Zweiter Abschnitt.

Von der unbestimmten Analytik.

Kapitel 1.

Von der Auflösung der einfachen Gleichungen, in denen mehr als eine unbekannte Zahl vorkommt.

1. Im ersten Theil hat man gesehen, wie eine unbekannte Zahl durch eine Gleichung, zwei unbekannte Zahlen aber durch zwei Gleichungen, 3 durch 3, 4 durch 4 rc., bestimmt werden können; so daß stets eben so viel Gleichungen erforderlich sind, als unbekannte Zahlen bestimmt werden sollen, wenn anders die Aufgabe selbst bestimmt ist.

Wenn aber weniger Gleichungen aus der Aufgabe entnommen werden können, als unbekannte Zahlen angenommen worden, so bleiben einige unbestimmt und daher unserer Willkür überlassen. Daher solche Aufgaben unbestimmt genannt werden, welche einen eigenen Theil der Analytik bilden, der die unbestimmte Analytik heißt.

2. Da in diesen Fällen eine oder mehr unbekannte Zahlen nach Belieben angenommen werden können, so finden in der That viele Auflösungen statt.

Allein es wird gewöhnlich die Bedingung hinzugefügt, daß die gesuchten Zahlen, ganze und sogar positive oder mindestens Rationalzahlen sein müssen, wodurch die Anzahl aller möglichen Auflösungen ungemein eingeschränkt wird, so daß oft nur wenige, oft zwar auch unendlich viele, welche aber nicht so leicht in die Augen fallen, Geltung haben, bisweilen aber auch sogar keine einzige möglich ist. Daher dieser Theil der Analytik oft ganz besondere Kunstgriffe erfordert, und sehr zur Belehrung der Anfänger sowie zur Ausbildung ihrer Fertigkeit im Rechnen dient.

3. Wir wollen mit einer der leichtesten Aufgaben den Anfang machen, und zwei Zahlen suchen, deren Summe 10 sein soll, unter der Bedingung, daß diese Zahlen ganz und positiv sein müssen.

Diese Zahlen seien nun x und y, so ist $x + y = 10$; woraus gefunden wird $x = 10 - y$, so daß y nicht anders bestimmt wird, als daß es eine ganze und positive Zahl sein muß; man könnte daher für y alle ganze Zahlen, von 1 bis ins Unendliche annehmen, da aber x auch positiv sein muß, so kann y nicht größer als 10 angenommen werden, weil sonst x negativ sein würde; und wenn auch 0 nicht gelten soll, so kann y höchstens 9 gesetzt werden, weil sonst $x = 0$ würde; daher nur die folgenden Auflösungen Geltung haben:

Wenn $y = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.$
so wird $x = 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1.$

Von diesen neun Auflösungen aber sind die vier letzteren mit den vier ersteren identisch, daher im Ganzen nur fünf verschiedene Auflösungen möglich sind.

Sollten drei Zahlen verlangt werden, deren Summe 10 wäre, so dürfte man nur die eine von den hier gefundenen Zahlen noch in zwei Theile theilen, woraus man eine größere Menge Auflösungen erhalten würde.

4. Dies hat gar keine Schwierigkeit. Wir wollen nun zu etwas schwereren Aufgaben fortschreiten.

I. **Aufgabe.** Man soll 25 in zwei Theile theilen, wovon der eine sich durch 2, der andere aber durch 3 theilen läßt.

Es sei der eine Theil $2x$, der andere $3y$, so muß sein $2x + 3y = 25$. Also $2x = 25 - 3y$. Man theile durch 2, so kommt $x = \frac{25 - 3y}{2}$, woraus wir zuerst sehen, daß $3y$ kleiner sein muß als 25 und daher y nicht größer als 8. Man ziehe so viel Ganze daraus als möglich, d. h. man theile den Zähler $25 - 3y$ durch den Nenner 2, so

wird $x = 12 - y + \frac{1-y}{2}$; also muß sich $1 - y$ oder auch $y - 1$ durch 2 theilen lassen. Man setze daher $y - 1 = 2z$ und also $y = 2z + 1$, so wird $x = 12 - 2z - 1 - z = 11 - 3z$; weil nun y nicht größer sein kann als 8, so können auch für z keine anderen Zahlen angenommen werden, als solche, die $2z + 1$ nicht größer geben als 8. Folglich muß z kleiner sein als 4, daher z nicht größer als 3 genommen werden kann, woraus diese Auflösungen folgen:

Setzt man $z = 0$, $z = 1$, $z = 2$, $z = 3$.
so wird $y = 1$, $y = 3$, $y = 5$, $y = 7$.
und $x = 11$, $x = 8$, $x = 5$, $x = 2$.

Die gesuchten zwei Theile von 25 sind daher:
I. $22 + 3$, II. $16 + 9$, III. $10 + 15$, IV. $4 + 21$.

5. II. **Aufgabe.** Man theile 100 in zwei Theile, so daß der erste durch 7, der zweite aber durch 11 sich theilen läßt.

Der erste Theil sei also $7x$, der zweite aber $11y$, so muß sein $7x + 11y = 100$; daher $x = \frac{100 - 11y}{7} = \frac{98 + 2 - 7y - 4y}{7}$, also wird $x = 14 - y + \frac{2 - 4y}{7}$; also muß $2 - 4y$ oder $4y - 2$ sich durch 7 theilen lassen. Läßt sich aber $4y - 2$ durch 7 theilen, so muß sich auch die Hälfte davon $2y - 1$ durch 7 theilen lassen; man setze daher $2y - 1 = 7z$, oder $2y = 7z + 1$, so wird $x = 14 - y - 2z$; da aber $2y = 7z + 1 = 6z + z + 1$ sein muß, so hat man $y = 3z + \frac{z+1}{2}$. Nun setze man $z + 1 = 2u$ oder $z = 2u - 1$, so wird $y = 3z + u$. Folglich kann man für u jede ganze Zahl nehmen, deren Annahme weder x noch y negativ macht, und alsdann bekommt man:

$y = 7u - 3$ und $x = 19 - 11u$.

Nach der ersten Formel muß $7u$ größer sein als 3,

nach der andern aber muß $11u$ kleiner sein als 19, oder u kleiner als $\frac{19}{11}$, so daß u nicht einmal 2 sein kann; da nun u unmöglich 0 sein kann, so bleibt nur ein einziger Werth übrig, nämlich $u = 1$, daraus bekommen wir $x = 8$ und $y = 4$; daher die beiden gesuchten Theile von 100 I. 56 und II. 44 sein werden.

6. III. **Aufgabe.** Man theile 100 in zwei solche Theile, daß, wenn man den ersten durch 5 dividirt, 2 übrig bleiben, und wenn man den zweiten durch 7 dividirt, 4 übrig bleiben.

Da der erste Theil, durch 5 dividirt, 2 übrig läßt, so setze man denselben $5x + 2$, und weil der zweite, durch 7 dividirt, 4 übrig läßt, so setze man diesen $7y + 4$; also wird $5x + 7y + 6 = 100$ oder $5x = 94 - 7y = 90 + 4 - 5y - 2y$; hieraus ergiebt sich $x = 18 - y - \frac{2y + 4}{5}$. Also muß $4 - 2y$, oder $2y - 4$, oder auch die Hälfte davon $y - 2$ durch 5 theilbar sein. Man setze daher $y - 2 = 5z$ oder $y = 5z + 2$, so wird $x = 16 - 7z$; woraus erhellt, daß $7z$ kleiner sein muß als 16, folglich z kleiner als $\frac{16}{7}$ und also nicht größer als 2. Wir haben also hier drei Auflösungen.

I. $z = 0$, giebt $x = 16$ und $y = 2$; woraus die beiden gesuchten Theile von 100 sein werden $82 + 18$.

II. $z = 1$, giebt $x = 9$ und $y = 7$; woraus die beiden Theile sein werden $47 + 53$.

III. $z = 2$, giebt $x = 2$ und $y = 12$; woraus die beiden Theile sind $12 + 88$.

7. IV. **Aufgabe.** Zwei Bäuerinnen haben zusammen 100 Eier. Die erste sagt: Wenn ich die meinigen zu 8 überzähle, so bleiben 7 übrig; die zweite sagt: Wenn ich die meinigen zu 10 überzähle, so bleiben mir auch 7 übrig. Wie viel Eier hat jede gehabt?

Weil die Zahl der Eier der ersten Bäuerin, durch 8 dividirt, 7 übrig läßt, die Zahl der Eier der zweiten aber, durch 10 dividirt, auch 7 übrig läßt, so setze man die Zahl der ersten $8x + 7$, der zweiten aber $10y + 7$, so daß $8x + 10y + 14 = 100$, oder $8x = 86 - 10y$, oder $4x = 43 - 5y = 40 + 3 - 4y - y$; daher setze man $y - 3 = 4z$, so wird $y = 4z + 3$ und $x = 10 - 4z - 3 - z = 7 - 5z$; folglich muß $5z$ kleiner sein als 7 und also z kleiner als 2, woraus diese zwei Auflösungen sich ergeben:

I. $z = 0$, giebt $x = 7$ und $y = 3$. Daher die erste Bäuerin 63 Eier, die zweite aber 37 gehabt hat.

II. $z = 1$, giebt $x = 2$ und $y = 7$. Daher die erste Bäuerin auch 23 Eier und die zweite 77 gehabt haben kann.

8. V. Aufgabe. Eine Gesellschaft von Männern und Frauen haben zusammen 1000 Groschen ausgegeben. Ein Mann hat 19 Groschen, eine Frau aber 13 Groschen ausgegeben. Wie viel Männer und Frauen sind es gewesen?

Die Zahl der Männer sei $= x$, der Frauen aber $= y$, so bekommt man die Gleichung $19x + 13y = 1000$. Daraus wird $13y = 1000 - 19x$ oder $13y = 988 + 12 - 13x - 6x$, also wird $y = 76 - x + \frac{12 - 6x}{13}$; also muß sich $12 - 6x$ oder $6x - 12$, und auch der sechste Theil davon $x - 2$ durch 13 theilen lassen. Man setze also $x - 2 = 13z$, so wird $x = 13z + 2$ und $y = 76 - 13z - 2 - 6z$ oder $y = 74 - 19z$; also muß z kleiner sein als $\frac{74}{19}$ und folglich kleiner als 4, daher folgende vier Auflösungen stattfinden:

I. $z = 0$, giebt $x = 2$ und $y = 74$. Also waren 2 Männer und 74 Frauen; jene haben 38 Groschen, diese aber 962 Groschen ausgegeben.

II. $z = 1$, giebt die Zahl der Männer $x = 15$ und die Zahl der Frauen $y = 55$; jene haben 285 Groschen, diese aber 715 Groschen ausgegeben.

III. $z = 2$, giebt die Zahl der Männer $x = 28$ und die Zahl der Frauen $y = 36$; jene haben 532 Groschen, diese aber 468 Groschen ausgegeben.

IV. $z = 3$, giebt die Zahl der Männer $x = 41$ und die Zahl der Frauen $y = 17$; jene haben 779 Groschen, diese aber 221 Groschen ausgegeben.

9. VI. Aufgabe. Ein Amtmann kauft Pferde und Ochsen zusammen für 1770 Rthlr. Er zahlt für ein Pferd 31 Rthlr., für einen Ochsen aber 21 Rthlr. Wie viel Pferde und Ochsen sind es gewesen?

Die Zahl der Pferde sei $= x$, der Ochsen aber $= y$, so muß sein: $31x + 21y = 1770$ oder $21y = 1770 - 31x = 1764 + 6 - 21x - 10x$, und also $y = 84 - x + \frac{6 - 10x}{21}$; daher muß $10x - 6$ und also auch die Hälfte $5x - 3$ durch 21 theilbar sein. Man setze also $5x - 3 = 21z$, daher $5x = 21z + 3$, so daß $y = 84 - x - 2z$. Da nun $x = \frac{21z + 3}{5}$ oder $x = 4z + \frac{z + 3}{5}$, so setze man $z + 3 = 5u$, dann wird $z = 5u - 3$, $x = 21u - 12$ und $y = 84 - 21u + 12 - 10u + 6 = 102 - 31u$, daher u größer sein muß als 0 und doch kleiner als 4; woraus wir diese drei Auflösungen erhalten:

I. $u = 1$ giebt die Zahl der Pferde $x = 9$ und der Ochsen $y = 71$; jene haben 279 Rthlr., diese aber 1491 Rthlr., zusammen 1770 Rthlr gekostet.

II. $u = 2$ giebt die Zahl der Pferde $x = 30$ und der Ochsen $y = 40$; jene haben 930 Rthlr., diese aber 840 Rthlr., zusammen 1770 Rthlr. gekostet.

III. $u = 3$ giebt die Zahl der Pferde $x = 51$ und der Ochsen $y = 9$; jene haben 1581 Rthlr., diese aber 189 Rthlr., zusammen 1770 Rthlr. gekostet.

10. Die bisherigen Aufgaben führen zu der allgemeinen Gleichung $ax + by = c$, wo a, b und c ganze und positive Zahlen bedeuten, und für x und y auch ganze und positive Zahlen gefordert werden.

Wenn aber b negativ ist, und die Gleichung die Form erhält: $ax = by + c$, so sind die Aufgaben von ganz an-

derer Art, und lassen eine unendliche Menge Auflösungen zu, wovon die Methode noch in diesem Kapitel erklärt werden soll. Die leichtesten Aufgaben von dieser Art sind z. B. so beschaffen: man suche zwei Zahlen, deren Differenz 6 sein soll. Nun setze man die kleinere $= x$, die größere $= y$, dann muß $y - x = 6$, folglich $y = 6 + x$ sein. Hier können nun für x alle möglichen ganzen Zahlen genommen werden, und was man immer für eine nimmt, y wird stets um 6 größer. Nehme man z. B. $x = 100$, so wäre $y = 106$; woraus ganz klar ist, daß unendlich viele Auflösungen stattfinden.

11. Hierauf folgen die Aufgaben, in denen $c = 0$ und ax genau dem by gleich sein soll. Man suche z. B. eine Zahl, die sich sowohl durch 5 als auch durch 7 theilen lasse, und setze diese Zahl $= N$, so muß erstens $N = 5x$ sein, weil die Zahl N durch 5 theilbar sein soll; ferner muß auch $N = 7y$ sein, weil sich diese Zahl auch durch 7 theilen lassen soll; daher bekommt man $5x = 7y$ und also $x = \frac{7y}{5}$; da sich nun 7 nicht theilen läßt durch 5, so muß sich y dadurch theilen lassen. Man setze demnach $y = 5z$, so wird $x = 7z$, daher die gesuchte Zahl $N = 35z$, wo man für z jede ganze Zahl annehmen kann, so daß für N unendlich viel Zahlen angegeben werden können, welche sind:

35, 70, 105, 140, 175, 910 2c.

Wollte man, daß sich die Zahl N noch überdies durch 9 theilen ließe, so wäre erstens $N = 35z$, dann müßte auch $N = 9u$ sein, also $35z = 9u$ und daraus $u = \frac{35z}{9}$; woraus klar ist, daß sich z durch 9 theilen lassen muß. Es sei daher $z = 9s$, so wird $u = 35s$ und die gesuchte Zahl $N = 315s$.

12. Mehr Schwierigkeit entsteht, wenn die Zahl c nicht 0 ist; z. B. wenn $5x = 7y + 3$ sein soll, welche Gleichung herauskommt, wenn eine Zahl N gefunden werden soll,

welche sich durch 5 theilen und durch 7 dividirt 3 übrig läßt. Alsdann muß $N = 5x$ jedoch auch $N = 7y + 3$ sein und deswegen wird $5x = 7y + 3$ folglich $x = \frac{7y + 3}{5} = \frac{5y + 2y + 3}{5} = y + \frac{2y + 3}{5}$. Man setze $2y + 3 = 5z$, so wird $x = y + z$; da aber $2y + 3 = 5z$, oder $2y = 5z - 3$, so wird $y = \frac{5z - 3}{2}$ oder $y = 2z + \frac{z - 3}{2}$. Man setze nun $z - 3 = 2u$, so wird $z = 2u + 3$ und $y = 5u + 6$ und $x = y + z = 7u + 9$; folglich die gesuchte Zahl $N = 35u + 45$, wo für u alle ganze Zahlen angenommen werden können, auch sogar negative, wenn nur N positiv wird, welches hier geschieht, wenn $u = -1$, denn dann wird $N = 10$. Die folgenden erhält man, wenn man dazu immer 35 addirt. Daher die gesuchten Zahlen sind: 10, 45, 80, 115, 150, 185, 220 2c.

13. Die Auflösung solcher Aufgaben beruht auf dem Verhältniß der beiden Zahlen, durch welche getheilt werden soll, und nach der Beschaffenheit derselben wird die Auflösung bald kürzer bald weitläuftiger. Folgende Aufgabe hat eine kurze Auflösung.

VII. Aufgabe. Man suche eine Zahl, welche durch 6 dividirt, 2, durch 13 aber dividirt, 3 übrig läßt.

Diese Zahl sei N, so muß erstens $N = 6x + 2$, eben so auch $N = 13y + 3$ sein, also wird $6x + 2 = 13y + 3$ und $6x = 13y + 1$, daher $x = \frac{13y + 1}{6} = 2y + \frac{y + 1}{6}$. Man setze also $y + 1 = 6z$, so wird $y = 6z - 1$ und $x = 2y + z = 13z - 2$; folglich wird die gesuchte Zahl $N = 78z - 10$. Solche Zahlen sind daher folgende: 68, 146, 224, 302, 380 2c., welche eine arithmetische Reihe bilden, deren Differenz $78 = 6 . 13$ ist. Wenn man also nur eine von diesen Zahlen weiß, so lassen sich alle übrigen leicht finden, indem man nur 78 jedes Mal dazu zu addiren, oder auch davon zu subtrahiren braucht, so lange es angeht.

14. Ein schwierigeres Beispiel ist folgendes.

VIII. **Aufgabe.** Man suche eine Zahl N, welche durch 39 dividirt, 16, und durch 56 dividirt, 27 übrig läßt.

Erstens muß also $N = 39p + 16$, dann aber $N = 56q + 27$ sein; daher wird $39p + 16 = 56q + 27$, oder $39p = 56q + 11$ und $p = \frac{56q + 11}{39}$, oder $p = q + \frac{17q + 11}{39} = q + r$; so daß $r = \frac{17q + 11}{39}$; daher wird $39r = 17q + 11$ und $q = \frac{39r - 11}{17} = 2r + \frac{5r - 11}{17} = 2r + s$; so daß $s = \frac{5r - 11}{17}$ oder $17s = 5r - 11$; daher wird $r = \frac{17s + 11}{5} = 3s + \frac{2s + 11}{5} = 3s + t$; so daß $t = \frac{2s + 11}{5}$, oder $5t = 2s + 11$ und so wird $s = \frac{5t - 11}{2} = 2t + \frac{t - 11}{2} = 2t + u$; so daß endlich $u = \frac{t - 11}{2}$ und $t = 2u + 11$. Da nun kein Bruch mehr vorhanden, so kann man u nach Belieben annehmen und daraus erhalten wir rückwärts folgende Bestimmungen:

$$\begin{aligned} t &= 2u + 11 \\ s &= 2t + u = 5u + 22 \\ r &= 3s + t = 17u + 77 \\ q &= 2r + s = 39u + 176 \\ p &= q + r = 56u + 253 \end{aligned}$$

und endlich $N = 39 \,.\, 56u + 9883$. Um die kleinste Zahl für N zu finden, setze man $u = -4$, so wird $N = 1147$. Setzt man $u = x - 4$, so wird $N = 2184x - 8736 + 9883$, oder $N = 2184x + 1147$. Diese Zahlen bilden also eine arithmetische Reihe, deren erstes Glied 1147 und deren Differenz = 2184 ist.

Diese Zahlen sind 1147, 3331, 5515, 7699, 9883 2c.

15. Zur Uebung wollen wir noch einige Aufgaben hinzufügen:

IX. **Aufgabe.** Eine Gesellschaft von Männern und Frauen sind in einem Wirthshause. Jeder Mann giebt 25 Groschen, jede Frau aber 16 Groschen aus und es stellt sich heraus, daß sämmtliche Frauen einen Groschen mehr ausgegeben haben, als die Männer; wie viel Männer und Frauen sind es gewesen?

Die Zahl der Frauen sei gewesen $= p$, die der Männer aber $= q$, so haben die Frauen $16p$, die Männer aber $25q$ ausgegeben; daher muß sein $16p = 25q + 1$ und da wird $p = \frac{25q + 1}{16} = q + \frac{9q + 1}{16} = q + r$; so daß $r = \frac{9q + 1}{16}$ oder $9q = 16r - 1$; daher wird $q = \frac{16r - 1}{9} = r + \frac{7r - 1}{9} = r + s$, so daß $s = \frac{7r - 1}{9}$, oder $9s = 7r - 1$; daher wird $r = \frac{9s + 1}{7} = s + \frac{2s + 1}{7} = s + t$, so daß $t = \frac{2s + 1}{7}$ oder $7t = 2s + 1$; daher wird $s = \frac{7t - 1}{2} = 3t + \frac{t - 1}{2} = 3t + u$, so daß $u = \frac{t - 1}{2}$ oder $2u = t - 1$, daher $t = 2u + 1$. Hieraus erhalten wir nun rückwärts:

$$\begin{aligned} t &= 2u + 1 \\ s &= 3t + u = 7u + 3 \\ r &= s + t = 9u + 4 \\ q &= r + s = 16u + 7 \\ p &= q + r = 25u + 11 \end{aligned}$$

Daher war die Anzahl der Frauen $25u + 11$, der Männer aber $16u + 7$, wo man für u ganze Zahlen nach Belieben annehmen kann. Die Resultate der kleinsten Zahlen sind folgende:

Anzahl der Frauen: = 11, 36, 61, 86, 111 2c.
Anzahl der Männer: = 7, 23, 39, 55, 71 2c.

Nach der ersten Auflösung in den kleinsten Zahlen haben die Frauen 176 Groschen, die Männer aber 175 Groschen; also die Frauen einen Groschen mehr als die Männer ausgegeben.

16. X. **Aufgabe.** Jemand kauft Pferde und Ochsen, zahlt für ein Pferd 31 Rthlr., für einen Ochsen aber 20 Rthlr. und es stellt sich heraus, daß sämmtliche Ochsen 7 Rthlr. mehr gekostet haben, als die Pferde. Wie viel Ochsen und Pferde sind es gewesen?

Es sei die Anzahl der Ochsen $= p$, die der Pferde aber $= q$, so muß $20p = 31q + 7$, daher $p = \frac{31q + 7}{20} = q + \frac{11q + 7}{20} = q + r$, daher $20r = 11q + 7$, und $q = \frac{20r - 7}{11} = r + \frac{9r - 7}{11} = r + s$; daher $11s = 9r - 7$ und $r = \frac{11s + 7}{9} = s + \frac{2s + 7}{9} = s + t$, also $9t = 2s + 7$, und $s = \frac{9t - 7}{2} = 4t + \frac{t - 7}{2} = 4t + u$, daher $2u = t - 7$, und $t = 2u + 7$.

$$\begin{aligned} s &= 4t + u = 9u + 28 \\ r &= s + t = 11u + 35 \\ q &= r + s = 20u + 63 \text{ Zahl der Pferde,} \\ p &= q + r = 31u + 98 \text{ Zahl der Ochsen.} \end{aligned}$$

Hieraus findet man die kleinsten positiven Zahlen für p und q, wenn man $u = -3$ setzt. Die größeren steigen in arithmetischer Reihe wie folgt:

Zahl der Ochsen p = 5, 36, 67, 98, 129, 160, 191, 222, 253 2c.

Zahl der Pferde q = 3, 23, 43, 63, 83, 103, 123, 143, 163 2c.

17. Wenn wir bei diesem Beispiel erwägen, wie die Buchstaben p und q durch die folgenden bestimmt werden, so ist leicht einzusehen, daß die Bestimmung auf dem Verhältniß der Zahlen 31 und 20 beruht, und zwar auf demjenigen, nach welchem der größte gemeinschaftliche Theiler dieser beiden Zahlen gefunden zu werden pflegt, wie aus folgendem erhellt:


```
20|31|1
  |20|
 ------
   11|20|1
     |11|
    ------
       9|11|1
        | 9|
       ------
          2|9|4
           |8|
          -----
           1|2|2
            |2|
           -----
             0
```

Hier ist es also klar, daß die Quotienten in der auf einander folgenden Bestimmung der Buchstaben p, q, r, s 2c. vorkommen und mit dem ersten Buchstaben auf der rechten Seite verbunden sind, indem der letztere immer einfach bleibt; bei der letzten Gleichung aber kommt zuerst die Zahl 7 zum Vorschein und zwar mit dem Zeichen +, weil die letzte Bestimmung die fünfte ist; wäre jedoch die Zahl derselben gerade gewesen, so hätte — 7 gesetzt werden müssen. Dies wird noch deutlicher aus der folgenden Tabelle hervorgehen, in der erstens die Zergliederung der Zahlen 31 und 20, und dann die Bestimmung der Buchstaben p, q, r 2c. vorkommt.

$31 = 1 \,.\, 20 + 11$	$p = 1 \,.\, q + r$
$20 = 1 \,.\, 11 + 9$	$q = 1 \,.\, r + s$
$11 = 1 \,.\, 9 + 2$	$r = 1 \,.\, s + t$
$9 = 4 \,.\, 2 + 1$	$s = 4 \,.\, t + u$
$2 = 2 \,.\, 1 + 0$	$t = 2 \,.\, u + 7.$

18. Auf diese Art kann auch das frühere Beispiel (siehe 14) dargestellt werden, wie folgt:

$56 = 1 \,.\, 39 + 17$	$p = 1 \,.\, q + r$
$39 = 2 \,.\, 17 + 5$	$q = 2 \,.\, r + s$
$17 = 3 \,.\, 5 + 2$	$r = 3 \,.\, s + t$
$5 = 2 \,.\, 2 + 1$	$s = 2 \,.\, t + u$
$2 = 2 \,.\, 1 + 0$	$t = 2 \,.\, u + 11.$

19. In dieser Weise sind wir im Stande, alle derartigen Beispiele auf allgemeine Art aufzulösen.

Es sei diese Gleichung gegeben: $bp = aq + n$, wo a, b und n bekannte Zahlen sind. Hier muß man nun dasselbe Verfahren anwenden, als wenn man für die Zahlen a und b den größten gemeinschaftlichen Theiler suchen wollte, aus welchen sogleich p und q durch die folgenden Buchstaben bestimmt werden, wie folgt:

$$\begin{array}{rl|l}
\text{Es sei} & a = Ab + c & \text{so wird } p = Aq + r \\
& b = Bc + d & q = Br + s \\
& c = Cd + e & r = Cs + t \\
& d = De + f & s = Dt + u \\
& e = Ef + g & t = Eu + v \\
& f = Fg + 0 & u = Fv \pm n
\end{array}$$

Hier wird in der letzten Bestimmung $+ n$ genommen, wenn die Anzahl der Bestimmungen ungerade ist, hingegen aber $- n$, wenn dieselbe Zahl gerade ist. In solcher Weise können nun alle derartigen Aufgaben ziemlich schnell aufgelöst werden. Wir wollen einige Beispiele geben.

20. XI. Aufgabe. Es wird eine Zahl gesucht, welche durch 11 dividirt 3, durch 19 aber dividirt 5 übrig läßt.

Diese Zahl sei N, daher muß erstens $N = 11p + 3$, dann auch $N = 19q + 5$ sein, und so wird $11p + 3 = 19q + 5$ oder $11p = 19q + 2$. Es entsteht daher folgende Tabelle:

$$\begin{array}{l|l}
19 = 1 \,.\, 11 + 8 & p = q + r \\
11 = 1 \,.\, 8 + 3 & q = r + s \\
8 = 2 \,.\, 3 + 2 & r = 2s + t \\
3 = 1 \,.\, 2 + 1 & s = t + u \\
2 = 2 \,.\, 1 + 0 & t = 2u + 2.
\end{array}$$

Hier kann man u nach Belieben annehmen, um daraus die vorhergehenden Buchstaben der Ordnung nach rückwärts zu bestimmen, wie folgt:

$$\begin{aligned}
t &= 2u + 2 \\
s &= t + u = 3u + 2 \\
r &= 2s + t = 8u + 6 \\
q &= r + s = 11u + 8 \\
p &= q + r = 19u + 14.
\end{aligned}$$

Hieraus bekommt man die gesuchte Zahl $N = 209u + 157$. Daher ist die kleinste Zahl für $N = 157$.

21. XII. Aufgabe. Man suche eine Zahl N, welche wie vorher durch 11 dividirt 3, und durch 19 dividirt 5 übrig läßt. Sie soll aber auch durch 29 dividirt 10 übrig lassen.

Nach der letzten Bedingung muß $N = 29p + 10$ sein; und da die beiden ersten Bedingungen schon berechnet worden, so muß zufolge derselben, wie oben gefunden, $N = 209u + 157$ sein, wofür wir schreiben wollen $N = 209q + 157$, daher wird $29p + 10 = 209q + 157$ oder $29p = 209q + 147$; woraus die folgende Rechnung gemacht wird:

$$\begin{array}{l|l}
209 = 7 \,.\, 29 + 6 & p = 7q + r \\
29 = 4 \,.\, 6 + 5 & q = 4r + s \\
6 = 1 \,.\, 5 + 1 & r = s + t \\
5 = 5 \,.\, 1 + 0 & s = 5t - 147
\end{array}$$

Wir wollen nun auf folgende Art zurückgehen:

$$\begin{aligned}
s &= 5t - 147 \\
r &= s + t = 6t - 147 \\
q &= 4r + s = 29t - 735 \\
p &= 7q + r = 209t - 5292
\end{aligned}$$

Daher $N = 6061t - 153458$. Die kleinste Zahl kommt heraus, wenn man $t = 26$ setzt. Dann wird $N = 4128$.

22. Es ist aber hier wohl zu bemerken, daß, wenn eine Gleichung $bp = aq + n$ aufgelöst werden soll, die beiden Zahlen a und b keinen gemeinschaftlichen Theiler außer 1 haben müssen, denn sonst wäre die Aufgabe unmöglich, wenn nicht die Zahl n denselben gemeinschaftlichen Theiler hätte.

Denn wenn z. B. $9p = 15q + 2$ sein soll, wo 9 und 15 den gemeinschaftlichen Theiler 3 haben, wodurch sich

2 nicht theilen läßt, so ist es unmöglich, diese Aufgabe aufzulösen, weil $9p - 15q$ stets durch 3 theilbar ist und also niemals 2 werden kann; wäre aber in diesem Falle $n = 3$ oder $n = 6$ ꝛc., so wäre die Aufgabe wohl möglich, man müßte aber die Gleichung durch 3 theilen, da dann herauskäme $3p = 5q + 1$, welche Gleichung nach der obigen Regel leicht aufgelöst wird. Also sieht man deutlich, daß die beiden Zahlen a und b keinen gemeinschaftlichen Theiler außer 1 haben müssen, und daß die gegebene Regel in anderen Fällen keine Geltung haben kann.

