Für die 100 Rthlr., welche verfallen

nach 1 Jahr bekommt er		95,239
nach 2 Jahren	„ „	90,704
nach 3 Jahren	„ „	86,385
nach 4 Jahren	„ „	82,272
nach 5 Jahren	„ „	78,355
Summe aller 5 Jahre	„ „	432,955

Also kann er für diese Rente nicht mehr fordern als 432,955 Rthlr. oder 432 Rthlr. 22 Gr. 11 Pf.

562. Sollte aber eine Rente viel mehr Jahre dauern, so würde die Rechnung auf diese Art sehr mühsam werden, sie kann aber in folgender Art erleichtert werden:

Es sei die jährliche Rente $= a$, welche jetzt schon anfängt und n Jahre lang dauert, so wird dieselbe jetzt werth sein:

$$a + \tfrac{20}{21} a + (\tfrac{20}{21})^2 a + (\tfrac{20}{21})^3 a + (\tfrac{20}{21})^4 a + \ldots (\tfrac{20}{21})^n a.$$

Dies ist nun eine geometrische Reihe, deren Summe gefunden werden muß. Man multiplicirt also das letzte Glied mit dem Nenner, so hat man $(\tfrac{20}{21})^{n+1} a$; davon das erste Glied subtrahirt, bleibt $(\tfrac{20}{21})^{n+1} a - a$; dieses muß mit dem Nenner weniger eins, das ist, mit $-\tfrac{1}{21}$ dividirt, oder welches gleich viel, mit -21 multiplicirt werden. Daher wird die gesuchte Summe sein $= -21 (\tfrac{20}{21})^{n+1} a + 21 a$, das ist $21 a - 21 (\tfrac{20}{21})^{n+1} a$, wovon das letztere Glied, das subtrahirt werden soll, leicht durch Logarithmen berechnet werden kann.

Zweiter Theil.

Erster Abschnitt.

Von den algebraischen Gleichungen und ihrer Auflösung.

Kapitel 1.

Von der Auflösung der Aufgaben überhaupt.

1. Der Hauptzweck der Algebra so wie aller Theile der Mathematik besteht darin, den Werth solcher Größen zu bestimmen, die bisher unbekannt gewesen, was aus genauer Erwägung der Bedingungen geschieht, welche stets durch bekannte Größen ausgedrückt sind. Daher wird die Algebra auch als die Wissenschaft definirt, welche zeigt, **wie man aus bekannten Größen unbekannte findet.**

2. Dieses stimmt auch mit allem überein, was bisher vorgetragen worden, indem überall aus bekannten Größen andere gefunden worden sind, die vorher als unbekannt angesehen werden konnten.

Das erste Beispiel zeigt sich gleich in der Addition, indem von zwei oder mehr gegebenen Zahlen die Summe gefunden wird. Es wurde nämlich eine Zahl gesucht, welche den gegebenen zusammen genommen gleich war.

In der Subtraction wurde eine Zahl gesucht, welche dem Unterschied zweier gegebenen Zahlen gleich war.

Und eben so verhält es sich auch mit der Multiplication und Division, wie auch mit der Erhebung der Potenzen

---

und der Ausziehung der Wurzeln, indem hier immer eine vorher unbekannte Zahl aus bekannten gefunden wird.

3. In dem letzten Abschnitte haben wir schon verschiedene Aufgaben aufgelöst, in denen es immer auf die Auffindung einer Zahl ankam, welche aus andern gegebenen Zahlen unter gewissen Bedingungen festgestellt werden mußte.

Alle Aufgaben laufen also darauf hinaus, daß aus einigen gegebenen Zahlen eine neue gefunden werden soll, welche mit jenen in einer gewissen Verbindung steht, und diese Verbindung wird durch gewisse Bedingungen oder Eigenschaften, welche der gesuchten Zahl zukommen müssen, bestimmt.

4. Bei jeder vorkommenden Aufgabe wird nun diejenige Zahl, die gesucht werden soll, durch einen der letzten Buchstaben des Alphabets bezeichnet, und alsdann werden alle vorgeschriebenen Bedingungen in Erwägung gezogen, durch welche eine Gleichheit zweier Werthe dargestellt wird. Aus einer solchen Gleichung muß sodann der Werth der gesuchten Zahl bestimmt werden, wodurch die Aufgabe aufgelöst wird. Bisweilen müssen auch mehrere Zahlen gesucht werden, was in gleicher Weise durch Gleichungen geschehen muß.

5. Dieses wird durch ein Beispiel deutlicher werden. Es werde folgende Aufgabe gestellt:

20 Personen, Männer und Frauen besuchen ein Gasthaus. Ein Mann giebt 8 Gr., eine Frau aber 7 Gr. aus und die ganze Zeche beläuft sich auf 6 Rthlr. Nun ist die Frage, wie viel Männer und Frauen sind es gewesen?

Um diese Aufgabe aufzulösen, setze man die Zahl der Männer $= x$, und sehe dieselbe als bekannt an, oder man verfahre damit, als wenn man die Probe machen wollte, ob dadurch der Aufgabe ein Genüge geschähe. Da

---

nun die Anzahl der Männer $= x$ ist, und Männer und Frauen zusammen 20 Personen sind, so kann man daraus die Anzahl der Frauen bestimmen, welche gefunden wird, wenn man die Anzahl der Männer von 20 subtrahirt. Also war die Zahl der Frauen $= 20 - x$.

Da nun ein Mann 8 Gr. ausgiebt, so werden diese x Männer $8x$ Gr. ausgeben.

Und weil eine Frau 7 Gr. ausgiebt, so werden diese $20 - x$ Frauen $140 - 7x$ Gr. ausgeben.

Also geben Männer und Frauen zusammen $140 + x$ Gr. aus. Wir wissen aber, wie viel sie ausgegeben haben, nämlich 6 Rthlr., welche zu Gr. gemacht 144 Gr. geben*). Daher erhalten wir diese Gleichung $140 + x = 144$, woraus man leicht sieht, daß $x = 4$.

Daher besuchten das Gasthaus 4 Männer und 16 Frauen.

6. Eine andere Aufgabe von gleicher Art:

20 Personen, Männer und Frauen, sind in einem Gasthause. Die Männer geben 24 Fl., die Frauen geben auch 24 Fl. aus und es findet sich, daß ein Mann einen Gulden mehr als eine Frau hat zahlen müssen. Wie viel waren es Männer und Frauen?

Es sei die Zahl der Männer $= x$, so ist die Zahl der Frauen $= 20 - x$.

Da nun diese x Männer 24 Fl. ausgegeben haben, so hat ein Mann $\frac{24}{x}$ Fl. ausgegeben.

Und weil die $20 - x$ Frauen auch 24 Fl. ausgegeben haben, so hat eine Frau $\frac{24}{20 - x}$ ausgegeben. Diese Zeche einer Frau ist nun um 1 geringer als die Zeche eines Mannes. Wenn man also von der Zeche eines Mannes 1 Fl. subtrahirt, so muß die Zeche einer Frau herauskommen;

*) Der Thaler wurde 1766 mit 24 Groschen berechnet.

woraus man diese Gleichung erhält $\frac{24}{x} - 1 = \frac{24}{20 - x}$. Dieses ist also die Gleichung, aus der der Werth von x gesucht werden muß, welcher nicht so leicht herausgebracht werden kann, wie in der vorigen Aufgabe. Aus dem Folgenden aber wird man sehen, daß $x = 8$ ist, welches auch der gefundenen Gleichung Genüge leistet. Denn $\frac{24}{8} - 1 = \frac{24}{12}$ das ist $2 = 2$.

7. Bei allen Aufgaben kommt es nun darauf an, daß nachdem man die unbekannten oder gesuchten Zahlen durch Buchstaben bezeichnet, die Umstände der Aufgabe genau in Erwägung gezogen, und daraus Gleichungen abgeleitet werden. Alsdann besteht die ganze Kunst darin, solche Gleichungen aufzulösen, und daraus den Werth der unbekannten Zahlen zu finden. Hievon soll in diesem Abschnitte gehandelt werden.

8. In den Aufgaben selbst zeigt sich auch ein Unterschied, indem in einigen nur eine unbekannte Zahl, in andern aber zwei oder noch mehr gesucht werden sollen, in welchem letzteren Falle zu bemerken ist, daß dazu auch eben so viel besondere Gleichungen erforderlich sind, welche aus den Umständen der Aufgabe selbst abgeleitet werden müssen.

9. Eine Gleichung besteht demnach aus zwei Sätzen, deren einer dem andern gleich gesetzt wird. Um nun daraus den Werth der unbekannten Zahl herauszubringen, müssen häufig sehr viele Verwandlungen gemacht werden, welche aber alle auf dem Grundsatz beruhen, daß wenn zwei Größen einander gleich sind, dieselben auch einander gleich bleiben, wenn man zu beiden dieselben Größen addirt oder von beiden subtrahirt; ebenso auch wenn dieselben durch dieselbe Zahl multiplicirt oder dividirt werden; ferner auch, wenn beide zugleich in dieselben Potenzen erhoben oder aus beiden gleichnamige Wurzeln ausgezogen, und endlich

auch wenn von beiden die Logarithmen genommen werden, wie bereits im vorigen Abschnitte geschehen.

10. Diejenigen Gleichungen, in denen von der unbekannten Zahl nur die erste Potenz vorkommt, nachdem die Gleichung in Ordnung gebracht worden, sind am leichtesten aufzulösen, und werden Gleichungen des ersten Grades genannt. Dann folgen solche Gleichungen, in denen die zweite Potenz oder das Quadrat der unbekannten Zahl vorkommt. Diese werden quadratische Gleichungen oder Gleichungen des zweiten Grades genannt. Darauf folgen die Gleichungen dritten Grades oder die kubischen, worin der Kubus der unbekannten Zahl vorkommt, u. s. w.; von allen diesen soll in diesem Abschnitte gehandelt werden.

Kapitel 2.

Von den Gleichungen des ersten Grades und ihrer Auflösung.

11. Wenn die unbekannte oder gesuchte Zahl durch den Buchstaben x bezeichnet wird, und die herausgebrachte Gleichung schon so beschaffen ist, daß der eine Satz blos allein das x, und der andere Satz eine bekannte Zahl enthält, wie z. B. $x = 25$, so hat man schon wirklich den Werth von x, der verlangt wird, und auf diese Form muß man immer zu kommen trachten, so verwickelt auch die zuerst gefundene Gleichung sein mag. Hiezu sollen die Regeln im Folgenden gegeben werden.

12. Wir wollen bei den leichtesten Fällen anfangen und erstlich annehmen, man sei auf diese Gleichung gekommen: $x + 9 = 16$, so sieht man, wenn man auf beiden Seiten 9 subtrahirt, daß $x = 7$.

Es sei aber auf allgemeine Art $x + a = b$, wo a und b bekannte Zahlen bezeichnen, dieselben mögen sein, welche sie wollen. Hier muß man also beiderseits a subtrahiren und da bekommt man diese Gleichung $x = b - a$, welche uns den Werth von x angiebt.

13. Wenn die gefundene Gleichung $x - a = b$ ist, addire man beiderseits a, so kommt $x = a + b$, welches der gesuchte Werth von x ist.

Eben so verfährt man, wenn die erste Gleichung so beschaffen ist: $x - a = a^2 + 1$, denn da wird $x = a^2 + a + 1$.

Also aus dieser Gleichung $x - 8a = 20 - 6a$ bekommt man $x = 20 - 6a + 8a$ oder $x = 20 + 2a$. Und aus dieser $x + 6a = 20 + 3a$ findet man $x = 20 + 3a - 6a$ oder $x = 20 - 3a$.

14. Wenn die Gleichung $x - a + b = c$ vorliegt, kann man beiderseits a addiren, dann kommt $x + b = c + a$. Subtrahirt man beiderseits b, so hat man $x = c + a - b$; man kann aber zugleich beiderseits $+ a - b$ addiren, dann bekommt man mit einemmal $x = c + a - b$. Also in den folgenden Beispielen:
wenn $x - 2a + 3b = 0$, wird $x = 2a - 3b$,
wenn $x - 3a + 2b = 25 + a + 2b$, wird $x = 25 + 4a$,
wenn $x - 9 + 6a = 25 + 2a$, wird $x = 34 - 4a$.

15. Hat die gefundene Gleichung diese Gestalt: $ax = b$, so dividire man auf beiden Seiten durch a, dann hat man $x = \frac{b}{a}$. Ist aber die Gleichung $ax + b - c = d$, so muß man erstlich dasjenige, was bei ax steht, wegbringen; man addire beiderseits $- b + c$, so kommt $ax = d - b + c$; folglich $x = \frac{d - b + c}{a}$; oder man subtrahire beiderseits $+ b - c$, so kommt $ax = d - b + c$ und $x = \frac{d - b + c}{a}$.

Es sei $2x + 5 = 17$, so kommt $2x = 12$ und $x = 6$.
Es sei $3x - 8 = 7$, so kommt $3x = 15$ und $x = 5$.
Es sei $4x - 5 - 3a = 15 + 9a$, so wird $4x = 20 + 12a$, folglich $x = 5 + 3a$.

16. Liegt die Gleichung $\frac{x}{a} = b$ vor, so multiplicire man beiderseits mit a, und man hat $x = ab$.

Ist nun $\frac{x}{a} + b - c = d$, so wird erstlich $\frac{x}{a} = d - b + c$ und $x = (d - b + c)\,a = ad - ab + ac$.
Es sei $\frac{1}{2}x - 3 = 4$, so wird $\frac{1}{2}x = 7$ und $x = 14$.
Es sei $\frac{1}{3}x - 1 + 2a = 3 + a$, so wird $\frac{1}{3}x = 4 - a$ und $x = 12 - 3a$.
Es sei $\frac{x}{a - 1} - 1 = a$, so wird $\frac{x}{a - 1} = a + 1$ und $x = a^2 - 1$.

17. Liegt die Gleichung $\frac{ax}{b} = c$ vor, so multiplicire man beiderseits mit b, dann wird $ax = bc$, und ferner $x = \frac{bc}{a}$.

Ist aber $\frac{ax}{b} - c = d$, so wird $\frac{ax}{b} = d + c$ und $ax = bd + bc$ und folglich $x = \frac{bd + bc}{a}$.

Es sei $\frac{2}{3}x - 4 = 1$, so wird $\frac{2}{3}x = 5$ und $2x = 15$, folglich $x = \frac{15}{2}$, das ist $7\frac{1}{2}$.

Es sei $\frac{3}{4}x + \frac{1}{2} = 5$, also $\frac{3}{4}x = 5 - \frac{1}{2}$, welches $= \frac{9}{2}$ und $3x = 18$ und $x = 6$.

18. Es kann auch geschehen, daß zwei oder mehr Glieder den Buchstaben x enthalten, und entweder in einem Satz oder in beiden vorkommen. Sind sie auf einer Seite wie $x + \frac{1}{2}x + 5 = 11$, so wird $x + \frac{1}{2}x = 6$ und $3x = 12$ und $x = 4$.

Es sei $x + \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x = 44$, was ist x? Man multiplicire mit 3, so wird $4x + \frac{3}{2}x = 132$, ferner mit 2 multiplicirt wird $11x = 264$ und $x = 24$; diese drei Glieder können aber sogleich in eins gezogen werden, als $\frac{11}{6}x = 44$, man theile beiderseits durch 11, so hat man $\frac{1}{6}x = 4$ und $x = 24$.

Es sei $\frac{2}{3}x - \frac{3}{4}x + \frac{1}{2}x = 1$, welches zusammengezogen giebt $\frac{5}{12}x = 1$ und $x = 2\frac{2}{5}$.

Es sei $ax - bx + cx = d$, so ist dieses eben so viel als $(a - b + c)x = d$; hieraus kommt $x = \frac{d}{a - b + c}$.

