z = 1 + v$, so muß $16 + 54v + 54v^2 + 18v^3 = \square$ sein. Davon setze man die Wurzel $4 + \frac{27}{4}v$, deren Quadrat $16 + 54v + \frac{729}{16}v^2$ ist, und also $54 + 18v = \frac{729}{16}$, oder $18v = -\frac{135}{16}$, folglich $2v = -\frac{15}{16}$, und $v = -\frac{15}{32}$. Hieraus erhalten wir $z = 1 + v = \frac{17}{32}$; ferner $y = \frac{51}{32}$.

Nun wollen wir den obigen Nenner betrachten, welcher $6y^3 - 18 = 162z^3 - 18 = 9(18z^3 - 2)$ war. Von diesem Factor aber $18z^3 - 2$ haben wir die Quadratwurzel $4 + \frac{27}{4}v = \frac{107}{128}$, also ist die Quadratwurzel aus dem ganzen Nenner $\frac{321}{128}$; aus dem Zähler aber ist dieselbe $= 6$, woraus $x = \frac{6}{\frac{321}{128}} = \frac{256}{107}$, welcher Werth von dem vorher gefundenen ganz verschieden ist. Also sind die Wurzeln unserer drei Cuben folgende: I. $x - 1 = \frac{149}{107}$; II. $x = \frac{256}{107}$; III. $x + 1 = \frac{363}{107}$, deren Cuben addirt einen Cubus hervorbringen, dessen Wurzel $xy = \frac{256}{107} . \frac{51}{32} = \frac{408}{107}$ sein wird.

250. Wir wollen hiemit den Abschnitt von der unbestimmten Analytik beschließen, da wir bei den mitgetheilten Aufgaben Gelegenheit genug gefunden haben, die wichtigsten Kunstgriffe zu erklären, welche bisher in diesem Theil der Algebra angewandt worden sind.

Ende.

Auf holzfreies Papier gedruckt.