23. Um dieses deutlicher zu zeigen, wollen wir die Gleichung $9p = 15q + 2$ auf dem gewöhnlichen Wege behandeln. Da wird nun $p = \frac{15q + 2}{9} = q + \frac{6q + 2}{9} = q + r$ sein, so daß $9r = 6q + 2$ oder $6q = 9r - 2$; daher $q = \frac{9r - 2}{6} = r + \frac{3r - 2}{6} = r + s$, so daß $3r - 2 = 6s$ oder $3r = 6s + 2$; daher $r = \frac{6s + 2}{3} = 2s + \frac{2}{3}$. Diese Formel wird offenbar niemals eine ganze Zahl werden, weil s nothwendig eine ganze Zahl sein muß, woraus folglich zu ersehen, daß dergleichen Aufgaben ihrer Natur nach unmöglich sind.

Kapitel 2.

Von der sogenannten Regel Coeci, in der aus zwei Gleichungen drei oder mehr unbekannte Zahlen bestimmt werden sollen.

24. In dem vorhergehenden Kapitel haben wir gesehen, wie aus einer Gleichung zwei unbekannte Zahlen bestimmt werden, wenn diese ganze und positive Zahlen sein sollen. Sind aber zwei Gleichungen gegeben und die Aufgabe soll unbestimmt sein, so müßten mehr als zwei unbekannte Zahlen vorkommen. Dergleichen Aufgaben kommen in den gewöhnlichen Rechenbüchern vor und pflegen nach der sogenannten Regel Coeci aufgelöst zu werden, deren Begründung wir hier darlegen wollen.

25. Wir wollen mit einem Beispiel den Anfang machen:

I. Aufgabe. 30 Personen, Männer, Frauen und Kinder geben in einem Wirthshause 50 Rthlr. aus, und zwar zahlt ein Mann 3 Rthlr., eine Frau 2 Rthlr. und ein Kind 1 Rthlr. Wie viel Männer, Frauen und Kinder sind es gewesen?

Es sei die Zahl der Männer $= p$, der Frauen $= q$, und der Kinder $= r$, so erhält man die zwei folgenden Gleichungen:

$$\begin{aligned}
\text{I.}\quad & p + q + r = 30, \\
\text{II.}\quad & 3p + 2q + r = 50,
\end{aligned}$$

aus welchen die drei Buchstaben p, q und r in ganzen und positiven Zahlen bestimmt werden sollen. Aus der ersten wird nun $r = 30 - p - q$, und deswegen muß $p + q$ kleiner sein als 30. Dieser Werth in der zweiten für r geschrieben, giebt $2p + q + 30 = 50$, also $q = 20 - 2p$ und $p + q = 20 - p$, welches offenbar kleiner ist als 30. Nun kann man für p alle Zahlen annehmen, die nicht größer sind als 10, woraus folgende Auflösungen entstehen:

Zahl der Männer $p = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$;

Zahl der Frauen $q = 20, 18, 16, 14, 12, 10, 8, 6, 4, 2, 0$.

Zahl der Kinder $r = 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20$.

Läßt man die ersten und letzten weg, so bleiben noch 9 Auflösungen übrig.

26. II. Aufgabe. Jemand kauft 100 Stück Vieh, Schweine, Ziegen und Schafe, für 100 Rthlr. Nun kostet ein Schwein $3\frac{1}{2}$ Rthlr., eine Ziege $1\frac{1}{3}$ Rthlr. und ein Schaf $\frac{1}{2}$ Rthlr. Wie viel waren es von jeder Gattung?

Es sei die Zahl der Schweine $= p$, der Ziegen $= q$, der Schafe $= r$, so hat man die folgenden zwei Gleichungen:

$$\begin{aligned}
\text{I.}\quad & p + q + r = 100; \\
\text{II.}\quad & 3\tfrac{1}{2}p + 1\tfrac{1}{3}q + \tfrac{1}{2}r = 100;
\end{aligned}$$

Diese letztere multiplicire man mit 6, um die Brüche wegzubringen, so kommt $21p + 8q + 3r = 600$. Aus der ersten hat man $r = 100 - p - q$, welcher Werth in der zweiten für r gesetzt $18p + 5q = 300$ oder $5q = 300 - 18p$ und $q = 60 - \frac{18p}{5}$ giebt; also muß $18p$ durch 5 theilbar sein, oder 5 als einen Factor in sich schließen. Man setze also $p = 5s$, so wird $q = 60 - 18s$ und $r = 13s + 40$, wo für s eine beliebige ganze Zahl genommen werden kann, doch so daß q nicht negativ wird; daher s nicht größer als 3 angenommen werden kann, und also, wenn auch 0 ausgeschlossen wird, nur folgende drei Auflösungen Geltung haben:

nämlich wenn $s = 1,\ 2,\ 3$

so wird $p = 5, 10, 15$

$q = 42, 24, 16$

$r = 53, 66, 79.$

27. Wenn man derartige Aufgaben selbst stellen will, muß man vor allen Dingen darauf sehen, ob dieselben möglich sind. Um diese Möglichkeit beurtheilen zu können, möge man Folgendes beachten.

Die beiden Gleichungen, die wir bisher betrachtet, seien so dargestellt: I. $x + y + z = a$, II. $fx + gy + hz = b$, wo f, g, h nebst a und b gegebene Zahlen sind. Nun sei unter den Zahlen f, g und h die erste f die größte und h die kleinste. Da $x + y + z = a$, so wird $fx + fy + fz = fa$. Nun ist $fx + fy + fz$ größer als $fx + gy + hz$. Daher muß fa größer sein als b, oder b muß kleiner sein als fa; und da ferner $hx + hy + hz = ha$ und $hx + hy + hz$ gewiß kleiner ist als $fx + gy + hz$, so muß auch ha kleiner als b, oder b größer als ha sein. Im Fall daher die Zahl b nicht kleiner als fa und zugleich größer als ha, ist, wird die Auflösung der Aufgabe unmöglich sein.

Diese Bedingung pflegt auch so dargestellt zu werden: Die Zahl b muß zwischen den Grenzen fa und ha enthalten sein; ferner muß dieselbe auch nicht einer der beiden Grenzen gar zu nahe kommen, weil sonst die übrigen Buchstaben nicht bestimmt werden könnten.

In dem vorigen Beispiel, wo $a = 100$, $f = 3\frac{1}{2}$ und $h = \frac{1}{2}$, waren die Grenzen 350 und 50. Wollte man nun $b = 51$ anstatt 100 setzen, so wären die Gleichungen $x + y + z = 100$, und $3\frac{1}{2}x + 1\frac{1}{3}y + \frac{1}{2}z = 51$ und, hier mit 6 multiplicirt, $21x + 8y + 3z = 306$. Man nehme die erste dreimal, so wird $3x + 3y + 3z = 300$. Und diese von jener abgezogen, läßt $18x + 5y = 6$, welche offenbar unmöglich ist, weil x und y ganze Zahlen sein müssen.

28. Von dieser Regel machen auch die Münzmeister und Goldschmiede Gebrauch, wenn sie aus drei oder mehreren Sorten Silber eine Masse von einem gegebenen Gehalte zusammenschmelzen wollen; wie aus folgendem Beispiel zu ersehen:

III. Aufgabe. Ein Münzmeister hat dreierlei Silber, das erste ist 14-löthig, das zweite 11-löthig und das dritte 9-löthig. Nun braucht er zu einer Arbeit 30 Mark 12-löthiges Silber. Wie viel Mark muß er von jeder Sorte nehmen?

Er nehme von der ersten Sorte x Mark, von der zweiten y Mark und von der dritten z Mark, so muß $x + y + z = 30$ sein, welches die erste Gleichung ist.

Da ferner eine Mark von der ersten Sorte 14 Loth fein Silber hält, so werden die x Mark enthalten $14x$ Loth; eben so werden die y Mark von der zweiten Sorte $11y$ Loth; und die z Mark von der dritten Sorte $9z$ Loth Silber enthalten. Daher die ganze Masse enthalten wird $14x + 11y + 9z$ Loth. Weil nun dieselbe 30 Mark wiegt, wovon eine Mark 12 Loth Silber enthalten soll, so muß auch die Quantität Silber, nämlich 360 Loth, darin enthalten sein; woraus diese zweite Gleichung $14x + 11y + 9z = 360$ entsteht; hievon subtrahire man die erste

neunmal genommen, also $9x + 9y + 9z = 270$, so bleibt übrig $5x + 2y = 90$, woraus x und y bestimmt werden soll, und zwar in ganzen Zahlen. Alsdann aber wird $z = 30 - x - y$. Aus jener Gleichung bekommt man $2y = 90 - 5x$ und $y = 45 - \frac{5x}{2}$. Es sei daher $x = 2u$, so wird $y = 45 - 5u$ und $z = 3u - 15$, also muß u größer als 4 und gleichwohl kleiner als 10 sein, woraus folgende Auflösungen hervorgehen:

$u = 5,$	6,	7,	8,	9.
$x = 10,$	12,	14,	16,	18.
$y = 20,$	15,	10,	5,	0.
$z = 0,$	3,	6,	9,	12.

29. Im Falle mehr als drei unbekannte Zahlen vorkommen, kann die Auflösung in derselben Art geschehen, wie aus folgendem Beispiel zu ersehen.

IV. Aufgabe. Jemand kauft 100 Stück Vieh für 100 Rthlr., und zwar 1 Ochsen für 10 Rthlr., 1 Kuh für 5 Rthlr., 1 Kalb für 2 Rthlr., 1 Schaf für $\frac{1}{2}$ Rthlr. Wie viel Ochsen, Kühe, Kälber und Schafe sind es gewesen?

Die Zahl der Ochsen sei $= p$, der Kühe $= q$, der Kälber $= r$, und der Schafe $= s$, so ist die erste Gleichung $p + q + r + s = 100$, die zweite aber wird $10p + 5q + 2r + \frac{1}{2}s = 100$, welche, um die Brüche wegzubringen, mit 2 multiplicirt, $20p + 10q + 4r + s = 200$ giebt. Hievon subtrahire man die erste Gleichung, so hat man $19p + 9q + 3r = 100$. Hieraus bekommen wir $3r = 100 - 19p - 9q$ und $r = 33 + \frac{1}{3} - 6p - \frac{1}{3}p - 3q$, oder $r = 33 - 6p - 3q + \frac{1-p}{3}$, daher muß $1 - p$ oder $p - 1$ durch 3 theilbar sein. Man setze demnach:

$p - 1 = 3t$, so wird:

$p = 3t + 1$

$q = q$

$r = 27 - 19t - 3q$

$s = 72 + 2q + 16t$

Also muß $19t + 3q$ kleiner sein als 27. Hier können nun q und t nach Belieben angenommen werden, wenn nur die Bedingung beobachtet wird, daß $19t + 3q$ nicht größer werde als 27. Wir haben daher folgende Fälle zu erwägen:

I. wenn $t = 0$,	II. wenn $t = 1$,	t kann nicht $= 2$ gesetzt werden, weil sonst r negativ würde.
so wird $p = 1$ $q = q$ $r = 27 - 3q$ $s = 72 + 2q$	so wird $p = 4$ $q = q$ $r = 8 - 3q$ $s = 88 + 2q$	

Im ersten Falle darf q nicht größer als 9, und im zweiten Falle nicht größer als 2 sein. Aus beiden Fällen erhalten wir also folgende Auflösungen.

Aus dem ersten Falle entstehen 10 Auflösungen:

	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X
p	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
q	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
r	27	24	21	18	15	12	9	6	3	0
s	72	74	76	78	80	82	84	86	88	90

Aus dem zweiten Falle entstehen 3 Auflösungen:

	I	II	III
p	4	4	4
q	0	1	2
r	8	5	2
s	88	90	92

Dies sind nun im Ganzen 13 Auflösungen; wenn man aber 0 nicht gelten lassen will, so giebt es nur 10 Auflösungen.

30. Die Art der Auflösung bleibt dieselbe, wenn auch in der ersten Gleichung die Buchstaben mit gegebenen Zahlen multiplicirt sind, wie aus folgendem Beispiel zu ersehen:

V. Aufgabe. Man suche drei ganze Zahlen von folgender Beschaffenheit. Wenn die erste mit 3, die zweite mit 5 und die dritte mit 7 multiplicirt wird, soll die Summe der Producte 560; wenn aber die erste mit 9, die zweite mit 25 und die dritte mit 49 multiplicirt wird, soll die Summe der Producte 2920 sein.

Es sei die erste Zahl $= x$, die zweite $= y$ und die dritte $= z$, so hat man diese zwei Gleichungen:
I. $3x + 5y + 7z = 560$, II. $9x + 25y + 49z = 2920$.
Von der zweiten subtrahirt man die erste dreimal genommen, nämlich $9x + 15y + 21z = 1680$, so bleiben übrig $10y + 28z = 1240$, oder, durch 2 dividirt, $5y + 14z = 620$. Daraus wird $y = 124 - \frac{14z}{5}$; also muß sich z durch 5 theilen lassen; daher setze man $z = 5u$, so wird $y = 124 - 14u$; welche Werthe in der ersten Gleichung für z und y gesetzt, geben $3x - 35u + 620 = 560$, oder $3x = 35u - 60$ und $x = \frac{35u}{3} - 20$. Deswegen setze man $u = 3t$, so bekommen wir endlich diese Auflösung: $x = 35t - 20$, $y = 124 - 42t$ und $z = 15t$, wo man für t eine beliebige ganze Zahl setzen kann, doch so, daß t größer als 0 und kleiner als 3 ist, woraus man zwei Auflösungen erhält:

I. wenn $t = 1$, so wird $x = 15$, $y = 82$, $z = 15$,
II. wenn $t = 2$, so wird $x = 50$, $y = 40$, $z = 30$.

Kapitel 3.

Von den zusammengesetzten unbestimmten Gleichungen, in denen von der einen unbekannten Zahl nur die erste Potenz vorkommt.

31. Wir kommen nun zu solchen unbestimmten Gleichungen, in denen zwei unbekannte Zahlen gesucht werden,

und die eine nicht, wie bisher, allein steht, sondern entweder mit der andern multiplicirt, oder in einer höheren Potenz vorkommt, während von der andern blos die erste Potenz vorhanden ist. Auf allgemeine Art haben solche Gleichungen folgende Form: $a + bx + cy + dx^2 + exy + fx^2 + gx^2y + hx^4 + kx^3y + \text{etc.} = 0$, in welcher nur y vorkommt, und also aus dieser Gleichung leicht bestimmt werden kann; die Bestimmung muß aber so geschehen, daß für x und y ganze Zahlen herauskommen. Dergleichen Fälle wollen wir nun betrachten, und mit den leichteren den Anfang machen.

32. I. Aufgabe. Man suche zwei Zahlen, die so beschaffen sind, daß, wenn ihre Summe zu ihrem Producte addirt wird, 79 herauskommt.

Es seien die zwei verlangten Zahlen x und y, so muß $xy + x + y = 79$ sein, woraus wir bekommen $xy + y = 79 - x$ und $y = \frac{79 - x}{x + 1} = -1 + \frac{80}{x + 1}$, woraus hervorgeht, daß $x + 1$ ein Theiler von 80 sein muß; da nun 80 viele Theiler hat, so findet man aus jedem einen Werth für x, wie aus Folgendem zu ersehen:

die Theiler sind 1,	2,	4,	5,	8,	10,	16,	20,	40,	80,
daher wird $x = 0$,	1	3	4	7	9	15	19	39	79
und $y = 79$,	39	19	15	9	7	4	3	1	0

Weil nun hier die letzteren Auflösungen mit den ersteren übereinstimmen, so hat man im Ganzen folgende fünf Auflösungen:

I	II	III	IV	V
0	1	3	4	7
79	39	19	15	9

33. In solcher Art kann auch die allgemeine Gleichung $xy + ax + by = c$ aufgelöst werden, woraus $xy +$

$by = c - ax$ und also $y = \frac{c - ax}{x + b}$ oder $y = -a + \frac{ab + c}{x + b}$ sich ergiebt. Daher muß $x + b$ ein Theiler der bekannten Zahl $ab + c$ sein, und also kann aus jedem Theiler derselben ein Werth für x gefunden werden. Man setze daher, es sei $ab + c = fg$, also daß $y = -a + \frac{fg}{x + b}$. Nun nehme man $x + b = f$ oder $x = f - b$, so wird $y = -a + g$ oder $y = g - a$. In so viel verschiedene Arten sich daher die Zahl $ab + c$ durch zwei Factoren, als fg, darstellen läßt, so oft erhält man daher nicht nur eine, sondern zwei Auflösungen. Die erste ist nämlich $x = f - b$ und $y = g - a$, die andere aber kömmt auf gleiche Art heraus, wenn man $x + b = g$ setzt; dann wird $x = g - b$ und $y = f - a$.

Sollte daher die Gleichung gegeben sein: $xy + 2x + 3y = 42$, so wäre $a = 2$, $b = 3$ und $c = 42$, folglich $y = -2 + \frac{48}{x + 3}$. Nun kann die Zahl 48 in vielerlei Arten durch zwei Factoren wie fg dargestellt werden, da dann immer $x = f - 3$ und $y = g - 2$, oder auch $x = g - 3$ und $y = f - 2$ sein wird. Derartige Factoren sind nun folgende:

	I.		II.		III.		IV.		V.	
Factoren	1 . 48		2 . 24		3 . 16		4 . 12		6 . 8	
	x	y	x	y	x	y	x	y	x	y
Zahlen	−2	46	−1	22	0	14	1	10	3	6
oder	45	−1	21	0	13	1	9	2	5	4

34. Noch allgemeiner kann die Gleichung also dargestellt werden: $mxy = ax + by + c$, wo a, b, c und m gegebene Zahlen sind, für x und y aber ganze Zahlen verlangt werden,

Man suche daher y, so bekommt man $y = \frac{ax + c}{mx - b}$.

Damit hier x aus dem Zähler weggebracht werde, multiplicirt man beiderseits mit m, so hat man $my = \frac{max + mc}{mx - b} = a + \frac{mc + ab}{mx - b}$. Der Zähler dieses Bruchs ist nun eine bekannte Zahl, deren Theiler der Nenner sein muß. Man stelle daher den Zähler als das Product zweier Factoren z. B. als fg vor, was oft in vielerlei Arten geschehen kann, und sehe, ob sich einer davon mit $mx - b$ vergleichen läßt, so daß $mx - b = f$. Hiezu wird aber erfordert, weil $x = \frac{f + b}{m}$, daß $f + b$ sich durch m theilen läßt. Daher können hier nur solche Factoren von $mc + ab$ gebraucht werden, welche, wenn dazu b addirt wird, sich durch m theilen lassen. Dies soll durch ein Beispiel erläutert werden.

Es sei $5xy = 2x + 3y + 18$. Hieraus bekommt man: $y = \frac{2x + 18}{5x - 3}$ und $5y = \frac{10x + 90}{5x - 3} = 2 + \frac{96}{5x - 3}$. Hier müssen nun von 96 solche Theiler gesucht werden, daß, wenn zu denselben 3 addirt wird, die Summe durch 5 theilbar werde. Man nehme daher alle Theiler von 96, welche 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 32, 48, 96 sind, woraus hervorgeht, daß nur folgende, nämlich 2, 12, 32 gebraucht werden können.

Es sei demnach: I. $5x - 3 = 2$, so wird $5y = 50$ und daher $x = 1$, und $y = 10$.

II. $5x - 3 = 12$, so wird $5y = 10$ und daher $x = 3$, und $y = 2$.

III. $5x - 3 = 32$, so wird $5y = 5$ und daher $x = 7$, und $y = 1$.

35. Da hier in der allgemeinen Auflösung $my - a = \frac{mc + ab}{mx - b}$ wird, so ist es hier am Orte zu bemerken, daß, wenn eine in der Form $mc + ab$ enthaltene Zahl einen Theiler hat, der in der Form $mx - b$ enthalten ist, alsdann der Quotient nothwendig die Form $my - a$ haben

muß, und daß alsdann die Zahl $mc + ab$ durch ein solches Product $(mx - b)(my - a)$ dargestellt werden kann. Es sei z. B. $m = 12$, $a = 5$, $b = 7$ und $c = 15$; so bekommt man $12y - 5 = \frac{215}{12x - 7}$. Nun sind von 215 die Theiler 1, 5, 43, 215, unter welchen die gesucht werden müssen, welche in der Form $12x - 7$ enthalten sind, oder wenn man 7 dazu addirt, daß sich die Summe durch 12 theilen lasse. Von allen Theilern erfüllt nur 5 diese Bedingung; also $12x - 7 = 5$ und $12y - 5 = 43$. Wie nun aus der ersten $x = 1$ wird, so findet man auch aus der zweiten y in ganzen Zahlen, nämlich $y = 4$. Diese Eigenschaft ist in Betrachtung der Natur der Zahlen von der größten Wichtigkeit, und verdient deswegen wohl beachtet zu werden.

36. Wir wollen nun auch eine Gleichung von dieser Art betrachten: $xy + x^2 = 2x + 3y + 29$. Hieraus findet man nun $y = \frac{2x - x^2 + 29}{x - 3}$ oder $y = -x - 1 + \frac{26}{x - 3}$; also muß $x - 3$ ein Theiler der Zahl 26 sein, und alsdann wird der Quotient $= y + x + 1$. Da nun von 26 die Theiler 1, 2, 13, 26 sind, so erhalten wir diese Auflösungen:

I. $x - 3 = 1$ oder $x = 4$, so wird $y + x + 1 = y + 5 = 26$; und $y = 21$.

II. $x - 3 = 2$ oder $x = 5$, also $y + x + 1 = y + 6 = 13$; und $y = 7$.

III. $x - 3 = 13$ oder $x = 16$, so wird $y + x + 1 = y + 17 = 2$; und $y = -15$.

Dieser letzte Werth fällt fort, weil er negativ ist, und deswegen kann auch der letzte Fall $x - 3 = 26$ nicht gerechnet werden.

37. Mehr Formeln von dieser Art, in denen nur die erste Potenz von y, noch höhere aber von x vorkommen, hier zu berechnen, ist nicht nöthig, weil solche Fälle nur

selten vorkommen, und alsdann auch in der hier erklärten Art aufgelöst werden können. Wenn aber auch y die zweite oder eine noch höhere Potenz erreicht, und man den Werth davon nach den gegebenen Regeln bestimmen will, so gelangt man zu Wurzelzeichen, hinter welchen x in der zweiten oder einer noch höheren Potenz befindlich ist, und alsdann kommt es darauf an, solche Werthe für x ausfindig zu machen, daß die Irrationalität, oder die Wurzelzeichen wegfallen.

Und gerade darin besteht die größte Kunst der unbestimmten Analytik, darzulegen, wie dergleichen Irrationalformeln rational gemacht werden können. Die Anleitung dazu wollen wir in den folgenden Kapiteln geben.

Kapitel 4.

Von der Art, irrationale Formeln $\sqrt{(a + bx + cx^2)}$ rational zu machen.

38. Hier ist also die Frage, was für Werthe für x angenommen werden sollen, damit die Formel $a + bx + cx^2$ ein wirkliches Quadrat werde, und also die Quadratwurzel daraus rational angegeben werden könne. Es bedeuten aber die Buchstaben a, b und c gegebene Zahlen, und auf der Beschaffenheit derselben beruht hauptsächlich die Bestimmung der unbekannten Zahl x. Dabei ist von vornherein zu bemerken, daß in vielen Fällen die Auflösung unmöglich sein wird. Wenn aber dieselbe möglich ist, möge man sich mindestens anfangs in Bestimmung des Buchstabens x blos auf Rationalwerthe beschränken, und nicht fordern, daß dieselben sogar ganze Zahlen sein sollen. Zur Erfüllung letzterer Bedingung bedarf es besonderer Untersuchung.

39. Wir nehmen hier an, daß die Formel nur bis zur zweiten Potenz von x aufsteige, indem höhere Potenzen besondere Methoden erfordern, womit wir uns später beschäftigen wollen.

Sollte nicht einmal die zweite Potenz vorkommen, und

$c = 0$ sein, so hätte die Lösung gar keine Schwierigkeit. Denn wenn die Formel $\sqrt{(a + bx)}$ gegeben wäre, und man x so bestimmen sollte, daß $a + bx$ ein Quadrat würde, so brauchte man nur $a + bx = y^2$ zu setzen, woraus man sogleich erhielte $x = \frac{y^2 - a}{b}$; und nun könnte man für y jede beliebige Zahl annehmen, und aus jeder würde man einen solchen Werth für x finden, daß $a + bx$ ein Quadrat und folglich $\sqrt{(a + bx)}$ rational herauskäme.

40. Wir wollen daher mit dieser Formel anfangen: $\sqrt{(1 + x^2)}$, wo solche Werthe für x gefunden werden sollen, daß, wenn zu ihrem Quadrat x^2 noch 1 addirt wird, die Summe wiederum ein Quadrat werde, was offenbar in ganzen Zahlen nicht geschehen kann, indem keine ganze Quadratzahl nur um 1 größer ist, als die vorhergehende. Daher muß man sich nothwendig mit gebrochenen Zahlen für x begnügen.

41. Weil $1 + x^2$ ein Quadrat sein soll, und man $1 + x^2 = y^2$ setzen müßte, so würde $x^2 = y^2 - 1$ und $x = \sqrt{(y^2 - 1)}$. Um also x zu finden, müßte man solche Zahlen für y suchen, daß ihre um 1 verminderten Quadrate wiederum Quadrate würden. Diese Lösung ist eben so schwer als die vorige, und also würde hiedurch nichts gewonnen.

Daß es aber wirklich solche Brüche giebt, welche für x gesetzt, $1 + x^2$ zum Quadrat machen, kann man aus folgenden Fällen ersehen:

I. Wenn $x = \frac{3}{4}$, so wird $1 + x^2 = \frac{25}{16}$, folglich $\sqrt{(1 + x^2)} = \frac{5}{4}$.

II. Dasselbe geschieht, wenn $x = \frac{4}{3}$, da $\sqrt{(1 + x^2)} = \frac{5}{3}$ herauskommt.

III. Ferner wenn man $x = \frac{5}{12}$ setzt, so erhält man $1 + x^2 = \frac{169}{144}$, wovon die Quadratwurzel $\frac{13}{12}$ ist.

Wie nun dergleichen Zahlen und sogar alle möglichen gefunden werden können, soll hier gezeigt werden.

42. Hiefür giebt es zwei Methoden. Nach der ersten

setze man $\sqrt{(1 + x^2)} = x + p$, so wird $1 + x^2 = x^2 + 2px + p^2$, wo sich das Quadrat x^2 aufhebt und folglich x ohne ein Wurzelzeichen bestimmt werden kann. Denn in der gefundenen Gleichung subtrahirt man beiderseits x^2, so wird $2px + p^2 = 1$. Hieraus wird $x = \frac{1 - p^2}{2p}$ gefunden und man kann für p jede Zahl und auch sogar Brüche setzen.

Man setze daher $p = \frac{m}{n}$, so wird $x = \frac{1 - \frac{m^2}{n^2}}{\frac{2m}{n}}$. Diesen Bruch multiplicire man oben und unten mit n^2, so bekommt man $x = \frac{n^2 - m^2}{2mn}$.

43. Damit also $1 + x^2$ ein Quadrat werde, kann man für m und n nach Belieben alle möglichen ganzen Zahlen annehmen, und also daraus unendlich viele Werthe für x finden.

Setzt man auch überhaupt $x = \frac{n^2 - m^2}{2mn}$, so wird $1 + x^2 = 1 + \frac{n^4 - 2n^2m^2 + m^4}{4m^2n^2}$ oder $1 + x^2 = \frac{n^4 + 2m^2n^2 + m^4}{4m^2n^2}$, welcher Bruch wirklich ein Quadrat ist und man findet daraus $\sqrt{(1 + x^2)} = \frac{n^2 + m^2}{2mn}$.

Hieraus können nun folgende kleinere Werthe für x angegeben werden:

wenn $n =$	2,	3,	3,	4,	4,	5,	5,	5,	5,
und $m =$	1,	1,	2,	1,	3,	1,	2,	3,	4,
so wird $x =$	$\frac{3}{4}$,	$\frac{4}{3}$,	$\frac{5}{12}$,	$\frac{15}{8}$,	$\frac{7}{24}$,	$\frac{12}{5}$,	$\frac{21}{20}$,	$\frac{8}{15}$,	$\frac{9}{40}$.

44. Hieraus folgt auf allgemeine Art, daß $1 + \frac{(n^2 - m^2)^2}{(2mn)^2} = \frac{(n^2 + m^2)^2}{(2mn)^2}$. Nun multiplicire man die Gleichung mit $(2mn)^2$, so wird $(2mn)^2 + (n^2 - m^2)^2 = (n^2 + m^2)^2$; wir haben also auf allgemeine Art zwei Quadrate, deren Summe wieder ein Quadrat ist. Hiedurch wird nun folgende Aufgabe gelöst:

Zwei Quadratzahlen zu finden, deren Summe wieder eine Quadratzahl sein soll.

Also soll z. B. $p^2 + q^2 = r^2$ sein; zu diesem Behufe braucht man nur $p = 2mn$ und $q = n^2 - m^2$ zu setzen, dann wird $r = n^2 + m^2$. Da ferner $(n^2 + m^2)^2 - (2nm)^2 = (n^2 - m^2)^2$, so können wir auch folgende Aufgabe auflösen:

Zwei Quadratzahlen zu finden, deren Differenz wieder eine Quadratzahl sei, also daß $p^2 - q^2 = r^2$. Denn man braucht nur $p = n^2 + m^2$ und $q = 2mn$ zu setzen, so wird $r = n^2 - m^2$; oder man kann auch setzen $p = n^2 + m^2$ und $q = n^2 - m^2$, so wird alsdann $r = 2mn$.

45. Es giebt aber noch eine Methode, um die Formel $1 + x^2$ zu einem Quadrat zu machen.

Man setze $\sqrt{(1 + x^2)} = 1 + \frac{mx}{n}$; daher bekommt man $1 + x^2 = 1 + \frac{2mx}{n} + \frac{m^2x^2}{n^2}$; subtrahirt man hier beiderseits 1, so wird $x^2 = \frac{2mx}{n} + \frac{m^2x^2}{n^2}$, welche Gleichung sich durch x dividiren läßt, daher ist $x = \frac{2m}{n} + \frac{m^2x}{n^2}$, oder mit n^2 multiplicirt $n^2x = 2mn + m^2x$, woraus gefunden wird $x = \frac{2mn}{n^2 - m^2}$; denn setzt man diesen Werth für x, so wird $1 + x^2 = 1 + \frac{4m^2n^2}{n^4 - 2m^2n^2 + m^4}$ oder $= \frac{n^4 + 2m^2n^2 + m^4}{n^4 - 2m^2n^2 + m^4}$, welcher Bruch das Quadrat von $\frac{n^2 + m^2}{n^2 - m^2}$ ist. Da man nun also die Gleichung bekommt $1 + \frac{(2mn)^2}{(n^2 - m^2)^2} = \frac{(n^2 + m^2)^2}{(n^2 - m^2)^2}$, so folgt daraus wie vorher, $(n^2 - m^2)^2 + (2mn)^2 = (n^2 + m^2)^2$, welches die angegebenen zwei Quadrate sind, deren Summe wieder ein Quadrat macht.