19. Steht aber x in beiden Sätzen wie z. B. $3x + 2 = x + 10$, so müssen die x von der Seite, wo man am wenigsten hat, weggebracht werden; also subtrahire man hier beiderseits x, so kommt $2x + 2 = 10$ und $2x = 8$ und $x = 4$.

Es sei ferner $x + 4 = 20 - x$, also $2x + 4 = 20$ und $2x = 16$ und $x = 8$.

Es sei $x + 8 = 32 - 3x$, also $4x + 8 = 32$ und $4x = 24$ und $x = 6$.

Es sei ferner $15 - x = 20 - 2x$, also $15 + x = 20$ und $x = 5$.

Es sei $1 + x = 5 - \frac{1}{2}x$, also $1 + \frac{3}{2}x = 5$ und $\frac{3}{2}x = 4$ und $3x = 8$ und $x = 2\frac{2}{3}$.

Es sei $\frac{1}{2} - \frac{1}{3}x = \frac{1}{3} - \frac{1}{4}x$, man addire $\frac{1}{3}x$, so kommt $\frac{1}{2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{12}x$, subtrahire $\frac{1}{3}$, so hat man $\frac{1}{12}x = \frac{1}{6}$, multiplicire mit 12, so kommt $x = 2$.

Es sei $1\frac{1}{2} - \frac{2}{3}x = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}x$, addire $\frac{2}{3}x$, so kommt $1\frac{1}{2} = \frac{1}{4} + \frac{7}{6}x$, subtrahire $\frac{1}{4}$, so hat man $\frac{7}{6}x = 1\frac{1}{4}$, multiplicire mit 6, so bekommt man $7x = 7\frac{1}{2}$; durch 7 dividirt, giebt $x = 1\frac{1}{14}$ oder $x = \frac{15}{14}$.

20. Gelangt man zu einer Gleichung, in der die unbekannte Zahl x sich im Nenner befindet, so muß der Bruch gehoben und die ganze Gleichung mit demselben Nenner multiplicirt werden.

Also wenn man findet $\frac{100}{x} - 8 = 12$, addire 8, so kommt $\frac{100}{x} = 20$, multiplicire mit x, so hat man $100 = 20x$, dividire durch 20, so kommt $x = 5$.

Es sei ferner $\frac{5x + 3}{x - 1} = 7$, multiplicire mit $x - 1$, so hat man $5x + 3 = 7x - 7$, subtrahire $5x$, so kommt $3 = 2x - 7$, addire 7, so bekommt man $2x = 10$, folglich $x = 5$.

21. Bisweilen kommen auch Wurzel-Zeichen vor, und die Gleichung gehört doch zu denen des ersten Grades; z. B. wenn eine Zahl x gesucht wird unter 100, so daß die Quadrat-Wurzel aus $100 - x$ gleich werde 8, oder daß $\sqrt{(100 - x)} = 8$, so nehme man beiderseits die Quadrate $100 - x = 64$; dann hat man, wenn x addirt wird, $100 = 64 + x$, subtrahire 64, so ergiebt sich $x = 36$. Man könnte jedoch auch also verfahren. Da $100 - x = 64$, so subtrahire man 100, und man bekommt $- x = - 36$, mit $- 1$ multiplicirt, giebt $x = 36$.

22. Bisweilen erscheint auch die unbekannte Zahl x als Exponent einer Potenz, Beispiele welcher Art schon oben vorgekommen, und dann muß man seine Zuflucht zu den Logarithmen nehmen.

Wenn z. B. die Gleichung $2^x = 512$ vorliegt, nimmt man beiderseits die Logarithmen, dann hat man $x \log. 2 = \log. 512$; man dividire durch $\log. 2$, so wird $x = \frac{\log. 512}{\log. 2}$; nach den Tabellen ist also:

$$x = \frac{2{,}7092700}{0{,}3010300} = \frac{27092700}{3010300}; \text{ also } = 9.$$

Es sei $5 . 3^{2x} - 100 = 305$; man addire auf beiden Seiten 100, kommt also $5 . 3^{2x} = 405$; man dividire durch 5, so wird $3^{2x} = 81$; man nehme die Logarithmen $2x \log. 3 = \log. 81$ und dividire durch $2 \log. 3$, so wird $x = \frac{\log. 81}{2 \log. 3}$ oder $x = \frac{\log. 81}{\log. 9}$, folglich

$$x = \frac{1{,}9084850}{0{,}9542425} = \frac{19084850}{9542425}; \text{ also wird } x = 2.$$

Kapitel 3.

Von der Auflösung einiger hieher gehörigen Aufgaben.

23. I. Aufgabe. Theile 7 in zwei Theile, so daß der größere um 3 größer sei als der kleinere?

Es sei der größere Theil $= x$, so wird der kleinere sein $7 - x$, daher muß sein $x = 7 - x + 3$, oder $x = 10 - x$; man addire x, so kommt $2x = 10$, und dividire durch 2, so wird $x = 5$.

Antwort. Der größere Theil ist 5 und der kleinere 2.

II. Aufgabe. Man theile a in zwei Theile, so daß der größere um b größer sei als der kleinere.

Es sei der größere Theil x, so ist der kleinere $a - x$; daher wird $x = a - x + b$; man addire x, so wird $2x = a + b$ und dividire durch 2, so erhält man $x = \frac{a + b}{2}$.

Eine andere Auflösung: Es sei der größere Theil $= x$, weil nun derselbe um b größer ist als der kleinere, so ist wiederum der kleinere um b kleiner als der größere; daher wird der kleinere Theil $x - b$; diese beiden Theile zusammen müssen a ausmachen, daher bekommt man $2x - b = a$; man addire b, so kommt $2x = a + b$, folglich $x = \frac{a + b}{2}$, welches der größere Theil ist, und der kleinere wird sein $\frac{a + b}{2} - b$ oder $\frac{a + b}{2} - \frac{2b}{2}$ oder $\frac{a - b}{2}$.

24. III. Aufgabe. Ein Vater hinterläßt seinen drei Söhnen ein Vermögen von 1600 Rthlr. Nach seinem Testament soll der älteste Sohn 200 Rthlr. mehr haben als der zweite, der zweite aber 100 Rthlr. mehr als der dritte; wie viel bekommt jeder?

Das Erbtheil des dritten sei $= x$, so ist das Erbtheil des zweiten $= x + 100$, und das Erbtheil des ersten $= x + 300$; diese 3 zusammen müssen 1600 Rthlr. ausmachen. Daher wird $3x + 400 = 1600$; man subtrahire 400, so wird $3x = 1200$ und durch 3 dividirt, giebt $x = 400$.

Antwort. Der dritte Sohn bekommt 400 Rthlr., der zweite 500 Rthlr., der erste 700 Rthlr.

25. IV. Aufgabe. Ein Vater hinterläßt seinen vier Söhnen ein Vermögen von 8600 Rthlr. Nach seinem Testamente soll der erste zweimal so viel bekommen als der zweite, weniger 100 Rthlr., der zweite soll bekommen dreimal so viel als der dritte, weniger 200 Rthlr. und der dritte soll viermal so viel erhalten als der vierte, weniger 300 Rthlr. Wie viel bekommt jeder?

Das Erbtheil des vierten sei $= x$, so ist das Erbtheil des dritten $4x - 300$, des zweiten $12x - 1100$ und des ersten $24x - 2300$. Hievon muß die Summe ausmachen 8600 Rthlr., woraus diese Gleichung entsteht:

$41x - 3700 = 8600$; man addire 3700, so kommt $41x = 12300$; und durch 41 dividirt, giebt $x = 300$.

Antwort: Der vierte Sohn bekommt 300 Rthlr., der dritte 900 Rthlr., der zweite 2500 Rthlr. und der erste 4900 Rthlr.

26. V. Aufgabe. Ein Mann hinterläßt 11000 Rthlr. für seine Witwe, zwei Söhne und drei Töchter. Nach seinem Testamente soll die Frau zweimal mehr bekommen als ein Sohn, und ein Sohn zweimal mehr als eine Tochter. Wie viel bekommt jeder Erbe?

Das Erbtheil einer Tochter sei $= x$, so ist das Erbtheil eines Sohnes $= 2x$ und das Erbtheil der Witwe $= 4x$; folglich ist die ganze Erbschaft $3x + 4x + 4x$, oder $11x = 11000$; durch 11 getheilt giebt $x = 1000$.

Antwort. Eine Tochter bekommt 1000 Rthlr.		
alle drei bekommen also	3000	Rthlr.
Ein Sohn bekommt 2000 Rthlr.		
beide also	4000	„
und die Mutter bekommt . . .	4000	„
Summa	11000	Rthlr.

27. VI. Aufgabe. Ein Vater hinterläßt drei Söhne, welche das hinterlassene Vermögen in folgender Art unter sich theilen. Der erste bekommt 1000 Rthlr. weniger als die Hälfte der ganzen Erbschaft; der zweite 800 Rthlr. weniger als der dritte Theil der Erbschaft, und der dritte 600 Rthlr. weniger als der vierte Theil der Erbschaft.

Nun ist die Frage, wie groß das nachgelassene Vermögen gewesen und wie viel jeder bekommen hat?

Es sei die ganze Erbschaft $= x$, so hat

der erste Sohn bekommen $\frac{1}{2}x - 1000$
der zweite . . . . . $\frac{1}{3}x - 800$
der dritte . . . . . $\frac{1}{4}x - 600$.

Alle drei Söhne zusammen haben also bekommen $\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x + \frac{1}{4}x - 2400$, welches der ganzen Erbschaft x gleich gesetzt werden muß, woraus diese Gleichung entsteht: $\frac{13}{12}x - 2400 = x$.

Man subtrahire x, so hat man $\frac{1}{12}x - 2400 = 0$, man addire 2400, so ist $\frac{1}{12}x = 2400$, und mit 12 multiplicirt, giebt $x = 28800$.

Antwort. Die ganze Erbschaft betrug 28800 Rthlr., davon hat nun

der erste Sohn bekommen 13400 Rthlr.
der zweite . . . . . . 8800 „
der dritte . . . . . . 6600 „
alle drei also 28800 Rthlr.

28. VII. Aufgabe. Ein Vater hinterläßt vier Söhne, welche die Erbschaft so unter sich theilen: der erste nimmt 3000 Rthlr. weniger als die Hälfte der Erbschaft; der zweite nimmt 1000 Rthlr. weniger als $\frac{1}{3}$ der Erbschaft; der dritte nimmt $\frac{1}{4}$ der ganzen Erbschaft; der vierte nimmt 600 Rthlr. und $\frac{1}{5}$ der Erbschaft. Wie groß war die Erbschaft, und wie viel hat jeder Sohn bekommen?

Man setze die ganze Erbschaft $= x$, so hat

der erste bekommen $\frac{1}{2}x - 3000$
der zweite . . . $\frac{1}{3}x - 1000$
der dritte . . . $\frac{1}{4}x$
der vierte . . . $\frac{1}{5}x + 600$

und alle vier zusammen nahmen $\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x + \frac{1}{4}x + \frac{1}{5}x - 3400$, welches sein muß $= x$; also hat man diese Gleichung: $\frac{77}{60}x - 3400 = x$; subtrahire x, so wird $\frac{17}{60}x - 3400 = 0$;

addire 3400, so kommt $\frac{17}{60}x = 3400$; durch 17 dividirt, giebt $\frac{1}{60}x = 200$; und mit 60 multiplicirt, giebt $x = 12000$.

Antwort. Die ganze Erbschaft betrug 12000 Rthlr,

davon bekam der erste 3000 Rthlr.
der zweite . . . . . 3000 „
der dritte . . . . . 3000 „
der vierte . . . . . 3000 „

29. VIII. Aufgabe. Suche eine Zahl, die so beschaffen ist, daß, wenn man zu ihr ihre Hälfte addirt, so viel über 60 heraus kommt, als die Zahl selbst unter 65 ist?

Die Zahl sei x, so muß $x + \frac{1}{2}x - 60$ so viel sein als $65 - x$, das ist $\frac{3}{2}x - 60 = 65 - x$; man addire x, so hat man $\frac{5}{2}x - 60 = 65$; man addire 60, so kommt $\frac{5}{2}x = 125$, durch 5 dividirt, wird $\frac{1}{2}x = 25$, und mit 2 multiplicirt, giebt $x = 50$.

Antwort. Die gesuchte Zahl ist 50.

30. IX. Aufgabe. Man theile 32 in zwei ungleiche Theile, so daß, wenn man den kleineren durch 6 dividirt, den größeren aber durch 5, die Quotienten zusammen 6 ausmachen?

Es sei der kleinere Theil $= x$, so ist der größere $32 - x$; der kleinere durch 6 dividirt, giebt $\frac{x}{6}$; der größere durch 5 dividirt, giebt $\frac{32 - x}{5}$; also muß sein $\frac{x}{6} + \frac{32 - x}{5} = 6$; mit 5 multiplicirt, giebt $\frac{5}{6}x + 32 - x = 30$, oder $-\frac{1}{6}x + 32 = 30$; man addire $\frac{1}{6}x$, so kommt $32 = 30 + \frac{1}{6}x$; 30 subtrahirt giebt $2 = \frac{1}{6}x$; mit 6 multiplicirt wird $x = 12$.

Antwort. Der kleinere Theil ist 12, und der größere 20.

31. X. Aufgabe. Suche eine Zahl von der Beschaffenheit, daß, wenn man sie mit 5 multiplicirt, das Product so viel unter 40 ist, als die Zahl selbst unter 12.

Es sei die Zahl $= x$, welche unter 12 ist um $12 - x$, diese Zahl fünfmal genommen ist $5x$, und ist unter 40

um $40 - 5x$, welches letztere eben so viel sein soll als $12 - x$, also $40 - 5x = 12 - x$.

Addire $5x$, so wird $40 = 12 + 4x$; subtrahire 12, giebt $28 = 4x$; dividire durch 4, wird $x = 7$.

Antwort. Die Zahl ist 7.

32. XI. Aufgabe. Theile 25 in zwei Theile, so daß der größere 49 mal größer ist als der kleinere.

Es sei der kleinere Theil $= x$, so ist der größere $= 25 - x$; dieser durch jenen dividirt soll 49 geben: also wird $\frac{25 - x}{x} = 49$; mit x multiplicirt giebt $25 - x = 49x$, und x addirt giebt $50x = 25$; durch 50 dividirt bleibt $x = \frac{1}{2}$.

Antwort. Der kleinere Theil ist $\frac{1}{2}$ und der größere $24\frac{1}{2}$, welcher durch $\frac{1}{2}$ dividirt, das ist mit 2 multiplicirt, 49 giebt.

33. XII. Aufgabe. Theile 48 in neun Theile, so daß immer einer um $\frac{1}{2}$ größer sei als der vorhergehende?

Es sei der erste und kleinste Theil $= x$, so ist der zweite $x + \frac{1}{2}$ und der dritte $= x + 1$ rc. Weil nun diese Theile eine arithmetische Reihe bilden, deren erstes Glied x, so ist das neunte und das letzte Glied $x + 4$ (siehe 1. Theil 406), wozu das erste x addirt $2x + 4$ giebt. Diese Summe mit der Anzahl der Glieder 9 multiplicirt, giebt $18x + 36$; dieses durch 2 getheilt giebt die Summe aller 9 Theile $9x + 18$ (siehe 1. Theil 416), welche sein muß 48. Also hat man $9x + 18 = 48$; 18 subtrahirt, giebt $9x = 30$; durch 9 dividirt, giebt $x = 3\frac{1}{3}$.

Antwort. Der erste Theil ist $3\frac{1}{3}$ und die neun Theile sind folgende.

1 2 3 4 5 6 7 8 9
$3\frac{1}{3} + 3\frac{5}{6} + 4\frac{1}{3} + 4\frac{5}{6} + 5\frac{1}{3} + 5\frac{5}{6} + 6\frac{1}{3} + 6\frac{5}{6} + 7\frac{1}{3}$.