46. Dieser Fall, welchen wir hier ausführlich behandelt haben, giebt uns nun zwei Methoden an die Hand, um die allgemeine Formel $a + bx + cx^2$ zu einem Quadrat zu machen. Die erste giebt die Lösung für alle Fälle, wenn c

ein Quadrat ist; die andere aber für alle Fälle, wenn a ein Quadrat ist. Diese beiden Fälle wollen wir hier erörtern.

I. Es sei also erstens c eine Quadratzahl oder die gegebene Formel sei $a + bx + f^2x^2$, welche ein Quadrat werden soll. Zu diesem Behufe setze man $\sqrt{(a + bx + f^2x^2)} = fx + \frac{m}{n}$, so wird $a + bx + f^2x^2 = f^2x^2 + \frac{2mfx}{n} + \frac{m^2}{n^2}$, wo sich die x^2 auf beiden Seiten heben, so daß $a + bx = \frac{2mfx}{n} + \frac{m^2}{n^2}$, welche Gleichung mit n^2 multiplicirt $n^2a + n^2bx = 2mnfx + m^2$ giebt; woraus gefunden wird $x = \frac{m^2 - n^2a}{n^2b - 2mnf}$; wird nun dieser Werth für x geschrieben, so wird $\sqrt{(a + bx + f^2x^2)} = \frac{m^2f - n^2af}{n^2b - 2mnf} + \frac{m}{n} = \frac{mnb - m^2f - n^2af}{n^2b - 2mnf}$.

47. Da für x ein Bruch gefunden worden, so setze man $x = \frac{p}{q}$, also daß $p = m^2 - n^2a$, und $q = n^2b - 2mnf$, und alsdann wird die Formel $a + \frac{bp}{q} + \frac{f^2p^2}{q^2}$ ein Quadrat; folglich bleibt dieselbe ein Quadrat, wenn sie mit dem Quadrat q^2 multiplicirt wird; daher auch die Formel $aq^2 + bpq + f^2p^2$ ein Quadrat wird, wenn man $p = m^2 - n^2a$ und $q = n^2b - 2mnf$ setzt, woraus unendlich viele Auflösungen in ganzen Zahlen gefunden werden können, weil man die Buchstaben m und n nach Belieben annehmen kann.

48. II. Der zweite Fall findet statt, wenn der Buchstabe a ein Quadrat ist. Es sei demnach die Formel $f^2 + bx + cx^2$ gegeben, welche zu einem Quadrate gemacht werden soll. Zu diesem Behufe setze man $\sqrt{(f^2 + bx + cx^2)} = f + \frac{mx}{n}$, so wird $f^2 + bx + cx^2 = f^2 + \frac{2mfx}{n} + \frac{m^2x^2}{n^2}$, wo sich die f^2 aufheben und die übrigen Glieder sich alle durch x theilen lassen, also daß $b + cx = \frac{2mf}{n} + \frac{m^2x}{n^2}$ oder $n^2b + n^2cx = 2mnf + m^2x$, oder $n^2cx -$

$m^2x = 2mnf - n^2b$, und folglich $x = \frac{2mnf - n^2b}{n^2c - m^2}$. Setzt man nun diesen Werth für x, so wird $\sqrt{(f^2 + bx + cx^2)} = f + \frac{2m^2f - mnb}{n^2c - m^2} = \frac{n^2cf + m^2f - mnb}{n^2c - m^2}$; setzt man hier $x = \frac{p}{q}$, so kann wie vorher folgende Formel zu einem Quadrate gemacht werden: $f^2q^2 + bpq + cp^2$, welches geschieht, wenn man $p = 2mnf - n^2b$ und $q = n^2c - m^2$ setzt.

49. Hier ist besonders der Fall merkwürdig, wenn $a = 0$, oder wenn die Formel $bx + cx^2$ zu einem Quadrat gemacht werden soll. Man braucht dann nur $\sqrt{(bx + cx^2)} = \frac{mx}{n}$ zu setzen, dann wird $bx + cx^2 = \frac{m^2x^2}{n^2}$, wo, durch x dividirt und mit n^2 multiplicirt, $bn^2 + cn^2x = m^2x$ herauskommt, folglich $x = \frac{n^2b}{m^2 - cn^2}$. Man suche z. B. alle dreieckigen Zahlen, welche zugleich Quadratzahlen sind, so muß $\frac{x^2 + x}{2}$, und also auch $2x^2 + 2x$ ein Quadrat sein. Dasselbe sei nun $\frac{m^2x^2}{n^2}$, so wird $2n^2x + 2n^2 = m^2x$ und $x = \frac{2n^2}{m^2 - 2n^2}$; wo man für m und n alle möglichen Zahlen annehmen kann, alsdann aber wird meistens für x ein Bruch gefunden; doch können auch ganze Zahlen herauskommen; nämlich wenn man z. B. $m = 3$ und $n = 2$ setzt, so bekommt man $x = 8$, wovon das Dreieck 36 ist, welches auch ein Quadrat ist.

Man kann auch $m = 7$ und $n = 5$ setzen, so wird $x = -50$, wovon das Dreieck 1225, welches zugleich das Dreieck von $+ 49$ und auch das Quadrat von 35 ist; dieses wäre auch herausgekommen, wenn man $n = 7$ und $m = 10$ gesetzt hätte; denn dann wird $x = 49$.

Eben so kann man $m = 17$ und $n = 12$ setzen, dann wird $x = 288$, wovon das Dreieck $\frac{x(x + 1)}{2} = \frac{288 \,.\, 289}{2}$

$= 144 \,.\, 289$, welches eine Quadratzahl ist, deren Wurzel $= 12 \,.\, 17 = 204$.

50. Bei diesem letzten Falle ist zu erwägen, daß die Formel $bx + cx^2$ aus diesem Grunde zum Quadrat gemacht wurde, weil dieselbe einen Factor hatte, nämlich x. Dieses führt uns auf neue Fälle, in welchen auch die Formel $a + bx + cx^2$ ein Quadrat werden kann, wenn weder a noch c ein Quadrat ist.

Diese Fälle treten ein, wenn sich $a + bx + cx^2$ in zwei Factoren theilen läßt, welches geschieht, wenn $b^2 - 4ac$ ein Quadrat ist. Um dieses zu zeigen, sei bemerkt, daß die Factoren immer von den Wurzeln einer Gleichung abhängen. Man setze also $a + bx + cx^2 = 0$, so wird $cx^2 = -bx - a$ und $x^2 = -\frac{bx}{c} - \frac{a}{c}$, woraus gefunden wird $x = -\frac{b}{2c} \pm \sqrt{\left(\frac{b^2}{4c^2} - \frac{a}{c}\right)}$, oder $x = -\frac{b}{2c} \pm \frac{\sqrt{(b^2 - 4ac)}}{2c}$, woraus erhellt, daß, wenn $b^2 - 4ac$ ein Quadrat ist, diese Wurzeln rational angegeben werden können.

Es sei demnach $b^2 - 4ac = d^2$, so sind die Wurzeln $\frac{-b \pm d}{2c}$, oder es ist $x = \frac{-b \pm d}{2c}$, also werden von der Formel $a + bx + cx^2$ die Divisoren $x + \frac{b - d}{2c}$ und $x + \frac{b + d}{2c}$ sein, welche, mit einander multiplicirt, dieselbe Formel nur durch c dividirt hervorbringen; man findet nämlich $x^2 + \frac{bx}{c} + \frac{b^2}{4c^2} - \frac{d^2}{4c^2}$; da nun $d^2 = b^2 - 4ac$, so hat man $x^2 + \frac{bx}{c} + \frac{b^2}{4c^2} - \frac{b^2}{4c^2} + \frac{4ac}{4c^2} = x^2 + \frac{bx}{c} + \frac{a}{c}$, welche Formel mit c multiplicirt, $cx^2 + bx + a$ giebt. Man braucht also nur den einen Factor mit c zu multipliciren, dann wird unsere Formel diesem Producte gleich sein:

$$\left(cx + \frac{b}{2} - \frac{d}{2}\right) \left(x + \frac{b}{2c} + \frac{d}{2c}\right)$$

und man sieht, daß diese Auflösung immer stattfindet, so oft $b^2 - 4ac$ ein Quadrat ist.

51. Hieraus geht der dritte Fall hervor, in welchem unsere Formel $a + bx + cx^2$ zu einem Quadrate gemacht werden kann. Diesen wollen wir also zu den obigen beiden hinzufügen.

III. Dieser Fall tritt nun ein, wenn unsere Formel durch ein solches Product dargestellt werden kann: $(f + gx) \cdot (h + kx)$. Um dieses zu einem Quadrat zu machen, setze man die Wurzel davon: $\sqrt{(f + gx) \cdot (h + kx)} = \frac{m \cdot (f + gx)}{n}$, so bekommt man $(f + gx)(h + kx) = \frac{m^2 \cdot (f + gx)^2}{n^2}$, welche Gleichung durch $f + gx$ dividirt $h + kx = \frac{m^2 \cdot (f + gx)}{n^2}$ giebt, das ist $hn^2 + kn^2x = fm^2 + gm^2x$, woraus gefunden wird $x = \frac{fm^2 - hn^2}{kn^2 - gm^2}$.

52. Zur Erläuterung mögen folgende Aufgaben dienen:

I. Aufgabe. Man suche die Zahlen x, die so beschaffen sind, daß, wenn man von ihrem doppelten Quadrate 2 subtrahirt, der Rest wieder ein Quadrat sei.

Da nun $2x^2 - 2$ ein Quadrat sein muß, so ist zu erwägen, daß sich diese Formel durch folgende Factoren darstellen läßt $2 \cdot (x + 1)(x - 1)$. Man setze also die Wurzel davon $\frac{m(x + 1)}{n}$, so wird $2 \cdot (x + 1)(x - 1) = \frac{m^2(x + 1)^2}{n^2}$; man dividire durch $x + 1$ und multiplicire mit n^2, so bekommt man $2n^2x - 2n^2 = m^2x + m^2$ und daher $x = \frac{m^2 + 2n^2}{2n^2 - m^2}$. Nimmt man hier $m = 1$ und $n = 1$, so wird $x = 3$, und $2x^2 - 2 = 16 = 4^2$.

Nimmt man $m = 3$ und $n = 2$, so wird $x = -17$; da aber nur das Quadrat von x vorkommt, so ist es gleichgültig, ob man $x = -17$ oder $x = +17$ nimmt; aus beiden wird $2x^2 - 2 = 576 = 24^2$.

53. II. Aufgabe. Es sei die Formel $6 + 13x + 6x^2$

gegeben, welche zu einem Quadrat gemacht werden soll. Hier ist nun $a = 6$, $b = 13$ und $c = 6$, wo also weder a noch c ein Quadrat ist. Man sehe also, ob $b^2 - 4ac$ ein Quadrat ergiebt; da nun 25 herauskommt, so weiß man, daß die Formel durch zwei Factoren dargestellt werden kann, welche sind: $(2 + 3x) \cdot (3 + 2x)$; davon sei nun die Wurzel $\frac{m(2 + 3x)}{n}$, so bekommt man $(2 + 3x) \cdot (3 + 2x) = \frac{m^2(2 + 3x)^2}{n^2}$, daraus wird $3n^2 + 2n^2x = 2m^2 + 3m^2x$ und daher wird $x = \frac{2m^2 - 3n^2}{2n^2 - 3m^2} = \frac{3n^2 - 2m^2}{3m^2 - 2n^2}$. Damit nun der Zähler positiv werde, muß $3n^2$ größer sein als $2m^2$, und also $2m^2$ kleiner als $3n^2$; folglich muß $\frac{m^2}{n^2}$ kleiner sein als $\frac{3}{2}$, damit der Zähler positiv werde. Damit aber auch der Nenner positiv werde, muß $3m^2$ größer als $2n^2$ und also $\frac{m^2}{n^2}$ größer als $\frac{2}{3}$ sein. Um daher für x positive Zahlen zu finden, müssen für m und n solche Zahlen angenommen werden, daß $\frac{m^2}{n^2}$ kleiner als $\frac{3}{2}$ und doch größer als $\frac{2}{3}$ ist.

Setzt man nun $m = 6$ und $n = 5$, so wird $\frac{m^2}{n^2} = \frac{36}{25}$, welches kleiner ist als $\frac{3}{2}$ und offenbar größer als $\frac{2}{3}$; daher bekommt man $x = \frac{3}{58}$.

54. IV. Dieser dritte Fall führt uns noch zu einem vierten, welcher eintritt, wenn die Formel $a + bx + cx^2$ derartig in zwei Theile getheilt werden kann, daß der erste ein Quadrat wird, der andere aber sich in zwei Factoren auflösen läßt, so daß eine solche Form herauskommt: $p^2 + qr$, wo die Buchstaben p, q und r Formeln von dieser Art $f + gx$ bedeuten. Denn dann darf man nur $\sqrt{(p^2 + qr)} = p + \frac{mq}{n}$ setzen, so wird $p^2 + qr = p^2 + \frac{2mpq}{n} + \frac{m^2q^2}{n^2}$, wo sich die p^2 aufheben und die übrigen Glieder

durch q theilen lassen, so daß $r = \frac{2mp}{n} + \frac{m^2q}{n^2}$ oder $n^2r = 2mnp + m^2q$, woraus sich x leicht bestimmen läßt. Und dieses ist der vierte Fall, in welchem unsere Formel zu einem Quadrate gemacht werden kann, welchen wir nun durch einige Beispiele erläutern wollen.

55. III. Aufgabe. Man suche solche Zahlen x, daß ihr Quadrat doppelt genommen um 1 größer werde als ein anderes Quadrat, oder daß, wenn man von ihrem Doppelquadrat 1 subtrahirt, ein Quadrat übrig bleibe, wie es bei der Zahl 5 geschieht, deren Quadrat 25 doppelt genommen 50 ist, wovon 1 subtrahirt das Quadrat 49 übrig läßt.

Also muß $2x^2 - 1$ ein Quadrat sein, wo nach unserer Formel $a = -1$, $b = 0$, und $c = 2$, und also weder a noch c ein Quadrat ist; auch läßt sich dieselbe nicht in zwei Factoren auflösen, weil $b^2 - 4ac = 8$ kein Quadrat ist, und daher keiner von den drei ersten Fällen eintritt.

Nach dem vierten Falle aber kann diese Formel also dargestellt werden: $x^2 + (x^2 - 1) = x^2 + (x - 1)(x + 1)$. Hiervon werde nun die Wurzel $x + \frac{m(x + 1)}{n}$ gesetzt, daher wird $x^2 + (x + 1) \cdot (x - 1) = x^2 + \frac{2mx(x + 1)}{n} + \frac{m^2(x + 1)^2}{n^2}$, wo sich die x^2 aufheben und die übrigen Glieder durch $x + 1$ theilen lassen, da dann $n^2x - n^2 = 2mnx + m^2x + m^2$ und $x = \frac{m^2 + n^2}{n^2 - 2mn - m^2}$ herauskommt; und weil in unserer Formel $2x^2 - 1$ nur das Quadrat x^2 vorkommt, so ist es gleichgültig, ob die Werthe von x positiv oder negativ werden. Man kann auch sogleich $-m$ anstatt $+m$ schreiben, damit man bekomme $x = \frac{m^2 + n^2}{n^2 + 2mn - m^2}$ Nimmt man hier $m = 1$ und $n = 1$, so hat man $x = 1$ und $2x^2 - 1 = 1$. Es sei ferner $m = 1$ und $n = 2$, so wird $x = \frac{5}{7}$ und $2x^2 - 1 = \frac{1}{49}$. Setzt man aber

$m = 1$ und $n = -2$, so wird $x = -5$, oder $x = +5$ und $2x^2 - 1 = 49$.

56. IV. Aufgabe. Man suche solche Zahlen, deren Quadrat doppelt genommen, wenn dazu 2 addirt wird, wieder ein Quadrat giebt, wie z. B. die Zahl 7, deren doppeltes Quadrat 98, um 2 vermehrt, das Quadrat 100 giebt.

Es muß also diese Formel $2x^2 + 2$ ein Quadrat sein, wo $a = 2$, $b = 0$ und $c = 2$, also weder a noch c ein Quadrat ist, auch ist $b^2 - 4ac$ oder -16 kein Quadrat, und es kann also die dritte Regel hier nicht angewandt werden.

Nach der vierten Regel aber läßt sich unsere Formel also darstellen.

Man setze den ersten Theil $= 4$, so wird der zweite sein: $2x^2 - 2 = 2(x + 1) \cdot (x - 1)$, und daher unsere Formel $4 + 2(x + 1) \cdot (x - 1)$. Davon sei die Wurzel $2 + \frac{m(x + 1)}{n}$, woraus diese Gleichung entsteht: $4 + 2(x + 1) \cdot (x - 1) = 4 + \frac{4m(x + 1)}{n} + \frac{m^2(x + 1)^2}{n^2}$, wo sich die 4 aufheben, die übrigen Glieder aber durch $x + 1$ theilen lassen, also daß $2n^2x - 2n^2 = 4mn + m^2x + m^2$ und daher $x = \frac{4mn + m^2 + 2n^2}{2n^2 - m^2}$. Setzt man $m = 1$ und $n = 1$, so wird $x = 7$, und $2x^2 + 2 = 100$.

Nimmt man $m = 0$ und $n = 1$, so wird $x = 1$ und $2x^2 + 2 = 4$.

57. Oft geschieht es auch, daß wenn weder die erste, noch die zweite, noch die dritte Regel sich anwenden läßt, man nicht finden kann, auf welche Art die Formel in zwei solche Theile zergliedert werden könne, wie sie die vierte Regel erfordert. Wenn z. B. diese Formel vorkäme: $7 + 15x + 13x^2$, so ist zwar eine solche Zergliederung möglich, fällt aber nicht so leicht in die Augen. Denn der

erste Theil ist $(1-x)^2$ oder $1-2x+x^2$, und daher wird der andere sein $6+17x+12x^2$, welcher deswegen Factoren hat, weil $17^2-4.6.12=1$ und also ein Quadrat ist. Die zwei Factoren davon sind auch wirklich $(2+3x).(3+4x)$; so daß diese Formel $(1-x)^2+(2+3x)(3+4x)$ sein wird, welche jetzt nach der vierten Regel aufgelöst werden kann.

Da aber diese Zergliederung nicht leicht gefunden wird, wollen wir einen allgemeinen Weg angeben, um zuvörderst zu erkennen, ob es möglich sei eine solche Formel aufzulösen; weil es unendlich viel dergleichen giebt, deren Auflösungen schlechterdings unmöglich sind, wie z. B. $3x^2+2$, welche nimmermehr zu einem Quadrat gemacht werden kann.

Zeigt sich aber eine Formel in einem einzigen Falle als auflösbar, so ist es leicht, alle Auflösungen derselben zu finden, wie wir hier erörtern wollen.

58. Der ganze Vortheil, welcher uns in solchen Fällen zu statten kommen kann, besteht darin, daß man suche, ob man keinen Fall finden, oder gleichsam errathen kann, in welchem eine solche Formel wie $a+bx+cx^2$ ein Quadrat wird, indem man für x einige kleinere Zahlen nach und nach setzt, um zu sehen, ob in keinem Falle ein Quadrat herauskomme.

Da x auch ein Bruch sein kann, setze man für x den Bruch $\frac{t}{u}$, woraus diese Formel entsteht $a+\frac{bt}{u}+\frac{ct^2}{u^2}$, welche, wenn sie ein Quadrat ist, auch mit dem Quadrat u^2 multiplicirt, ein Quadrat bleibt. Man hat also nur nöthig zu probiren, ob man für t und u solche Werthe in ganzen Zahlen errathen kann, daß die Formel $au^2+btu+ct^2$ ein Quadrat wird. Denn wenn man alsdann $x=\frac{t}{u}$ setzt, so wird auch diese Formel $a+bx+cx^2$ gewiß ein Quadrat sein.

Kann man aber aller Mühe ungeachtet keinen solchen Fall finden, so hat man Grund zu vermuthen, daß es ganz und gar unmöglich sei, die Formel in ein Quadrat zu verwandeln.

59. Hat man aber einen Fall errathen, in welchem eine solche Formel ein Quadrat wird, so ist es ganz leicht, alle möglichen Fälle zu finden, in welchen dieselbe ebenfalls ein Quadrat wird, und die Anzahl derselben ist immer unendlich groß. Um dieses zu zeigen, wollen wir zuerst diese Formel betrachten $2+7x^2$, wo $a=2$, $b=0$ und $c=7$. Dieselbe wird nun offenbar ein Quadrat, wenn $x=1$; daher setze man $x=1+y$, so wird $x^2=1+2y+y^2$, und unsere Formel wird sein $9+14y+7y^2$, in welcher das erste Glied ein Quadrat ist. Setzen wir also nach der zweiten Regel die Quadratwurzel davon $=3+\frac{my}{n}$, so bekommen wir die Gleichung $9+14y+7y^2=9+\frac{6my}{n}+\frac{m^2y^2}{n^2}$, wo sich die 9 aufheben, die übrigen Glieder aber alle durch y theilen lassen; wir bekommen $14n^2+7n^2y=6mn+m^2y$ und daher $y=\frac{6mn-14n^2}{7n^2-m^2}$; daraus finden wir $x=\frac{6mn-7n^2-m^2}{7n^2-m^2}$, wo man für m und n alle beliebigen Zahlen annehmen kann.

Setzt man nun $m=1$ und $n=1$, so wird $x=-\frac{1}{3}$, oder auch weil nur x^2 vorkommt, $x=+\frac{1}{3}$, daher wird $2+7x^2=\frac{25}{9}$.

Man setze ferner $m=3$ und $n=1$, so wird $x=-1$ oder $x=+1$.

Setzt man aber $m=3$ und $n=-1$, so wird $x=17$; daraus wird $2+7x^2=2025$, welches das Quadrat von 45 ist.

Setzt man $m=8$ und $n=3$, so wird $x=-17$, wie zuvor.

Setzen wir aber $m=8$ und $n=-3$, so wird $x=271$, daraus wird $2+7x^2=514089=717^2$.

60. Wir wollen ferner die Formel $5x^2+3x+7$, betrachten, welche ein Quadrat wird, wenn $x=-1$. Deswegen setze man $x=y-1$, so wird unsere Formel in diese verwandelt:

$$\begin{array}{r} 5y^2-10y+5 \\ +\ 3y-3 \\ +7 \\ \hline 5y^2-\ 7y+9 \end{array}$$

Davon setze man die Quadratwurzel $=3-\frac{my}{n}$, so wird $5y^2-7y+9=9-\frac{6my}{n}+\frac{m^2y^2}{n^2}$; daher wir bekommen $5n^2y-7n^2=-6mn+m^2y$, und $y=\frac{7n^2-6mn}{5n^2-m^2}$, folglich $x=\frac{2n^2-6mn+m^2}{5n^2-m^2}$.

Es sei $m=2$ und $n=1$, so wird $x=-6$ und also $5x^2+3x+7=169=13^2$.

Setzt man aber $m=-2$ und $n=1$, so wird $x=18$ und $5x^2+3x+7=1681=41^2$.

61. Wir wollen nun auch diese Formel betrachten: $7x^2+15x+13$, und sogleich setzen $x=\frac{t}{u}$, so daß diese Formel $7t^2+15tu+13u^2$ ein Quadrat sein soll. Nun probire man für t und u einige kleinere Zahlen, wie folgt:

Es sei $t=1$ und $u=1$,	so wird unsere Formel	$=35$
$t=2$ und $u=1$		$=71$
$t=2$ und $u=-1$		$=11$
$t=3$ und $u=1$		$=121$

Da nun 121 ein Quadrat ist, und also der Werth $x=3$ Genüge leistet, so setze man $x=y+3$ und dann wird unsere Formel $7y^2+42y+63+15y+45+13$ oder $7y^2+57y+121$; davon setze man die Wurzel $=11+\frac{my}{n}$, so bekommt man $7y^2+57y+121=121$

$+\frac{22my}{n}+\frac{m^2y^2}{n^2}$, oder $7n^2y+57n^2=22mn+m^2y$, und daher $y=\frac{57n^2-22mn}{m^2-7n^2}$ und $x=\frac{36n^2-22mn+3m^2}{m^2-7n^2}$.

Man setze z. B. $m=3$ und $n=1$, so wird $x=-\frac{3}{2}$ und unsere Formel $7x^2+15x+13=\frac{25}{4}=(\frac{5}{2})^2$. Es sei ferner $m=1$ und $n=1$, so wird $x=-\frac{17}{6}$. Nimmt man $m=3$ und $n=-1$, so wird $x=\frac{129}{2}$ und unsere Formel $7x^2+15x+13=\frac{120409}{4}=(\frac{347}{2})^2$.

62. Bisweilen aber ist alle Mühe umsonst, einen Fall zu errathen, in welchem die gegebene Formel ein Quadrat wird. So wird z. B. $3x^2+2$, oder wenn man für x schreibt $\frac{t}{u}$, $3t^2+2u^2$ niemals ein Quadrat, man mag auch für t und u Zahlen annehmen, welche man wolle. Dergleichen Formeln, welche auf keinerlei Weise zu einem Quadrate gemacht werden können, giebt es unendlich viele, und deswegen wird es der Mühe werth sein, einige Kennzeichen anzugeben, woran die Unmöglichkeit erkannt werden kann, damit man der Mühe überhoben ist, durch Probiren solche Fälle zu finden, in denen ein Quadrat herauskommt. Hiezu sei das folgende Kapitel bestimmt.

Kapitel 5.

Von den Fällen, in denen die Formel $a+bx+cx^2$ niemals ein Quadrat werden kann.

63. Da unsere allgemeine Formel aus drei Gliedern besteht, so ist zu bemerken, daß dieselbe immer in eine andere verwandelt werden kann, in welcher das mittlere Glied fehlt. Dies geschieht, wenn man setzt $x=\frac{y-b}{2c}$. Dadurch bekommt unsere Formel diese Gestalt $a+\frac{by-b^2}{2c}+\frac{y^2-2by+b^2}{4c}$, oder $\frac{4ac-b^2+y^2}{4c}$. Soll diese Formel

ein Quadrat werden, so setze man sie $= \frac{z^2}{4}$. Dann wird $4ac - b^2 + y^2 = cz^2$, folglich $y^2 = cz^2 + b^2 - 4ac$. Wenn also unsere Formel ein Quadrat sein soll, so wird auch diese $cz^2 + b^2 - 4ac$ ein Quadrat und umgekehrt, wenn diese ein Quadrat wird, so wird auch die obige ein Quadrat; folglich wenn man für $b^2 - 4ac$ schreibt t, so kommt es darauf an, ob eine solche Formel $cz^2 + t$ ein Quadrat werden kann oder nicht. Und da diese Formel nur aus zwei Gliedern besteht, so ist es unstreitig weit leichter, die Möglichkeit oder Unmöglichkeit derselben zu beurtheilen, welches aus der Beschaffenheit der beiden gegebenen Zahlen c und t geschehen muß.

64. Wenn $t = 0$ ist, so ist offenbar, daß die Formel cz^2 nur alsdann ein Quadrat wird, wenn die Zahl c ein Quadrat ist. Denn da ein Quadrat durch ein anderes dividirt wieder ein Quadrat wird, so kann cz^2 kein Quadrat sein, wofern nicht $\frac{cz^2}{z^2}$, das ist c, ein Quadrat ist. Also wenn die Zahl c kein Quadrat ist, so kann auch die Formel cz^2 auf keinerlei Weise ein Quadrat werden. Ist aber c an und für sich eine Quadratzahl, so ist auch cz^2 ein Quadrat, man mag für z annehmen, was man will.

65. Um andere Fälle beurtheilen zu können, müssen wir die Lehre von den Eigenschaften der ganzen Zahlen in Bezug auf ihre Theiler benutzen, welche im sechsten Kapitel des ersten Theiles dargelegt worden ist.

Also in Bezug auf den Theiler 3 sind die Zahlen von dreierlei Art. Die erste begreift diejenigen Zahlen in sich, welche sich durch 3 theilen lassen, und durch die Formel $3n$ dargestellt werden.

Zu der andern Art gehören diejenigen, welche durch 3 dividirt 1 übrig lassen, und in der Formel $3n + 1$ enthalten sind.

Die dritte Art aber begreift die Zahlen in sich, welche

durch 3 dividirt 2 übrig lassen, und durch die Formel $3n + 2$ dargestellt werden.

Da nun alle Zahlen in einer von den drei Formeln enthalten sind (s. 1. Theil 60), so wollen wir die Quadrate davon betrachten.

Ist die Zahl in der Formel $3n$ enthalten, so ist ihr Quadrat $9n^2$, welches sich also nicht nur durch 3, sondern sogar durch 9 theilen läßt.

Ist die Zahl in der Formel $3n + 1$ enthalten, so ist ihr Quadrat $9n^2 + 6n + 1$, welches durch 3 dividirt, $3n^2 + 2n$ giebt und 1 als Rest läßt, und also auch zur zweiten Art $3n + 1$ gehört.

Ist endlich die Zahl in der Formel $3n + 2$ enthalten, so ist ihr Quadrat $9n^2 + 12n + 4$, welches durch 3 dividirt, giebt $3n^2 + 4n + 1$, und 1 als Rest läßt, also auch zu der zweiten Art $3n + 1$ gehört; daher ist klar, daß alle Quadratzahlen in Bezug auf den Theiler 3 nur von zweierlei Art sind. Denn entweder lassen sich dieselben durch 3 theilen, und alsdann müssen sie sich auch nothwendig durch 9 theilen lassen; oder wenn sie sich nicht durch 3 theilen lassen, so bleibt stets nur 1 als Rest, niemals aber 2. Daher keine Zahl, die in der Formel $3n + 2$ enthalten ist, ein Quadrat sein kann.

66. Hieraus können wir nun leicht zeigen, daß die Formel $3x^2 + 2$ niemals ein Quadrat werden kann, man mag für x eine ganze Zahl oder einen Bruch setzen. Denn wenn x eine ganze Zahl ist, und man theilt die Formel $3x^2 + 2$ durch 3, so bleiben 2 übrig; daher diese Formel kein Quadrat sein kann. Wenn aber x ein Bruch ist, so setze man $x = \frac{t}{u}$, von welchem Bruche wir annehmen können, daß derselbe schon in seine kleinste Form gebracht worden, und also t und u keinen gemeinschaftlichen Theiler außer 1 haben. Sollte nun $\frac{3t^2}{u^2} + 2$ ein Quadrat

sein, so müßte dieselbe auch mit u^2 multiplicirt, das ist $3t^2 + 2u^2$ ein Quadrat sein, dieses aber kann ebenfalls nicht geschehen. Denn entweder läßt sich die Zahl u durch 3 theilen oder nicht. Läßt sie sich theilen, so läßt sich t nicht theilen, weil sonst t und u einen gemeinschaftlichen Theiler hätten.

Man setze daher $u = 3f$, so wird unsere Formel $3t^2 + 18f^2$, welche durch 3 getheilt, $t^2 + 6f^2$ giebt. Diese Formel läßt sich nicht weiter durch 3 theilen, wie zu einem Quadrate erfordert wird, weil sich zwar $6f^2$ theilen läßt, t^2 aber durch 3 dividirt 1 übrig läßt.

Läßt sich aber u nicht durch 3 theilen, so sehe man was übrig bleibt. Weil sich das erste Glied durch 3 theilen läßt, so kommt es mit dem Rest bloß auf das zweite Glied $2u^2$ an. Da aber u^2 durch 3 dividirt 1 als Rest hat, oder eine Zahl von der Art $3n + 1$ ist, so wird $2u^2$ eine Zahl von der Art $6n + 2$ sein, und also durch 3 dividirt 2 übrig lassen; daher unsere Formel $3t^2 + 2u^2$ durch 3 dividirt, 2 übrig läßt, und also gewiß keine Quadratzahl sein kann.

67. Ebenso kann man beweisen, daß auch diese Formel $3t^2 + 5u^2$ niemals ein Quadrat sein kann, und sogar auch keine von den folgenden: $3t^2 + 8u^2$, $3t^2 + 11u^2$, $3t^2 + 14u^2$ ꝛc. wo die Zahlen 3, 8, 11, 14 ꝛc. durch 3 dividirt 2 übrig lassen. Denn wäre u durch 3 theilbar, folglich t nicht, und man setzte $u = 3s$, so würde die Formel durch 3, nicht aber durch 9 theilbar sein. Wäre u nicht durch 3 theilbar und also u^2 eine Zahl von der Art $3n + 1$, so wäre zwar das erste Glied $3t^2$ durch 3 theilbar, das andere aber $5u^2$ von der Form $15n + 5$, oder $8u^2$ von der Form $24n + 8$, oder $11u^2$ von dieser $33n + 11$ ꝛc. würde durch 3 dividirt 2 übrig lassen, und also kein Quadrat sein können.

68. Dieses gilt also auch von dieser allgemeinen Formel $3t^2 + (3n + 2) \cdot u^2$, welche nimmermehr ein Quadrat

werden kann, und auch dann nicht, wenn für n negative Zahlen gesetzt würden. Also wenn $n = -1$, ist es unmöglich die Formel $3t^2 - u^2$ zu einem Quadrate zu machen. Denn wenn u durch 3 theilbar ist, so ist die Sache offenbar; wäre aber u nicht theilbar durch 3, so würde u^2 eine Zahl von der Art $3n + 1$, und also unsre Formel sein $3t^2 - 3n - 1$, welche durch 3 dividirt, -1 oder um 3 mehr, $+2$ übrig läßt. Man setze überhaupt $n = -m$, so wird unsere Formel $3t^2 - (3m - 2)u^2$, welche auch nimmermehr ein Quadrat werden kann.

69. Hiezu hat uns nun die Betrachtung des Theilers 3 geführt; wir wollen daher auch 4 als einen Theiler betrachten, da denn alle Zahlen in einer von diesen vier Formeln:

I. $4n$, II. $4n + 1$, III. $4n + 2$, IV. $4n + 3$,

enthalten sind. Von den Zahlen der ersten Art ist das Quadrat $16n^2$ und läßt sich also durch 16 theilen. Ist es eine Zahl von der zweiten Art $4n + 1$, so ist ihr Quadrat $16n^2 + 8n + 1$, welches durch 8 dividirt 1 übrig läßt und gehört also zu der Formel $8n + 1$.

Ist es eine Zahl von der dritten Art $4n + 2$, so ist ihr Quadrat $16n^2 + 16n + 4$, welche durch 16 dividirt 4 übrig läßt, und also in der Form $16n + 4$ enthalten ist. Ist es endlich eine Zahl von der vierten Art $4n + 3$, so ist ihr Quadrat $16n^2 + 24n + 9$, welches durch 8 dividirt 1 übrig läßt.

70. Hieraus lernen wir erstens, daß alle geraden Quadratzahlen in der Form $16n$ oder in dieser $16n + 4$ enthalten sind; folglich können alle übrigen geraden Formeln, nämlich $16n + 2$; $16n + 6$; $16n + 8$; $16n + 10$; $16n + 12$; $16n + 14$ niemals Quadratzahlen sein.

Alsdann ersehen wir in Bezug auf die ungeraden Quadrate, daß alle in dieser einzigen Formel $8n + 1$ enthalten sind, oder durch 8 dividirt 1 als Rest lassen. Daher alle übrigen ungeraden Zahlen, welche in einer von diesen Formeln $8n + 3$; $8n + 5$; $8n + 7$, enthalten sind, niemals Quadrate werden können.

71. Aus diesem Grunde können wir auch wiederum zeigen, daß die Formel $3t^2 + 2u^2$ kein Quadrat sein kann. Denn entweder sind beide Zahlen t und u ungerade, oder die eine ist gerade und die andere ungerade, weil beide zugleich nicht gerade sein können, indem sonst 2 ihr gemeinschaftlicher Theiler sein würde. Wären beide ungerade, und folglich sowohl t^2 als u^2 in der Form $8n + 1$ enthalten, so würde das erste Glied $3t^2$, durch 8 dividirt, 3 übrig lassen, das andere Glied aber 2 übrig lassen, beide zusammen aber würden 5 übrig lassen, und also kein Quadrat sein. Wäre aber t eine gerade Zahl und u ungerade, so würde sich das erste Glied $3t^2$ durch 4 theilen lassen, das andere aber $2u^2$ würde, durch 4 dividirt, 2 übrig lassen, also beide zusammen würden 2 übrig lassen, und also kein Quadrat sein. Wäre aber endlich u gerade, nämlich $u = 2s$, aber t ungerade, und folglich $t^2 = 8n + 1$, so würde unsere Formel sein: $24n + 3 + 8s^2$, welche durch 8 dividirt 3 übrig läßt, und also kein Quadrat sein kann.

Derselbe Beweis läßt sich auch auf die Formel $3t^2 + (8n + 2)u^2$ ausdehnen; ebenso auch auf diese $(8m + 3)t^2 + 2u^2$, und auch sogar auf diese $(8m + 3)t^2 + (8n + 2)u^2$, wo für m und n alle ganze Zahlen, sowohl positive als negative genommen werden können.

72. Wir gehen in solcher Art weiter zum Theiler 5, in Bezug auf den alle Zahlen in einer von den fünf Formeln: I. $5n$, II. $5n + 1$, III. $5n + 2$, IV. $5n + 3$, V. $5n + 4$, enthalten sind. Gehört nun eine Zahl zu der ersten Art, so ist ihr Quadrat $25n^2$, welches nicht nur durch 5, sondern auch durch 25 theilbar ist.

Gehört eine Zahl zur zweiten Art, so ist ihr Quadrat $25n^2 + 10n + 1$, welches durch 5 dividirt, 1 übrig läßt, und also in der Formel $5n + 1$ enthalten ist.

Gehört eine Zahl zur dritten Art, so ist ihr Quadrat $25n^2 + 20n + 4$, welches durch 5 dividirt, 4 übrig läßt.

Gehört eine Zahl zur vierten Art, so ist ihr Quadrat $25n^2 + 30n + 9$, welches durch 5 dividirt, 4 übrig läßt.

Gehört endlich eine Zahl zur fünften Art, so ist ihr Quadrat $25n^2 + 40n + 16$, welches durch 5 dividirt, 1 übrig läßt. Wenn daher eine Quadratzahl sich nicht durch 5 theilen läßt, so ist der Rest immer entweder 1 oder 4, niemals aber 2 oder 3; daher in den Formeln $5n + 2$ und $5n + 3$ kein Quadrat enthalten sein kann.

73. Aus diesem Grunde können wir auch beweisen, daß weder die Formel $5t^2 + 2u^2$, noch diese $5t^2 + 3u^2$ ein Quadrat werden könne. Denn entweder ist u durch 5 theilbar oder nicht; im ersteren Falle würden sich die Formeln durch 5, nicht aber durch 25 theilen lassen, und also auch keine Quadrate sein können. Ist aber u nicht durch 5 theilbar, so ist u^2 entweder $5n + 1$ oder $5n + 4$. Im ersteren Falle wird die erste Formel $5t^2 + 10n + 2$, welche durch 5 getheilt, 2 übrig läßt; die zweite aber wird $5t^2 + 15n + 3$, welche durch 5 getheilt, 3 übrig läßt, und also keine ein Quadrat sein kann. Ist aber $u^2 = 5n + 4$, so wird die erste Formel $5t^2 + 10n + 8$, welche durch 5 dividirt 3 übrig läßt; die zweite aber wird $5t^2 + 15n + 12$, welche durch 5 dividirt, 2 übrig läßt, und also auch in diesem Falle kein Quadrat werden kann.

Aus demselben Grunde sieht man auch, daß weder die Formel $5t^2 + (5n + 2) u^2$, noch diese $5t^2 + (5n + 3) u^2$ ein Quadrat sein kann, weil dieselben Reste wie vorher übrig bleiben; man kann auch sogar im ersten Gliede

$5mt^2$ anstatt $5t^2$ schreiben, wenn nur m nicht durch 5 theilbar ist.

74. Wie alle geraden Quadrate in dieser Form $4n$, alle ungeraden aber in dieser Form $4n + 1$ enthalten sind, und also weder $4n + 2$, noch $4n + 3$ ein Quadrat sein kann; so folgt daraus, daß die allgemeine Formel $(4m + 3) t^2 + (4n + 3) u^2$ niemals ein Quadrat sein kann. Denn wäre t gerade, so würde sich t^2 durch 4 theilen lassen, das zweite Glied aber würde, durch 4 dividirt, 3 übrig lassen; wären aber beide Zahlen t und u ungerade, so würden die Reste von t^2 und u^2, nur 1, also von der ganzen Formel würde 2 der Rest sein. Nun aber ist keine Zahl, welche durch 4 dividirt, 2 übrig läßt, ein Quadrat. Hier ist auch zu merken, daß sowohl m als auch n negativ, und auch $= 0$ genommen werden kann; daher weder diese Formel $3t^2 + 3u^2$, noch diese $3t^2 - u^2$ ein Quadrat sein kann.

75. Wie wir in Bezug auf die bisherigen Theiler gefunden haben, daß einige Arten der Zahlen niemals Quadrate sein können, geht auch aus der Beschaffenheit aller andern Theiler hervor, daß gewisse Arten von Zahlen keine Quadrate sein können.

Es sei der Theiler 7, so sind alle Zahlen in einer der folgenden sieben Arten enthalten, deren Quadrate wir auch untersuchen wollen.

Arten der Zahlen	ihre Quadrate	gehören zu der Art
I. $7n$	$49n^2$	$7n$
II. $7n + 1$	$49n^2 + 14n + 1$	$7n + 1$
III. $7n + 2$	$49n^2 + 28n + 4$	$7n + 4$
IV. $7n + 3$	$49n^2 + 42n + 9$	$7n + 2$
V. $7n + 4$	$49n^2 + 56n + 16$	$7n + 2$
VI. $7n + 5$	$49n^2 + 70n + 25$	$7n + 4$
VII. $7n + 6$	$49n^2 + 84n + 36$	$7n + 1$

Da nun die Quadrate, die sich nicht durch 7 theilen lassen, in einer von diesen drei Arten: $7n + 1$, $7n + 2$, $7n + 4$ enthalten sein müssen, so werden die drei andern Arten von der Natur der Quadrate gänzlich ausgeschlossen. Diese Arten sind nun $7n + 3$, $7n + 5$, $7n + 6$, und der Grund davon ist offenbar, daß sich immer zwei Arten finden, deren Quadrate zu einer Gattung gehören.

76. Um dieses deutlicher zu zeigen, bemerke man, daß die letzte Art $7n + 6$ auch also $7n - 1$ ausgedrückt werden kann; eben so ist auch die Formel $7n + 5$ mit dieser $7n - 2$ identisch, und $7n + 4$ ist ebenfalls so viel als $7n - 3$. Nun aber ist offenbar, daß von diesen zwei Arten der Zahlen $7n + 1$ und $7n - 1$ die Quadrate durch 7 dividirt, denselben Rest übrig lassen, nämlich 1; eben so sind auch die Quadrate dieser beiden Arten $7n + 2$ und $7n - 2$ von einerlei Gattung.

77. Ueberhaupt also, wie auch immer der Theiler beschaffen sein mag, welchen wir mit dem Buchstaben d andeuten wollen, sind die daher entstehenden verschiedenen Arten der Zahlen folgende:

dn;
$dn + 1$, $dn + 2$, $dn + 3$ ꝛc.
$dn - 1$, $dn - 2$, $dn - 3$ ꝛc.

wo die Quadrate von $dn + 1$ und $dn - 1$ dieses gemein haben, daß sie durch d dividirt 1 übrig lassen, und also beide zu einer Art, nämlich zu $dn + 1$ gehören. Eben so verhält es sich auch mit den beiden Arten $dn + 2$ und $dn - 2$, deren Quadrate zu der Art $dn + 4$ gehören.

Und also überhaupt gilt es auch von diesen zwei Arten $dn + a$ und $dn - a$, deren Quadrate durch d dividirt einerlei übrig lassen, nämlich a^2; oder so viel als übrig bleibt, wenn man a^2 durch d theilt.

78. Auf diese Weise erhält man also eine unendliche Menge solcher Formeln $at^2 + bu^2$, welche auf keinerlei Weise Quadrate werden können. Also z. B. aus dem Theiler

7 erkennt man leicht, daß keine von den drei Formeln $7t^2 + 3u^2$, $7t^2 + 5u^2$ und $7t^2 + 6u^2$ jemals ein Quadrat werden kann, weil u durch 7 dividirt entweder 1 oder 2 oder 4 übrig läßt; ferner, weil bei der ersten entweder 3 oder 6 oder 5, bei der zweiten entweder 5 oder 3 oder 6, bei der dritten entweder 6 oder 5 oder 3 übrig bleibt, was bei keinem Quadrate geschehen kann. Wenn nun derartige Formeln vorkommen, so ist alle Mühe vergeblich, sie in Quadrate zu verwandeln; deswegen ist diese Betrachtung von großer Wichtigkeit.

Ist aber eine gegebene Formel nicht von dieser Beschaffenheit, und man kann einen einzigen Fall errathen, in welchem dieselbe ein Quadrat wird, so ist in dem vorigen Kapitel schon gezeigt worden, wie daraus unendlich viel andere Fälle gefunden werden können.

Die gegebene Formel war eigentlich $ax^2 + b$, und weil gewöhnlich für x Brüche gefunden werden, so haben wir gesetzt $x = \frac{t}{u}$, so daß diese Formel $at^2 + bu^2$ zu einem Quadrate gemacht werden soll.

Es giebt aber auch oft unendlich viel Fälle, in denen sogar x in ganzen Zahlen gegeben werden kann; wie nun diese gefunden werden, soll in dem folgenden Kapitel gezeigt werden.

Kapitel 6.

Von den Fällen in ganzen Zahlen, in denen die Formel $ax^2 + b$ ein Quadrat wird.

79. Wir haben schon früher (63) nachgewiesen, wie die Formeln $a + bx + cx^2$ verwandelt werden können, so daß das mittlere Glied wegfällt, und daher begnügen wir uns die gegenwärtige Abhandlung nur auf die Form $ax^2 + b$ einzuschränken, wobei es darauf ankommt, daß für x nur ganze Zahlen gefunden werden, aus welchen die Formel ein Quadrat wird. Vor allen Dingen aber ist es nöthig,

daß eine solche Formel an sich möglich sei; denn wäre sie unmöglich, so könnte man für x nicht einmal Brüche, geschweige denn ganze Zahlen finden.

80. Man setze also die Formel $ax^2 + b = y^2$, in der beide Buchstaben a und b ganze Zahlen sind, und x und y ebenfalls ganze Zahlen sein sollen.

Hier ist es nun unumgänglich nöthig, daß man schon einen Fall in ganzen Zahlen wisse oder errathen habe; denn sonst würde alle Mühe überflüssig sein, mehr dergleichen Fälle zu suchen, weil vielleicht die Formel selbst unmöglich sein könnte.

Wir wollen demnach annehmen, daß diese Formel ein Quadrat werde, wenn man $x = f$ setzt, und wollen das Quadrat durch g^2 andeuten, so daß $af^2 + b = g^2$, wo also f und g bekannte Zahlen sind. Es kommt daher nur darauf an, wie aus diesem Falle noch andere Fälle hergeleitet werden können. Diese Untersuchung ist um so wichtiger, je mehr Schwierigkeiten dieselbe unterworfen ist, welche wir aber durch folgende Kunstgriffe überwinden werden.

81. Da nun schon gefunden worden: $af^2 + b = g^2$, und außerdem auch $ax^2 + b = y^2$ sein soll, so subtrahire man jene Gleichung von dieser, um $ax^2 - af^2 = y^2 - g^2$ zu bekommen, welche sich also durch Factoren ausdrücken läßt: $a(x + f)(x - f) = (y + g)(y - g)$; man multiplicire beiderseits mit pq, so hat man $apq(x + f)(x - f) = pq(y + g)(y - g)$. Um nun diese Gleichung zu lösen, mache man diese Vertheilung: $ap(x + f) = q(y + g)$ und $q(x - f) = p(y - g)$, und aus diesen beiden Gleichungen suche man die beiden Buchstaben x und y zu bestimmen. Die erste durch q dividirt giebt $y + g = \frac{apx + apf}{q}$; die andere durch p dividirt, giebt $y - g = \frac{qx - qf}{p}$; diese

von jener subtrahirt giebt $2g = \frac{(ap^2 - q^2)x + (ap^2 + q^2)f}{pq}$, mit pq multiplicirt wird $2pqg = (ap^2 - q^2)x + (ap^2 + q^2)f$, und daher $x = \frac{2gpq}{ap^2 - q^2} - \frac{(ap^2 + q^2)f}{ap^2 - q^2}$, und hieraus findet man ferner $y = g + \frac{2gq^2}{ap^2 - q^2} - \frac{(ap^2 + q^2)fq}{(ap^2 - q^2)p} - \frac{qf}{p}$. Hier enthalten die zwei ersteren Glieder den Buchstaben g, welche zusammengezogen, $\frac{g(ap^2 + q^2)}{ap^2 - q^2}$ geben; die beiden andern enthalten den Buchstaben f und geben unter einer Benennung $-\frac{2afpq}{ap^2 - q^2}$, daher erhalten wir $y = \frac{g(ap^2 + q^2) - 2afpq}{ap^2 - q^2}$.

82. Diese Arbeit scheint unserem Endzwecke gar nicht zu entsprechen, indem wir hier auf Brüche gerathen sind, während wir doch für x und y ganze Zahlen finden sollten, und es würde die neue Aufgabe entstehen, für p und q Zahlen zu bestimmen, welche die Brüche wegfallen lassen. Diese Aufgabe scheint aber noch schwerer als unsere Hauptaufgabe zu sein. Allein es kann hier ein besonderer Kunstgriff angewandt werden, wodurch wir leicht zu unserem Endzwecke gelangen. Da nämlich hier Alles in ganzen Zahlen ausgedrückt werden soll, so setze man $\frac{ap^2 + q^2}{ap^2 - q^2} = m$ und $\frac{2pq}{ap^2 - q^2} = n$, damit man habe $x = ng - mf$ und $y = mg - naf$. Allein hier können wir m und n nicht nach Belieben nehmen, sondern sie müssen so bestimmt werden, daß den obigen Bestimmungen ein Genüge geschehe; zu diesem Zwecke wollen wir ihre Quadrate betrachten, da wir dann haben werden:

$$m^2 = \frac{a^2p^4 + 2ap^2q^2 + q^4}{a^2p^4 - 2ap^2q^2 + q^4} \text{ und } n^2 = \frac{4p^2q^2}{a^2p^4 - 2ap^2q^2 + q^4},$$

daher bekommen wir:

$$m^2 - an^2 = \frac{a^2p^4 + 2ap^2q^2 + q^4 - 4ap^2q^2}{a^2p^4 - 2ap^2q^2 + q^4}$$

$$= \frac{a^2p^4 - 2ap^2q^2 + q^4}{a^2p^4 - 2ap^2q^2 + q^4} = 1.$$

83. Hieraus sieht man, daß die beiden Zahlen m und n so beschaffen sein müssen, daß $m^2 = an^2 + 1$. Da nun a eine bekannte Zahl ist, so muß man vor allen Dingen darauf bedacht sein, eine solche ganze Zahl für n zu finden, daß $an^2 + 1$ ein Quadrat werde, von welchem m die Wurzel ist; und so bald man eine solche gefunden, und ferner auch die Zahl f so bestimmt hat, daß $af^2 + b$ ein Quadrat werde, nämlich g^2, so bekommt man für x und y folgende Werthe in ganzen Zahlen: $x = ng - mf$, und $y = mg - naf$, und dadurch wird $ax^2 + b = y^2$.

84. Es ist an und für sich klar, daß, wenn einmal m und n gefunden worden, man dafür auch $-m$ und $-n$ schreiben könne, weil das Quadrat n^2 doch dasselbe bleibt.

Um daher x und y in ganzen Zahlen zu finden, damit $ax^2 + b = y^2$ werde, so muß man vor allen Dingen einen solchen Fall schon haben, daß nämlich $af^2 + b = g^2$ sei. Sobald dieser Fall bekannt ist, muß man noch zu der Zahl a solche Zahlen m und n suchen, daß $an^2 + 1 = m^2$ werde, wozu in Folgendem die Anleitung gegeben werden soll. Ist nun dies geschehen, so hat man sogleich einen neuen Fall, nämlich $x = ng + mf$ und $y = mg + naf$, da dann $ax^2 + b = y^2$ sein wird.

Setzt man diesen neuen Fall an die Stelle des vorigen, der für bekannt angenommen worden und schreibt $ng + mf$, anstatt f und $mg + naf$, anstatt g, so bekommen wir für x und y wiederum neue Werthe, aus welchen weiter, wenn sie für f und g gesetzt werden, andere neue herausgebracht werden, und so immer fort, so daß, wenn man nur anfänglich einen solchen Fall gehabt, man daraus unendlich viel andere ausfindig machen kann.

85. Die Art, wie wir zu dieser Auflösung gelangt sind, war ziemlich mühsam und schien anfänglich von unserem Endzwecke sich zu entfernen, indem wir auf ziemlich verwickelte Brüche geriethen, die in Folge eines günstigen

Zufalls weggeschafft werden können. Es wird daher gut sein, noch einen anderen kürzeren Weg anzugeben, welcher uns zu derselben Auflösung führt.

86. Da $ax^2 + b = y^2$ sein soll und man schon gefunden hat $af^2 + b = g^2$, so giebt uns jene Gleichung $b = y^2 - ax^2$, diese aber $b = g^2 - af^2$, folglich muß auch sein $y^2 - ax^2 = g^2 - af^2$, und jetzt kommt alles darauf an, wie man aus den bekannten Zahlen f und g die unbekannten x und y finden soll. Hiebei fällt sogleich in die Augen, daß diese Gleichung erhalten werde, wenn man $x = f$ und $y = g$ setzt. Allein hieraus erhält man keinen neuen Fall außer dem, der schon als bekannt genommen wird.

Wir wollen daher annehmen, man habe für n schon eine solche Zahl gefunden, daß $an^2 + 1$ ein Quadrat werde, oder daß $an^2 + 1 = m^2$, daher wird nun $m^2 - an^2 = 1$. Damit multiplicire man in der obigen Gleichung den Theil $g^2 - af^2$, so muß auch sein $y^2 - ax^2 = (g^2 - af^2)(m^2 - an^2) = g^2m^2 - af^2m^2 - ag^2n^2 + a^2f^2n^2$. Laßt uns zu diesem Zwecke setzen: $y = gm + afn$, so bekommen wir: $g^2m^2 + 2afgmn + a^2f^2n^2 - ax^2 = g^2m^2 - af^2m^2 - ag^2n^2 + a^2f^2n^2$, wo sich die Glieder g^2m^2 und $a^2f^2n^2$ einander aufheben und wir also bekommen $ax^2 = af^2m^2 + ag^2n^2 + 2afgmn$, welche Gleichung durch a getheilt $x^2 = f^2m^2 + g^2n^2 + 2fgmn$ giebt. Diese Formel ist offenbar ein Quadrat, woraus wir erhalten $x = fm + gn$, welches dieselben Formeln sind, die wir vorher gefunden haben.

87. Es wird nun nöthig sein, diese Auflösung durch einige Beispiele zu erläutern.

I. Aufgabe. Man suche alle ganze Zahlen für x, die so beschaffen sind, daß $2x^2 - 1$ ein Quadrat werde, oder daß $2x^2 - 1 = y^2$ sei.

Hier ist $a = 2$ und $b = -1$; der erste Fall der in die

Augen fällt ist, wenn man $x = 1$ und $y = 1$ nimmt. Aus diesem bekannten Falle haben wir nun $f = 1$ und $g = 1$. Es wird aber ferner erfordert, eine solche Zahl für n zu finden, daß $2n^2 + 1$ ein Quadrat werde, nämlich m^2. Dies geschieht nun, wenn $n = 2$ und $m = 3$, daher wir aus einem jeden bekannten Falle f und g diese neue finden: $x = 3f + 2g$, und $y = 3g + 4f$. Da nun der erste bekannte Fall $f = 1$ und $g = 1$ ist, so finden wir daraus folgende neue Fälle:

$$x = f = 1,\ 5,\ 29,\ 169$$
$$y = g = 1,\ 7,\ 41,\ 239 \text{ etc.}$$

88. II. Aufgabe. Man suche alle dreieckigen Zahlen, welche zugleich Quadratzahlen sind.

Es sei z die Dreieckswurzel, so ist das Dreieck $\frac{z^2 + z}{2}$, welches ein Quadrat sein soll. Die Wurzel davon sei x, so muß $\frac{z^2 + z}{2} = x^2$ sein. Man multiplicire mit 8, so wird $4z^2 + 4z = 8x^2$ und beiderseits 1 addirt, giebt $4z^2 + 4z + 1 = (2z + 1)^2 = 8x^2 + 1$. Es kommt also darauf an, daß $8x^2 + 1$ ein Quadrat werde, und wenn man $8x^2 + 1 = y^2$ setzt, so wird $y = 2z + 1$, und also die gesetzte Dreieckswurzel $z = \frac{y - 1}{2}$.

Hier ist nun $a = 8$ und $b = 1$, und der bekannte Fall fällt sogleich in die Augen, nämlich $f = 0$ und $g = 1$. Damit ferner $8n^2 + 1 = m^2$ werde, so ist $n = 1$ und $m = 3$; daher bekommt man $x = 3f + g$ und $y = 3g + 8f$, ferner $z = \frac{y - 1}{2}$; hieraus bekommen wir also folgende Auflösungen:

$x = f = 0$	1	6	35	204	1189
$y = g = 1$	3	17	99	577	3363
$z = \frac{y-1}{2} = 0$	1	8	49	288	1681 etc.

89. III. Aufgabe. Man suche alle Fünfeckszahlen, welche zugleich Quadratzahlen sind.

Die Fünfeckswurzel sei $= z$, so ist das Fünfeck $= \frac{3z^2 - z}{2}$, das dem Quadrate x^2 gleich gesetzt werde; daher wird $3z^2 - z = 2x^2$; man multiplicire mit 12 und addire, so wird $36z^2 - 12z + 1 = 24x^2 + 1 = (6z - 1)^2$.

Setzt man nun $24x^2 + 1 = y^2$, so ist $y = 6z - 1$ und $z = \frac{y + 1}{6}$. Da nun hier $a = 24$, $b = 1$, so ist der bekannte Fall $f = 0$ und $g = 1$. Da ferner $24n^2 + 1 = m^2$ sein muß, so nehme man $n = 1$ und dann wird $m = 5$; daher erhalten wir $x = 5f + g$ und $y = 5g + 24f$, und $z = \frac{y + 1}{6}$; oder auch $y = 1 - 6z$, so wird ebenfalls $z = \frac{1 - y}{6}$, woraus folgende Auflösungen gefunden werden:

$x = f = 0$	1	10	99	980
$y = g = 1$	5	49	485	4801
$z = \frac{y+1}{6} = \frac{1}{3}$	1	$\frac{25}{3}$	81	$\frac{2401}{3}$
oder $z = \frac{1-y}{6} = 0$	$-\frac{2}{3}$	-8	$-\frac{242}{3}$	$-800.$

90. IV. Aufgabe. Man suche alle Quadrate in ganzen Zahlen, welche siebenmal genommen und um 2 vermehrt, wiederum Quadrate werden.

Hier wird also gefordert, daß $7x^2 + 2 = y^2$ sein soll, wo $a = 7$ und $b = 2$; der bekannte Fall fällt sogleich in die Augen, wenn $x = 1$, und dann ist $x = f = 1$ und $y = g = 3$. Nun betrachte man die Gleichung $7n^2 + 1 = m^2$, und da findet man leicht $n = 3$ und $m = 8$; daher erhalten wir $x = 8f + 3g$ und $y = 8g + 21f$, woraus die folgenden Werthe für x gefunden werden:

$$x = f = 1,\ 17,\ 271$$
$$y = g = 3,\ 45,\ 717.$$

91. V. Aufgabe. Man suche alle dreieckigen Zahlen, welche zugleich fünfeckige Zahlen sind.

Es sei die Dreieckswurzel $= p$ und die Fünfeckswurzel $= q$, so muß $\frac{p^2 + p}{2} = \frac{3q^2 - q}{2}$ sein, oder $3q^2 - q = p^2 + p$; hieraus suche man q, und da $q^2 = \frac{1}{3}q + \frac{p^2 + p}{3}$, so wird $q = \frac{1}{6} \pm \sqrt{(\frac{1}{36} + \frac{p^2 + p}{3})}$, das ist $q = \frac{1 \pm \sqrt{(12p^2 + 12p + 1)}}{6}$. Es kommt also darauf an, daß $12p^2 + 12p + 1$ ein Quadrat werde, und zwar in ganzen Zahlen. Da nun hier das mittlere Glied $12p$ vorhanden ist, so setze man $p = \frac{x - 1}{2}$; dadurch bekommen wir $12p^2 = 3x^2 - 6x + 3$ und $12p = 6x - 6$, daher $12p^2 + 12p + 1 = 3x^2 - 2$, welches ein Quadrat sein muß.

Setzen wir demnach $3x^2 - 2 = y^2$, so haben wir daraus $p = \frac{x - 1}{2}$ und $q = \frac{1 + y}{6}$. Da nun die ganze Sache auf die Formel $3x^2 - 2 = y^2$ ankommt, so ist $a = 3$ und $b = -2$, und der bekannte Fall $x = f = 1$ und $y = g = 1$. Alsdann haben wir für diese Gleichung $m^2 = 3n^2 + 1$ die Zahl $n = 1$ und $m = 2$, woraus wir folgende Werthe für x und y, und daher weiter für p und q, erhalten.