Davon ist die Summe $= 48$.

34. XIII. Aufgabe. Suche eine arithmetische Reihe,

deren erstes Glied $= 5$, deren letztes $= 10$, deren Summe aber $= 60$ ist?

Da hier weder der Unterschied noch die Anzahl der Glieder bekannt ist; aus dem ersten und letzten aber die Summe aller derselben gefunden werden könnte; wenn man nur die Anzahl der Glieder wüßte, so sei dieselbe $= x$. Daher wird die Summe der Reihe sein $\frac{15}{2}x = 60$; durch 15 dividirt $\frac{1}{2}x = 4$, mit 2 multiplicirt $x = 8$. Da nun die Anzahl der Glieder 8 ist, so setze man den Unterschied $= z$, so ist das zweite Glied $5 + z$, das dritte $5 + 2z$ und das achte $5 + 7z$, welches $= 10$ sein muß.

Also hat man $5 + 7z = 10$, und hievon 5 subtrahirt giebt $7z = 5$, durch 7 dividirt $z = \frac{5}{7}$.

Antwort. Der Unterschied der Reihe ist $\frac{5}{7}$ und die Anzahl der Glieder 8, daher die Reihe selbst sein wird:

1 2 3 4 5 6 7 8
$5 + 5\frac{5}{7} + 6\frac{3}{7} + 7\frac{1}{7} + 7\frac{6}{7} + 8\frac{4}{7} + 9\frac{2}{7} + 10$.

Davon ist die Summe $= 60$.

35. XIV. Aufgabe. Suche eine Zahl, die so beschaffen ist, daß, wenn man von ihrem doppelten Werthe 1 subtrahirt und das Uebrige verdoppelt, davon 2 subtrahirt, den Rest durch 4 dividirt, 1 weniger herauskomme als die gesuchte Zahl?

Die gesuchte Zahl sei x, so ist ihr doppelter Werth $2x$, davon 1 subtrahirt, bleibt $2x - 1$, dieses verdoppelt wird $4x - 2$, davon subtrahirt 2 bleibt $4x - 4$, dieses durch 4 dividirt giebt $x - 1$, welches 1 weniger sein muß als x.

Also ist $x - 1 = x - 1$ eine identische Gleichung, welche anzeigt, daß x gar nicht bestimmt wird, sondern daß man dafür jede beliebige Zahl annehmen kann.

36. XV. Aufgabe. Ich habe einige Ellen Tuch gekauft und für jede 5 Ellen 7 Rthlr. bezahlt, davon wieder 7 Ellen für 11 Rthlr. verkauft und dabei 100 Rthlr. gewonnen. Wie viel Tuch ist es gewesen?

Es seien x Ellen gewesen, so muß man erst sehen, wie viel diese im Einkauf gekostet, welches durch folgende Regel de Tri gefunden wird.

5 Ellen kosten 7 Rthlr., was kosten x Ellen? Antwort: $\frac{7}{5}$x Rthlr.

So viel Geld habe ich ausgegeben. Nun laßt uns sehen, wie viel ich wieder eingenommen; und dieses geschieht durch die Regel de Tri: 7 Ellen kosten im Verkauf 11 Rthlr.; was kosten x Ellen? Antwort: $\frac{11}{7}$x Rthlr.

Dieses ist die Einnahme, welche um 100 Rthlr. größer ist als die Ausgabe, woraus folgende Gleichung entsteht:

$$\tfrac{11}{7}x = \tfrac{7}{5}x + 100,$$

$\frac{7}{5}x$ subtrahirt, bleibt $\frac{6}{35}x = 100$; mit 35 multiplicirt, kommt $6x = 3500$; durch 6 dividirt, wird $x = 583\frac{1}{3}$.

Antwort. Es waren $583\frac{1}{3}$ Ellen, welche erstlich für $816\frac{2}{3}$ Rthlr. eingekauft wurden; hierauf sind dieselben wieder verkauft worden für $916\frac{2}{3}$ Rthlr., also sind 100 Rthlr. daran gewonnen worden.

37. XVI. Aufgabe. Jemand kauft 12 Stück Tuch für 140 Rthlr., davon sind 2 weiß, 3 schwarz und 7 blau. Nun kostet ein Stück schwarzes Tuch 2 Rthlr. mehr als ein weißes, und ein blaues 3 Rthlr. mehr als ein schwarzes. Die Frage ist, wie viel jedes gekostet?

Man setze, ein Stück weißes kostet x Rthlr., so kosten die 2 weißen Stücke 2x Rthlr. Ferner kostet ein Stück schwarzes $x + 2$, also die 3 schwarzen $3x + 6$ und ein Stück blaues $x + 5$, folglich die 7 blauen $7x + 35$ und alle zwölf Stücke $12x + 41$.

Dieselben kosten aber wirklich 140 Rthlr. Daher hat man $12x + 41 = 140$; 41 hievon subtrahirt bleibt $12x = 99$; durch 12 dividirt wird $x = 8\frac{1}{4}$.

Antwort. 1 Stück weißes	kostet demnach	$8\frac{1}{4}$	Rthlr.
1 „ schwarzes	„	$10\frac{1}{4}$	„
1 „ blaues	„	$13\frac{1}{4}$	„

38. XVII. Aufgabe. Jemand hat Muskatnüsse gekauft und sagt, daß 3 Stück eben so viel über 4 Pfennige kosten als 4 Stück mehr als 10 Pf. kosten. Wie theuer waren dieselben?

Man sage: 3 Stück kosten $x + 4$ Pf., so werden 4 Stück $x + 10$ Pf. kosten. Nach dem ersten Satz aber findet man durch die Regel de Tri was 4 Stück kosten, 3 Stück also: $x + 4$ Pf. = 4 Stück. Antwort: $\frac{4x + 16}{3}$; also wird $\frac{4x + 16}{3} = x + 10$ oder $4x + 16 = 3x + 30$; 3x subtrahirt, giebt $x + 16 = 30$; 16 subtrahirt giebt $x = 14$.

Antwort. Es kosten 3 Stück 18 Pf. und 4 Stück 24 Pf. Folglich hat 1 Stück 6 Pf. gekostet.

39. XVIII. Aufgabe. Jemand hat zwei silberne Becher nebst einem Deckel dazu. Der erste Becher wiegt 12 Loth. Legt man den Deckel darauf, so wiegt er zweimal so viel als der andere Becher; legt man aber den Deckel auf den andern Becher, so wiegt er dreimal so viel als der erste. Hier ist nun die Frage, wie viel der Deckel und auch der andere Becher gewogen?

Man setze, der Deckel habe gewogen x Loth, so wiegt der erste Becher sammt dem Deckel $x + 12$ Loth. Da dieses Gewicht zweimal so groß ist als das des andern Bechers, so hat der andere gewogen $\frac{1}{2}x + 6$; legt man darauf den Deckel, so wiegt er $\frac{3}{2}x + 6$, welches 3 mal 12, das ist 36, gleich sein muß. Also hat man $\frac{3}{2}x + 6 = 36$ oder $\frac{3}{2}x = 30$ und $\frac{1}{2}x = 10$ und $x = 20$.

Antwort. Der Deckel hat 20 Loth, der andere Becher aber 16 Loth gewogen.

40. XIX. Aufgabe. Ein Wechsler hat zweierlei Münze; von der ersten Sorte gehen a Stück auf einen Rthlr., von der zweiten Sorte b Stück. Nun will Jemand c Stück für einen Rthlr. haben. Wie viel muß ihm der Wechsler von jeder Sorte geben?

Man setze, er gebe ihm von der ersten Sorte x Stück und also von der andern $c - x$ Stück. Nun sind aber

jene x Stück werth $a : 1 = x : \frac{x}{a}$ Rthlr. Diese $c - x$ Stück aber sind werth $b : 1 = c - x : \frac{c - x}{b}$ Rthlr.

Also muß sein $\frac{x}{a} + \frac{c - x}{b} = 1$, oder $\frac{bx}{a} + c - x = b$, oder $bx + ac - ax = ab$, und weiter $bx - ax = ab - ac$, folglich wird $x = \frac{ab - ac}{b - a}$ oder $x = \frac{a(b - c)}{b - a}$, daher wird $c - x = \frac{bc - ab}{b - a} = \frac{b(c - a)}{b - a}$.

Antwort. Von der ersten Sorte giebt also der Wechsler $\frac{a(b - c)}{b - a}$ Stück, von der andern Sorte aber $\frac{b(c - a)}{b - a}$ Stück.

Anmerkung. Diese beiden Zahlen lassen sich leicht durch die Regel de Tri finden; nämlich die erste durch diese Proportion: $b - a : b - c = a : \frac{ab - ac}{b - a}$; für die zweite Zahl gilt diese: $b - a : c - a = b : \frac{bc - ab}{b - a}$. Hiebei ist zu merken, daß b größer ist als a, und c kleiner als b, aber größer als a, wie es die Natur der Sache erfordert.

41. XX. Aufgabe. Ein Wechsler hat zweierlei Münze; von der ersten gelten 10 Stück einen Rthlr., von der andern 20 Stück einen Rthlr. Nun verlangt Jemand 17 Stück für einen Rthlr., wie viel bekommt er von jeder Sorte?

Hier ist also $a = 10$, $b = 20$ und $c = 17$, woraus diese Regel de Trien sich ergeben.

I. $10 : 3 = 10 : 3$, also von der ersten Sorte 3 Stück.
II. $10 : 7 = 20 : 14$, und von der andern Sorte 14 Stück.

42. XXI. Aufgabe. Ein Vater hinterläßt einige Kinder nebst einem Vermögen, welches die Kinder in folgender Art unter sich theilen. Das erste nimmt 100 Rthlr. und dazu den 10. Theil des übrigen.

Das zweite nimmt 200 Rthlr. und dazu den 10. Theil des übrigen.

Das dritte nimmt 300 Rthlr. und dazu den 10. Theil des übrigen.

Das vierte nimmt 400 Rthlr. und dazu den 10. Theil des übrigen 2c.

Hierauf stellt sich heraus, daß das ganze Vermögen unter den Kindern gleich vertheilt worden ist. Nun ist die Frage, wie groß das Vermögen gewesen, wie viel Kinder der Vater hinterlassen, und wie viel jedes bekommen?

Diese Aufgabe ist von einer ganz besondern Art und verdient deswegen beachtet zu werden. Um dieselbe leichter aufzulösen, setze man das ganze hinterlassene Vermögen = z Rthlr. und weil alle Kinder gleich viel bekommen, so sei der Antheil eines jeden = x, woraus man sieht, daß die Anzahl der Kinder gewesen $\frac{z}{x}$. Hieraus wollen wir die Auflösung in folgender Art bewerkstelligen.

Das zu theilende Geld.	Ordnung der Kinder.	Antheil jedes Kindes.	Die Differenzen der Antheile.
z	das erste	$x = 100 + \frac{z - 100}{10}$	
$z - x$	„ zweite	$x = 200 + \frac{z - x - 200}{10}$	$100 - \frac{x - 100}{10} = 0$
$z - 2x$	„ dritte	$x = 300 + \frac{z - 2x - 300}{10}$	$100 - \frac{x - 100}{10} = 0$
$z - 3x$	„ vierte	$x = 400 + \frac{z - 3x - 400}{10}$	$100 - \frac{x - 100}{10} = 0$
$z - 4x$	„ fünfte	$x = 500 + \frac{z - 4x - 500}{10}$	$100 - \frac{x - 100}{10} = 0$
$z - 5x$	„ sechste	$x = 600 + \frac{z - 5x - 600}{10}$	2c.

In der letzten Columne sind hier die Differenzen angegeben, welche entstehen, wenn man jedes Erbtheil von dem folgenden subtrahirt. Weil nun alle Erbtheile einander gleich sind, so muß jede dieser Differenzen = 0 sein. Da es sich nun so fügt, daß alle Differenzen einander gleich sind, so genügt es, daß man eine davon $= 0$ setzt. Daher erhalten wir diese Gleichung $100 - \frac{x - 100}{10} = 0$. Man multiplicire mit 10, so erhält man $1000 - x - 100 = 0$, oder $900 - x = 0$, folglich $x = 900$. Hieraus ersehen wir schon, daß das Erbtheil jedes Kindes 900 Rthlr. betragen. Man nehme nun eine von den Gleichungen in der dritten Columne, welche man will, z. B. die erste $900 = 100 + \frac{z - 100}{10}$, woraus man z sogleich finden kann; denn $9000 = 1000 + z - 100$ oder $9000 = 900 + z$, also $z = 8100$, daher wird $\frac{z}{x} = 9$.

Antwort. Also war die Anzahl der Kinder $= 9$, das hinterlassene Vermögen $= 8100$ Rthlr., wovon jedes Kind 900 Rthlr. erhält.

Kapitel 4.

Von der Auflösung zweier oder mehrerer Gleichungen des ersten Grades.

43. Häufig ist man genöthigt, zwei oder auch mehr unbekannte Zahlen, die durch die Buchstaben x, y, x ꝛc. dargestellt werden, in Rechnung zu bringen, da man dann, wenn anders die Aufgabe bestimmt ist, auf eben so viel Gleichungen kommt, aus welchen hierauf die unbekannten Zahlen gefunden werden müssen. Hier betrachten wir aber nur solche Gleichungen, in denen die erste Potenz der unbekannten Zahl vorkommt, und auch keine mit der andern multiplicirt ist; so daß also jede Gleichung von der Form $az + by + cx = b$ sein wird.

44. Wir wollen den Anfang mit zwei Gleichungen machen, und daraus zwei unbekannte Zahlen x und y bestimmen. Um nun die Sache auf allgemeine Art zu behandeln, seien diese beiden Gleichungen gegeben I. $ax + by = c$ und II. $fx + gy = h$, wo die Buchstaben a, b, c und f, g, h die Stelle bekannter Zahlen vertreten. Hier ist nun die Frage, wie man aus diesen beiden Gleichungen die beiden unbekannten Zahlen x und y auffindet.

45. Der natürlichste Weg besteht nun darin, daß man aus jeder Gleichung den Werth einer unbekannten Zahl z. B. von x bestimmt und dann diese beiden Werthe einander gleich setzt; woraus man eine Gleichung erhält, in der nur die unbekannte Zahl y vorkommt, welche man nach den obigen Regeln bestimmen kann. Hat man nun y gefunden, so braucht man nur statt y seinen gefundenen Werth zu setzen, um daraus den Werth von x zu erhalten.

46. Dieser Regel gemäß findet man aus der ersten Gleichung $x = \frac{c - by}{a}$, aus der andern aber findet man $x = \frac{h - gy}{f}$; diese beiden Werthe setze man einander gleich, so erhält man diese neue Gleichung $\frac{c - by}{a} = \frac{h - gy}{f}$; mit a multiplicirt, wird $c - by = \frac{ah - agy}{f}$; mit f multiplicirt, wird $fc - fby = ah - agy$; man addire agy, so wird $fc - fby + agy = ah$; man subtrahire fc, so wird $- fby + agy = ah - fc$ oder $(ag - bf)\,y = ah - fc$; man dividire durch $ag - bf$, so wird $y = \frac{ah - fc}{ag - bf}$; schreibt man nun diesen Werth für y in eine der beiden Gleichungen, die für x gefunden worden, so erhält man auch den Werth von x. Man nehme den ersten, so hat man $- by = - \frac{abh + bcf}{ag - bf}$, hieraus wird $c - by = c - \frac{abh + bcf}{ag - bf}$, oder $c - by = \frac{acg - bcf - abh + bcf}{ag - bf} = \frac{acg - abh}{ag - bf}$; durch a dividirt, giebt $x = \frac{c - by}{a} = \frac{cg - bh}{ag - bf}$.

47. I. **Aufgabe.** Um das Verfahren durch Beispiele zu erläutern, sei hier die Aufgabe vorgelegt: Man suche 2 Zahlen, deren Summe 15 und deren Differenz 7 sei?