Da also $x = 2f + g$ und $y = 2g + 3f$ ist, so wird

$x = f = 1$	3	11	41
$y = g = 1$	5	19	71
$p = 0$	1	5	20
$q = \frac{1}{3}$	1	$\frac{10}{3}$	12
oder $q = 0$	$-\frac{2}{3}$	-3	$-\frac{35}{3}$

weil nämlich auch $q = \frac{1 - y}{6}$ ist.

92. Bisher waren wir gezwungen, aus der gegebenen Formel das zweite Glied wegzuschaffen, wenn eins vorhanden war. Man kann aber auch die erste gegebene Methode auf solche Formeln anwenden, in denen das mittlere Glied vorhanden ist, was wir hier noch angeben wollen. Es sei

demnach die gegebene Formel, die ein Quadrat sein soll, diese: $ax^2 + bx + c = y^2$, und hievon sei schon der Fall $af^2 + bf + c = g^2$ bekannt.

Nun subtrahire man diese Gleichung von der obigen, so wird $a(x^2 - f^2) + b(x - f) = y^2 - g^2$, welche also durch Factoren ausgedrückt werden kann: $(x - f)(ax + af + b) = (y - g)(y + g)$. Man multiplicire beiderseits mit pq, so wird $pq(x - f)(ax + af + b) = pq(y - g)(y + g)$, welche Gleichung in diese zwei zergliedert werden kann:

$$\text{I.}\quad p(x - f) = q(y - g).$$
$$\text{II.}\quad q(ax + af + b) = p(y + g).$$

Man multiplicire die erste mit p, die zweite mit q, und subtrahire jenes Product von diesem, so kommt $(aq^2 - p^2)x + (aq^2 + p^2)f + bq^2 = 2gpq$; daraus finden wir $x = \frac{2gpq}{aq^2 - p^2} - \frac{(aq^2 + p^2)f}{aq^2 - p^2} - \frac{bq^2}{aq^2 - p^2}$. Aus der ersten Gleichung ist $q(y - g) = p(x - f) = p\left(\frac{2gpq}{aq^2 - p^2} - \frac{2afq^2}{aq^2 - p^2} - \frac{bq^2}{aq^2 - p^2}\right)$; also $y - g = \frac{2gp^2}{aq^2 - p^2} - \frac{2afpq}{aq^2 - p^2} - \frac{bpq}{aq^2 - p^2}$, und daher $y = g\left(\frac{aq^2 + p^2}{aq^2 - p^2}\right) - \frac{2afpq}{aq^2 - p^2} - \frac{bpq}{aq^2 - p^2}$.

Um die Brüche wegzubringen, setze man wie vorher (82) geschehen $\frac{aq^2 + p^2}{aq^2 - p^2} = m$ und $\frac{2pq}{aq^2 - p^2} = n$, so wird $m + 1 = \frac{2aq^2}{aq^2 - p^2}$ und also $\frac{q^2}{aq^2 - p^2} = \frac{m + 1}{2a}$; also wird $x = ng - mf - b\frac{m + 1}{2a}$ und $y = mg - naf - \frac{1}{2}bn$ sein, wo die Buchstaben m und n eben so beschaffen sein müssen wie oben, nämlich $m^2 = an^2 + 1$.

93. In solcher Art sind aber die für x und y gefundenen Formeln noch mit Brüchen vermengt, weil die den Buchstaben b enthaltenden Glieder Brüche sind. und also unserm Endzwecke kein Genüge leisten. Doch ist zu be-

merken, daß, wenn man von diesen Werthen zu den folgenden fortschreitet, dieselben immer ganze Zahlen werden, welche man aber viel leichter aus den anfänglich eingeführten Zahlen p und q finden kann. Man nehme p und q derartig an, daß $p^2 = aq^2 + 1$; da nun $aq^2 - p^2 = -1$, so fallen die Brüche von selbst weg; und nun wird $x = -2gpq + f(aq^2 + p^2) + bq^2$ und $y = -g(aq^2 + p^2) + 2afpq + bpq$. Weil aber in dem bekannten Falle $af^2 + bf + c = g^2$ nur das Quadrat g^2 vorkommt, so ist es gleichgültig, ob man dem Buchstaben g das Zeichen + oder — giebt; man schreibe also $-g$ statt $+g$, so werden unsere Formeln $x = 2gpq + f(aq^2 + p^2) + bq^2$ sein; und $y = g(aq^2 + p^2) + 2afpq + bpq$, da dann gewiß $ax^2 + bx + c = y^2$ sein wird.

Man suche z. B. diejenigen Sechseckzahlen, welche zugleich Quadrate sind.

Da muß dann $2x^2 - x = y^2$ sein, wo $a = 2$, $b = -1$, und $c = 0$; der bekannte Fall ist hier offenbar $x = f = 1$ und $y = g = 1$.

Da alsdann $p^2 = 2q^2 + 1$ sein muß, so wird $q = 2$ und $p = 3$; daher wir erhalten $x = 12g + 17f - 4$ und $y = 17g + 24f - 6$; woraus folgende Werthe gefunden werden:

$$x = f = 1,\ 25,\ 841$$
$$y = g = 1,\ 35,\ 1189 \text{ 2c.}$$

94. Wir wollen aber bei der ersten Formel, in der das mittlere Glied fehlt, noch etwas stehen bleiben und die Fälle in Erwägung ziehen, in denen die Formel $ax^2 + b$ ein Quadrat in ganzen Zahlen wird.

Es sei daher $ax^2 + b = y^2$. Nunmehr müssen zwei Bedingungen erfüllt werden.

Erstens, daß man einen Fall wisse, in dem dies geschieht. Derselbe sei nun $af^2 + b = g^2$.

Zweitens, daß man solche Zahlen für m und n wisse,

daß $m^2 = an^2 + 1$ wird; wozu im folgenden Kapitel die Anleitung gegeben werden soll.

Hieraus erhält man nun einen neuen Fall, nämlich $x = ng + mf$ und $y = mg + anf$, aus welchem alsdann auf gleiche Art neue Fälle gefunden werden können, welche wir in folgender Weise darstellen wollen:

$$x = f,\ A,\ B,\ C,\ D,\ E$$
$$y = g,\ P,\ Q,\ R,\ S,\ T \text{ 2c.}$$

wo $A = ng + mf$, $B = nP + mA$, $C = nQ + mB$, $D = nR + mC$
und $P = mg + anf$, $Q = mP + anA$, $R = mQ + anB$, $S = mR + anC$ 2c.

Diese beiden Zahlenreihen kann man mit leichter Mühe so weit fortsetzen als man will.

95. Bei diesem Verfahren aber kann man weder die obere Reihe für x fortsetzen, ohne zugleich die untere zu kennen, noch die untere, ohne die obere zu kennen. Man kann aber leicht eine Regel angeben, um die obere Reihe allein fortzusetzen, ohne die untere zu kennen; welche Regel auch für die untere Reihe gilt, ohne daß man nöthig hätte, die obere zu kennen.

Die Zahlen nämlich, welche für x gesetzt werden können, schreiten in einer gewissen Progression fort, von der man jedes Glied, z. B. E aus den zwei vorhergehenden C und D, bestimmen kann, ohne dazu die untern Glieder R und S nöthig zu haben. Denn da $E = nS + mD = n(mR + anC) + m(nR + mC)$, das ist $E = 2mnR + an^2C + m^2C$, so wird, weil $nR = D - mC$ gefunden, $E = 2mD - m^2C + an^2C$ oder $E = 2mD - (m^2 - an^2)C$; da aber $m^2 = an^2 + 1$, also $m^2 - an^2 = 1$, so haben wir $E = 2mD - C$, woraus hervorgeht, wie jede dieser obern Zahlen aus den zwei vorhergehenden bestimmt wird.

Eben so verhält es sich auch mit der untern Reihe. Denn da $T = mS + anD$, und $D = nR + mC$, so wird $T = mS + an^2R + amnC$. Da nun ferner $S = mR + anC$, so ist $anC = S - mR$, welcher Werth für anC geschrieben $T = 2mS - R$ giebt, so daß die untere Reihe nach derselben Regel fortschreitet wie die obere.

Man suche z. B. alle ganze Zahlen x, so daß $2x^2 - 1 = y^2$ sei. Da nun $f = 1$ und $g = 1$ ist; ferner da $m^2 = 2n^2 + 1$ ist, so wird $n = 2$ und $m = 3$. Da nun $A = ng + mf = 5$, so sind die zwei ersten Glieder 1 und 5, aus welchem die folgenden nach dieser Regel gefunden werden $E = 6D - C$, nämlich jedes Glied sechsmal genommen, weniger dem vorhergehenden, giebt das folgende; daher die für x verlangten Zahlen nach dieser Regel also fortgehen:

$$1,\ 5,\ 29,\ 169,\ 985,\ 5741 \text{ 2c.}$$

Hieraus sieht man, daß diese Zahlen unendlich weit fortgesetzt werden können. Wollte man aber auch Brüche gelten lassen, so würde nach der oben gegebenen Methode eine noch unendlich größere Menge angegeben werden können.

Kapitel 7.

Von einer besonderen Methode, die Formel $an^2 + 1$ zu einem Quadrate in ganzen Zahlen zu machen.

96. Das im vorigen Kapitel dargelegte Verfahren kann nicht zur Ausführung gebracht werden, wenn man nicht im Stande ist, für jede Zahl a eine solche ganze Zahl n zu finden, daß $an^2 + 1$ ein Quadrat wird, oder daß man $m^2 = an^2 + 1$ erhält.

Wollte man sich mit gebrochenen Zahlen begnügen, so würde die Gleichung leicht aufzulösen sein, indem man nur $m = 1 + \frac{np}{q}$ zu setzen brauchte. Denn dann wird $m^2 = 1 + \frac{2np}{q} + \frac{n^2p^2}{q^2} = an^2 + 1$, wo sich beiderseits das 1 aufhebt und die übrigen Glieder durch n theilen lassen, da dann mit q^2 multiplicirt, $2pq + np^2 = anq^2$ kommt. Hieraus ergiebt sich $n = \frac{2pq}{aq^2 - p^2}$, woraus unendlich viele Werthe für n gefunden werden können. Da aber n eine ganze Zahl sein soll, so hilft uns dies nichts; daher eine ganz andere Methode gebraucht werden muß, um zum Ziele zu gelangen.

97. Vor allen Dingen aber ist zu bemerken, daß, wenn $an^2 + 1$ ein Quadrat in ganzen Zahlen werden soll, dies nicht für jeden Werth von a möglich ist.

Denn erstens werden alle Fälle ausgeschlossen, in denen a eine negative Zahl ist; dann werden auch alle die Fälle ausgeschlossen, in denen a selbst eine Quadratzahl ist, weil alsdann an^2 ein Quadrat sein würde, kein Quadrat aber $+ 1$ in ganzen Zahlen ein Quadrat sein kann. Daher muß unsere Formel so eingeschränkt werden, daß der Buchstabe a weder eine negative noch eine Quadratzahl sei. Sobald aber a eine positive Zahl und kein Quadrat ist, kann stets für n eine solche ganze Zahl gefunden werden, daß $an^2 + 1$ ein Quadrat wird.

Hat man also eine solche Zahl gefunden, so ist es leicht aus dem vorigen Kapitel unendlich viel andere herzuleiten. Zu unserem Vorhaben aber genügt es, eine einzige, und zwar die kleinste ausfindig zu machen.

98. Hiezu hat ein gelehrter Engländer, Namens Pell, eine sehr sinnreiche Methode erfunden, welche wir hier erklären wollen. Dieselbe aber ist nicht so beschaffen, daß sie auf allgemeine Art für jede Zahl a, sondern nur für jeden besondern Fall gebraucht werden kann

Wir wollen daher mit den leichteren Fällen den Anfang machen, und für n eine Zahl suchen, so daß $2n^2 + 1$ ein Quadrat werde, oder daß $\sqrt{(2n^2 + 1)}$ rational werde.

Hier sieht man nun leicht, daß die Quadratwurzel größer als n, jedoch kleiner als 2n sein wird. Man setze daher dieselbe $= n + p$, so wird p gewiß kleiner sein als n. Also haben wir $\sqrt{(2n^2 + 1)} = n + p$ und daher $2n^2 + 1 = n^2 + 2np + p^2$, woraus wir nun n suchen

wollen. Da nun $n^2 = 2np + p^2 - 1$ ist, so wird $n = p + \sqrt{(2p^2 - 1)}$.

Es kommt also darauf an, daß $2p^2 - 1$ ein Quadrat werde, welches geschieht wenn $p = 1$, und hieraus findet man $n = 2$ und $\sqrt{(2n^2 + 1)} = 3$. Wäre dieses letztere nicht sogleich in die Augen gefallen, so hätte man weiter fortgehen können, und da $\sqrt{(2p^2 - 1)}$ größer als p und daher n größer als 2p, so setze man $n = 2p + q$, da dann $2p + q = p + \sqrt{(2p^2 - 1)}$ oder $p + q = \sqrt{(2p^2 - 1)}$ wird. Hievon die Quadrate genommen, kommt $p^2 + 2pq + q^2 = 2p^2 - 1$ oder $p^2 = 2pq + q^2 + 1$ und daraus wird $p = q + \sqrt{(2q^2 + 1)}$. Also muß $2q^2 + 1$ ein Quadrat sein, welches geschieht wenn $q = 0$, daher $p = 1$ und $n = 2$. Aus diesem Beispiel kann man sich schon einen Begriff von dieser Methode machen, welcher aber durch das Folgende noch weiter aufgeklärt wird.

99. Es sei nun $a = 3$, so daß die Formel $3n^2 + 1$ ein Quadrat werden soll. Man setze $\sqrt{(3n^2 + 1)} = n + p$, dann wird $3n^2 + 1 = n^2 + 2np + p^2$ und $2n^2 = 2np + p^2 - 1$ und daraus $n = \frac{p + \sqrt{(3p^2 - 2)}}{2}$. Da nun $\sqrt{(3p^2 - 2)}$ größer als p und also n größer als $\frac{2p}{2}$ oder als p ist, so setze man $n = p + q$, dann wird $2p + 2q = p + \sqrt{(3p^2 - 2)}$ oder $p + 2q = \sqrt{(3p^2 - 2)}$; hievon die Quadrate genommen, wird $p^2 + 4pq + 4q^2 = 3p^2 - 2$ oder $2p^2 = 4pq + 4q^2 + 2$, das ist $p^2 = 2pq + 2q^2 + 1$, daher $p = q + \sqrt{(3q^2 + 1)}$. Diese Formel ist der gegebenen gleich, und $q = 0$ leistet also Genüge; daraus wird $p = 1$ und $n = 1$, also $\sqrt{(3n^2 + 1)} = 2$.

100. Nun sei $a = 5$, um die Formel $5n^2 + 1$ zu einem Quadrate zu machen, wovon die Wurzel größer ist als 2n. Daher setze man $\sqrt{(5n^2 + 1)} = 2n + p$, dann wird $5n^2 + 1 = 4n^2 + 4np + p^2$ und daraus $n^2 = 4np + p^2 - 1$; und also $n = 2p + \sqrt{(5p^2 - 1)}$. Weil nun

$\sqrt{(5p^2 - 1)}$ größer ist als 2p, so ist auch n größer als 4p; deswegen setze man $n = 4p + q$, so wird $2p + q = \sqrt{(5p^2 - 1)}$ oder $4p^2 + 4pq + q^2 = 5p^2 - 1$; daher $p^2 = 4pq + q^2 + 1$ und also $p = 2q + \sqrt{(5q^2 + 1)}$. Dieses leistet Genüge, wenn $q = 0$ ist. Dann wird $p = 1$ und $n = 4$; daher $\sqrt{(5n^2 + 1)} = 9$.

101. Es sei ferner $a = 6$, um $6n^2 + 1$ zu einem Quadrate zu machen, dessen Wurzel größer ist als 2n. Man setze deswegen $\sqrt{(6n^2 + 1)} = 2n + p$, so wird $6n^2 + 1 = 4n^2 + 4np + p^2$ oder $2n^2 = 4np + p^2 - 1$, und daher $n = p + \frac{\sqrt{(6p^2 - 2)}}{2}$, oder $n = \frac{2p + \sqrt{(6p^2 - 2)}}{2}$, also n größer als 2p. Man setze deswegen $n = 2p + q$, so wird $4p + 2q = 2p + \sqrt{(6p^2 - 2)}$ oder $2p + 2q = \sqrt{(6p^2 - 2)}$. Die Quadrate genommen, wird $4p^2 + 8pq + 4q^2 = 6p^2 - 2$ oder $2p^2 = 8pq + 4q^2 + 2$, also $p^2 = 4pq + 2q^2 + 1$, woraus gefunden wird $p = 2q + \sqrt{(6p^2 + 1)}$. Diese Formel ist der ersten gleich, und es kann also $q = 0$ gesetzt werden. Dann ergiebt sich $p = 1$ und $n = 2$, also $\sqrt{(6n^2 + 1)} = 5$.

102. Es sei weiter $a = 7$ und $7n^2 + 1 = m^2$; es ist also m größer als 2n, daher setze man $m = 2n + p$; dann wird $7n^2 + 1 = 4n^2 + 4np + p^2$ oder $3n^2 = 4np + p^2 - 1$, woraus gefunden wird $n = \frac{2p + \sqrt{(7p^2 - 3)}}{3}$. Da nun n größer als $\frac{4}{3}p$ und also größer als p ist, so setze man $n = p + q$, so wird $p + 3q = \sqrt{(7p^2 - 3)}$, wovon die Quadrate sind $p^2 + 6pq + 9q^2 = 7p^2 - 3$ oder $6p^2 = 6pq + 9q^2 + 3$, oder $2p^2 = 2pq + 3q^2 + 1$, daraus kommt $p = \frac{q + \sqrt{(7q^2 + 2)}}{2}$. Da nun hier n größer ist als $\frac{3q}{2}$, also größer als q, so setze man $p = q + r$. Dann wird $q + 2r = \sqrt{(7q^2 + 2)}$, die Quadrate genommen, giebt $q^2 + 4qr + 4r^2 = 7q^2 + 2$ oder $6q^2 = 4qr + 4r^2 - 2$, oder $3q^2 = 2qr + 2r^2 - 1$, woraus gefunden wird $q =$

$\frac{r + \sqrt{(7r^2 - 3)}}{3}$. Da nun q größer ist als r, so setze man $q = r + s$, dann wird $2r + 3s = \sqrt{(7r^2 - 3)}$. Die Quadrate hievon sind $4r^2 + 12rs + 9s^2 = 7r^2 - 3$, oder $3r^2 = 12rs + 9s^2 + 3$ und $r^2 = 4rs + 3s^2 + 1$; also $r = 2s + \sqrt{(7s^2 + 1)}$. Da nun diese Formel der erstern gleich, so setze man $s = 0$, und dann bekommt man $r = 1$, $q = 1$, $p = 2$ und $n = 3$, daraus $m = 8$.

Diese Rechnung kann durch folgendes Verfahren, das auch in andern Fällen angewandt wird, abgekürzt werden.

Da $7n^2 + 1 = m^2$, so ist m kleiner als 3n. Man setze deswegen $m = 3n - p$, so wird $7n^2 + 1 = 9n^2 - 6np + p^2$ oder $2n^2 = 6np - p^2 + 1$, und daraus $n = \frac{3p - \sqrt{(7p^2 + 2)}}{2}$. Also ist n kleiner als 3p; deswegen setze man $n = 3p - 2q$, so wird $3p - 2q = \sqrt{(7p^2 + 2)}$ und die Quadrate genommen $9p^2 - 12pq + 4q^2 = 7p^2 + 2$, oder $2p^2 = 12pq - 4q^2 + 2$ und $p^2 = 6pq - 2q^2 + 1$, daraus wird $p = 3q + \sqrt{(7q^2 + 1)}$. Hier kann man nun sogleich $q = 0$ setzen; dann wird $p = 1$, $n = 3$ und $m = 8$, wie vorher.

103. Nehmen wir ferner $a = 8$, so daß $8n^2 + 1 = m^2$ und daher m kleiner als 3n, so setze man $m = 3n - p$, dann wird $8n^2 + 1 = 9n^2 - 6np + p^2$, oder $n^2 = 6np - p^2 + 1$, daraus $n = 3p + \sqrt{(8p^2 + 1)}$, welche Formel der ersten schon gleich ist, daher man setzen kann $p = 0$; dann kommt $n = 1$ und $m = 3$.

104. In gleicher Weise verfährt man für jede andere Zahl a, wenn dieselbe nur positiv und kein Quadrat ist, und man kommt immer endlich zu einem Wurzelzeichen, welches der gegebenen Formel ähnlich ist, als z. B. zu dieser $\sqrt{(at^2 + 1)}$, und man braucht dann nur $t = 0$ zu setzen, in welchem Falle die Irrationalität immer wegfällt, und hierauf, wenn man zurück geht, erhält man einen Werth für n, so daß $an^2 + 1$ ein Quadrat wird.

Bisweilen gelangt man bald zu seinem Endzwecke, bisweilen aber werden dazu viele Operationen erfordert, je nach Beschaffenheit der Zahl a, von der man doch keine gewissen Kennzeichen angeben kann. Bis zu der Zahl 13 geht es noch ziemlich geschwind; kommt man aber zu $a = 13$, so wird die Rechnung viel weitläufiger, und daher wird es gut sein, diesen Fall hier auszuführen.

105. Es sei also $a = 13$, so daß $13n^2 + 1 = m^2$ sein soll. Weil nun m^2 größer ist als $9n^2$, und daher m größer ist als $3n$, so setze man $m = 3n + p$. Dann wird $13n^2 + 1 = 9n^2 + 6np + p^2$, oder $4n^2 = 6np + p^2 - 1$, daraus $n = \frac{3p + \sqrt{(13p^2 - 4)}}{4}$; daher n größer als $\frac{6}{4}p$ und also größer als p ist; man setze also $n = p + q$, so wird $p + 4q = \sqrt{(13p^2 - 4)}$, die Quadrate genommen, $13p^2 - 4 = p^2 + 8pq + 16q^2$, daher $12p^2 = 8pq + 16q^2 + 4$, oder durch 4 getheilt, $3p^2 = 2pq + 4q^2 + 1$ und daraus $p = \frac{q + \sqrt{(13q^2 + 3)}}{3}$. Hier ist p größer als $\frac{q + 3q}{3}$, also größer als q; man setze demnach $p = q + r$, so wird $2q + 3r = \sqrt{(13q^2 + 3)}$. Das Quadrat hievon ist $13q^2 + 3 = 4q^2 + 12qr + 9r^2$, das ist $9q^2 = 12qr + 9r^2 - 3$, durch 3 dividirt, $3q^2 = 4qr + 3r^2 - 1$, daraus wird $q = \frac{2r + \sqrt{(13r^2 - 3)}}{3}$. Hier ist q größer als $\frac{2r + 3r}{3}$ und also q größer als r; daher setze man $q = r + s$, so wird $r + 3s = \sqrt{(13r^2 - 3)}$, die Quadrate genommen, $13r^2 - 3 = r^2 + 6rs + 9s^2$, oder $12r^2 = 6rs + 9s^2 + 3$, durch 3 dividirt, wird $4r^2 = 2rs + 3s^2 + 1$ und daraus $r = \frac{s + \sqrt{(13s^2 + 4)}}{4}$. Hier ist r. größer als $\frac{s + 3s}{4}$ oder s; daher setze man $r = s + t$, so wird $3s + 4t = \sqrt{(13s^2 + 4)}$, das Quadrat genommen, $13s^2 + 4 = 9s^2 + 24st + 16t^2$ und also $4s^2 = 24ts + 16t^2 - 4$, durch 4 dividirt, $s^2 = 6ts + 4t^2 - 1$,

daraus wird $s = 3t + \sqrt{(13t^2 - 1)}$. Also ist s größer als $3t + 3t$ oder $6t$; deswegen setze man $s = 6t + u$, so wird $3t + u = \sqrt{(13t^2 - 1)}$, das Quadrat genommen $13t^2 - 1 = 9t^2 + 6tu + u^2$ und daraus $4t^2 = 6tu + u^2 + 1$ und $t = \frac{3u + \sqrt{(13u^2 + 4)}}{4}$, wo t größer als $\frac{6u}{4}$ und also größer als u. Man setze deswegen $t = u + v$, so wird $u + 4v = \sqrt{(13u^2 + 4)}$, die Quadrate genommen $13u^2 + 4 = u^2 + 8uv + 16v^2$ und $12u^2 = 8uv + 16v^2 - 4$, durch 4 dividirt, $3u^2 = 2uv + 4v^2 - 1$, daraus $u = \frac{v + \sqrt{(13v^2 - 3)}}{3}$, wo u größer als $\frac{4v}{3}$ und also größer als v, folglich setze man $u = v + x$, so wird $2v + 3x = \sqrt{(13v^2 - 3)}$, die Quadrate genommen $13v^2 - 3 = 4v^2 + 12vx + 9x^2$ oder $9v^2 = 12vx + 9x^2 + 3$, durch 3 dividirt $3v^2 = 4vx + 3x^2 + 1$, daraus findet man $v = \frac{2x + \sqrt{(13x^2 + 3)}}{3}$, wo v größer ist als $\frac{5}{3}x$ und also größer als x, deswegen setze man $v = x + y$, so wird $x + 3y = \sqrt{(13x^2 + 3)}$, die Quadrate genommen $13x^2 + 3 = x^2 + 6xy + 9y^2$ oder $12x^2 = 6xy + 9y^2 - 3$, durch 3 dividirt, $4x^2 = 2xy + 3y^2 - 1$ und $x = \frac{y + \sqrt{(13y^2 - 4)}}{4}$, wo x größer ist als y; daher setze man $x = y + z$, so wird $3y + 4z = \sqrt{(13y^2 - 4)}$, die Quadrate genommen $13y^2 - 4 = 9y^2 + 24yz + 16z^2$ oder $4y^2 = 24yz + 16z^2 + 4$, durch 4 dividirt, $y^2 = 6yz + 4z^2 + 1$, daraus $y = 3z + \sqrt{(13z^2 + 1)}$. Da diese Formel endlich der ersten gleich ist, so setze man $z = 0$, und man bekommt rückwärts, wie folgt:

$$
\begin{aligned}
z &= 0\\
y &= 1\\
x &= y + z = 1\\
v &= x + y = 2\\
u &= v + x = 3\\
t &= u + v = 5\\
s &= 6t + u = 33
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
r &= s + t = 38\\
q &= r + s = 71\\
p &= q + r = 109\\
n &= p + q = 180\\
m &= 3n + p = 649
\end{aligned}
$$

Also ist 180 nach 0 die kleinste ganze Zahl für n, wenn $13n^2 + 1$ ein Quadrat werden soll.

106. Aus diesem Beispiel sieht man zur Genüge, wie langwierig bisweilen eine solche Rechnung werden kann. Denn unter den größern Zahlen hat man oft nöthig, wohl zehnmal mehr Operationen zu machen, als hier bei der Zahl 13 vorgekommen sind. Man kann auch nicht wohl voraussehen, bei welchen Zahlen so große Mühe erfordert wird. Daher ist es dienlich, die Arbeit Anderer zu benutzen und eine Tabelle beizufügen, in der zu allen Zahlen a bis auf 100 die Werthe der Buchstaben m und n angegeben werden, damit man in vorkommenden Fällen daraus für jede Zahl a die gehörigen Buchstaben m und n nehmen kann.

107. Indessen ist zu bemerken, daß bei einigen Arten von Zahlen die Werthe für m und n allgemein gefunden werden können. Dies geschieht aber nur bei den Zahlen, welche um 1 oder 2 kleiner oder größer sind als eine Quadratzahl, was zu zeigen der Mühe werth sein wird.

108. Es sei demnach $a = e^2 - 2$, oder um 2 kleiner als eine Quadratzahl, und da $(e^2 - 2)\, n^2 + 1 = m^2$ sein soll, so ist offenbar m kleiner als en. Deswegen setze man $m = en - p$, so wird $(e^2 - 2)\, n^2 + 1 = e^2n^2 - 2enp + p^2$ oder $2n^2 = 2enp - p^2 + 1$ und daraus $n = \frac{ep + \sqrt{(e^2p^2 - 2p^2 + 2)}}{2}$. Nimmt man $p = 1$, so fällt das Wurzelzeichen weg und dann wird $n = e$ und $m = e^2 - 1$ sein.

Wäre z. B. $n = 23$, wo $e = 5$, so wird $23n^2 + 1 = m^2$, wenn $n = 5$ und $m = 24$. Dies ist auch an sich

offenbar; denn setzt man $n = e$, wenn nämlich $a = e^2 - 2$, so wird $au^2 + 1 = e^4 - 2e^2 + 1$, welches das Quadrat von $e^2 - 1$ ist.

109. Es sei nun auch $a = e^2 - 1$, nämlich um 1 weniger als eine Quadratzahl, so daß $(e^2 - 1)\, n^2 + 1 = m^2$ sein soll. Da nun hier m wieder kleiner ist als en, so setze man $m = en - p$, so wird $(e^2 - 1)\, n^2 + 1 = e^2n^2 - 2enp + p^2$, oder $n^2 = 2enp - p^2 + 1$ und daraus $n = ep + \sqrt{(e^2p^2 - p^2 + 1)}$, wo das Wurzelzeichen wegfällt, wenn $p = 1$, und daraus bekommt man $n = 2e$, und $m = 2e^2 - 1$. Dies ist auch leicht einzusehen. Denn da $a = e^2 - 1$ und $n = 2e$, so wird $an^2 + 1 = 4e^4 - 4e^2 + 1$, welches das Quadrat von $2e^2 - 1$ ist. Es sei z. B. $a = 24$, so daß $e = 5$, so wird $n = 10$ und $24n^2 + 1 = 2401 = (49)^2$.*)

110. Es sei nun auch $a = e^2 + 1$, oder um 1 größer als eine Quadratzahl, so daß also $(e^2 + 1)\, n^2 + 1 = m^2$ sein soll, wo m augenscheinlich größer ist als en. Deswegen setze man $m = en + p$, so wird $(e^2 + 1)\, n^2 + 1 = e^2n^2 + 2enp + p^2$ oder $n^2 = 2enp + p^2 - 1$, und daraus $n = ep + \sqrt{(e^2p^2 + p^2 - 1)}$, wo $p = 1$ genommen werden kann, und dann wird $n = 2e$ und $m = 2e^2 + 1$. Dies ist auch leicht einzusehen; denn da $a = e^2 + 1$ und $n = 2e$, so ist $an^2 + 1 = 4e^4 + 4e^2 + 1$, welches das Quadrat von $2e^2 + 1$ ist. Es sei z. B. $a = 17$, so daß $e = 4$, und dann wird $17n^2 + 1 = m^2$, wenn $n = 8$ und $m = 33$.

111. Es sei endlich $a = e^2 + 2$, oder um 2 größer als eine Quadratzahl, also soll $(e^2 + 2)\, n^2 + 1 = m^2$

*) Das Wurzelzeichen verschwindet in diesem Falle, auch wenn $p = 0$ gesetzt wird; daher wir dann unstreitig die kleinsten Zahlen für n und m erhalten, welche $n = 1$ und $m = e$ sind. Also wird, wenn $e = 5$, die Formel $24n^2 + 1$ ein Quadrat, wenn $n = 1$ und die Wurzel dieses Quadrats $m = e = 5$.

sein, wo m offenbar größer ist als en. Daher setze man $m = en + p$, so wird $e^2n^2 + 2n^2 + 1 = e^2n^2 + 2enp + p^2$ oder $2n^2 = 2enp + p^2 - 1$ und daraus $n = \frac{ep + \sqrt{(e^2p^2 + 2p^2 - 2)}}{2}$. Hier nehme man nun $p = 1$, so wird $n = e$ und $m = e^2 + 1$. Dies fällt auch sogleich in die Augen; denn da $a = e^2 + 2$ und $n = e$, so ist $an^2 + 1 = e^4 + 2e^2 + 1$, welches das Quadrat von $e^2 + 1$ ist. Es sei z. B. $a = 11$, so daß $e = 3$, so wird $11n^2 + 1 = m^2$ sein, wenn $n = 3$ und $m = 10$. Wollte man $a = 83$ setzen, so ist $e = 9$, und es wird $83n^2 + 1 = m^2$, wenn man $n = 9$ und $m = 82$ nimmt.

Tabelle,

welche für jeden Werth von a die kleinsten Zahlen n und m angiebt, so daß $m^2 = an^2 + 1$ wird.

a	n	m	a	n	m
2	2	3	24	1	5
3	1	2	26	10	51
5	4	9	27	5	26
6	2	5	28	24	127
7	3	8	29	1820	9801
8	1	3	30	2	11
10	6	19	31	273	1520
11	3	10	32	3	17
12	2	7	33	4	23
13	180	649	34	6	35
14	4	15	35	1	6
15	1	4	37	12	73
17	8	33	38	6	37
18	4	17	39	4	25
19	39	170	40	3	19
20	2	9	41	320	2049
21	12	55	42	2	13
22	42	197	43	531	3482
23	5	24	44	30	199

a	n	m	a	n	m
45	24	161	73	267000	2281249
46	3588	24335	74	430	3699
47	7	48	75	3	26
48	1	7	76	6630	57799
50	14	99	77	40	351
51	7	50	78	6	53
52	90	649	79	9	80
53	9100	66251	80	1	9
54	66	485	82	18	163
55	12	89	83	9	82
56	2	15	84	6	55
57	20	151	85	30996	285771
58	2564	19603	86	1122	10405
59	69	530	87	3	28
60	4	31	88	21	197
61	226153980	1766319049	89	53000	500001
62	8	63	90	2	19
63	1	8	91	165	1574
65	16	129	92	120	1151
66	8	65	93	1260	12151
67	5967	48842	94	221064	2143295
68	4	33	95	4	39
69	936	7775	96	5	49
70	30	251	97	6377352	62809633
71	413	3480	98	10	99
72	2	17	99	1	10

Kapitel 8.

Von der Art, wie die Irrationalformel $\sqrt{(a + bx + cx^2 + dx^3)}$ rational gemacht wird.

112. Wir schreiten hier zu einer Formel fort, in der x bis zur dritten Potenz aufsteigt, um dann bis zur vierten weiter zu gehen. Diese beiden Fälle müssen auf ähnliche Art behandelt werden.

Es soll also die Formel $a + bx + cx^2 + dx^3$ zu einem Quadrate gemacht, und zu diesem Zwecke geeignete Werthe

für x in Rationalzahlen gesucht werden. Denn da dies schon weit größeren Schwierigkeiten unterworfen ist, so erfordert es auch weit mehr Kunst, nur gebrochene Zahlen für x zu finden, und man ist genöthigt sich damit zu begnügen, und keine Auflösung in ganzen Zahlen zu verlangen. Von vorn herein ist auch hier zu bemerken, daß man keine allgemeine Auflösung geben kann, wie eben geschehen, sondern jede Operation giebt uns nur einen einzigen Werth für x zu erkennen, während die oben gebrauchte Methode auf einmal zu unendlich vielen Auflösungen führt.

113. Wenn es für die vorher behandelte Formel $a + bx + cx^2$ unendlich viele Fälle giebt, in denen die Auflösung schlechterdings unmöglich ist, so tritt diese Unmöglichkeit noch häufiger bei der vorliegenden Formel ein, für die nicht einmal an eine Auflösung zu denken ist, wofern man nicht schon eine weiß oder errathen hat. Daher ist man bloß Regeln zu geben im Stande, durch welche man aus einer schon bekannten Auflösung eine neue ausfindig machen kann, aus welcher nachher auf gleiche Weise noch eine andere neue gefunden wird, so daß man in dieser Art immer weiter fortgehen kann.

Häufig kommt es jedoch vor, daß, obwohl schon eine Auflösung bekannt ist, aus derselben doch keine andere geschlossen werden kann. In solchen Fällen giebt es nur eine einzige, ein Umstand, der besonders zu bemerken ist, weil in dem vorhergehenden Falle aus einer einzigen Auflösung unendlich viele neue gefunden werden können.

114. Wenn also eine solche Formel $a + bx + cx^2 + dx^3$ zu einem Quadrate gemacht werden soll, so muß nothwendig schon ein Fall vorausgesetzt werden, wo dies geschieht. Ein solcher aber fällt am deutlichsten in die Augen, wenn das erste Glied schon ein Quadrat ist und die Formel also heißt $f^2 + bx + cx^2 + dx^3$, welche offenbar ein Quadrat wird, wenn man $x = 0$ setzt.

Wir wollen also diese Formel zuerst vornehmen und sehen, wie aus dem bekannten Falle $x = 0$ noch ein anderer Werth für x gefunden werden kann. Zu diesem Zwecke kann man zweierlei Wege einschlagen, von welchen wir jeden besonders hier darlegen wollen, und es wird hiebei gut sein, mit besonderen Fällen den Anfang zu machen.

115. Es sei demnach die Formel $1 + 2x - x^2 + x^3$ gegeben, welche ein Quadrat werden soll. Da nun hier das erste Glied ein Quadrat ist, so nehme man die Wurzel von diesem Quadrate also an, daß die beiden ersten Glieder wegfallen. Es sei daher die Quadratwurzel $1 + x$, deren Quadrat unserer Formel gleich sein soll, und da bekommen wir $1 + 2x - x^2 + x^3 = 1 + 2x + x^2$, wo die beiden ersten Glieder einander aufheben, und diese Gleichung $x^2 = -x^2 + x^3$ oder $x^3 = 2x^2$ herauskommt, welche durch x^2 dividirt $x = 2$ giebt, woraus unsere Formel $1 + 4 - 4 + 8 = 9$ wird.

In gleicher Art, wenn die Formel $4 + 6x - 5x^2 + 3x^3$ ein Quadrat werden soll, setze man erstens die Wurzel $= 2 + nx$ und suche n, so daß die beiden ersten Glieder wegfallen; weil nun $4 + 6x - 5x^2 + 3x^3 = 4 + 4nx + n^2x^2$, so muß $4n = 6$ und also $n = \frac{3}{2}$ sein, woraus diese Gleichung entsteht $-5x^2 + 3x^3 = \frac{9}{4}x^2$ oder $3x^3 = \frac{29}{4}x^2$, daher $x = \frac{29}{12}$, welcher Werth unsere Formel zu einem Quadrat macht, dessen Wurzel $2 + \frac{3}{2}x = \frac{45}{8}$ sein wird.

116. Der zweite Weg besteht darin, daß man der Wurzel drei Glieder giebt, als $f + gx + hx^2$, welche so beschaffen sind, daß in der Gleichung die drei ersten Glieder wegfallen.

Es sei z. B. die Formel gegeben $1 - 4x + 6x^2 - 5x^3$; hievon setze man die Wurzel $1 - 2x + hx^2$, da dann $1 - 4x + 6x^2 - 5x^3 = 1 - 4x + 4x^2 - 4hx^3 + h^2x^4 + 2hx^2$

sein soll; hier fallen die zwei ersten Glieder schon weg, damit aber auch das dritte wegfalle, muß $6 = 2h + 4$ und also $h = 1$ sein, daraus bekommen wir $-5x^3 = -4x^3 + x^4$, wo durch x^3 dividirt $-5 = -4 + x$ und $x = -1$ wird.

117. Diese beiden Methoden können also gebraucht werden, wenn das erste Glied a ein Quadrat ist. Der Grund derselben beruht darauf, daß man bei der ersten Methode der Wurzel zwei Glieder giebt als $f + px$, wo f die Quadratwurzel des ersten Gliedes ist, und p also angenommen wird, daß auch das zweite Glied wegfallen, und also nur das dritte und vierte Glied unserer Formel, nämlich $cx^2 + dx^3$ mit p^2x^2 verglichen werden muß, da dann die Gleichung durch x^2 dividirt einen neuen Werth für x angiebt, welcher $x = \frac{p^2 - c}{d}$ sein wird. Bei der zweiten Methode giebt man der Wurzel drei Glieder und setzt dieselbe $f + px + qx^2$, wenn nämlich $a = f^2$, und bestimmt p und q derartig, daß die drei ersten Glieder auf beiden Seiten verschwinden, welches in folgender Art geschieht. Da $f^2 + bx + cx^2 + dx^3 = f^2 + 2fpx + 2fqx^2 + p^2x^2 + 2pqx^3 + q^2x^4$, so muß $b = 2fp$, also $p = \frac{b}{2f}$, und $c = 2fq + p^2$, also $q = \frac{c - p^2}{2f}$ sein; und die übrige Gleichung $dx^3 = 2pqx^3 + q^2x^4$ läßt sich theilen, und daraus wird $x = \frac{d - 2pq}{q^2}$.

118. Indessen kann es geschehen, daß, obgleich $a = f^2$, dennoch diese Methode keinen neuen Werth für x angiebt, wie aus der Formel $f^2 + dx^3$ zu ersehen, wo das zweite und dritte Glied fehlt.

Denn setzt man nach der ersten die Wurzel $= f + px$, so daß $f^2 + dx^3 = f^2 + 2fpx + p^2x^2$ sein soll, so muß $0 = 2fp$ und $p = 0$ sein, daher bekommt man $dx^3 = 0$, und daraus $x = 0$, welches kein neuer Werth ist.

Setzt man aber nach der andern Methode die Wurzel $= f + px + qx^2$, so daß $f^2 + dx^3 = f^2 + 2fpx + 2fqx^2 + p^2x^2 + 2pqx^3 + q^2x^4$ sein soll, so muß $0 = 2fp$ und $p = 0$, ferner $0 = 2fp + p^2$, und also $q = 0$ sein; daher man $dx^3 = 0$ und wiederum $x = 0$ bekommt.

119. In solchen Fällen ist nun nichts anderes zu thun, als daß man sehe, ob man nicht einen solchen Werth für x errathen könne, der die Formel zum Quadrat macht, indem man dann aus derselben nach der vorigen Methode neue Werthe für x finden kann; welches auch angeht, wenn das erste Glied kein Quadrat ist.

Um dies zu zeigen, soll die Formel $3 + x^3$ ein Quadrat sein. Da nun dies geschieht, wenn $x = 1$, so setze man $x = 1 + y$ und dann bekommt man die Gleichung $4 + 3y + 3y^2 + y^3$, in welcher das erste Glied ein Quadrat ist. Man setze also nach der ersten Methode die Wurzel davon $2 + py$, so wird $4 + 3y + 3y^2 + y^3 = 4 + 4py + p^2y^2$; um das zweite Glied wegzuschaffen, setze man $3 = 4p$, und also $p = \frac{3}{4}$, alsdann wird $3 + y = p^2$ und $y = p^2 - 3 = \frac{9}{16} - \frac{48}{16} = -\frac{39}{16}$, folglich $x = -\frac{23}{16}$, welches ein neuer Werth für x ist.

Setzt man weiter nach der zweiten Methode die Wurzel $= 2 + py + qy^2$, so wird $4 + 3y + 3y^2 + y^3 = 4 + 4py + 4qy^2 + p^2y^2 + 2pqy^3 + q^2y^4$, wo, um das zweite Glied wegzuschaffen, $3 = 4p$ oder $p = \frac{3}{4}$, und um das dritte wegzuschaffen $3 = 4q + p^2$ sein muß, also $q = \frac{3 - p^2}{4} = \frac{39}{64}$; so haben wir $1 = 2pq + q^2y$, und daraus $y = \frac{1 - 2pq}{q^2}$, oder $y = \frac{352}{1521}$, folglich $x = \frac{1873}{1521}$.

120. Nun wollen wir auch zeigen, wie man wenn man schon einen solchen Werth gefunden hat, daraus weiter einen andern neuen finden kann. Dieses wollen wir auf allgemeine Art darlegen, und auf folgende Formel anwenden:

$a + bx + cx^2 + dx^3$, von welcher schon bekannt sei, daß sie ein Quadrat werde, wenn $x = f$, und daß alsdann $a + bf + cf^2 + df^3 = g^2$ sei. Hierauf setze man $x = f + y$, so erhält man diese neue Formel:

$$\begin{array}{l} a \\ + bf + by \\ + cf^2 + 2cfy + cy^2 \\ + df^3 + 3df^2y + 3dfy^2 + dy^3 \\ \hline g^2 + (b + 2cf + 3df^2)\,y + (c + 3df)\,y^2 + dy^3 \end{array}$$

in welcher Formel das erste Glied ein Quadrat ist, so daß die beiden obigen Methoden angewandt werden können, wodurch neue Werthe für y und also auch für x erhalten werden, nämlich $x = f + y$.

121. Bisweilen hilft es aber auch nichts, wenn man selbst einen Werth für x errathen hat; wie in dieser Formel geschieht $1 + x^3$, welche ein Quadrat wird, wenn man $x = 2$ setzt. Denn setzt man dem zufolge $x = 2 + y$, so kommt diese Formel $9 + 12y + 6y^2 + y^3$ heraus, welche nun ein Quadrat sein soll. Es sei davon nach der ersten Regel die Wurzel $= 3 + py$, so wird $9 + 12y + 6y^2 + y^3 = 9 + 6py + p^2y^2$; daher ist $12 = 6p$ und $p = 2$; alsdann wird $6 + y = p^2 = 4$, und also $y = -2$; folglich $x = 0$, aus welchem Werthe nichts weiter gefunden werden kann.

Nehmen wir aber nach der zweiten Methode die Wurzel $= 3 + py + qy^2$, so wird $9 + 12y + 6y^2 + y^3 = q + 6py + 6qy^2 + p^2y^2 + 2pqy^3 + q^2y^4$, nun ist $12 = 6p$ und $p = 2$; ferner $6 = 6q + p^2 = 6p + 4$ und also $q = \frac{1}{3}$; hieraus erhält man $1 = 2pq + q^2y = \frac{4}{3} + \frac{1}{9}y$; daher $y = -3$, folglich $x = -1$ und $1 + x^3 = 0$; woraus nichts weiter geschlossen werden kann. Denn wollte man $x = -1 + z$ setzen, so entstände diese Formel $3z - 3z^2 + z^3$, wo das erste Glied wegfällt und also weder die eine noch die andere Methode gebraucht werden kann.

Hieraus wird schon sehr wahrscheinlich, daß die Formel $1 + x^3$ kein Quadrat werden kann außer in den drei Fällen:

I. $x = 2$; II. $x = 0$; III. $x = -1$.

Dies kann aber auch aus andern Gründen bewiesen werden.

122. Zur Uebung wollen wir noch die Formel $1 + 3x^3$ betrachten, welche in diesen Fällen ein Quadrat wird: I. $x = 0$; II. $x = 1$; III. $x = 2$; und wollen sehen, ob wir noch andere Werthe solcher Art finden können.

Da nun bekannt, daß $x = 1$ ein Werth ist, so setze man $x = 1 + y$, und dann bekommt man $1 + 3x^3 = 4 + 9y + 9y^2 + 3y^3$; davon sei die Wurzel $2 + py$, so daß $4 + 9y + 9y^2 + 3y^3 = 4 + 4py + p^2y^2$ sein soll, wo $9 = 4p$ und also $p = \frac{9}{4}$ sein muß; die übrigen Glieder geben aber $9 + 3y = p^2 = \frac{81}{16}$ und $y = -\frac{21}{16}$; folglich $x = -\frac{5}{16}$, da dann $1 + 3x^3$ ein Quadrat wird, wovon die Wurzel $-\frac{61}{64}$ oder auch $+\frac{61}{64}$ ist. Wollte man nun weiter $x = -\frac{5}{16} + z$ setzen, so würde man daraus wieder andere neue Werthe finden können.

Wollte man aber für die obige Formel nach der zweiten Methode die Wurzel setzen: $2 + py + qy^2$, so daß $4 + 9y + 9y^2 + 3y^3 = 4 + 4py + 4qy^2 + p^2y^2 + 2pqy^3 + q^2y^4$ sein soll, so müßte erstens $9 = 4p$, also $p = \frac{9}{4}$ sein; dann $9 = 4q + p^2 = 4q + \frac{81}{16}$, und also $q = \frac{63}{64}$; aus den noch übrigen Gliedern wird $3 = 2pq + q^2y = \frac{567}{128} + q^2y$, oder $567 + 128q^2y = 384$, oder $128q^2y = -183$, das ist $126 \cdot \frac{63}{64}y = -183$, oder $42 \cdot \frac{63}{64}y = -61$, daher $y = -\frac{1952}{1323}$, folglich $x = -\frac{629}{1323}$, aus welchem Werthe nach der obigen Anweisung wiederum andere neue gefunden werden können.

123 Hier haben wir aus dem bekannten Falle $x = 1$ zwei neue Werthe erhalten, aus welchen, wenn man sich die Mühe geben wollte, wiederum andere neue gefunden

werden könnten, wodurch man aber auf sehr weitläufige Brüche gerathen würde.

Daher hat man Ursache sich zu wundern, daß aus dem Falle $x = 1$ nicht auch der andere $x = 2$, der ebenfalls leicht in die Augen fällt, herausgebracht worden ist, was ohne Zweifel an der Unvollkommenheit der bisher erfundenen Methode liegt. Man kann in gleicher Art aus dem Falle $x = 2$ andere neue Werthe herausbringen. Man setze zu diesem Zwecke $x = 2 + y$, so daß diese Formel $25 + 36y + 18y^2 + 3y^3$ ein Quadrat sein soll; hievon sei die Wurzel nach der ersten Methode $5 + py$, so wird $25 + 36y + 18y^2 + 3y^3 = 25 + 10py + p^2y^2$, und also $36 = 10p$ oder $p = \frac{18}{5}$. Daraus wird aus den übrigen Gliedern durch y^2 dividirt, $18 + 3y = p^2 = \frac{324}{25}$, und daher $y = -\frac{42}{25}$ und $x = \frac{8}{25}$, hieraus wird $1 + 3x^3$ ein Quadrat, wovon die Wurzel $5 + py = -\frac{131}{125}$, oder $+\frac{131}{125}$ ist.

Will man ferner nach der andern Methode die Wurzel setzen $5 + py + qy^2$, so wird $25 + 36y + 18y^2 + 3y^3 = 25 + 10py + 10qy^2 + p^2y^2 + 2pqy^3 + q^2y^4$; hier muß um die zweiten und dritten Glieder wegzuschaffen $36 = 10p$, oder $p = \frac{18}{5}$ sein; alsdann $18 = 10q + p^2$, und $10q = 18 - \frac{324}{25} = \frac{126}{25}$, und $q = \frac{63}{125}$, die übrigen Glieder durch x^3 getheilt, geben $3 = 2pq + q^2y$, oder $q^2y = 3 - 2pq = -\frac{393}{625}$; also $y = -\frac{3275}{1323}$, und $x = -\frac{629}{1323}$.

124. Eben so schwer und mühsam wird diese Rechnung auch in solchen Fällen, in denen aus einem andern Grunde es ganz leicht ist, sogar eine allgemeine Auflösung zu geben, wie bei dieser Formel geschieht: $1 - x - x^2 + x^3$, wo auf allgemeine Art $x = n^2 - 1$ gesetzt werden kann und n jede beliebige Zahl bedeutet.

Denn wenn $n = 2$, so wird $x = 3$, und unsere Formel $= 1 - 3 - 9 + 27 = 16$. Nimmt man $n = 3$, so

wird $x = 8$, und unsere Formel $= 1 - 8 - 64 + 512 = 441$.

Es tritt aber hier ein ganz besonderer Umstand ein, welchem wir eine so leichte Auflösung zu verdanken haben. Dieser fällt sogleich in die Augen, wenn wir unsere Formel in Factoren auflösen. Es ist leicht einzusehen, daß sich dieselbe durch $1 - x$ theilen läßt und der Quotient $1 - x^2$ sein wird, welcher weiter aus diesen Factoren besteht: $(1 + x)(1 - x)$; so daß unsere Formel diese Gestalt erhält: $1 - x - x^2 + x^3 = (1 - x)(1 + x)(1 - x) = (1 - x)^2 . (1 + x)$. Da nun dieselbe ein Quadrat sein soll, und ein Quadrat, durch ein Quadrat dividirt, wieder ein Quadrat wird; so muß auch $1 + x$ ein Quadrat sein; und umgekehrt, wenn $1 + x$ ein Quadrat ist, so wird auch $(1 - x)^2 (1 + x)$ ein Quadrat, man braucht also nur zu setzen: $1 + x = n^2$, so bekommt man sogleich $x = n^2 - 1$.

Hätte man diesen Umstand nicht bemerkt, so würde es schwer gefallen sein, nach den obigen Methoden nur ein halbes Dutzend Werthe für x ausfindig zu machen.

125. Bei jeder gegebenen Formel ist es daher sehr förderlich, dieselbe in Factoren aufzulösen, wenn es nämlich möglich ist.

Wie dies anzustellen sei, ist schon früher angegeben worden. Man setzt nämlich die gegebene Formel $= 0$, und sucht von dieser Gleichung die Wurzel. Alsdann giebt jede Wurzel z. B. $x = f$, einen Factor $f - x$. Diese Untersuchung ist um so viel leichter anzustellen, als hier nur rationale Wurzeln gesucht werden, welche alle Theiler der bloßen Zahl sind.

126. Dieser Umstand trifft auch bei unserer allgemeinen Formel $a + bx + cx^2 + dx^3$ ein, wenn die zwei ersten Glieder wegfallen, so daß $cx^2 + dx^3$ ein Quadrat sein soll. Denn alsdann muß auch nothwendig diese Formel

durch das Quadrat x^2 dividirt, nämlich $c + dx$ ein Quadrat sein, indem man dann nur zu setzen braucht $c + dx = n^2$, um $x = \frac{n^2 - c}{d}$ zu bekommen, welche auf einmal unendlich viele, und sogar alle möglichen Auflösungen in sich enthält.

127. Wenn man bei dem Gebrauche der obigen ersten Methode den Buchstaben p nicht bestimmen wollte, um das zweite Glied wegzuschaffen, so würde man zu einer anderen irrationalen Formel gelangen, welche rational gemacht werden soll.

Es sei demnach die gegebene Formel: $f^2 + bx + cx^2 + dx^3$, und man setze die Wurzel davon $= f + px$, so wird $f^2 + bx + cx^2 + dx^3 = f^2 + 2fpx + p^2x^2$, wo sich das erste Glied aufhebt, die übrigen aber durch x dividirt, geben $b + cx + dx^2 = 2fp + p^2x$, welches eine quadratische Gleichung ist, daraus x gefunden wird, wie folgt:

$$x = \frac{p^2 - c + \sqrt{(p^4 - 2cp^2 - 8dfp + c^2 - 4bd)}}{2d}.$$

Jetzt kommt es also darauf an, daß man solche Werthe für p ausfindig macht, durch welche die Formel $p^4 - 2cp^2 + 8dfp + c^2 - 4bd$ ein Quadrat werde. Da nun hier die vierte Potenz der gesuchten Zahl p vorkommt, so gehört dieser Fall in das folgende Kapitel.

Kapitel 9.

Von der Art, die irrationale Formel $\sqrt{(a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4)}$ rational zu machen.

128. Wir kommen nun zu solchen Formeln, in denen die unbestimmte Zahl x zur vierten Potenz aufsteigt, womit wir zugleich unsere Untersuchung über die Quadratwurzelzeichen beendigen müssen, indem es bisher noch nicht gelungen ist, Formeln, in denen höhere Potenzen von x vorkommen, in Quadrate zu verwandeln.

Bei dieser Formel kommen aber drei Fälle in Betracht. Der erste ist, wenn das erste Glied a ein Quadrat; der zweite, wenn das letzte ex^4 ein Quadrat ist; der dritte Fall, wenn das erste und letzte Glied zugleich Quadrate sind. Diese drei Fälle wollen wir hier besonders behandeln.

129. I. Auflösung der Formel: $\sqrt{(f^2 + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4)}$.

Da hier das erste Glied ein Quadrat ist, so könnte man auch nach der ersten Methode die Wurzel $= f + px$ setzen, und p so bestimmen, daß die beiden ersten Glieder wegfielen und die übrigen sich durch x^2 theilen ließen; allein alsdann würde in der Gleichung doch noch x^2 vorkommen, und also die Bestimmung des x ein neues Wurzelzeichen erfordern. Man muß also sogleich die zweite Methode anwenden und die Wurzel $= f + px + qx^2$ setzen, hierauf die Buchstaben p und q so bestimmen, daß die drei ersten Glieder wegfallen, und also die übrigen durch x^3 theilbar werden, worauf dann nur eine einfache Gleichung herauskommt, aus welcher x ohne Wurzelzeichen bestimmt werden kann.

130. Man setze daher die Wurzel $= f + px + qx^2$, so daß $f^2 + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 = f^2 + 2fpx + 2fqx^2 + p^2x^2 + 2pqx^3 + q^2x^4$ sein soll, wo die ersten Glieder von selbst wegfallen; für die zweiten setze man $b = 2fp$, oder $p = \frac{b}{2f}$, so muß für die dritten Glieder $c = 2fq + p^2$, oder $q = \frac{c - p^2}{2f}$ sein; ist dieses geschehen, so lassen sich die übrigen Glieder durch x^3 theilen und geben diese Gleichung: $d + ex = 2pq + q^2x$; woraus gefunden wird $x = \frac{d - 2pq}{q^2 - e}$ oder $x = \frac{2pq - d}{e - q^2}$.

131. Es ist aber leicht zu sehen, daß durch diese Methode nichts gefunden wird, wenn das zweite und dritte Glied in der Formel fehlt, oder wenn sowohl $b = 0$ als

$e = 0$, weil alsdann $p = 0$ und $q = 0$, folglich $x = \frac{d}{-e}$; woraus aber gewöhnlich nichts neues gefunden werden kann; denn in diesem Falle wird offenbar $dx^3 + ex^4 = 0$ und also unsere Formel dem Quadrate f^2 gleich. Besonders aber, wenn auch $d = 0$, so kommt $x = 0$, welcher Werth nichts weiter hilft, daher diese Methode für solche Formel $f^2 + ex^4$ keine Dienste leistet. Derselbe Umstand ereignet sich auch, wenn $b = 0$ und $d = 0$, oder wenn das zweite und vierte Glied fehlt, und die Formel diese Gestalt hat: $f^2 + cx^2 + ex^4$. Denn dann wird $p = 0$ und $q = \frac{c}{2f}$, woraus gefunden wird $x = 0$, welcher Werth sogleich in die Augen fällt und zu nichts weiter führt.

132. II. Auflösung der Formel: $\sqrt{(a + bx + cx^2 + dx^4 + g^2x^4)}$.

Diese Formel könnte sogleich auf den ersten Fall gebracht werden, indem man $x = \frac{1}{y}$ setzt. Denn weil alsdann die Formel $a + \frac{b}{y} + \frac{c}{y^2} + \frac{d}{y^3} + \frac{g^2}{y^4}$ ein Quadrat sein müßte, so muß auch dieselbe mit dem Quadrate y^4 multiplicirt ein Quadrat bleiben; alsdann aber bekommt man die Formel $ay^4 + by^3 + cy^2 + dy + g^2$, welche rückwärts geschrieben der obigen vollkommen ähnlich ist.

Man hat dies aber nicht nöthig, sondern man kann die Wurzel davon so ansetzen: $gx^2 + px + q$, oder umgekehrt $q + px + gx^2$, da dann $a + bx + cx^2 + dx^3 + g^2x^4 = q^2 + 2pqx + 2gqx^2 + p^2x^2 + 2gpx^3 + g^2x^4$, weil sich nun hier die fünften Glieder von selbst aufheben, so bestimme man erstens p, so daß sich auch die vierten Glieder aufheben, welches geschieht, wenn $d = 2gp$ oder $p = \frac{d}{2g}$. Dann bestimme man weiter q, so daß sich auch die dritten Glieder aufheben, welches geschieht, wenn $c = 2gq + p^2$ oder $q = \frac{c - p^2}{2g}$. Ist dies geschehen, so geben die zwei ersten Glieder diese Gleichung: $a + bx = q^2 + 2pqx$, woraus gefunden wird: $x = \frac{a - q^2}{2pq - b}$, oder $x = \frac{q^2 - a}{b - 2pq}$.

133. Hier tritt wiederum der oben angeführte Uebelstand ein, wenn das zweite und vierte Glied fehlt oder wenn $b = 0$ und $d = 0$; denn dann wird $p = 0$ und $q = \frac{c}{2g}$, hieraus also $x = \frac{a - q^2}{0}$, welcher Werth unendlich groß ist, und eben so wenig zu einem Resultate führt als der Werth $x = 0$ im ersteren Falle. Daher kann diese Methode bei Gleichungen von der Form $a + cx^2 + g^2x^4$ nicht gebraucht werden.

134. III. Auflösung der Formel $\sqrt{(f^2 + bx + cx^2 + dx^3 + g^2x^4)}$:

Es ist klar, daß bei dieser Formel beide erörterte Methoden angewandt werden können. Denn, da das erste Glied ein Quadrat ist, kann man die Wurzel $f + px + qx^2$ setzen und die drei ersten Glieder verschwinden lassen; ferner, da das letzte Glied ein Quadrat ist, kann man die Wurzel auch $q + px + gx^2$ setzen, und die drei letzten Glieder verschwinden lassen, wodurch man dann zwei Werthe für x herausbringt. Auch kann man diese Formel noch auf zwei andere Arten behandeln, welche derselben eigenthümlich sind.

Nach der ersten Art setzt man die Wurzel $= f + px + gx^2$, und bestimmt p also, daß die zweiten Glieder wegfallen, weil nämlich $f^2 + bx + cx^2 + dx^3 + g^2x^4 = f^2 + 2fpx + 2fgx^2 + p^2x^2 + 2gpx^3 + g^2x^4$ sein soll, so mache man $b = 2fp$ oder $p = \frac{b}{2f}$, und weil alsdann nicht nur die ersten und letzten Glieder, sondern auch die zweiten sich aufheben, so geben die übrigen durch x^2 dividirt diese Gleichung: $c + dx = 2fg + p^2 + 2gpx$, woraus gefunden wird $x = \frac{c - 2fg - p^2}{2gp - d}$, oder $x = \frac{p^2 + 2fg - c}{d - 2gp}$. Hier

ist besonders zu bemerken, daß, da in der Formel nur das Quadrat g^2 vorkommt, die Wurzel davon g sowohl negativ als auch positiv genommen werden kann; woraus man noch einen andern Werth für x erhält, nämlich $x = \frac{c + 2fg - p^2}{-2gp - d}$ oder $x = \frac{p^2 - 2fg - c}{2gp + d}$.