Es sei die größere Zahl $= x$ und die kleinere $= y$, so hat man I. $x + y = 15$, und II. $x - y = 7$. Aus der ersten bekommt man $x = 15 - y$ und aus der zweiten

$x = 7 + y$, woraus diese neue Gleichung entspringt $15 - y = 7 + y$.

Hier addire man y, so hat man $15 = 7 + 2y$; man subtrahire 7, so wird $2y = 8$; durch 2 dividirt, wird $y = 4$ und daraus $x = 11$.

Antwort. Die kleinere Zahl ist 4, die größere aber 11.

48. II. **Aufgabe.** Man kann diese Aufgabe auch allgemein machen und zwei Zahlen suchen, deren Summe $= a$, und deren Differenz $= b$ sei.

Es sei die größere $= x$ und die kleinere $= y$, so hat man I. $x + y = a$ und II. $x - y = b$; aus der ersten erhält man $x = a - y$ und aus der andern $x = b + y$, woraus diese Gleichung entsteht $a - y = b + y$.

Man addire y, so hat man $a = b + 2y$; man subtrahire b, so kommt $2y = a - b$; durch 2 dividirt, wird $y = \frac{a - b}{2}$ und hieraus wird $x = a - \frac{a - b}{2} = \frac{a + b}{2}$.

Antwort. Die größere Zahl ist also $x = \frac{a + b}{2}$ und die kleinere $y = \frac{a - b}{2}$, oder da $x = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b$ und $y = \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b$, so erhält man diesen Lehrsatz: die größere Zahl ist gleich der halben Summe plus der halben Differenz, und die kleinere Zahl ist gleich der halben Summe minus der halben Differenz.

49. Man kann diese Aufgabe auch auf folgende Weise auflösen. Da die beiden Gleichungen sind $x + y = a$ und $x - y = b$, so addire man dieselben, und es wird $2x = a + b$ und $x = \frac{a + b}{2}$.

Alsdann subtrahire man von der ersten die zweite, so bekommt man $2y = a - b$ und $y = \frac{a - b}{2}$, wie vorher.

50. III. **Aufgabe.** Ein Maulesel und ein Esel tragen jeder etliche Pud.*) Der Esel beschwert sich über seine

*) Das in Rußland übliche Gewicht Pud beträgt 40 Pfund.

Last, und sagt zum Maulesel, wenn du mir ein Pud von deiner Last gäbest, so hätte ich zweimal so viel als du. Darauf antwortet der Maulesel, wenn du mir ein Pud von deiner Last gäbest, so hätte ich dreimal so viel als du. Wie viel Pud hat jeder getragen?

Der Maulesel habe x Pud getragen, der Esel aber y Pud. Giebt nun der Maulesel dem Esel ein Pud, so hat der Esel $y + 1$, der Maulesel aber behält noch $x - 1$; da nun der Esel zweimal so viel hat als der Maulesel, so wird $y + 1 = 2x - 2$.

Wenn aber der Esel dem Maulesel ein Pud giebt, so bekommt der Maulesel $x + 1$ und der Esel behält noch $y - 1$. Da nun jene Last dreimal so groß ist als diese, so wird $x + 1 = 3y - 3$.

Also sind unsere zwei Gleichungen:

$$\text{I. } y + 1 = 2x - 2, \quad \text{II. } x + 1 = 3y - 3.$$

Aus der ersten findet man $x = \frac{y + 3}{2}$, und aus der andern $x = 3y - 4$, woraus diese neue Gleichung entsteht $\frac{y + 3}{2} = 3y - 4$, welche mit 2 multiplicirt giebt $y + 3 = 6y - 8$, und y subtrahirt, kommt $5y - 8 = 3$, dazu 8 addirt, so hat man $5y = 11$ und $y = \frac{11}{5}$, oder $2\frac{1}{5}$; und hieraus $x = 2\frac{3}{5}$.

Antwort. Also hat der Maulesel $2\frac{3}{5}$ Pud, der Esel aber $2\frac{1}{5}$ Pud getragen.

51. Hat man 3 unbekannte Zahlen und eben so viel Gleichungen, als z. B. I. $x + y - z = 8$, II. $x + z - y = 9$, III. $y + z - x = 10$, so suche man ebenfalls aus jeder den Werth von x. Aus der I. $x = 8 + z - y$; II. $x = 9 + y - z$, III. $x = y + z - 10$.

Nun setze man erstlich den ersten Werth gleich dem andern, und hierauf auch gleich dem dritten, so erhält man diese zwei neuen Gleichungen:

$$\text{I. } 8 + z - y = 9 + y - z,$$
$$\text{II. } 8 + z - y = y + z - 10.$$

Es folgt aber aus der ersten $2z - 2y = 1$, und aus der zweiten $2y = 18$, und da erhält man sogleich $y = 9$, welcher Werth in der vorhergehenden für y geschrieben, giebt $2z - 18 = 1$ und $2z = 19$, daher $z = 9\frac{1}{2}$, woraus gefunden wird $x = 8\frac{1}{2}$.

Hier hat es sich gefügt, daß in der letzten Gleichung der Buchstabe z verschwunden, daß also y sogleich daraus bestimmt werden konnte. Wäre aber z auch noch darin vorgekommen, so hätte man zwei Gleichungen gehabt zwischen z und y, welche nach der ersten Regel aufgelöst werden mußten.

52. Es seien die drei folgenden Gleichungen gefunden worden:

$$\text{I. } 3x + 5y - 4z = 25,$$
$$\text{II. } 5x - 2y + 3z = 46,$$
$$\text{III. } 3y + 5z - x = 62.$$

Man suche aus jeder den Werth von x, so hat man:

$$\text{I. } x = \frac{25 - 5y + 4z}{3},$$
$$\text{II. } x = \frac{46 + 2y - 3z}{5},$$
$$\text{III. } x = 3y + 5z - 62.$$

Nun vergleiche man diese drei Werthe unter sich, so giebt der IIIte und Ite $3y + 5z - 62 = \frac{25 - 5y + 4z}{3}$, oder mit 3 multiplicirt $25 - 5y + 4z = 9y + 15z - 186$; addire 186, so kommt $211 - 5y + 4z = 9y + 15z$; 5y addirt, giebt $211 + 4z = 14y + 15z$. Also aus der Iten und IIIten erhält man $211 = 14y + 11z$. Die IIte und IIIte giebt $3y + 5z - 62 = \frac{46 + 2y - 3z}{5}$ oder $46 + 2y - 3z = 15y + 25z - 310$ und man findet aus dieser Gleichung $356 = 13y + 28z$.

Aus jeder dieser beiden Gleichungen suche man den Werth für y.

I. $211 = 14y + 11z$, wo 11z subtrahirt, bleibt
$$14y = 211 - 11z \text{ oder } y = \frac{211 - 11z}{14}.$$
II. $356 = 13y + 28z$, wo 28z subtrahirt, bleibt
$$13y = 356 - 28z \text{ oder } y = \frac{356 - 28z}{13}.$$
Diese beiden Werthe einander gleichgesetzt, geben:
$$\frac{211 - 11z}{14} = \frac{356 - 28z}{13}$$
mit 13 . 14 multiplicirt, wird $2743 - 143z = 4984 - 392z$, und 392z addirt, giebt $249z + 2743 = 4984$, oder $249z = 2241$ und also $z = 9$.

Hieraus erhält man $y = 8$ und endlich $x = 7$.

53. Wenn mehr als drei unbekannte Zahlen, und eben so viel Gleichungen vorkommen, könnte man die Auflösung auf ähnliche Art anstellen, was aber meistens zu umständlichen Rechnungen führen würde.

Es pflegen sich aber in jedem Falle Mittel zu finden, durch welche die Auflösung ungemein erleichtert wird, und dies geschieht, indem man außer den gesuchten unbekannten Zahlen noch neue willkürliche, z. B. die Summe aller, in die Rechnung mit einführt, welches von dem, der sich in dergleichen Rechnungen schon geübt hat, in jedem Falle leicht beurtheilt werden kann. Zur Erläuterung wollen wir einige derartige Beispiele anführen.

54. IV. Aufgabe. Drei Personen spielen mit einander, im ersten Spiele verliert der erste an jeden der beiden andern so viel, als jeder von den zwei andern Geld bei sich hatte. Im zweiten Spiele verliert der zweite an den ersten und dritten so viel als jeder hat. Im dritten Spiele verliert der dritte an den ersten und zweiten so viel als jeder hatte, und da findet es sich, daß alle nach beendigtem Spiele gleich viel haben, jeder nämlich 24 Fl. Nun ist die Frage, wie viel jeder anfänglich gehabt habe?

Man setze, der erste habe x Fl., der zweite y und der

dritte z gehabt. Außerdem setze man die Summe aller Fl. zusammen $x + y + z = f$. Da nun im ersten Spiele der erste so viel verliert als die beiden andern haben, und der erste x hat, so haben die beiden andern $f - x$, und so viel verliert der erste, daher ihm noch übrig bleiben $2x - f$; der zweite aber wird haben 2y, und der dritte 2z. Nach dem ersten Spiele wird also jeder haben wie folgt:

der erste $2x - f$, der zweite $2y$, der dritte $2z$.

Im zweiten Spiele verliert der zweite, der nun 2y hat, an die beiden andern, so viel als sie haben, oder $f - 2y$. Daher der zweite noch behält $4y - f$; die beiden andern aber werden zweimal so viel haben als vorher. Also nach dem zweiten Spiele wird haben:

der erste $4x - 2f$, der zweite $4y - f$, der dritte $4z$.

Im dritten Spiel verliert der dritte, der jetzt 4z hat, an die beiden andern, so viel sie haben; sie haben aber $f - 4z$; also behält der dritte noch $8x - f$ und die beiden andern bekommen doppelt so viel, als sie hatten. Also wird nach dem dritten Spiele jeder haben:

der erste $8x - 4f$, der zweite $8y - 2f$ und der dritte $8z - f$.

Da nun jetzt jeder 24 Fl. hat, so erhalten wir 3 Gleichungen, welche so beschaffen sind, daß man aus der ersten sogleich x, aus der andern y und aus der dritten z finden kann, besonders da f jetzt eine bekannte Zahl ist, indem alle zusammen am Ende des Spiels 72 Fl. haben. Allein dieses wird sich von selbst ergeben, ohne daß man nöthig hat darauf zu sehen.

Die Rechnung ist demnach folgende:

I. $8x - 4f = 24$, oder $8x = 24 + 4f$, oder $x = 3 + \frac{1}{2}f$;
II. $8y - 2f = 24$, oder $8y = 24 + 2f$, oder $y = 3 + \frac{1}{4}f$;
III. $8z - f = 24$, oder $8z = 24 + f$, oder $z = 3 + \frac{1}{8}f$.

Man addire diese 3 Werthe, so bekommt man:
$$x + y + z = 9 + \tfrac{7}{8}f.$$
Da nun $x + y + z = f$, so hat man $f = 9 + \frac{7}{8}f$; $\frac{7}{8}f$ subtrahirt, bleibt $\frac{1}{8}f = 9$ und $f = 72$.

Antwort. Also beim Beginn des Spiels hatte der erste 39 Fl., der zweite 21 Fl., und der dritte 12 Fl.

Aus dieser Auflösung sieht man, wie durch Hülfe der Summe der 3 unbekannten Zahlen alle oben angeführte Schwierigkeiten glücklich aus dem Wege geräumt worden sind.

55. So schwer diese Aufgabe auch zu sein scheint, so zeigt es sich doch, daß sie sogar ohne Algebra aufgelöst werden kann.

Man gehe nur in Betrachtung derselben rückwärts. Denn, da die drei Personen nach dem dritten Spiele gleich viel bekommen: nämlich der erste 24, der zweite 24, und der dritte 24; da im dritten Spiele aber der erste und zweite ihr Geld verdoppelt haben, so müssen sie vor dem Spiele folgende Anzahl von Fl. gehabt haben:

I. 12, II. 12, III. 48.

Im zweiten Spiele hat der erste und dritte sein Geld verdoppelt, also müssen sie vor dem zweiten Spiele gehabt haben:

I. 6, II. 42, III. 24.

Im ersten Spiele hat der zweite und dritte sein Geld verdoppelt, also haben sie vor dem ersten Spiel gehabt:

I. 39, II. 21, III. 12,

und eben so viel haben wir auch vorher für den Anfang des Spiels gefunden.

56. V. Aufgabe. Zwei Personen sind schuldig 29 Rubel; nun hat zwar jeder Geld, doch nicht so viel, daß er diese gemeinschaftliche Schuld allein bezahlen könnte; darum sagt der erste zu dem andern: giebst du mir $\frac{2}{3}$ deines Geldes, so könnte ich die Schuld sogleich allein bezahlen. Der andere antwortet dagegen: giebst du mir $\frac{3}{4}$ deines Geldes, so kann ich die Schuld allein bezahlen. Wie viel Geld hat jeder gehabt?

Der erste hat gehabt x Rubel, der andere y Rubel, also bekommt man erstlich:

$x + \frac{2}{3}y = 29$, ferner auch $y + \frac{3}{4}x = 29$.
Aus dem ersten findet man $x = 29 - \frac{2}{3}y$, aus dem zweiten $x = \frac{116 - 4y}{3}$. Aus diesen beiden Werthen entsteht folgende Gleichung:

$29 - \frac{2}{3}y = \frac{116 - 4y}{3}$, also $y = 14\frac{1}{2}$; daher wird $x = 19\frac{1}{3}$.

Antwort. Der erste hat gehabt $19\frac{1}{3}$, der andere $14\frac{1}{2}$ Rubel.

57. VI. **Aufgabe.** Drei Leute haben ein Haus gekauft für 100 Rthlr.; der erste verlangt vom andern die Hälfte seines Geldes, weil er dann das Haus allein bezahlen könnte; der andere begehrt vom dritten $\frac{1}{3}$ seines Geldes, um das Haus allein bezahlen zu können; der dritte begehrt vom ersten $\frac{1}{4}$ seines Geldes, um das Haus allein bezahlen zu können. Wie viel Geld hat nun jeder gehabt?

Der erste habe gehabt x, der zweite y, der dritte z Rthlr.; so bekommt man folgende drei Gleichungen:
I. $x + \frac{1}{2}y = 100$, II. $y + \frac{1}{3}z = 100$, III. $z + \frac{1}{4}x = 100$.
Aus welchen der Werth von x gefunden wird:

I. $x = 100 - \frac{1}{2}y$, III. $x = 400 - 4z$.

Hier konnte nämlich aus der zweiten Gleichung x nicht bestimmt werden. Die beiden Werthe von x aber geben diese Gleichung:

$100 - \frac{1}{2}y = 400 - 4z$ oder $4z - \frac{1}{2}y = 300$,

Diese muß mit der zweiten verbunden werden, um daraus y und z zu finden. Nun aber war die zweite Gleichung $y + \frac{1}{3}z = 100$; woraus gefunden wird $y = 100 - \frac{1}{3}z$. Aus der vorher gefundenen Gleichung $4z - \frac{1}{2}y = 300$ aber ist bekannt $y = 8z - 600$; woraus diese letzte Gleichung entsteht:

$100 - \frac{1}{3}z = 8z - 600$, also $8\frac{1}{3}z = 700$, oder $\frac{25}{3}z = 700$, und $z = 84$; hieraus findet man $y = 100 - 28$, oder $y = 72$, und endlich $x = 64$.

Antwort. Der erste hat 64 Rthlr., der zweite 72 Rthlr. und der dritte 84 Rthlr. gehabt.

58. Da in diesem Beispiel in jeder Gleichung nur zwei unbekannte Zahlen vorkommen, so kann die Auflösung auf bequemere Art vollzogen werden.