135. Es giebt auch noch einen andern Weg, um diese Formel aufzulösen. Man setze nämlich wie vorher die Wurzel $= f + px + gx^2$, bestimme aber p derartig, daß die vierten Glieder sich aufheben, man setze also in der obigen Gleichung $d = 2gp$ oder $p = \frac{d}{2g}$, und weil auch das erste Glied mit dem letzten wegfällt, so geben die übrigen, durch x dividirt, diese einfache Gleichung: $b + cx = 2fp + 2fgx + p^2x$, woraus man findet $x = \frac{b - 2fp}{2fg + p^2 - c}$. Hiebei ist noch zu bemerken, daß, weil in der Formel nur das Quadrat f^2 vorkommt, die Wurzel davon auch $-f$ gesetzt werden kann, daß so auch $x = \frac{b + 2fp}{p^2 - 2fg - c}$ sein wird; daher werden auch hieraus zwei neue Werthe für x gefunden und folglich durch die bisher erklärten Methoden im Ganzen sechs neue Werthe angegeben.

136. Hier tritt aber wiederum der verdrießliche Umstand ein, daß, wenn das zweite und vierte Glied fehlt, oder $b = 0$ und $d = 0$, kein für unsere Zwecke brauchbarer Werth für x herausgebracht und also die Auflösung der Formel $f^2 + cx^2 + g^2x^4$ dadurch nicht erhalten werden kann. Denn weil $b = 0$ und $d = 0$, so hat man für die beiden Arten $p = 0$, und daher giebt die erste $x = \frac{c - 2fg}{0}$, die andere Art aber $x = 0$, aus welchen beiden nichts weiter gefunden werden kann.

137. Dieses sind nun die drei Formeln, auf welche die bisher erklärten Methoden angewandt werden können.

Wenn aber in der gegebenen Formel weder das erste noch das letzte Glied ein Quadrat ist, so ist nichts auszurichten, bis man einen solchen Werth für x gefunden hat, durch welchen die Formel ein Quadrat wird. Nehmen wir demnach an, man hätte schon gefunden, daß unsere Formel ein Quadrat werde, wenn man $x = h$ setzt, also daß $a + bh + ch^2 + dh^3 + eh^4 = k^2$, so braucht man nur $x = h + y$ zu setzen, um eine neue Formel zu erhalten, in welcher das erste Glied k^2 und also ein Quadrat sein wird, daher der erste Fall gebraucht werden kann. Diese Verwandlung kann auch gebraucht werden, wenn man in den vorhergehenden Fällen schon einen Werth für x als z. B. $x = h$ gefunden hat, denn dann braucht man nur $x = h + y$ setzen, so erhält man eine neue Gleichung, auf welche die obige Methode angewandt werden kann. Alsdann ergeben sich aus den schon gefundenen Werthen für x andere neue, und mit diesen neuen kann man wieder auf gleiche Weise verfahren und also immer mehr neue Werthe für x ausfindig machen.

138. Besonders aber ist von den schon mehrfach erwähnten Formeln, in denen das zweite und vierte Glied fehlt, zu bemerken, daß keine Auflösung derselben zu finden ist, wofern man nicht schon eine errathen hat; wie alsdann zu verfahren sei, wollen wir bei der Formel $a + ex^4$ zeigen, welche sehr oft vorzukommen pflegt.

Wir wollen also setzen, man habe schon einen Werth für $x = h$ errathen, so daß $a + eh^4 = k^2$ sei. Um nun daraus noch andere zu finden, setze man $x = h + y$, so wird diese Formel ein Quadrat sein müssen: $a + eh^4 + 4eh^3y + 6eh^2y^2 + 4ehy^3 + ey^4$, das ist $k^2 + 4eh^3y + 6eh^2y^2 + 4ehy^3 + ey^4$, welche zu der ersten Art gehört; man setze daher die Quadratwurzel davon $k + py + qy^2$ und folglich unsere Formel gleich diesem Quadrate: $k^2 + 2kpy + 2kqy^2 + 2pqy^3 + q^2y^4$, wo erstens p und

$+ p^2y^2$

q so bestimmt werden müssen, daß auch die zweiten Glieder wegfallen, weshalb $4eh^3 = 2kp$ und also $p = \frac{2eh^3}{k}$ sein muß; ferner $6eh^2 = 2kq + p^2$, daher $q = \frac{6eh^2 - p^2}{2k}$, oder $q = \frac{3eh^2k^2 - 2e^2h^6}{k^3}$, oder $q = \frac{eh^2(3k^2 - 2eh^4)}{k^3}$; folglich, da $eh^4 = k^2 - a$, so wird $q = \frac{eh^2(k^2 + 2a)}{k^3}$; dann geben die folgenden Glieder, durch y^3 dividirt: $4eh + ey = 2pq + q^2y$, woraus gefunden wird $y = \frac{4eh - 2pq}{q^2 - e}$, wovon der Zähler in die Form $\frac{4ehk^4 - 4e^2h^5(k^2 + 2a)}{k^4}$ gebracht wird, welche ferner, da $eh^4 = k^2 - a$, in diese verwandelt wird: $\frac{4ehk^4 - 4eh(k^2 - a)(k^2 + 2a)}{k^4}$, oder $\frac{4eh(-ak^2 + 2a^2)}{k^4}$, oder $\frac{4aeh(2a - k^2)}{k^4}$. Der Nenner aber $q^2 - e$ wird $= \frac{e(k^2 - a)(k^2 + 2a)^2 - ek^6}{k^6}$, und dieses wird $= \frac{e(3ak^4 - 4a^3)}{k^6} = \frac{ea(3k^4 - 4a^2)}{k^6}$, woraus der gesuchte Werth sein wird $y = \frac{2aeh(2a - k^2)}{k^4} \cdot \frac{k^6}{ae(3k^4 - 4a^2)}$! das ist $y = \frac{2hk^2(2a - k^2)}{3k^4 - 3a^2}$, und daher $x = \frac{h(8ak^2 - k^4 - 4a^2)}{3k^4 - 4a^2}$ oder $x = \frac{h(k^4 - 8ak^2 + 4a^2)}{4a^2 - 3k^4}$. Setzt man nun diesen Werth für x, so wird unsere Formel $a + ex^4$ ein Quadrat, dessen Wurzel $k + py + qy^2$ sein wird, die in diese Form gebracht wird:

$$k + \frac{8k(k^2 - a)(2a - k^2)}{3k^4 - 4a^2} + \frac{16k(k^2 - a)(k^2 + 2a)(2a - k^2)^2}{(3k^4 - 4a^2)^2},$$

weil, wie wir gesehen haben, $p = \frac{2eh^2}{k}$, und $q = \frac{eh^2(k^2 + 2a)}{k^3}$, und $y = \frac{4hk^2(2a - k^2)}{3k^4 - 4a^2}$ ist.

139. Wir wollen bei dieser Formel $a + ex^4$ noch

stehen bleiben. Da der Fall $a + eh^4 = k^2$ bekannt ist, können wir denselben als zwei Fälle ansehen, weil sowohl $x = -h$ als $x = +h$ ist, und deswegen können wir diese Formel in eine andere von der dritten Art verwandeln, in der das erste und letzte Glied Quadrate werden. Dies geschieht, wenn wir $x = \frac{h(1 + y)}{1 - y}$ setzen, welcher Kunstgriff häufig gute Dienste leistet, also wird unsere Formel: $\frac{a(1 - y)^4 + eh^4(1 + y)^4}{(1 - y)^4}$ oder

$$\frac{k^2 + 4(k^2 - 2a)y + 6k^2y^2 + 4(k^2 - 2a)y^3 + k^2y^4}{(1 - y)^4}.$$

Hievon setze man die Quadratwurzel nach dem dritten Fall $\frac{k + py - ky^2}{(1 - y)^2}$, so daß der Zähler unserer Formel gleich sein muß diesem Quadrate $k^2 + 2kpy - 2k^2y^2 + p^2y^2 - 2kpy^3 + k^2y^4$. Man mache, daß die zweiten Glieder wegfallen, welches geschieht, wenn $4k^2 - 8a = 2kp$, oder $p = \frac{2k^2 - 4a}{k}$; die übrigen Glieder durch y^2 dividirt, geben $6k^2 + 4(k^2 - 2a)y = -2k^2 + p^2 - 2kpy$, oder $y(4k^2 - 8a + 2kp) = p^2 - 8k^2$; da nun $p = \frac{2k^2 - 4a}{k}$, und $pk = 2k^2 - 4a$, so wird $y(8k^2 - 16a) = \frac{-4k^4 - 16ak^2 + 16a^2}{k^2}$; folglich $y = \frac{-k^4 - 4ak^2 + 4a^2}{k^2(2k^2 - 4a)}$; um nun daraus x zu finden, haben wir erstens:

$$1 + y = \frac{k^4 - 8ak^2 + 4a^2}{k^2(2k^2 - 4a)}, \text{ und zweitens}$$

$$1 - y = \frac{3k^4 - 4a^2}{k^2(2k^2 - 4a)}; \text{ also}$$

$\frac{1 + y}{1 - y} = \frac{k^4 - 8ak^2 + 4a^2}{3k^4 - 4a^2}$; folglich bekommen wir $x = \frac{k^4 - 8ak^2 + 4a^2}{3k^4 - 4a^2} \cdot h$, welches der nämliche Ausdruck ist, den wir schon vorher gefunden haben.

140. Um dies durch ein Beispiel zu erläutern, sei die

Formel gegeben: $2x^4 - 1$, welche ein Quadrat sein soll. Hier ist nun $a = -1$ und $e = 2$, der bekannte Fall aber, in dem diese Formel ein Quadrat wird, ist, wenn $x = 1$; also ist $h = 1$ und $k^2 = 1$, das ist $k = 1$. Hieraus erhalten wir sogleich diesen neuen Werth $x = \frac{1 + 8 + 4}{3 - 4} = -13$, weil aber von x nur die vierte Potenz vorkommt, so kann man auch setzen $x = +13$, und daraus wird $2x^4 - 1 = 57121 = (239)^2$.

Nehmen wir nun diesen Fall als bekannt an, so wird $h = 13$ und $k = 239$, woraus wieder ein neuer Werth für x gefunden wird, nämlich $x = \frac{815730721 + 228488 + 4}{244192163 - 4} \cdot 13 = \frac{815959213}{244192159} \cdot 13$, also wird $x = \frac{10607469769}{244192159}$.

141. In gleicher Weise wollen wir die etwas allgemeinere Formel $a + cx^2 + ex^4$ betrachten, und für den bekannten Fall, in dem dieselbe ein Quadrat wird, annehmen $x = h$, so daß $a + ch^2 + eh^4 = k^2$. Um nun daraus andere zu finden, setze man $x = h + y$, da dann unsere Formel diese Gestalt bekommen wird:

$$\begin{array}{l} a \\ ch^2 + 2chy + cy^2 \\ eh^4 + 4eh^3y + 6eh^2y^2 + 4ehy^3 + ey^4 \\ \hline k^2 + (2ch + 4eh^3)y + (c + 6eh^2)y^2 + 4ehy^3 + ey^4 \end{array}$$

wo das erste Glied ein Quadrat ist. Man setze daher die Quadratwurzel davon $k + py + qy^2$, so daß unsere Formel dem Quadrate $k^2 + 2kpy + 2kqy^2 + p^2y^2 + 2pqy^3 + q^2y^4$ gleich sein soll; nun bestimme man p und q so, daß die zweiten und dritten Glieder wegfallen, wozu erfordert wird, erstens, daß $2ch + 4eh^3 = 2kp$ oder $p = \frac{ch + 2eh^3}{k}$, dann aber daß $c + 6eh^2 = 2kq + p^2$, oder $q = \frac{c + 6eh^2 - p^2}{2k}$; alsdann geben die folgenden Glieder durch y^3 dividirt diese Gleichung: $4eh + ey = 2pq + q^2y$,

woraus gefunden wird $y = \frac{4eh - 2pq}{q^2 - e}$, und ferner $x = h + y$; in welchem Falle die Quadratwurzel aus unserer Formel sein wird: $k + py + qy^2$. Sieht man nun dies wieder als den anfänglich bekannten Fall an, so findet man daraus wieder einen neuen Fall, und kann daher in solcher Art so weit fortgehen, als man will.

142. Um dies zu erläutern, sei die gegebene Formel: $1 - x^2 + x^4$, wo folglich $a = 1$, $c = -1$ und $e = 1$. Der bekannte Fall fällt sogleich in die Augen, nämlich $x = 1$, so daß $h = 1$ und $k = 1$. Setzt man nun $x = 1 + y$, und die Quadratwurzel unserer Formel $= 1 + py + qy^2$, so muß erstens $p = 1$ und dann $q = 2$ sein; hieraus wird $y = 0$ und $x = 1$, welches eben der schon bekannte Fall ist, und es ist also kein neuer gefunden worden. Man kann aber aus andern Gründen beweisen, daß diese Formel kein Quadrat sein kann, außer in den Fällen $x = 0$ und $x = \pm 1$.

143. Es sei ferner die Formel $2 - 3x^2 + 2x^4$ als Beispiel gegeben, wo $a = 2$, $c = -3$ und $e = 2$. Der bekannte Fall ergiebt sich auch sogleich, nämlich $x = 1$. Es sei demnach $h = 1$, so wird $k = 1$; setzt man nun $x = 1 + y$ und die Quadratwurzel $1 + py + qy^2$, so wird $p = 1$ und $q = 4$. Daraus erhalten wir $y = 0$ und $x = 1$, woraus wieder nichts Neues gefunden wird.

144. Ein anderes Beispiel sei die Formel: $1 + 8x^2 + x^4$, wo $a = 1$, $c = 8$ und $e = 1$. Nach einiger Betrachtung ergiebt sich der Fall $x = 2$; denn nimmt man $h = 2$, so wird $k = 7$; setzt man nun $x = 2 + y$, und die Wurzel $7 + py + qy^2$, so muß $p = \frac{32}{7}$, und $q = \frac{272}{343}$ sein; hieraus erhalten wir $y = -\frac{5880}{2911}$ und $x = -\frac{58}{2911}$, wo das Zeichen — weggelassen werden kann. Bei diesem Beispiel aber ist zu bemerken, daß, weil das letzte Glied schon an und für sich ein Quadrat ist, und also auch

in der neuen Formel ein Quadrat bleiben muß, die Wurzel auch noch anders nach dem obigen dritten Falle angenommen werden kann.

Es sei demnach, wie vorher, $x = 2 + y$, so bekommen wir:

$$\begin{array}{l} 1 \\ 32 + 32y + \ \ 8y^2 \\ 16 + 32y + 24y^2 + 8y^3 + y^4 \\ \hline 49 + 64y + 32y^2 + 8y^3 + y^4, \end{array}$$

welcher Werth jetzt auf mehrere Arten zu einem Quadrat gemacht werden kann; denn erstens kann man die Wurzel $7 + py + y^2$ setzen, so daß unsere Formel diesem Quadrate gleich wird: $49 + 14py + \substack{14y^2 \\ + p^2y^2} + 2py^3 + y^4$; nun kann man, um die vorletzten Glieder verschwinden zu lassen, $2p = 8$ oder $p = 4$ setzen; da dann die übrigen durch y dividirt $64 + 32y = 14p + 14y + p^2y = 56 + 30y$ geben, und daher $y = -4$ und $x = -2$, oder $x = +2$, welches der bekannte Fall selbst ist.

Nimmt man aber p so an, daß die zweiten Glieder wegfallen, so wird $14p = 64$ und $p = \frac{32}{7}$; da dann die übrigen Glieder, durch y^2 dividirt, $14 + p^2 + 2py = 32 + 8y$, oder $\frac{1710}{49} + \frac{64}{7}y = 32 + 8y$ geben, und daher $y = -\frac{71}{28}$, folglich $x = -\frac{15}{28}$ oder $x = +\frac{15}{28}$, welcher Werth unsere Formel zu einem Quadrate macht, dessen Wurzel $\frac{144}{784}$ ist. Da auch $-y^2$ die Wurzel des letzten Gliedes ist, so kann man die Quadratwurzel davon $7 + py - y^2$, oder die Formel selbst dem Quadrate $49 + 14py \substack{-14y^2 \\ + p^2y^2} - 2py^3 + y^4$ gleich setzen. Um nun die vorletzten Glieder wegzubringen, setze man $8 = -2p$, oder $p = -4$, so geben die übrigen, durch y dividirt, $64 + 32y = 14p - 14y + p^2y = -56 + 2y$, daraus wird $y = -4$ wie vorher.

Läßt man aber die zweiten Glieder verschwinden, so wird $64 = 14p$ und $p = \frac{32}{7}$; die übrigen aber, durch y^2 dividirt, geben $32 + 8y = -14 + p^2 - 2py$, oder $32 + 8y = \frac{338}{49} - \frac{64}{7}y$, daraus wird $y = -\frac{71}{28}$ und $x = \mp \frac{15}{28}$, welches der vorher bereits angegebene Werth ist.

145. Eben so kann man mit der allgemeinen Formel $a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4$ verfahren, wenn ein Fall, nämlich $x = h$, bekannt ist, in dem dieselbe ein Quadrat, nämlich k^2, wird. Denn alsdann setze man $x = h + y$, so erhält man eine Formel von eben so viel Gliedern, von denen das erste k^2 sein wird; wird nun die Wurzel davon gesetzt $k + py + qy^2$, und bestimmt man p und q derartig, daß auch die zweiten und dritten Glieder wegfallen, so geben die beiden letzten durch y^3 dividirt eine einfache Gleichung, woraus y und folglich auch x bestimmt werden kann.

Nur fallen hier solche Fälle weg, in denen der neu gefundene Werth von x mit dem bekannten $x = h$ identisch ist, weil alsdann nichts Neues gefunden wird. In solchen Fällen ist entweder die Formel an sich selbst unmöglich, oder man müßte noch einen andern Fall errathen, in dem dieselbe ein Quadrat wird.

146. Nur so weit ist man bisher in der Auflösung der Formeln gelangt, aus denen Quadratwurzeln gezogen werden sollen. Man hat noch keine Methode gefunden, um diejenigen zu lösen, in denen die unbekannten Werthe unter dem Quadratwurzelzeichen die vierte Potenz übersteigen. Sollte daher in einer solchen Formel die fünfte oder eine noch höhere Potenz von x vorkommen, so sind die bisherigen Kunstgriffe nicht ausreichend, um eine Auflösung davon zu ergeben, selbst wenn auch schon ein Fall bekannt wäre. Um dies deutlicher zu zeigen, betrachte man die Formel: $k^2 + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 + fx^5$, wo das erste Glied schon ein Quadrat ist. Wollte man nun die Wurzel davon wie vorher $k + px + qx^2$ setzen, und p und q so bestimmen, daß die zweiten und dritten Glieder wegfielen,

so blieben doch noch drei übrig, welche durch x^3 dividirt eine quadratische Gleichung geben würden, woraus x durch ein neues Wurzelzeichen bestimmt würde. Wollte man aber die Wurzel $k + px + qx^2 + rx^3$ setzen, so würde das Quadrat bis zur sechsten Potenz aufsteigen, so daß, wenn auch p, q und r so bestimmt würden, daß die zweiten, dritten und vierten Glieder wegfielen, dennoch die vierte, fünfte und sechste Potenz übrig bliebe, welche durch x^4 dividirt, wieder zu einer quadratischen Gleichung führte, und also nicht ohne Wurzelzeichen aufgelöst werden könnte. Daher sind wir genöthigt, hiemit die Formeln, die in Quadrate verwandelt werden sollen, zu verlassen. Wir wollen nunmehr zu den cubischen Wurzelzeichen übergehen.

Kapitel 10.

Von der Art, die Irrationalformel $\sqrt[3]{(a + bx + cx^2 + dx^3)}$ rational zu machen.

147. Hier werden also solche Werthe für x verlangt, daß die Formel $a + bx + cx^2 + dx^3$ eine Cubikzahl werde, und daraus also die Cubikwurzel gezogen werden könne. Hiebei ist zu erinnern, daß diese Formel die dritte Potenz nicht überschreiten darf, weil sonst die Auflösung davon nicht zu hoffen wäre. Sollte die Formel nur bis auf die zweite Potenz gehen und das Glied dx^3 wegfallen, so würde die Auflösung nicht leichter werden. Fielen aber die zwei letzten Glieder weg, so daß die Formel $a + bx$ zu einem Cubus gemacht werden müßte, so hätte die Sache gar keine Schwierigkeit, indem man nur $a + bx = p^3$ zu setzen braucht, woraus sogleich $x = \frac{p^3 - a}{b}$ gefunden würde.

148. Hier ist wiederum vor allen Dingen zu bemerken, daß, wenn weder das erste noch das letzte Glied ein Cubus ist, an keine Auflösung zu denken wäre, wofern nicht schon ein Fall, in dem die Formel ein Cubus wird, bekannt ist, derselbe mag nun sofort in die Augen fallen, oder erst durch Probiren gefunden werden.

Das Erstere geschieht nun, erstens, wenn das erste Glied ein Cubus und die Formel $f^3 + bx + cx^2 + dx^3$ ist, wo der bekannte Fall $x = 0$ ist; dann auch wenn, das letzte Glied ein Cubus und die Formel so beschaffen ist: $a + bx + cx^2 + g^3x^3$. Aus diesen beiden Fällen entsteht der dritte, in dem sowohl das erste als letzte Glied ein Cubus ist, welche drei Fälle wir hier erwägen wollen.

149. I. Fall. Es sei die gegebene Formel $f^3 + bx + cx^2 + dx^3$, welche ein Cubus werden soll.

Man setze daher die Wurzel davon $f + px$, so daß unsere Formel diesem Cubus $f^3 + 3f^2px + 3fp^2x^2 + p^3x^3$ gleich sein soll. Da nun die ersten Glieder von selbst wegfallen, so bestimme man p derartig, daß auch die zweiten wegfallen, welches geschieht, wenn $b = 3f^2p$, oder $p = \frac{b}{3f^2}$. Alsdann geben die übrigen Glieder durch x^2 dividirt die Gleichung: $c + dx = 3fp^2 + p^3x$, woraus gefunden wird $x = \frac{c - 3fp^2}{p^3 - d}$. Wäre das letzte Glied dx^3 nicht vorhanden, so könnte man die Cubikwurzel schlechtweg setzen $= f$, da man dann bekommen würde $f^3 = f^3 + bx + cx^2$; oder $b + cx = 0$ und daraus $x = -\frac{b}{c}$, woraus aber nichts weiter geschlossen werden könnte.

150. II. Fall. Die gegebene Formel habe nun zweitens diese Gestalt: $a + bx + cx^2 + g^3x^3$. Man setze die Cubikwurzel $p + gx$, wovon der Cubus $p^3 + 3gp^2x + 3g^2px^2 + g^3x^3$ ist, da sich dann die letzten Glieder aufheben. Nun bestimme man p, so daß auch die vorletzten wegfallen, welches geschieht, wenn $c = 3g^2p$ oder $p = \frac{c}{3g^2}$. Alsdann geben die zwei ersten diese Gleichung: $a + bx = p^3 + 3gp^2x$, woraus gefunden wird $x = \frac{a - p^3}{3gp^2 - b}$. Wäre das erste Glied a nicht vorhanden gewesen, so hätte man die Cubikwurzel auch schlechtweg setzen können $= gx$, da dann $g^3x^3 = bx + cx^2 + g^3x^3$

oder $0 = b + cx$, folglich $x = -\frac{b}{c}$; welches aber gewöhnlich zu nichts dient.

151. III. Fall. Es sei endlich drittens die gegebene Formel: $f^3 + bx + cx^2 + g^3x^3$, worin sowohl das erste als letzte Glied ein Cubus ist; daher dieselbe auf beide vorhergehende Arten behandelt und also zwei Werthe für x herausgebracht werden können.

Außer diesen kann man aber auch noch die Wurzel $f + gx$ setzen, so daß unsere Formel diesem Cubus gleich werden soll: $f^3 + 3f^2gx + 3fg^2x^2 + g^3x^3$, da dann die ersten und letzten Glieder einander aufheben, die übrigen aber durch x dividirt die Gleichung geben: $b + cx = 3f^2g + 3fg^2x$, und daraus $x = \frac{b - 3f^2g}{3fg^2 - c}$.

152. Fällt aber die gegebene Formel in keine von diesen drei Arten, so ist dabei nichts Anderes zu thun, als daß man einen Werth zu errathen sucht, der sie zum Cubus macht. Hat man einen solchen gefunden, welcher $x = h$ sei, so daß $a + bh + ch^2 + dh^3 = k^3$, so setze man $x = h + y$, worauf dann unsere Formel die Gestalt bekommen wird:

$$\begin{array}{l} a \\ bh + by \\ ch^2 + 2chy + cy^2 \\ dh^3 + 3dh^2y + 3dhy^2 + dy^3 \\ \hline k^3 + (b + 2ch + 3dh^2)\,y + (c + 3dh)\,y^2 + dy^3 \end{array}$$

Diese gehört zu der ersten Art, und es kann also für y ein Werth gefunden werden, aus dem man dann einen neuen Werth für x erhält, aus welchem nachher auf gleiche Weise noch mehr gefunden werden können.

153. Wir wollen nun diese Methode durch einige Beispiele erläutern und erstens die Formel $1 + x + x^2$ vornehmen, welche ein Cubus sein soll, und zur ersten Art gehört. Man könnte also sogleich die Cubikwurzel $= 1$

setzen, woraus gefunden würde $x + x^2 = 0$, das ist $x\,(1 + x) = 0$; folglich entweder $x = 0$ oder $x = -1$, woraus aber nichts weiter folgt. Man setze daher die Cubikwurzel $1 + px$, wovon der Cubus ist $1 + 3px + 3p^2x^2 + p^3x^3$, und mache $1 = 3p$ oder $p = \frac{1}{3}$, so geben die übrigen Glieder, durch x^2 dividirt, $1 = 3p^2 + p^3x$, oder $x = \frac{1 - 3p^2}{p^3}$. Da nun $p = \frac{1}{3}$, so wird $x = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{1}{27}} = 18$, und daher unsere Formel $1 + 18 + 324 = 343$, wovon die Cubikwurzel $1 + px = 7$ ist. Wollte man nun weiter setzen $x = 18 + y$, so würde unsere Formel diese Gestalt bekommen: $343 + 37y + y^2$, wovon nach der ersten Regel die Cubikwurzel zu setzen wäre $7 + py$, wovon der Cubus ist $343 + 147py + 21p^2y^2 + p^3y^3$. Nun setze man $37 = 147p$, oder $p = \frac{37}{147}$, so geben die übrigen Glieder diese Gleichung: $1 = 21p^2 + p^3y$, also $y = \frac{1 - 21p^2}{p^3}$, das ist $y = -\frac{340\,.\,121\,.\,147}{37^3} = -\frac{1049580}{50653}$, woraus noch weiter neue Werthe gefunden werden können.

154. Es sei ferner die Formel gegeben: $2 + x^2$, welche ein Cubus werden soll. Hier muß nun vor allen Dingen ein Fall errathen werden, in welchem dies geschieht; ein solcher ist $x = 5$. Man setze demnach sogleich $x = 5 + y$, so bekommt man $27 + 10y + y^2$. Davon sei die Cubikwurzel $3 + py$, und also die Formel selbst diesem Cubus $27 + 27py + 9p^2y^2 + p^3y^3$ gleich; man mache $10 = 27p$, oder $p = \frac{10}{27}$, so bekommt man $1 = 9p^2 + p^3y$, und daraus $y = \frac{1 - 9p^2}{p^3}$, das ist $y = -\frac{19\,.\,9\,.\,27}{1000}$, oder $y = -\frac{4617}{1000}$, und $x = \frac{383}{1000}$. Hieraus wird unsere Formel $2 + x^2 = \frac{2146689}{1000000}$, wovon die Cubikwurzel $3 + py = \frac{129}{100}$ sein muß.

155. Man betrachte ferner die Formel $1 + x^3$ und untersuche, ob dieselbe ein Cubus werden könne, außer in den zwei offenbaren Fällen $x = 0$ und $x = -1$. Obgleich

diese Formel zum dritten Falle gehört, hilft uns doch die Wurzel $1 + x$ Nichts, weil der Cubus davon $1 + 3x + 3x^2 + x^3$, unserer Formel gleich gesetzt, $3x + 3x^2 = 0$ oder $x\,(1 + x) = 0$ giebt, das ist entweder $x = 0$ oder $x = -1$.

Will man ferner setzen $x = -1 + y$, so bekommen wir die Formel $3y - 3y^2 + y^3$, welche ein Cubus sein soll und zum zweiten Fall gehört. Setzt man daher die Cubikwurzel $p + y$, wovon der Cubus $p^3 + 3p^2y + 3py^2 + y^3$ ist, und macht $-3 = 3p$ oder $p = -1$, so geben die übrigen $3y = p^3 + 3p^2y = -1 + 3y$, folglich $y = \frac{1}{0}$, das ist eine unendlich große Zahl; woraus also Nichts gefunden wird. Es ist auch alle Mühe, noch andere Werthe für x zu finden, vergeblich, weil man aus andern Gründen beweisen kann, daß die Formel $1 + x^3$ außer den genannten Fällen nimmer ein Cubus werden kann. Denn man hat erwiesen, daß die Summe von zwei Cuben wie $t^3 + x^3$ niemals ein Cubus werden kann. Daher ist es auch nicht möglich in dem Falle $t = 1$.

156. Man behauptet auch, daß $2 + x^3$ kein Cubus werden könne, außer in dem Falle $x = -1$. Diese Formel gehört zwar zu dem zweiten Fall; es wird aber durch die daselbst gebrauchte Regel nichts herausgebracht, weil die mittleren Glieder fehlen. Setzt man aber $x = -1 + y$, so bekommt man die Formel $1 + 3y - 3y^2 + y^3$, welche nach allen drei Fällen behandelt werden kann. Setzt man nach dem ersten die Wurzel $1 + y$, wovon der Cubus $1 + 3y + 3y^2 + y^3$ ist, so wird $-3y^2 = 3y^2$, welches nur geschieht, wenn $y = 0$. Setzt man nach dem zweiten Falle die Wurzel $-1 + y$, wovon der Cubus $-1 + 3y - 3y^2 + y^3$, so wird $1 + 3y = -1 + 3y$ und $y = \frac{2}{0}$, d. h. unendlich groß. Nach der dritten Art müßte man die Wurzel $1 + y$ setzen, was schon geschehen ist.