Man suche aus der ersten $y = 200 - 2x$, welches also durch x bestimmt wird; diesen Werth schreibe man für y in die zweite Gleichung, so hat man $200 - 2x + \frac{1}{3}z = 100$; 100 subtrahirt, bleibt $100 - 2x + \frac{1}{3}z = 0$, oder $\frac{1}{3}z = 2x - 100$ und $z = 6x - 300$.

Also ist auch z durch x bestimmt. Diesen Werth bringe man nun in die dritte Gleichung, so kommt $6x - 300 + \frac{1}{4}x = 100$, in welcher nur x allein vorkommt und also $25x - 1600 = 0$, daher $x = 64$, folglich $y = 200 - 128 = 72$ und $z = 384 - 300 = 84$.

59. Eben so kann man verfahren, wenn auch mehr solcher Gleichungen vorkommen; also wenn man auf allgemeine Art hat:

$$\text{I. } u + \frac{x}{a} = n; \quad \text{II. } x + \frac{y}{b} = n;$$
$$\text{III. } y + \frac{z}{c} = n; \quad \text{IV. } z + \frac{u}{d} = n;$$

oder nachdem man die Brüche weggebracht, diese Gleichungen:

$$\text{I. } au + x = an; \quad \text{II. } bx + y = bn;$$
$$\text{III. } cy + z = cn; \quad \text{IV. } dz + u = dn.$$

Aus der ersten bekommen wir $x = an - au$, welcher Werth in der zweiten $abn - abu + y = bn$, also $y = bn - abn + abu$ giebt; dieser Werth in der dritten giebt $bcn - abcn + abcu + z = cn$, also $z = cn - bcn + abcn - abcu$; dieser endlich in der vierten Gleichung giebt $cdn - bcdn + abcdn - abcdu + u = dn$. Also wird $dn - cdn + bcdn - abcdn = -abcdu + u$, oder $(abcd - 1)u = abcdn - bcdn + cdn - dn$, woraus man erhält:

$$u = \frac{abcdn - bcdn + cdn - dn}{abcd - 1} = n \cdot \frac{(abcd - bcd + cd - d)}{abcd - 1}.$$

Hieraus findet man ferner folgende Gleichungen:

$$x = \frac{abcdn - acdn + adn - an}{abcd - 1} = n \cdot \frac{(abcd - acd + ad - a)}{abcd - 1}$$

$$y = \frac{abcdn - abdn + abn - bn}{abcd - 1} = n \cdot \frac{(abcd - abd + ab - b)}{abcd - 1}$$
$$z = \frac{abcdn - abcn + bcn - cn}{abcd - 1} = n \cdot \frac{(abcd - abc + bc - c)}{abcd - 1}$$
$$u = \frac{abcdn - bcdn + cdn - dn}{abcd - 1} = n \cdot \frac{(abcd - bcd + cd - d)}{abcd - 1}.$$

60. VII. **Aufgabe.** Ein Hauptmann hat drei Compagnien Soldaten; in der einen sind Schweizer, in der andern Schwaben, und in der dritten Sachsen. Mit einem Theil der Mannschaft will er eine Stadt stürmen und verspricht zur Belohnung 901 Rthlr. also auszutheilen, daß jeder Soldat aus der Compagnie, die Sturm läuft, 1 Rthlr. bekommt, das übrige Geld aber unter den Soldaten der beiden andern Compagnien gleich vertheilt werden solle.

Nun findet es sich, daß, wenn die Schweizer Sturm laufen, jeder Soldat von den beiden andern Compagnien $\frac{1}{2}$ Rthlr. bekäme; wenn aber die Schwaben Sturm laufen, jeder der beiden andern $\frac{1}{3}$ Rthlr. bekommen würde. Laufen aber die Sachsen Sturm, so würde jeder der beiden andern $\frac{1}{4}$ Rthlr. bekommen. Nun ist die Frage, aus wie viel Soldaten jede Compagnie bestanden?

Man setze nun die Anzahl der Schweizer x, der Schwaben y und der Sachsen z.

Ferner setze man die Anzahl aller Soldaten $x + y + z = f$; da leicht vorher zu sehen, daß hiedurch die Rechnung sehr erleichtert wird. Wenn nun die Schweizer Sturm laufen, deren Anzahl $= x$, so ist die Anzahl der beiden übrigen $= f - x$. Da nun jene 1 Rthlr., diese aber einen halben Rthlr. bekommen, so wird $x + \frac{1}{2}f - \frac{1}{2}x = 901$.

Eben so wenn die Schwaben Sturm laufen, wird $y + \frac{1}{3}f - \frac{1}{3}y = 901$; und endlich wenn die Sachsen Sturm laufen, wird $z + \frac{1}{4}f - \frac{1}{4}z = 901$ sein.

Aus diesen drei Gleichungen kann jeder der drei Buchstaben x, y und z bestimmt werden; denn aus der ersten erhält man $x = 1802 - f$; aus der andern $2y = 2703 - f$;

und aus der dritten $3z = 3604 - f$. Nun schreibe man dieselben unter einander; suche aber erstlich die Werthe von $6x$, $6y$ und $6z$.

$$\begin{aligned} 6x &= 10812 - 6f \\ 6y &= 8109 - 3f \\ 6z &= 7208 - 2f \\ \hline \text{addire: } 6f &= 26129 - 11f, \text{ oder } 17f = 26129, \end{aligned}$$

woraus gefunden wird $f = 1537$, welches die Anzahl aller Soldaten ist, und daraus findet man ferner:

$$\begin{aligned} x &= 1802 - 1537 = 265; \\ 2y &= 2703 - 1537 = 1166 \text{ und } y = 583 \\ 3z &= 3604 - 1537 = 2067 \text{ und } z = 689. \end{aligned}$$

Antwort. Die Compagnie der Schweizer bestand also aus 265, die der Schwaben aus 583, und die der Sachsen aus 689 Mann.

Kapitel 5.

Von der Auflösung der reinen quadratischen Gleichungen.

61. Eine Gleichung wird **quadratisch** genannt, wenn darin das Quadrat oder die zweite Potenz der unbekannten Zahl vorkommt, und sich keine höheren Potenzen derselben darin befinden. Denn würde darin die dritte Potenz vorkommen, so würde eine solche Gleichung schon zu den cubischen gerechnet, deren Auflösung besondere Regeln erfordert.

62. In einer quadratischen Gleichung kommen also nur dreierlei Glieder vor: erstens solche, in denen die unbekannte Zahl gar nicht enthalten ist, oder solche, welche bloß aus bekannten Zahlen zusammengesetzt sind. Zweitens solche, in welchen nur die erste Potenz der unbekannten Zahl vorkommt. Und drittens solche, in welchen das Quadrat der unbekannten Zahl enthalten ist.

Also wenn x die unbekannte Zahl bezeichnet, die Buchstaben a, b, c, d 2c. aber bekannte Zahlen vorstellen, so haben die Glieder der ersten Art die Form a, die der zweiten Art aber die Form bx, und die Glieder der dritten Art haben die Form cx^2.

63. Man hat bereits genügend gesehen, daß zwei oder mehr Glieder einer Art in eins zusammengezogen oder als ein einziges Glied betrachtet werden können.

Also kann die Form $ax^2 - bx^2 + cx^2$ als ein einziges Glied angesehen und dargestellt werden als $(a - b + c) x^2$, weil in der That $a - b + c$ eine bekannte Zahl ausdrückt.

Wenn sich auch solche Glieder auf beiden Seiten des Gleichheitszeichens (=) befinden, so hat man schon gesehen, wie dieselben auf eine Seite gebracht, und in eins zusammengezogen werden können. Also wenn die Gleichung vorliegt:

$$2x^2 - 3x + 4 = 5x^2 - 8x + 11,$$

so subtrahire man erstlich $2x^2$, so kommt

$$-3x + 4 = 3x^2 - 8x + 11;$$

dann addire man $8x$, so hat man

$$5x + 4 = 3x^2 + 11;$$

und 11 subtrahirt, giebt $3x^2 = 5x - 7$.

64. Man kann auch alle Glieder auf eine Seite des Gleichheitszeichens bringen, so daß auf der andern Seite 0 stehen bleibt; wobei zu bemerken, daß, wenn Glieder von der einen Seite auf die andere gebracht werden, ihre Zeichen verändert werden müssen.

Also wird die obige Gleichung diese Form bekommen: $3x^2 - 5x + 7 = 0$ und so wird auch im Allgemeinen jede quadratische Gleichung in dieser Form dargestellt werden können:

$$ax^2 \pm bx \pm c = 0,$$

wo das Zeichen $\pm$ bedeutet, daß solche Glieder positiv oder negativ sein können.

65. Es mag eine quadratische Gleichung anfänglich aussehen wie sie will, so kann dieselbe doch immer auf diese

Form, welche nur aus drei Gliedern besteht, gebracht werden; wenn man z. B. zu dieser Gleichung gelangt wäre:

$$\frac{ax + b}{cx + d} = \frac{ex + f}{gx + h},$$

so müßten vor allen Dingen die Brüche gehoben werden. Also multiplicire man mit $cx + d$, so bekommt man

$$ax + b = \frac{cex^2 + cfx + edx + fd}{gx + h};$$

hier mit $gx + h$ multiplicirt, giebt

$$agx^2 + bgx + ahx + bh = cex^2 + cfx + edx + fd,$$

welches eine quadratische Gleichung ist, die auf folgende drei Glieder gebracht werden kann, wenn alle auf eine Seite gesetzt werden, und gewöhnlich pflegt man sie also untereinander zu schreiben:

$$\begin{aligned} 0 = agx^2 &+ bgx + bh \\ - cex^2 &+ ahx - fd \\ &- cfx \\ &- edx \end{aligned}$$

oder um dieselbe noch deutlicher darzustellen

$$0 = (ag - ce) x^2 + (bg + ah - cf - ed) x + bh - fd.$$

66. Dergleichen quadratische Gleichungen, in denen Glieder aller drei Arten enthalten sind, werden vollständige genannt, und die Auflösung derselben ist auch schwieriger; daher wir zuerst solche Gleichungen betrachten wollen, in welchen eins von diesen drei Gliedern fehlt. Sollte nun das Glied x^2 gar nicht vorhanden sein, so wäre die Gleichung nicht quadratisch und gehörte zu der vorigen Art; sollte aber das Glied, das bloß bekannte Zahlen enthält, fehlen, so würde die Gleichung $ax^2 \pm bx = 0$ vorliegen, die man durch x theilen kann und man kommt zu der Gleichung $ax \pm b = 0$, welche wieder eine einfache Gleichung ist, und nicht hieher gehört.

67. Wenn aber das mittlere Glied, das nur die erste Potenz des x enthält, fehlt, so bekommt die Gleichung

diese Form: $ax^2 \pm c = 0$, oder $ax^2 = \mp c$, es mag nun c das Zeichen + oder − haben.

Eine solche Gleichung wird eine reine quadratische genannt, weil ihre Auflösung keinen Schwierigkeiten unterworfen ist. Denn man braucht nur durch a zu theilen, so bekommt man $x^2 = \frac{c}{a}$; und wenn man beiderseits die Quadratwurzel auszieht, hat man $x = \sqrt{\frac{c}{a}}$; wodurch die Gleichung aufgelöst ist.

68. Hier sind nun drei Fälle zu erwägen. Der erste wenn $\frac{c}{a}$ eine Quadratzahl ist, deren Wurzel sich wirklich angeben läßt; dann erhält man den Werth von x durch eine Rationalzahl ausgedrückt, die ganz oder gebrochen sein kann.

Also aus dieser Gleichung $x^2 = 144$ bekommt man $x = 12$, und aus dieser $x^2 = \frac{9}{16}$ erhält man $x = \frac{3}{4}$.

Der zweite Fall ist, wenn $\frac{c}{a}$ keine Quadratzahl ist, und man muß sich alsdann mit dem Wurzelzeichen $\sqrt{}$ begnügen.

Also wenn $x^2 = 12$, so wird $x = \sqrt{12}$, wovon der Werth durch Näherung bestimmt werden kann, wie wir schon oben gezeigt haben.

Ist aber drittens $\frac{a}{c}$ gar eine Negativzahl, so wird der Werth von x ganz und gar unmöglich oder imaginär und zeigt an, daß die Lösung der Aufgabe, welche auf eine solche Gleichung geführt, an sich unmöglich ist.

69. Ehe wir weiter gehen, wollen wir noch bemerken, daß, so oft aus einer Zahl die Quadratwurzel gezogen werden muß, dieselbe stets einen doppelten Werth erhält, indem sie sowohl positiv als negativ sein kann, wie schon oben gezeigt worden.

Also wenn man diese Gleichung hat $x^2 = 49$, so ist der Werth von x nicht nur $+ 7$, sondern auch $- 7$ und pflegt daher also angegeben zu werden: $x = \pm 7$, woraus erhellt, daß alle diese Aufgaben eine doppelte Auflösung

zulassen, in vielen Fällen aber, wie wenn z. B. von einer Anzahl Menschen die Rede ist, fällt der negative Werth selbstverständlich weg.

70. Auch in dem vorhergehenden Fall, wenn die bloße Zahl fehlt, lassen die Gleichungen $ax^2 = bx$ immer zweierlei Werthe für x zu, obgleich nur einer gefunden wird, wenn man durch x dividirt. Denn wenn z. B. diese Gleichung vorkommt $x^2 = 3x$, wo ein solcher Werth für x gegeben werden soll, daß x^2 dem $3x$ gleich werde, so geschieht dieses, wenn man $x = 3$ setzt, welcher Werth herauskommt, wenn man durch x dividirt. Allein außerdem leistet auch der Werth $x = 0$ ein Genüge; denn dann wird $x^2 = 0$ und $3x = 0$. Demnach ist für alle quadratischen Gleichungen zu bemerken, daß immer zwei Auflösungen sich ergeben, während in den einfachen Gleichungen nie mehr als eine möglich ist.

Wir wollen nun diese reinen quadratischen Gleichungen durch einige Beispiele erläutern.

71. I. Aufgabe. Es wird eine Zahl gesucht, deren Hälfte mit ihrem Drittel multiplicirt 24 giebt?

Es sei diese Zahl $= x$, so muß $\frac{1}{2}x$ mit $\frac{1}{3}x$ multiplicirt 24 werden, woraus diese Gleichung entsteht: $\frac{1}{6}x^2 = 24$; mit 6 multiplicirt, wird $x^2 = 144$ und die Quadratwurzel ausgezogen $x = \pm 12$. Denn wenn $x = + 12$, so ist $\frac{1}{2}x = 6$ und $\frac{1}{3}x = 4$, wovon das Product 24 ist. Ebenfalls wenn $x = - 12$, so ist $\frac{1}{2}x = - 6$ und $\frac{1}{3}x = - 4$ und das Product davon auch 24.

72. II. Aufgabe. Es wird eine Zahl von der Beschaffenheit gesucht, daß, wenn man zu derselben 5 addirt und eben so von ihr auch 5 subtrahirt, jene Summe mit dieser Differenz multiplicirt, 96 beträgt?

Es sei diese Zahl x, so muß $x + 5$ mit $x - 5$ multiplicirt, 96 geben; woraus diese Gleichung entsteht $x^2 - 25 = 96$.

Man addire 25, so wird $x^2 = 121$ und die Quadratwurzel ausgezogen $x = 11$; und so wird $x + 5 = 16$ und $x - 5 = 6$. Nun aber ist $6 . 16 = 96$.

73. III. Aufgabe. Es wird eine Zahl von der Beschaffenheit gesucht, daß, wenn dieselbe erstlich zu 10 addirt, alsdann auch von 10 subtrahirt wird, jene Summe mit dieser Differenz multiplicirt, 51 giebt?

Es sei die Zahl x, so muß $10 + x$ mit $10 - x$ multiplicirt 51 geben, woraus diese Gleichung entsteht $100 - x^2 = 51$.