157. Es sei die Formel gegeben: $3 + 3x^3$, welche

ein Cubus werden soll. Dies geschieht nun erstens in dem Falle $x = -1$, woraus aber nichts geschlossen werden kann, ferner aber auch in dem Falle $x = 2$. Man setze deswegen $x = 2 + y$, so kommt die Formel $27 + 36y + 18y^2 + 3y^3$ heraus, welche zum ersten Falle gehört; daher sei die Wurzel $3 + py$, wovon der Cubus $27 + 27py + 9p^2y^2 + p^3y^3$. Man mache also $36 = 27p$, oder $p = \frac{4}{3}$, dann geben die übrigen Glieder, durch y^2 dividirt, $18 + 3y = 9p^2 + p^3y = 16 + \frac{64}{27}y$, oder $\frac{17}{27}y = -2$, daher $y = -\frac{54}{17}$, folglich $x = -\frac{20}{17}$. Hieraus wird unsere Formel $3 + 3x^3 = -\frac{9261}{4913}$, wovon die Cubikwurzel $3 + py = \frac{21}{17}$ ist; und aus diesem Werthe könnte man noch mehrere finden, wenn man wollte.

158. Wir wollen zuletzt noch die Formel $4 + x^2$ betrachten, welche in zwei bekannten Fällen ein Cubus wird, nämlich wenn $x = 2$ und $x = 11$. Setzt man nun erstens $x = 2 + y$, so muß diese Formel ein Cubus sein $8 + 4y + y^2$, dessen Wurzel $2 + \frac{1}{3}y$ sei, und also die Formel $= 8 + 4y + \frac{2}{3}y^2 + \frac{1}{27}y^3$, woraus man $1 = \frac{2}{3} + \frac{1}{27}y$ erhält, daher $y = 9$ und $x = 11$, welches der andere bekannte Fall ist.

Setzt man nun ferner $x = 11 + y$, so bekommt man $125 + 22y + y^2$; dies dem Cubus von $5 + py$, das ist $125 + 75py + 15p^2y^2 + p^3y^3$ gleich gesetzt, und $p = \frac{22}{75}$ genommen, giebt $1 = 15p^2 + p^3y^3$ oder $p^3y^3 = 1 - 15p^2 = -\frac{109}{375}$. Daher $y = -\frac{122625}{10648}$, und also $x = -\frac{5497}{10648}$.

Weil x sowohl negativ als positiv sein kann, setze man $x = \frac{2 + 2y}{1 - y}$, dann wird unsere Formel $\frac{8 + 8y^2}{(1 - y)^2}$, welche ein Cubus sein soll. Man multiplicire also oben und unten mit $1 - y$, damit der Nenner ein Cubus werde und man bekommt $\frac{8 - 8y + 8y^2 - 8y^3}{(1 - y)^3}$, wo also nur noch der Zähler $8 - 8y + 8y^2 - 8y^3$, oder eben derselbe, durch 8 dividirt, nämlich $1 - y + y^2 - y^3$ zu einem Cubus gemacht werden muß, welche Formel zu allen drei Arten gehört.

Setzt man nun nach der ersten Art die Wurzel $= 1 - \frac{1}{3}y$, wovon der Cubus $1 - y + \frac{1}{3}y^2 - \frac{1}{27}y^3$ ist, so wird $1 - y = \frac{1}{3} - \frac{1}{27}y$, oder $27 - 27y = 9 - y$, daher $y = \frac{9}{13}$, folglich $1 + y = \frac{22}{13}$ und $1 - y = \frac{4}{13}$, folglich $x = 11$ wie vorher.

Nach der andern Art, wenn man die Wurzel setzen wollte $\frac{1}{3} - y$, findet man denselben Werth.

Nach der dritten Art, wenn man die Wurzel $1 - y$ setzt, wovon der Cubus $1 - 3y + 3y^2 - y^3$ ist, bekommt man $-1 + y = -3 + 3y$, und also $y = 1$, folglich $x = \frac{2}{0}$, das ist unendlich groß. Daher wird auf diese Art nichts Neues gefunden.

159. Weil wir aber diese zwei Fälle schon kennen $x = 2$ und $x = 11$, kann man setzen $x = \frac{2 + 11y}{1 + y}$. Denn ist $y = 0$, so wird $x = 2$; ist aber y unendlich groß, so wird $x = \pm 11$.

Es sei daher erstens $x = \frac{2 + 11y}{1 + y}$, so wird unsere Formel $4 + \frac{4 + 44y + 121y^2}{1 + 2y + y^2}$ oder $\frac{8 + 52y + 125y^2}{(1 + y^2)}$. Man multiplicire oben und unten mit $1 + y$, damit der Nenner ein Cubus werde, und nur noch der Zähler, welcher $8 + 60y + 177y^2 + 125y^3$ sein wird, zu einem Cubus gemacht werden soll.

Man setze nunmehr erstens die Wurzel $= 2 + 5y$, hiedurch würden nicht nur die zwei ersten Glieder, sondern auch die letzten wegfallen, und also nichts gefunden werden.

Man setze also nach der zweiten Art die Wurzel $p + 5y$, wovon der Cubus $p^3 + 15p^2y + 75py^2 + 125y^3$ und mache $177 = 75p$, oder $p = \frac{59}{25}$, so wird $8 + 60y = p^3 + 15p^2y$. Daher wird $- \frac{2943}{125}y = \frac{80379}{15625}$ und $y = \frac{80379}{367875}$, woraus x gefunden werden könnte.

Man kann aber auch $x = \frac{2 + 11y}{1 - y}$ setzen, und dann wird unsere Formel $4 + \frac{4 + 44y + 121y^2}{1 - 2y + y^2} = \frac{8 + 36y + 125y^2}{(1 - y)^2}$, wovon der Zähler mit $1 - y$ multiplicirt, ein Cubus wird. Also muß auch $8 + 28y + 89y^2 - 125y^3$ ein Cubus werden.

Setzen wir hier nach der ersten Art die Wurzel $= 2 + \frac{7}{3}y$, wovon der Cubus $8 + 28y + \frac{98}{3}y^2 + \frac{343}{27}y^4$ ist, so wird $89 - 125y = \frac{98}{3} + \frac{343}{27}y$, oder $\frac{3718}{27}y = \frac{169}{3}$, und also $y = \frac{1521}{3718} = \frac{9}{22}$; folglich $x = 11$, welches der schon bekannte Fall ist.

Setzt man ferner nach der dritten Art die Wurzel $2 - 5y$, wovon der Cubus $8 - 60y + 150y^2 - 125y^3$ ist, so erhalten wir $28 + 89y = -60 + 150y$, folglich $y = \frac{88}{61}$, woraus gefunden wird $x = -\frac{1090}{27}$, und unsere Formel wird $\frac{1191016}{729}$, welches der Cubus ist von $\frac{106}{9}$.

160. Dieses sind nun die bisher bekannten Methoden, mittels welcher eine solche Formel entweder zu einem Quadrate oder zu einem Cubus gemacht werden kann, wenn nur in jenem Falle die höchste Potenz der unbestimmten Zahl den vierten Grad, in letzterem Falle aber den dritten nicht übersteigt.

Man könnte noch den Fall hinzufügen, in dem eine gegebene Formel zu einem Biquadrat gemacht werden soll, in welchem die höchste Potenz die zweite nicht übersteigen darf. Wenn aber eine solche Formel $a + bx + cx^2$ ein Biquadrat sein soll, so muß dieselbe vor allen Dingen zu einem Quadrate gemacht werden; alsdann ist nur noch nöthig, daß die Wurzel dieses Quadrates wiederum zu einem Quadrate gemacht werde, wozu die Regel schon früher gegeben worden. Also wenn z. B. $x^2 + 7$ ein Biquadrat sein soll, so mache man dieselbe zuerst zu einem Quadrat, welches geschieht, wenn $x = \frac{7p^2 - q^2}{2pq}$ oder auch $x =$

$\frac{q^2 - 7p^2}{2pq}$; alsdann wird unsere Formel gleich diesem Quadrate: $\frac{q^4 - 14q^2p^2 + 49p^4}{4p^2q^2} + 7 = \frac{q^4 + 14q^2p^2 + 49p^4}{4p^2q^2}$, wovon die Wurzel ist $\frac{7p^2 + q^2}{2pq}$, welche noch zu einem Quadrate gemacht werden muß. Man multiplicire daher oben und unten mit $2pq$, damit der Nenner ein Quadrat werde, und alsdann wird der Zähler $2pq(7p^2 + q^2)$ ein Quadrat sein müssen, welches nicht anders geschehen kann, als nachdem man schon einen Fall errathen hat. Man kann zu diesem Zwecke $q = pz$ setzen, damit diese Formel $2p^2z(7p^2 + p^2z^2) = 2p^4z(7 + z^2)$ und also auch durch p^4 dividirt, nämlich diese $2z(7 + z^2)$ ein Quadrat werden soll. Hier ist nun der bekannte Fall $z = 1$. Daher setze man $z = 1 + y$, dann bekommen wir $(2 + 2y)(8 + 2y + y^2) = 16 + 20y + 6y^2 + 2y^3$, wovon die Wurzel $4 + \frac{5}{2}y$ sei. Das Quadrat derselben $16 + 20y + \frac{25}{4}y^2$, unserer Formel gleich gesetzt, giebt $6 + 2y = \frac{25}{4}$, $y = \frac{1}{8}$ und $z = \frac{9}{8}$. Da nun $z = \frac{q}{p}$, so wird $q = 9$ und $p = 8$, daher $x = \frac{367}{144}$. Daraus wird unsere Formel $7 + x^2 = \frac{279841}{20736}$, wovon erstens die Quadratwurzel $\frac{529}{144}$ ist, und hievon nochmals die Quadratwurzel $\frac{23}{12}$, wovon also unsere Formel das Biquadrat ist.

161. Endlich ist in diesem Kapitel noch zu erinnern, daß es einige Formeln giebt, welche auf allgemeine Art zu einem Cubus gemacht werden können. Denn wenn z. B. cx^2 ein Cubus sein soll, setze man die Wurzel davon $= px$, und dann wird $cx^2 = p^3x^3$ oder $c = p^3x$, daher $x = \frac{c}{p^3}$. Man schreibe $\frac{1}{p}$ anstatt p, so wird $x = cq^3$.

Der Grund hievon ist offenbar, weil die Formel ein Quadrat enthält; daher auch alle derartigen Formeln $a(b + cx)^2$ oder $ab^2 + 2abcx + ac^2x^2$ ganz leicht zu

einem Cubus gemacht werden können. Denn man setze die Cubikwurzel davon $= \frac{b + cx}{q}$, so wird $a(b + cx)^2 = \frac{(b + cx)^3}{q^3}$, welche durch $(b + cx)^2$ dividirt, giebt $a = \frac{b + cx}{q^3}$, daraus $x = \frac{aq^3 - b}{c}$, wo man q nach Belieben bestimmen kann.

Hieraus erhellt, wie höchst nützlich es ist, die gegebene Formel in ihre Factoren aufzulösen, so oft es geschehen kann. Von diesem Gegenstande soll ausführlich in dem folgenden Kapitel gehandelt werden.

Kapitel 11.

Von der Auflösung der Formel $ax^2 + bxy + cy^2$ in Factoren.

162. Hier bedeuten die Buchstaben x und y nur ganze Zahlen, und wir haben auch aus den früheren Erörterungen genügend ersehen, daß, wo man sich mit Brüchen begnügen mußte, die Aufgabe immer auf ganze Zahlen gebracht werden konnte. Denn ist z. B. die gesuchte Zahl x ein Bruch, so braucht man nur $x = \frac{t}{u}$ zu setzen, da dann für t und u immer ganze Zahlen angegeben werden können, und weil dieser Bruch in der kleinsten Form ausgedrückt werden kann, so können die beiden Buchstaben t und u als solche angesehen werden, die unter sich keinen gemeinschaftlichen Theiler haben.

In der vorliegenden Formel sind also x und y nur ganze Zahlen, und ehe wir zeigen können, wie dieselbe zu einem Quadrate oder Cubus oder einer noch höheren Potenz gemacht werden soll, ist es nöthig zu untersuchen, was man den Buchstaben x und y für Werthe geben muß, damit diese Formel zwei oder mehr Factoren erhalte.

163. Hier sind nun drei Fälle zu betrachten. Der erste ist, wenn sich diese Formel wirklich in zwei rationale Factoren auflösen läßt, welches geschieht, wie wir schon früher gesehen haben, wenn $b^2 - 4ac$ eine Quadratzahl wird.

Der zweite Fall ist, wenn diese beiden Factoren einander gleich werden, in welchem Falle die Formel selbst ein wirkliches Quadrat enthält.

Der dritte Fall ist, wenn sich dieselbe nicht anders als in irrationale Factoren auflösen läßt, dieselben mögen schlechtweg irrational oder gar imaginär sein; jenes geschieht, wenn $b^2 - 4ac$ eine positive Zahl, aber kein Quadrat ist, dieses aber, wenn $b^2 - 4ac$ negativ wird. Dies sind nun die drei Fälle, welche wir hier zu erwägen haben.

164. Läßt sich unsere Formel in zwei rationale Factoren auflösen, so kann dieselbe also dargestellt werden: $(fx + gy)(hx + ky)$, welche also schon ihrer Natur nach zwei Factoren in sich schließt. Will man aber, daß dieselbe auf allgemeine Art mehr Factoren in sich schließe, so braucht man nur $fx + gy = pq$ und $hx + ky = rs$ zu setzen, da dann unsere Formel dem Producte pqrs gleich wird, und also vier Factoren in sich enthält, deren Anzahl nach Belieben vermehrt werden könnte. Hieraus aber erhalten wir für x einen doppelten Werth nämlich $x = \frac{pq - gy}{f}$ und $x = \frac{rs - ky}{h}$, woraus gefunden wird: $hpq - hgy = frs - fky$, und also $y = \frac{frs - hpq}{fk - hg}$ und $x = \frac{kpq - grs}{fk - hg}$. Damit nun x und y in ganzen Zahlen ausgedrückt werden, müssen die Buchstaben p, q, r, s so angenommen werden, daß sich der Zähler durch den Nenner wirklich theilen läßt, welches geschieht, wenn sich entweder p und r oder q und s dadurch theilen lassen.

165. Um dies zu erläutern, sei die Formel gegeben: $x^2 - y^2$, welche aus den Factoren $(x + y)(x - y)$ besteht. Soll dieselbe nun noch mehr Factoren haben, so setze man $x + y = pq$ und $x - y = rs$, dann bekommt man $x = \frac{pq + rs}{2}$ und $y = \frac{pq - rs}{2}$. Damit nun dies ganze Zahlen werden, müssen die beiden Zahlen pq und rs zugleich entweder gerade oder beide ungerade sein.

Es sei z. B. $p = 7$, $q = 5$, $r = 3$ und $s = 1$, so wird $pq = 35$ und $rs = 3$, folglich $x = 19$ und $y = 16$. Hieraus folgt $x^2 - y^2 = 105$, welche Zahl wirklich aus den Factoren 7, 5, 3, 1 besteht. Also hat dieser Fall nicht die geringste Schwierigkeit.

166. Noch leichter ist der zweite Fall, in dem die Formel zwei gleiche Factoren in sich schließt und daher also dargestellt werden kann: $(fx + gy)^2$, welches Quadrat keine andern Factoren haben kann, als welche aus der Wurzel $fx + gy$ entstehen. Setzt man also $fx + gy = pqr$, so wird unsere Formel $p^2q^2r^2$ und kann also so viel Factoren haben, als man will. Hier wird von den zwei Zahlen x und y nur eine bestimmt, und die andere unserem Belieben frei gestellt, da man $x = \frac{pqr - gy}{f}$ bekommt, wo y leicht so angenommen werden kann, daß der Bruch wegfällt. Die leichteste Formel dieser Art ist x^2, nimmt man $x = pqr$, so schließt das Quadrat x^2 drei quadratische Factoren in sich, nämlich p^2, q^2 und r^2.

167. Weit mehr Schwierigkeit aber hat der dritte Fall, in welchem sich unsere Formel nicht in zwei rationale Factoren auflösen läßt, und dann bedarf es besonderer Kunstgriffe, um solche Werthe für x und y zu finden, aus welchen die Formel zwei oder mehr Factoren in sich enthält. Um diese Untersuchung zu erleichtern, ist zu bemerken, daß unsere Formel leicht in eine andere verwandelt werden kann, in der das mittlere Glied fehlt. Man braucht nämlich nur $x = \frac{z - by}{2a}$ zu setzen, wodurch dann diese Formel herausgebracht wird:

$$\frac{z^2 - 2byz + b^2y^2}{4a} + \frac{byz - b^2y^2}{2a} + cy^2 = \frac{z^2 + (4ac - b^2)y^2}{4a}.$$

Wir wollen daher sogleich das mittlere Glied weglassen und die Formel $ax^2 + cy^2$ betrachten, wobei es darauf ankommt, was man den Buchstaben x und y für Werthe

geben soll, damit diese Formel Factoren erhalte. Es ist leicht zu erkennen, daß dies von der Natur der Zahlen a und c abhängt, und deswegen wollen wir mit einigen bestimmten Formeln dieser Art den Anfang machen.

168. Es sei also erstens diese Formel gegeben: $x^2 + y^2$, welche alle Zahlen in sich begreift, welche eine Summe von zwei Quadraten sind, von denen wir die kleinsten bis 50 hier angeben wollen: 1, 2, 4, 5, 8, 9, 10, 13, 16, 17, 18, 20, 25, 26, 29, 32, 34, 36, 37, 40, 41, 45, 49, 50, unter welchen sich einige Primzahlen befinden, die keine Theiler haben, als 2, 5, 13, 17, 29, 37, 41. Die übrigen aber haben Theiler, woraus die Frage deutlicher wird, was man den Buchstaben x und y für Werthe geben müsse, damit die Formel $x^2 + y^2$ Theiler oder Factoren habe und zwar so viel man ihrer will, wobei wir vor allen Dingen die Fälle ausschließen, in denen x und y einen gemeinschaftlichen Theiler unter sich haben, weil alsdann $x^2 + y^2$ sich auch durch denselben Theiler, und zwar durch das Quadrat desselben würde theilen lassen. Denn wäre z. B. $x = 7p$ und $y = 7q$, so würde die Summe ihrer Quadrate $49p^2 + 49q^2 = 49(p^2 + q^2)$ sich sogar durch 49 theilen lassen. Daher geht die Frage nur auf solche Formeln, in denen x und y keinen gemeinschaftlichen Theiler haben oder unter sich untheilbar sind. Die Schwierigkeit fällt hier bald in die Augen; denn obgleich man einsieht, daß, wenn die beiden Zahlen x und y ungerade sind, alsdann die Formel $x^2 + y^2$ eine gerade Zahl und also durch 2 theilbar wird, ebenso, daß, wenn eine gerade und die andere ungerade, die Formel ungerade wird; so ist doch nicht leicht einzusehen, ob sie Theiler hat oder nicht. Beide Zahlen aber x und y können nicht gerade sein, weil sie keinen gemeinschaftlichen Theiler unter sich haben dürfen.

169. Es seien daher die beiden Zahlen x und y untheilbar unter sich, und dennoch soll die Formel $x^2 + y^2$

zwei oder mehr Factoren in sich enthalten. Hier ist nun die obige Methode nicht anwendbar, weil sich diese Formel nicht in zwei rationale Factoren auflösen läßt; allein die irrationalen Factoren, in die die Formel aufgelöst wird, welche durch dieses Product dargestellt werden können: $(x + y\sqrt{-1}) \cdot (x - y\sqrt{-1})$, vermögen uns denselben Dienst zu leisten. Denn wenn die Formel $x^2 + y^2$ wirkliche Factoren hat, so müssen die irrationalen Factoren wiederum Factoren haben, indem, wenn diese Factoren keine weitern Theiler hätten, auch ihr Product keine haben könnte. Da aber diese Factoren irrational, ja sogar imaginär sind, und auch die Zahlen x und y keinen gemeinschaftlichen Theiler haben sollen, so können dieselben keine rationalen Factoren haben, sondern sie müssen irrational und sogar imaginär von gleicher Art sein.

170. Will man also, daß die Formel $x^2 + y^2$ zwei rationale Factoren bekomme, so gebe man beiden irrationalen Factoren auch zwei Factoren, und setze erstens $x + y\sqrt{-1} = (p + q\sqrt{-1})(r + s\sqrt{-1})$, da dann, weil $\sqrt{-1}$ sowohl negativ als positiv genommen werden kann, sich ergiebt: $x - y\sqrt{-1} = (p - q\sqrt{-1})(r - s\sqrt{-1})$, so daß das Product davon, das ist unsere Formel, sein wird: $x^2 + y^2 = (p^2 + q^2)(r^2 + s^2)$ und dieselbe folglich zwei rationale Factoren enthält, nämlich $p^2 + q^2$ und $r^2 + s^2$. Hier bleibt aber noch übrig, die Werthe von x und y zu bestimmen, welche auch rational sein müssen.

Wenn man nun jene irrationalen Factoren mit einander multiplicirt, so bekommt man $x + y\sqrt{-1} = pr - qs + ps\sqrt{-1} + qr\sqrt{-1}$, und $x - y\sqrt{-1} = pr - qs - qr\sqrt{-1} - ps\sqrt{-1}$. Addirt man diese Formeln, so wird $x = pr - qs$; subtrahirt man dieselben aber von einander, so wird $2y\sqrt{-1} = 2ps\sqrt{-1} + 2qr\sqrt{-1}$, oder $y = ps + qr$.

Nimmt man also $x = pr - qs$ und $y = ps + qr$, so erhält unsere Formel $x^2 + y^2$ gewiß zwei Factoren, indem $x^2 + y^2 = (p^2 + q^2)(r^2 + s^2)$ herauskommt. Verlangt man mehr Factoren, so braucht man nur in derselben Art p und q so anzunehmen, daß $p^2 + q^2$ zwei Factoren hätte, und alsdann hätte man im Ganzen drei Factoren, deren Zahl auf gleiche Art nach Belieben vermehrt werden kann.

171. Da hier nur die Quadrate von p, q, r und s vorkommen, so können diese Buchstaben auch negativ genommen werden. Nimmt man z. B. q negativ, so wird $x = pr + qs$ und $y = ps - qr$, von welchen die Summe der Quadrate dieselbe ist als vorher. Daraus ersehen wir, daß, wenn eine Zahl einem solchen Product $(p^2 + q^2)(r^2 + s^2)$ gleich ist, dieselbe auf eine doppelte Art in zwei Quadrate zerlegt werden kann, indem man zuerst $x = pr - qs$ und $y = ps + qr$, und alsdann auch $x = pr + qs$ und $y = ps - qr$ gefunden hat.

Es sei z. B. $p = 3$, $q = 2$, $r = 2$ und $s = 1$, so daß das Product herauskäme: $13 . 5 = 65 = x^2 + y^2$, da dann entweder $x = 4$ und $y = 7$, oder $x = 8$ und $y = 1$ sein wird. In beiden Fällen aber ist $x^2 + y^2 = 65$. Multiplicirt man mehrere derartige Zahlen mit einander, so wird auch das Product noch auf mehrere Arten eine Summe von zwei Quadratzahlen sein. Man multiplicire z. B. $2^2 + 1^2 = 5$, $3^2 + 2^2 = 13$, und $4^2 + 1^2 = 17$ mit einander, so kommt 1105, welche Zahl auf folgende Arten in zwei Quadrate zerlegt werden kann: I. $33^2 + 4^2$, II. $32^2 + 9^2$, III. $31^2 + 12^2$, IV. $24^2 + 23^2$.

172. Unter den Zahlen, die in der Formel $x^2 + y^2$ enthalten sind, befinden sich also erstens solche, die aus zwei oder mehreren derartigen Zahlen durch die Multiplication zusammengesetzt sind; dann aber auch solche, welche nicht in solcher Art zusammengesetzt sind. Diese wollen

wir einfache Zahlen von der Formel $x^2 + y^2$ nennen, jene aber zusammengesetzte. Daher werden die einfachen Zahlen dieser Art sein:

1, 2, 5, 9, 13, 17, 29, 37, 41, 49 2c.,

in welcher Reihe zweierlei Zahlen vorkommen, nämlich Primzahlen oder solche, welche gar keine Theiler haben, als 2, 5, 13, 17, 29, 37, 41 und welche alle, außer 2, so beschaffen sind, daß, wenn man 1 davon wegnimmt, der Rest durch 4 theilbar wird, oder welche alle in der Form $4n + 1$ enthalten sind. Alsdann sind auch Quadratzahlen vorhanden 9, 49 2c., deren Wurzeln aber 3, 7 2c. nicht vorkommen; wobei zu merken, daß diese Wurzeln 3, 7 2c. in der Form $4n - 1$ enthalten sind. Es ist aber auch offenbar, daß keine Zahl von der Form $4n - 1$ eine Summe von zwei Quadraten sein kann. Denn da diese Zahlen ungerade sind, so müßte eines von den beiden Quadraten gerade, das andere aber ungerade sein. Wir haben aber gesehen, daß alle gerade Quadrate durch 4 theilbar, die ungeraden aber in der Form $4n + 1$ enthalten sind. Wenn man daher ein gerades und ein ungerades Quadrat addirt, so bekommt die Summe immer die Form $4n + 1$, niemals aber die Form $4n - 1$. Daß aber alle Primzahlen von der Form $4n + 1$ eine Summe von zwei Quadraten sind, ist zwar gewiß, aber nicht so leicht zu beweisen.

173. Wir wollen weiter gehen, und die Formel $x^2 + 2y^2$ betrachten, um zu sehen, was x und y für Werthe haben müssen, damit dieselbe Factore erhalte. Da nun diese Formel durch folgende imaginäre Factoren dargestellt wird $(x + y\sqrt{-2})(x - y\sqrt{-2})$, so ersieht man wie vorher, daß, wenn unsere Formel Factoren hat, auch ihre imaginären Factoren solche haben müssen. Man setze daher erstens $x + y\sqrt{-2} = (p + q\sqrt{-2})(r + s\sqrt{-2})$, so folgt von selbst, daß auch $x - y\sqrt{-2} = (p - q\sqrt{-2})$

$(r - s\sqrt{-2})$ sein müsse, und hieraus wird unsere Formel $x^2 + 2y^2 = (p^2 + 2q^2)(r^2 + 2s^2)$, und hat also zwei Factoren, von denen sogar jeder von eben derselben Art ist; damit aber dieses geschehe, müssen geeignete Werthe für x und y gefunden werden, welches in folgender Art geschehen kann. Da $x + y\sqrt{-2} = pr - 2qs + qr\sqrt{-2} + ps\sqrt{-2}$ und $x - y\sqrt{-2} = pr - 2qs - qr\sqrt{-2} - ps\sqrt{-2}$, so ist die Summe $2x = 2pr - 4qs$, folglich $x = pr - 2qs$. Dann giebt die Differenz $2y\sqrt{-2} = 2qr\sqrt{-2} + 2ps\sqrt{-2}$, daher $y = qr + ps$. Wenn also unsere Formel $x^2 + 2y^2$ Factoren haben soll, so sind dieselben immer so beschaffen, daß der eine $p^2 + 2q^2$ und der andere $r^2 + 2s^2$ sein wird, oder beide Zahlen sind von derselben Art als $x^2 + 2y^2$; und damit dies geschehe, können x und y wieder auf zweierlei Art bestimmt werden, weil q sowohl negativ als positiv genommen werden kann. Man wird nämlich erstens $x = pr - 2qs$ und $y = ps + qr$, und dann auch $x = pr + 2qs$ und $y = ps - qr$ haben.

174. Die Formel $x^2 + 2y^2$ enthält also alle diejenigen Zahlen in sich, welche aus einem Quadrat und einem doppelten Quadrate bestehen, welche wir hier bis auf 50 angeben wollen: 1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 11, 12, 16, 17, 18, 19, 22, 24, 25, 27, 32, 33, 34, 36, 38, 41, 43, 44, 49, 50. Diese können wir wieder wie vorher in einfache und zusammengesetzte theilen; dann werden die einfachen, welche nicht aus den vorhergehenden zusammengesetzt sind, folgende sein: 1, 2, 3, 11, 17, 19, 25, 41, 43, 49, welche alle außer den Quadraten 25 und 49 Primzahlen sind. Von denen aber, die hier nicht stehen, kommen die Quadrate vor. Man kann hier auch bemerken, daß alle Primzahlen, die in unserer Formel enthalten sind, entweder in die Form $8n + 1$ oder in diese $8n + 3$ gehören, während die übrigen, welche entweder in der Form $8n + 5$ oder in dieser $8n + 7$ enthalten sind, nimmermehr aus

einem Quadrate und einem doppelten Quadrate bestehen können. Es ist aber auch gewiß, daß alle Primzahlen, die in einer von den ersten beiden Formen $8n + 1$ und $8n + 3$ enthalten sind, sich stets in ein Quadrat und ein doppeltes Quadrat auflösen lassen.

175. Wir wollen in gleicher Weise zu der allgemeinen Formel $x^2 + cy^2$ übergehen und sehen, was man x und y für Werthe geben muß, damit diese Formel Factoren erhalte.

Da nun dieselbe durch das Product dargestellt wird: $(x + y\sqrt{-c})(x - y\sqrt{-c})$, so gebe man jedem dieser Factoren wiederum zwei Factoren von gleicher Art. Man setze nämlich $x + y\sqrt{-c} = (p + q\sqrt{-c})(r + s\sqrt{-c})$, und $x - y\sqrt{-c} = (p - q\sqrt{-c})(r - s\sqrt{-c})$. Nunmehr wird unsere Formel: $x^2 + cy^2 = (p^2 + cq^2)(r^2 + cs^2)$ werden, woraus hervorgeht, daß die Factoren wiederum von derselben Art als die Formel selbst sein werden; die Werthe aber von x und y werden sich wie folgt verhalten; $x = pr + cqs$ und $y = qr + ps$, oder $y = ps - qr$, und hieraus ist leicht zu ersehen, wie unsere Formel noch mehr Factoren erhalten kann.

176. Nun ist es auch leicht, dieser Formel $x^2 - cy^2$ Factoren zu verschaffen, weil man nur $-c$ anstatt $+c$ zu schreiben braucht. Jedoch lassen sich dieselben auch unmittelbar in folgender Art finden. Da unsere Formel dem Producte $(x + y\sqrt{c})(x - y\sqrt{c})$ gleich ist, so setze man $x + y\sqrt{c} = (p + q\sqrt{c})(r + s\sqrt{c})$ und $x - y\sqrt{c} = (p - q\sqrt{c})(r - s\sqrt{c})$, woraus sogleich diese Factoren $x^2 - cy^2 = (p^2 - cq^2)(r^2 - cs^2)$ entstehen, welche wieder von derselben Art als unsere Formel selbst sind; die Werthe aber von x und y lassen sich auch wiederum auf doppelte Art bestimmen, nämlich erstens $x = pr + cqs$, $y = qr + ps$, und ferner auch $x = pr - cqs$ und $y = ps - qr$. Will man die Probe machen, ob in solcher Art das gefundene Product heraus-