Man addire x^2 und subtrahire 51, so kommt $x^2 = 49$, wovon die Quadratwurzel die gesuchte Zahl $x = 7$ angiebt.

74. IV. Aufgabe. Von drei Personen besitzt der erste so oft 7 Rthlr., als der zweite 3 Rthlr. hat; und so oft der zweite 17 Rthlr. besitzt, hat der dritte 5 Rthlr. Wenn man aber das Geld des ersten mit dem Gelde des zweiten, und das Geld des zweiten mit dem Gelde des dritten und endlich das Geld des dritten mit dem Gelde des ersten multiplicirt, hierauf diese drei Producte addirt, so ist die Summe $3830\frac{2}{3}$. Wie viel Geld hat nun jeder gehabt?

Man nehme an, der erste habe x Rthlr. besessen. Da nun gesagt wird, daß, so oft der erste 7 Rthlr., der zweite 3 Rthlr. besessen hat, so ergiebt sich daraus, daß das Geld des ersten sich zum Gelde des zweiten wie $7 : 3$ verhält.

Man setze also wie $7 : 3 = x$ zum Gelde des zweiten, welches sein wird $\frac{3}{7}x$. Da ferner das Geld des zweiten sich verhält zum Gelde des dritten, wie $17 : 5$, so setze man, $17 : 5 = \frac{3}{7}x$ zum Gelde des dritten, welches sein wird $\frac{15}{119}x$. Nun multiplicire man das Geld des ersten x mit dem Gelde des zweiten $\frac{3}{7}x$, so wird das Product $= \frac{3}{7}x^2$. Ferner das Geld des zweiten $\frac{3}{7}x$ mit dem Gelde des dritten $\frac{15}{119}x$ multiplicirt, giebt $\frac{45}{833}x^2$; und endlich das Geld des dritten $\frac{15}{119}x$ mit dem Gelde des ersten x multiplicirt, giebt $\frac{15}{119}x^2$. Diese drei Producte zusammen machen $\frac{3}{7}x^2 + \frac{45}{833}x^2 + \frac{15}{119}x^2$, welche unter einen Nenner gebracht $\frac{507}{833}x^2$ geben, welche Zahl der Zahl $3830\frac{2}{3}$ gleich gesetzt werden muß.

Also hat man $\frac{507}{833}x^2 = 3830\frac{2}{3}$. Mit 3 multiplicirt, bekommt man $\frac{1521}{833}x^2 = 11492$; ferner mit 833 multiplicirt, giebt $1521x^2 = 9572836$ und durch 1521 dividirt, wird $x^2 = \frac{9572836}{1521}$, woraus die Quadratwurzel gezogen $x = \frac{3094}{39}$ giebt, welcher Bruch sich durch 13 heben läßt und es ergiebt sich $x = \frac{238}{3}$, oder $x = 79\frac{1}{3}$; daher erhält man ferner $\frac{3}{7}x = 34$ und $\frac{15}{119}x = 10$.

Antwort. Also hat der erste $79\frac{1}{3}$ Rthlr., der zweite 34 Rthlr. und der dritte 10 Rthlr. gehabt.

Anmerkung. Diese Rechnung läßt sich noch leichter vollziehen, wenn man die darin vorkommenden Zahlen in ihre Factoren auflöst, und dabei besonders ihre Quadrate beachtet.

Also ist $507 = 3 . 169$, während 169 das Quadrat von 13 ist; dann ist $833 = 7 . 119$ und $119 = 7 . 17$. Da man nun hat $\frac{3 . 169}{17 . 49}x^2 = 3830\frac{2}{3}$, so multiplicire man mit 3, so kommt $\frac{9 . 169}{17 . 49}x^2 = 11492$. Diese Zahl löse man auch in ihre Factoren auf, von denen der erste 4 sogleich in die Augen fällt, so daß $11492 = 4 . 2873$; ferner läßt sich 2873 durch 17 theilen und wird $2873 = 17 . 169$, daher unsere Gleichung so aussieht: $\frac{9 . 169}{17 . 49}x^2 = 4 . 17 . 169$, welche durch 169 dividirt, wird $\frac{9}{17 . 49}x^2 = 4 . 17$; ferner mit $17 . 49$ multiplicirt und durch 9 dividirt, giebt $x^2 = \frac{4 . 289 . 49}{9}$ wo alle Factoren Quadrate sind, und also die Wurzel $x = \frac{2 . 17 . 7}{3} = \frac{238}{3}$ wie oben sein wird.

75. V. Aufgabe. Einige Kaufleute bestellen einen Factor und schicken ihn nach Archangel, um daselbst einen

Handel abzuschließen. Jeder von ihnen hat zehnmal so viel Rthlr. eingelegt, als es Personen sind. Nun gewinnt der Factor je an 100 Rthlr. zweimal so viel als die Anzahl der Personen ist. Wenn man dann den $\frac{1}{100}$ Theil des ganzen Gewinnes mit $2\frac{2}{9}$ multiplicirt, so kommt die Zahl der Gesellschafter heraus. Wie viel sind ihrer gewesen?

Die Anzahl derselben sei $= x$ und da jeder $10x$ Rthlr. eingelegt hat, so war das ganze Capital $= 10x^2$ Rthlr. Nun gewinnt der Factor mit 100 Rthlr. $2x$ Rthlr., folglich gewinnt er $\frac{1}{5}x^3$ mit dem ganzen Capital $10x^2$. Der $\frac{1}{100}$ Theil dieses Gewinnes ist demnach $\frac{1}{500}x^3$, welcher mit $2\frac{2}{9}$, das ist mit $\frac{20}{9}$ multiplicirt, giebt $\frac{20}{4500}x^3$, oder $\frac{1}{225}x^3$, welches der Zahl der Gesellschafter x gleich sein muß.

Also hat man diese Gleichung $\frac{1}{225}x^3 = x$, oder $x^3 = 225x$, welche cubisch zu sein scheint; weil man aber durch x dividiren kann, so kommt diese quadratische heraus $x^2 = 225$ und $x = 15$.

Antwort. Es sind daher im Ganzen 15 in Gesellschaft gewesen und jeder hat 150 Rthlr. eingelegt.

Kapitel 6.

Von der Auflösung der vermischten quadratischen Gleichungen.

76. Eine vermischte quadratische Gleichung wird diejenige genannt, in der dreierlei Glieder vorkommen, nämlich solche, welche das Quadrat der unbekannten Zahl enthalten, wie ax^2; dann auch solche, in denen die unbekannte Zahl selbst vorkommt, als bx, und endlich solche Glieder, welche bloß aus bekannten Zahlen zusammengesetzt sind. Da nun zwei oder mehr Glieder von einer Art in eins zusammengezogen werden, und alle auf eine Seite des Gleichheitszeichens gebracht werden können, so wird die Form dieser Gleichung also beschaffen sein:

$$ax^2 \pm bx \pm c = 0.$$

Wie nun aus solchen Gleichungen der Werth von x

gefunden werden soll, wird in diesem Kapitel gezeigt werden. Zwei Wege führen zum Ziele.

77. Eine solche Gleichung kann durch die Theilung so eingerichtet werden, daß das erste Glied bloß das reine Quadrat der unbekannten Zahl x^2 enthält. Alsdann lasse man das zweite Glied auf derselben Seite wo x^2 steht, das bekannte aber bringe man auf die andere Seite. Bei solchem Verfahren wird unsere Gleichung diese Form bekommen $x^2 \pm px = \pm q$, wo p und q bekannte Zahlen, sowohl positive als negative bedeuten; und jetzt kommt alles darauf an, wie der wahre Werth von x gefunden werden soll. Hiebei ist zuerst zu bemerken, daß, wenn $x^2 + px$ ein wirkliches Quadrat wäre, die Auflösung keine Schwierigkeit haben würde, weil man nur nöthig hätte, beiderseits die Quadratwurzel zu ziehen.

78. Es ist aber klar, daß $x^2 + px$ kein Quadrat sein kann, weil wir (1. Theil 306) gesehen, daß, wenn die Wurzel aus zwei Gliedern besteht, z. B. $x + n$, das Quadrat davon drei Glieder enthält, nämlich außer dem Quadrat jedes Theils noch das doppelte Product beider Theile, so daß das Quadrat von $x + n$ sein wird $x^2 + 2nx + n^2$. Da wir nun auf einer Seite schon $x^2 + px$ haben, so können wir x^2 als das Quadrat des ersten Theils der Wurzel ansehen, und da muß px das doppelte Product des ersten Theils der Wurzel x mit dem andern Theil sein; daher der andere Theil $\frac{1}{2}p$ sein muß, wie denn auch in der That das Quadrat von $x + \frac{1}{2}p$ gefunden wird $x^2 + px + \frac{1}{4}p^2$.

79. Da nun $x^2 + px + \frac{1}{4}p^2$ ein wirkliches Quadrat ist, dessen Wurzel $x + \frac{1}{2}p$, so brauchen wir nur in unserer Gleichung zu $x^2 + px = q$ beiderseits $\frac{1}{4}p^2$ zu addiren, so bekommen wir $x^2 + px + \frac{1}{4}p^2 = q + \frac{1}{4}p^2$, wo auf der ersten Seite ein wirkliches Quadrat, auf der andern aber bloß bekannte Zahlen befindlich sind. Wenn wir daher beiderseits die Quadratwurzel nehmen, so erhalten wir

$x + \frac{1}{2}p = \sqrt{(\frac{1}{4}p^2 + q)}$; subtrahirt man nun $\frac{1}{2}p$, so erhält man $x = -\frac{1}{2}p + \sqrt{(\frac{1}{4}p^2 + q)}$; und da jede Quadratwurzel sowohl positiv als negativ sein kann, so findet man für x zwei Werthe, welche in folgender Form ausgedrückt zu werden pflegen: $x = -\frac{1}{2}p \pm \sqrt{(\frac{1}{4}p^2 + q)}$.

80. In dieser Formel ist nun die Regel enthalten, nach welcher alle Quadratgleichungen aufgelöst werden können, und damit man nicht immer nöthig habe, das obige Verfahren von neuem anzustellen, empfiehlt es sich, daß man den Inhalt dieser Formel dem Gedächtnisse wohl einprägt. Man kann demnach die Gleichung so ordnen, daß das bloße Quadrat x^2 auf einer Seite steht. Alsdann wird die obige Gleichung diese Form erhalten: $x^2 = -px + q$, aus welcher der Werth von x sogleich also hingeschrieben werden kann: $x = -\frac{1}{2}p \pm \sqrt{(\frac{1}{4}p^2 + q)}$.

81. Damit ist die allgemeine Regel gegeben, um die Gleichung $x^2 = -px + q$ aufzulösen.

Man sieht nämlich, daß die unbekannte Zahl x gleich sein wird der Hälfte der Zahl, mit der x auf der andern Seite multiplicirt ist, und außerdem noch + oder − der Quadratwurzel aus dem Quadrat der Zahl, die eben geschrieben worden, nebst der bloßen Zahl, die das dritte Glied der Gleichung bildet.

Wenn daher diese Gleichung vorkäme $x^2 = 6x + 7$, so würde man sogleich haben $x = 3 + \sqrt{(9 + 7)} = 3 \pm 4$; folglich sind die beiden Werthe I. $x = 7$, und II. $x = -1$.

Hätte man die Gleichung $x^2 = 10x - 9$, so wird $x = 5 \pm \sqrt{(25 - 9)}$, welches $= 5 \pm 4$; daher die beiden Werthe $x = 9$ und $x = 1$ sein werden.

82. Zur weiteren Erläuterung dieser Regel können folgende Fälle unterschieden werden: I. wenn p eine gerade Zahl ist, II. wenn p eine ungerade Zahl ist, und III. wenn p eine gebrochene Zahl ist.

Es sei I. p eine gerade Zahl und die Gleichung also beschaffen:

$x^2 = 2px + q$, so bekommt man $x = p \pm \sqrt{(p^2 + q)}$.

Es sei II. p eine ungerade Zahl und die Gleichung $x^2 = px + q$, da dann sein wird

$x = \frac{1}{2}p \pm \sqrt{(\frac{1}{4}p^2 + q)}$; da nun $\frac{1}{4}p^2 + q = \frac{p^2 + 4q}{4}$, aus dem Nenner 4 aber die Quadratwurzel gezogen werden kann, so bekommt man

$$x = \frac{1}{2}p \pm \frac{(\sqrt{p^2 + 4q})}{2} \text{ oder } x = \frac{p \pm \sqrt{(p^2 + 4q)}}{2}.$$

Wird aber III. p ein Bruch, so kann die Auflösung in folgender Art geschehen. Es sei die quadratische Gleichung $ax^2 = bx + c$, oder $x^2 = \frac{bx}{a} + \frac{c}{a}$, so wird nach der Regel $x = \frac{b}{2a} \pm \sqrt{\left(\frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right)}$. Da nun aber $\frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} = \frac{b^2 + 4ac}{4a^2}$ und hier der Nenner ein Quadrat ist, so wird $x = \frac{b \pm \sqrt{(b^2 + 4ac)}}{2a}$.

83. Der andere Weg, welcher auch zu dieser Auflösung führt, besteht darin, daß man eine solche vermischte quadratische Gleichung, nämlich: $x^2 = px + q$ in eine reine verwandelt, welches geschieht, wenn man anstatt der unbekannten Zahl x eine andere y in die Rechnung einführt, so daß $x = y + \frac{1}{2}p$; da man dann, wenn y gefunden worden, auch sogleich den Werth von x erhält.

Schreibt man nun $y + \frac{1}{2}p$ anstatt x, so wird $x^2 = y^2 + py + \frac{1}{4}p^2$ und $px = py + \frac{1}{2}p^2$; hieraus wird unsere Gleichung in folgende verwandelt:

$$y^2 + py + \frac{1}{4}p^2 = py + \frac{1}{2}p^2 + q;$$

subtrahirt man hier erstlich py, so hat man

$$y^2 + \frac{1}{4}p^2 = \frac{1}{2}p^2 + q;$$

ferner $\frac{1}{4}p^2$ subtrahirt, giebt $y^2 = \frac{1}{4}p^2 + q$, welches eine

reine quadratische Gleichung ist, woraus man sogleich erhält $y = \pm\sqrt{(\frac{1}{4}p^2 + q)}$.

Da nun $x = y + \frac{1}{2}p$, so wird $x = \frac{1}{2}p \pm \sqrt{(\frac{1}{4}p^2 + q)}$, wie wir schon oben gefunden haben. Es bleibt also nichts mehr übrig, als diese Regel durch Beispiele zu erläutern.

84. I. Aufgabe. Ich habe zwei Zahlen; die eine ist um 6 größer als die andere, und ihr Product macht 91, welches sind diese Zahlen?

Die kleinere Zahl sei x, so ist die größere $x + 6$ und ihr Product $x^2 + 6x = 91$.

Man subtrahire 6x, so hat man $x^2 = -6x + 91$, und nach der Regel $x = -3 \pm \sqrt{(9 + 91)} = -3 \pm 10$, daher hat man entweder $x = 7$ oder $x = -13$.

Antwort. Die Aufgabe hat also zwei Auflösungen; nach der ersten ist die kleinere Zahl $x = 7$, die größere $x + 6 = 13$; nach der andern aber ist die kleinere $x = -13$ und die größere $x + 6 = -7$.

85. II. Aufgabe. Suche eine solche Zahl, daß, wenn ich von ihrem Quadrat 9 subtrahire, so viel über 100 bleiben, als die gesuchte Zahl weniger ist als 23; welche Zahl ist es?

Es sei die Zahl x, so ist $x^2 - 9$ über 100 um $x^2 - 109$. Die gesuchte Zahl x aber ist unter 23 um $23 - x$; woraus diese Gleichung entsteht $x^2 - 109 = 23 - x$.

Man addire 109, so wird $x^2 = -x + 132$, folglich nach der Regel $x = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{(\frac{1}{4} + 132)} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{529}{4}} = -\frac{1}{2} \pm \frac{23}{2}$.

Also ist entweder $x = 11$, oder $x = -12$.

Antwort. Wenn nur eine positive Antwort verlangt wird, so ist die gesuchte Zahl 11, deren Quadrat weniger 9 macht 112. Diese Zahl ist um 12 größer als 100, und die gefundene Zahl 11 ist um eben so viel kleiner als 23.

86. III. Aufgabe. Suche eine Zahl, die so beschaffen ist, daß, wenn ich ihre Hälfte mit ihrem Drittel multipli-

cire, und zum Product $\frac{1}{2}$ der gesuchten Zahl addire, 30 herauskommt.

Es sei diese Zahl x, deren Hälfte mit ihrem Drittel multiplicirt $\frac{1}{6}x^2$ giebt; also muß $\frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{2}x = 30$ sein; mit 6 multiplicirt, wird $x^2 + 3x = 180$, oder $x^2 = -3x + 180$, woraus man findet

$$x = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{(\frac{9}{4} + 180)} = -\frac{3}{2} \pm \frac{27}{2}.$$

Daher ist entweder $x = 12$ oder $x = -15$.

87. IV. Aufgabe. Suche zwei Zahlen in Proportione dupla (d. h. von denen eine doppelt so groß ist als die andere), die so beschaffen sind, daß, wenn ich ihre Summe zu ihrem Product addire, 90 herauskommt?

Es sei die kleinere Zahl x, so ist die größere 2x, ihr Product $2x^2$, dazu ihre Summe 3x addirt, soll 90 geben. Also $2x^2 + 3x = 90$, und 3x subtrahirt, $2x^2 = -3x + 90$; durch 2 dividirt, giebt $x^2 = -\frac{3}{2}x + 45$; woraus nach der Regel gefunden wird $x = -\frac{3}{4} \pm \sqrt{(\frac{9}{16} + 45)} = -\frac{3}{4} \pm \frac{27}{4}$.

Daher ist entweder $x = 6$ oder $x = -7\frac{1}{2}$.

88. V. Aufgabe. Jemand kauft ein Pferd für einige Rthlr., verkauft es wieder für 119 Rthlr. und gewinnt daran so viel Procente als das Pferd gekostet; nun ist die Frage: wie theuer dasselbe eingekauft worden?

Das Pferd habe x Rthlr. gekostet; weil der Käufer nun daran x Procent gewonnen, so setze man, mit 100 gewinnt man x, wie viel mit x? Antwort $\frac{x^2}{100}$. Da er nun $\frac{x^2}{100}$ gewonnen, der Einkauf aber x gewesen, so muß er dasselbe für $x + \frac{x^2}{100}$ verkauft haben. Daher wird $x + \frac{x^2}{100} = 119$.

Man subtrahire x, so kommt $\frac{x^2}{100} = -x + 119$, und mit 100 multiplicirt, wird $x^2 = -100x + 11900$, woraus nach der Regel gefunden wird:

$$x = -50 \pm \sqrt{(2500 + 11900)} = -50 \pm \sqrt{14400} = -50 \pm 120.$$

Antwort. Das Pferd hat also 70 Rthlr. gekostet; weil er nun daran 70 Procent gewonnen, so war der Gewinn 49 Rthlr. Er muß es also verkauft haben für $70 + 49$, das ist für 119 Rthlr., wie wirklich geschehen.

89. VI. Aufgabe. Jemand kauft eine gewisse Anzahl Tücher: das erste Stück für 2 Rthlr., das zweite für 4 Rthlr., das dritte für 6 Rthlr. und immer 2 Rthlr. mehr für das folgende und bezahlt für alle Tücher 110 Rthlr. Wie viel sind der Tücher gewesen?

Es seien x Tücher gewesen. Wie viel er für jedes bezahlt hat, giebt die folgende Darstellung an:

für das 1, 2, 3, 4, 5 . . . x
zahlt er 2, 4, 6, 8, 10 . . . 2x Rthlr.

Man muß also diese arithmetische Reihe $2 + 4 + 6 + 8 + 10 + \ldots . 2x$, welche aus x Gliedern besteht, summiren, um den Preis aller Tücher zu finden.

Nach der im ersten Theil gegebenen Regel addire man das erste und letzte Glied, so bekommt man $2x + 2$. Dieses multiplicire man mit der Zahl der Glieder x, so bekommt man die doppelte Summe $2x^2 + 2x$. Daher die Summe selbst sein wird $x^2 + x$, welche 110 gleich sein muß, oder $x^2 + x = 110$.

Man subtrahire x, so wird $x^2 = - x + 110$, folglich $x = -\frac{1}{2} + \sqrt{(\frac{1}{4} + 110)}$ oder $= -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{441}{4}}$ oder $x = -\frac{1}{2} + \frac{21}{2} = 10$.

Antwort. Es sind 10 Stück Tücher gekauft worden.

90. VII. Aufgabe. Jemand kauft einige Tücher für 180 Rthlr. Wären der Tücher für dasselbe Geld 3 Stück mehr gewesen, so wäre ihm das Stück um 3 Rthlr. wohlfeiler gekommen. Wie viel Tücher sind es gewesen?

Es seien x Tücher gewesen, so hat das Stück wirklich gekostet $\frac{180}{x}$ Rthlr. Hätte er aber $x + 3$ Stück für 180 Rthlr. bekommen, so würde das Stück gekostet haben $\frac{180}{x+3}$ Rthlr., welcher Preis um 3 Rthlr. weniger ist, als der wirkliche, woraus diese Gleichung entsteht: $\frac{180}{x+3} = \frac{180}{x} - 3$.

Man multiplicire mit x, so kommt $\frac{180x}{x+3} = 180 - 3x$; durch 3 dividirt, giebt $\frac{60x}{x+3} = 60 - x$; mit $x + 3$ multiplicirt, wird $60x = 180 + 57x - x^2$; man addire x^2, so kommt $x^2 + 60x = 180 + 57x$. Man subtrahire $60x$, so kommt $x^2 = - 3x + 180$. Hieraus nach der Regel

$$x = -\frac{3}{2} + \sqrt{(\frac{9}{4} + 180)}, \text{ oder } x = -\frac{3}{2} + \frac{27}{2} = 12.$$

Antwort. Also sind 12 Tücher für 180 Rthlr. gekauft worden, daher eins gekostet 15 Rthlr. Hätte man aber 3 Stück mehr, nämlich 15 Stück für 180 Rthlr. bekommen, so würde 1 Stück 12 Rthlr. gekostet haben, folglich 3 Rthlr. weniger, als in der That.

91. VIII. Aufgabe. Zwei Gesellschafter legen in ihr Geschäft zusammen 100 Rthlr. ein; der erste läßt sein Geld 3 Monate lang, der zweite aber 2 Monate lang stehen, und es zieht jeder mit Capital und Gewinn 99 Rthlr. ein. Wie viel hat jeder eingelegt?

Der erste habe x Rthlr. und also der zweite $100 - x$ eingelegt. Da nun der erste 99 Rthlr. zurückzieht, so ist sein Gewinn $99 - x$, welcher in drei Monaten mit dem Capital x erworben worden ist; da der zweite auch 99 Rthlr. zurückzieht, so war sein Gewinn $x - 1$, welcher in zwei Monaten mit dem Capital $100 - x$ erworben worden: mit demselben Capital $100 - x$ würden also in 3 Monaten gewonnen werden $\frac{3x-3}{2}$. Nun sind diese Gewinne den Capitalen proportional, nämlich jenes Capital verhält sich zu jenem Gewinn, wie dieses Capital zu diesem Gewinn; also

$$x : 99 - x = 100 - x : \frac{3x-3}{2}.$$

Man setze das Product der äußern Glieder gleich dem Product der mittlern (1. Theil 463), so hat man $\frac{3x^2 - 3x}{2} = 9900 - 199x + x^2$ und mit 2 multiplicirt $3x^2 - 3x = 19800 - 398x + 2x^2$; man subtrahire $2x^2$, so kommt $x^2 - 3x = 19800 - 398x$ und $3x$ addirt $x^2 = - 395x + 19800$. Daher nach der Regel (siehe 81) $x = -\frac{395}{2} + \sqrt{(\frac{156025}{4} + \frac{79200}{4})}$ das ist $x = -\frac{395}{2} + \frac{485}{2} = \frac{90}{2} = 45$.

Antwort. Der erste hat also 45 Rthlr. und der zweite 55 Rthlr. eingelegt. Mit den 45 Rthlr. hat der erste in 3 Monaten gewonnen 54 Rthlr., würde demnach in einem Monate gewonnen haben 18 Rthlr. Der zweite aber gewinnt mit 55 Rthlr. in 2 Monaten 44 Rthlr., würde also in einem Monate gewonnen haben 22 Rthlr., welches auch mit jenem übereinstimmt. Denn wenn mit 45 Rthlr. gewonnen werden 18 in einem Monate, so werden mit 55 in gleicher Zeit 22 Rthlr. gewonnen.

92. IX. Aufgabe. Zwei Bäuerinnen tragen zusammen 100 Eier auf den Markt, eine mehr als die andere, und lösen doch beide gleich viel Geld. Nun sagt die erste zu der andern: „Hätte ich deine Eier gehabt, so hätte ich 15 Kreuzer gelöst." Darauf antwortete die andere: „Hätte ich deine Eier gehabt, so hätte ich daraus $6\frac{2}{3}$ Kreuzer gelöst." Wie viel hat jede gehabt?

Die erste habe x Eier und daher die andere $100 - x$ gehabt.

Also da nun die erste $100 - x$ Eier für 15 Kreuzer verkauft haben würde, so setze man diese Regel de Tri $100 - x : 15 = x : \frac{15x}{100-x}$ Kreuzer.

Eben so findet man bei der andern, welche x Eier für $6\frac{2}{3}$ Kreuzer verkauft haben würde, wie viel sie aus ihren $100 - x$ Eiern gelöst, $x : \frac{20}{3} = 100 - x : \frac{2000 - 20x}{3x}$. Da nun die beiden Bäuerinnen gleich viel gelöst haben, so finden wir diese Gleichung:

$$\frac{15x}{100-x} = \frac{2000 - 20x}{3x};$$

mit $3x$ multiplicirt, kommt $2000 - 20x = \frac{45x^2}{100-x}$,
mit $100 - x$ multiplicirt,
$45x^2 = 200000 - 4000x + 20x^2$,
$20x^2$ subtrahirt, $25x^2 = 200000 - 4000x$,
durch 25 dividirt $x^2 = -160x + 8000$. Daher nach der Regel
$x = - 80 + \sqrt{(6400 + 8000)} = - 80 + 120 = 40$.

Antwort. Die erste Bäuerin hat also 40 und die andere 60 Eier gehabt, und es hat jede 10 Kreuzer gelöst.

93. X. Aufgabe. Zwei Schnittwaarenhändler verkaufen etliche Ellen Zeug, der zweite drei Ellen mehr als der erste, und lösen zusammen 35 Rthlr. Der erste sagt zum zweiten: „Aus deinem Zeuge würde ich gelöst haben 24 Rthlr.," und es antwortet der zweite: „Ich aber hätte aus deinem $12\frac{1}{2}$ Rthlr. gelöst." Wie viel Ellen hat jeder gehabt?

Der erste habe x Ellen gehabt, folglich der zweite $x + 3$ Ellen. Da nun der erste aus $x + 3$ Ellen 24 Rthlr. gelöst hätte, so muß er seine x Ellen verkauft haben für $\frac{24x}{x+3}$ Rthlr., und da der zweite x Ellen für $12\frac{1}{2}$ Rthlr. verkauft hätte, so hätte er seine $x + 3$ Ellen verkauft für $\frac{25x+75}{2x}$; und so haben beide zusammen $\frac{24x}{x+3} + \frac{25x+75}{2x} = 35$ Rthlr. gelöst.

Also $\frac{48x^2}{x+3} + 25x + 75 = 70x$

oder $\frac{48x^2}{x+3} = 45x - 75$, mit $x + 3$ multiplicirt wird $48x^2 = 45x^2 + 60x - 225$, subtrahirt $45x^2$, so hat man $3x^2 = 60x - 225$ oder $x^2 = 20x - 75$.
Hieraus wird $x = 10 \pm \sqrt{(100 - 75)} = 10 \pm \sqrt{25}$;
also $x = 10 \pm 5$.

Antwort. Es giebt daher zwei Auflösungen. Nach der ersten hat der erste 15 und der andere 18 Ellen. Weil nun der erste 18 Ellen verkauft hat für 24 Rthlr., so hat er aus seinen 15 Ellen gelöst 20 Rthlr. Der andere aber hätte aus 15 Ellen gelöst $12\frac{1}{2}$ Rthlr., hat also aus seinen 18 Ellen gelöst 15 Rthlr., also beide zusammen 35 Rthlr.

Nach der andern Auflösung hat der erste 5 und der andere 8 Ellen gehabt. Also hätte der erste 8 Ellen für 24 Rthlr. verkauft, und hat aus seinen 5 Ellen gelöst 15 Rthlr.; der andere hätte 5 Ellen verkauft für $12\frac{1}{2}$ Rthlr., hat also aus seinen 8 Ellen gelöst 20 Rthlr., folglich beide zusammen ebenfalls 35 Rthlr.

Kapitel 7.

Von der Ausziehung der Wurzeln aus den vieleckigen Zahlen.

94. Wir haben oben (1. Theil 436) gezeigt, wie die vieleckigen Zahlen gefunden werden; was wir aber daselbst eine Seite genannt haben, wird auch eine Wurzel genannt. Wenn nun die Wurzel durch x bezeichnet wird, so werden daraus die vieleckigen Zahlen in folgender Art gefunden:

Das Dreieck ist $\frac{x^2+x}{2}$
„ Viereck „ x^2
„ Fünfeck „ $\frac{3x^2-x}{2}$
„ Sechseck „ $2x^2-x$
„ Siebeneck „ $\frac{5x^2-3x}{2}$
„ Achteck „ $3x^2-2x$
„ Neuneck „ $\frac{7x^2-5x}{2}$
„ Zehneck „ $4x^2-3x$
„ neck „ $\frac{(n-2)x^2-(n-4)x}{2}$.

95. Mit Hülfe dieser Formeln ist es nun leicht, für jede gegebene Seite oder Wurzel eine verlangte vieleckige Zahl, so groß auch dieselbe sein mag, zu finden, wie schon oben genügend gezeigt worden. Wenn aber umgekehrt eine vieleckige Zahl von einer gewissen Anzahl Seiten gegeben

ist, so ist es weit schwerer, die Wurzel oder Seite davon zu finden, und wird dazu die Auflösung quadratischer Gleichungen erfordert, daher diese Sache hier besonders erörtert zu werden verdient. Wir wollen hiebei der Ordnung nach von den dreieckigen Zahlen anfangen, und zu den mehreckigen fortschreiten.

96. Es sei demnach 91 die gegebene dreieckige Zahl, wovon die Seite oder Wurzel gesucht werden soll.

Setzt man nun diese Wurzel $= x$, so muß $\frac{x^2+x}{2}$ der Zahl 91 gleich sein; man multiplicire mit 2, so hat man $x^2+x=182$, woraus gefunden wird $x^2=-x+182$, und also $x=-\frac{1}{2}+\sqrt{(\frac{1}{4}+182)}=-\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{729}{4}}$, folglich $x=-\frac{1}{2}+\frac{27}{2}=13$; daher ist die verlangte Dreieckswurzel $= 13$, denn das Dreieck von 13 ist 91.

97. Es sei aber auf allgemeine Art a die gegebene dreieckige Zahl, deren Wurzel gefunden werden soll.

Setzt man dieselbe $= x$, so wird $\frac{x^2+x}{2}=a$, oder $x^2+x=2a$, oder ferner $x^2=-x+2a$, woraus gefunden wird $x=-\frac{1}{2}+\sqrt{(\frac{1}{4}+2a)}$ oder $x=-\frac{1+\sqrt{(8a+1)}}{2}$.

Hieraus ergiebt sich diese Regel: **Man multiplicire die gegebene dreieckige Zahl mit 8 und zum Product addire man 1; aus der Summe ziehe man die Quadratwurzel, subtrahire von derselben 1, dividire den Rest durch 2, so kommt die gesuchte Dreieckswurzel heraus.**

98. Hieraus sieht man, daß alle dreieckigen Zahlen die Eigenschaft haben, daß, wenn man dieselben mit 8 multiplicirt und 1 dazu addirt, immer eine Quadratzahl herauskommen muß, wie aus folgender Ausführung zu ersehen:
Dreieck. 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, 45, 55, 66 rc.
Wenn man jede dieser Zahlen mit 8 multiplicirt und 1 addirt
9, 25, 49, 81, 121, 169, 225, 289, 361, 441, 529 rc.

Ist nun die gegebene Zahl a nicht so beschaffen, so ist es ein Zeichen, daß dieselbe keine wirkliche dreieckige Zahl ist, oder die Wurzel davon nicht rational angegeben werden kann.

99. Man suche nach dieser Regel die Dreieckswurzel aus der Zahl 210, so ist $a = 210$ und $8a+1=1681$, wovon die Quadratwurzel 41, woraus man sieht, daß die Zahl 210 wirklich eine dreieckige Zahl ist, wovon die Wurzel $=\frac{41-1}{2}=20$.

Wäre aber die Zahl 4 als ein Dreieck gegeben, wovon die Wurzel gesucht werden soll, so wäre dieselbe $=\frac{\sqrt{33}-1}{2}$ und also irrational. Es wird indessen wirklich von dieser Wurzel, nämlich $\frac{\sqrt{33}-1}{2}$, das Dreieck wie folgt gefunden. Da $x=\frac{\sqrt{33}-1}{2}$, so ist $x^2=\frac{17-\sqrt{33}}{2}$; dazu x addirt, wird $x^2+x=\frac{16}{2}=8$, und folglich die dreieckige Zahl $\frac{x^2+x}{2}=4$.

100. Da die viereckigen Zahlen mit den Quadraten identisch sind, so hat die Sache keine Schwierigkeit. Denn setzt man die gegebene viereckige Zahl $= a$ und ihre Viereckswurzel $= x$, so wird $x^2=a$ und $x=\sqrt{a}$. Die Quadrat- und Viereckswurzel sind also identisch.

101. Wir wollen demnach zu den fünfeckigen Zahlen übergehen.

Es sei nun 22 eine fünfeckige Zahl, und die Wurzel derselben $= x$, so muß (nach 94) $\frac{3x^2-x}{2}=22$, oder $3x^2-x=44$, oder $x^2=\frac{1}{3}x+\frac{44}{3}$; woraus, nach der angegebenen Regel, gefunden wird $x=\frac{1}{6}+\sqrt{(\frac{1}{36}+\frac{44}{3})}$; das ist $x=\frac{1+\sqrt{(529)}}{6}=\frac{1}{6}+\frac{23}{6}=4$. Also ist 4 die gesuchte Fünfeckswurzel aus der Zahl 22.

102. Es sei nun diese Frage vorgelegt: wenn das gegebene Fünfeck $= a$ ist, wie soll davon die Wurzel gefunden werden?

Setzt man diese gesuchte Wurzel $= x$, so kommt man auf die Gleichung $\frac{3x^2-x}{2}=a$, oder $3x^2-x=2a$, oder $x^2=\frac{1}{3}x+\frac{2a}{3}$; woraus gefunden wird $x=\frac{1}{6}+\sqrt{(\frac{1}{36}+\frac{2a}{3})}$, das ist $x=\frac{1+\sqrt{(24a+1)}}{6}$. Wenn daher a ein wirkliches Fünfeck ist, so muß $24a+1$ immer eine Quadratzahl sein.

Es sei z. B. 330 das gegebene Fünfeck, so wird die Wurzel davon $x=\frac{1+\sqrt{7921}}{6}=\frac{1+89}{6}=15$ sein.

103. Es sei nun a eine gegebene sechseckige Zahl, wovon die Wurzel gesucht werden soll.

Setzt man diese Wurzel $= x$, so wird $2x^2-x=a$, oder $x^2=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}a$, daher gefunden wird $x=\frac{1}{4}+\sqrt{(\frac{1}{16}+\frac{1}{2}a)}=\frac{1+\sqrt{(8a+1)}}{4}$. Wenn also a ein wirkliches Sechseck ist, so muß $8a+1$ ein Quadrat werden, woraus man sieht, daß alle sechseckigen Zahlen unter den dreieckigen einbegriffen sind; die Wurzeln aber sind anders beschaffen.

Es sei z. B. die sechseckige Zahl 1225, so wird die Wurzel davon $x=\frac{1+\sqrt{9801}}{4}=\frac{1+99}{4}=25$ sein.

104. Es sei ferner a eine gegebene siebeneckige Zahl, wovon die Seite oder Wurzel gesucht werden soll.

Setzt man diese Wurzel $= x$, so hat man $\frac{5x^2-3x}{2}=a$, oder $5x^2-3x=2a$, also $x^2=\frac{3}{5}x+\frac{2}{5}a$, woraus gefunden wird $x=\frac{3}{10}+\sqrt{(\frac{9}{100}+\frac{2}{5}a)}=\frac{3+\sqrt{(40a+9)}}{10}$.

Alle siebeneckigen Zahlen sind demnach so beschaffen, daß, wenn man dieselben mit 40 multiplicirt und zum Product 9 addirt, die Summen immer Quadratzahlen werden.

Es sei z. B. das gegebene Siebeneck 2059, so findet man die Wurzel davon $x = \frac{3 + \sqrt{(82369)}}{10} = \frac{3 + 287}{10} = 29.$

105. Es sei nun a eine gegebene achteckige Zahl, wovon die Wurzel x gefunden werden soll.

Man hat daher (s. 94) $3x^2 - 2x = a$, oder $x^2 = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}a$, woraus gefunden wird $x = \frac{1}{3} + \sqrt{(\frac{1}{9} + \frac{a}{3})} = \frac{1 + \sqrt{(3a+1)}}{3}$. Alle achteckige Zahlen sind demnach so beschaffen, daß, wenn man sie mit 3 multiplicirt und dazu 1 addirt, die Summe immer eine Quadratzahl ist.

Es sei z. B. 3816 eine achteckige Zahl, so wird die Wurzel davon sein $x = \frac{1 + \sqrt{11449}}{3} = \frac{1 + 107}{3} = 36.$

106. Es sei endlich a eine gegebene neckige Zahl, wovon die Wurzel x gesucht werden soll, so hat man (siehe 94) folgende Gleichung:

$\frac{(n-2)x^2 - (n-4)x}{2} = a$, oder $(n-2)x^2 - (n-4)x = 2a$,

also

$x^2 = \frac{(n-4)x}{n-2} + \frac{2a}{n-2}$, woraus gefunden wird

$x = \frac{n-4}{2(n-2)} + \sqrt{\left(\frac{(n-4)^2}{4(n-2)^2} + \frac{2a}{n-2}\right)}$, oder

$x = \frac{n-4}{2(n-2)} + \sqrt{\left(\frac{(n-4)^2}{4(n-2)^2} + \frac{8.(n-2)a}{4.(n-2)^2}\right)}$ und folglich

$x = \frac{n - 4 + \sqrt{(8.(n-2)a + (n-4)^2)}}{2.(n-2)}.$

Diese Formel gewährt eine allgemeine Regel, um aus gegebenen Zahlen alle möglichen vieleckigen Wurzeln zu finden.

Um dieses mit einem Beispiel zu erläutern, sei die 24eckige Zahl 3009 gegeben; weil nun hier $a = 3009$ und $n = 24$, folglich $n - 2 = 22$ und $n - 4 = 20$, so bekommen wir die Wurzel

$$x = \frac{20 + \sqrt{(529584 + 400)}}{44} = \frac{20 + 728}{44} = 17,$$

Kapitel 8.

Von der Ausziehung der Quadratwurzeln aus Binomien.

107. Ein **Binomium** wird in der Algebra eine aus zwei Theilen bestehende Zahl genannt, von denen eine oder auch beide das quadratische Wurzelzeichen haben.

Also ist $3 + \sqrt{5}$ ein Binomium, eben so $\sqrt{8} + \sqrt{3}$, und es ist gleichgültig, ob diese beiden Theile mit dem Zeichen + oder − verbunden sind. Daher wird $3 - \sqrt{5}$ eben so wohl ein Binomium genannt, als auch $3 + \sqrt{5}$.

108. Diese Binomien sind deswegen hauptsächlich merkwürdig, weil man bei Auflösung der quadratischen Gleichungen jedesmal auf solche Formeln kommt, so oft die Auflösung in rationalen Zahlen nicht geschehen kann.

Also wenn z. B. diese Gleichung vorkommt $x^2 = 6x - 4$, so wird $x = 3 + \sqrt{5}$.

Aus diesem Grunde kommen nun solche Formeln in den algebraischen Rechnungen sehr häufig vor, und wir haben auch schon früher gezeigt, wie damit die gewöhnlichen Operationen der Addition, Subtraction, Multiplication und Division angestellt werden. Jetzt aber sind wir erst im Stande zu zeigen, wie aus solchen Formeln auch die Quadratwurzeln ausgezogen werden können, wofern nämlich eine solche Ausziehung möglich ist, indem im entgegengesetzten Fall nur noch ein Wurzelzeichen vorgesetzt wird, nämlich von $3 + \sqrt{2}$ ist die Quadratwurzel $\sqrt{(3 + \sqrt{2})}$.

109. Man hat demnach zuvörderst zu bemerken, daß die Quadrate solcher Binomien wiederum Binomien werden, in welchen sogar der eine Theil rational ist.

Denn sucht man das Quadrat von $a + \sqrt{b}$, so wird dasselbe $(a^2 + b) + 2a\sqrt{b}$. Wenn also von dieser Formel $(a^2 + b) + 2a\sqrt{b}$ wiederum die Quadratwurzel verlangt würde, so wäre dieselbe $a + \sqrt{b}$, ein Ausdruck, der unstreitig deutlicher zu begreifen ist, als wenn man vor jene Formel noch das $\sqrt{}$-Zeichen setzen wollte. Eben so,

wenn man von der Formel $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ das Quadrat nimmt, so wird dasselbe $(a + b) + 2\sqrt{ab}$, daher auch umgekehrt von dieser Formel $(a + b) + 2\sqrt{ab}$ die Quadratwurzel sein wird $\sqrt{a} + \sqrt{b}$, welcher Ausdruck wiederum verständlicher ist, als wenn man vor jene Formel noch das $\sqrt{}$-Zeichen setzen wollte.

110. Es kommt daher darauf an, wie ein Kennzeichen zu finden sei, woraus in jedem Falle beurtheilt werden kann, ob eine solche Quadratwurzel da sei oder nicht. Wir wollen zu diesem Behufe mit einer leichten Formel den Anfang machen und sehen, ob man aus dem Binomium $5 + 2\sqrt{6}$ in solcher Art die Quadratwurzel finden könne.

Man setze also, diese Wurzel sei $\sqrt{x} + \sqrt{y}$, wovon das Quadrat $(x + y) + 2\sqrt{xy}$ ist, also muß dieses Quadrat jener Formel $5 + 2\sqrt{6}$ gleich sein; folglich muß der rationale Theil $x + y$ gleich 5 und der irrationale $2\sqrt{xy}$ muß gleich $2\sqrt{6}$ sein; daher bekommt man $\sqrt{xy} = \sqrt{6}$ und die Quadrate genommen $xy = 6$. Da nun $x + y = 5$, so wird hieraus $y = 5 - x$, welcher Werth in der Gleichung $xy = 6$ gesetzt, giebt $5x - x^2 = 6$ oder $x^2 = 5x - 6$, daher $x = \frac{5}{2} + \sqrt{(\frac{25}{4} - \frac{24}{4})} = \frac{5}{2} + \frac{1}{2} = 3$; also $x = 3$ und $y = 2$, folglich wird aus $5 + 2\sqrt{6}$ die Quadratwurzel sein $\sqrt{3} + \sqrt{2}$.

111. Da wir nun diese beiden Gleichungen erhalten haben I. $x + y = 5$ und II. $xy = 6$, so wollen wir hier einen besonderen Weg angeben, um daraus x und y zu finden.

Da $x + y = 5$, so nehme man die Quadrate $x^2 + 2xy + y^2 = 25$. Nun bemerke man, daß $x^2 - 2xy + y^2$ das Quadrat von $x - y$ ist; man subtrahire daher von jener Gleichung, nämlich von $x^2 + 2xy + y^2 = 25$, diese $xy = 6$ viermal genommen oder $4xy = 24$, so erhält man $x^2 - 2xy + y^2 = 1$ und hieraus die Quadratwurzel $x - y = 1$, so wird, weil $x + y = 5$ ist, gefunden $x = 3$

und $y = 2$. Daher die gesuchte Quadratwurzel von $5 + 2\sqrt{6}$ sein wird $\sqrt{3} + \sqrt{2}$.

112. Wir wollen nun dieses allgemeine Binomium $a + \sqrt{b}$ betrachten, und die Quadratwurzel davon $\sqrt{x} + \sqrt{y}$ setzen, so erhalten wir diese Gleichung $(x + y) + 2\sqrt{xy} = a + \sqrt{b}$, also $x + y = a$ und $2\sqrt{xy} = \sqrt{b}$ oder $4xy = b$. Von $x + y = a$ ist das Quadrat $x^2 + 2xy + y^2 = a^2$, wovon die Gleichung $4xy = b$ subtrahirt, giebt $x^2 - 2xy + y^2 = a^2 - b$, wovon die Quadratwurzel ist $x - y = \sqrt{(a^2 - b)}$. Da nun $x + y = a$, so finden wir $x = \frac{a + \sqrt{(a^2 - b)}}{2}$ und $y = \frac{a - \sqrt{(a^2 - b)}}{2}$, daher die verlangte Quadratwurzel aus $a + \sqrt{b}$ sein wird:

$$\sqrt{\frac{a + \sqrt{(a^2 - b)}}{2}} + \sqrt{\frac{a - \sqrt{(a^2 - b)}}{2}}.$$

113. Diese Formel ist allerdings verwickelter, als wenn man vor das gegebene Binomium $a + \sqrt{b}$ schlechtweg das Wurzelzeichen ($\sqrt{}$) gesetzt hätte, nämlich $\sqrt{(a + \sqrt{b})}$. Allein jene Formel kann weit einfacher werden, wenn die Zahlen a und b so beschaffen sind, daß $a^2 - b$ ein Quadrat wird, weil alsdann das $\sqrt{}$ hinter dem $\sqrt{}$ wegfällt. Hieraus erkennt man, daß man nur in solchen Fällen aus dem Binomium $a + \sqrt{b}$ die Quadratwurzel bequem ausziehen kann, wenn $a^2 - b = c^2$; denn alsdann wird die gesuchte Quadratwurzel sein $\sqrt{\frac{a+c}{2}} + \sqrt{\frac{a-c}{2}}$; wenn aber $a^2 - b$ keine Quadratzahl ist, so läßt sich die Quadratwurzel nicht füglicher, als durch Vorsetzung des $\sqrt{}$-Zeichens angeben.

114. Daher erhalten wir eine Regel, um aus einem Binomium $a + \sqrt{b}$ die Quadratwurzel auf bequemere Art auszudrücken. Hiezu wird nämlich erfordert, daß $a^2 - b$ eine Quadratzahl sei; ist nun letztere $= c^2$, so wird die verlangte Quadratwurzel sein $\sqrt{\frac{a+c}{2}} + \sqrt{\frac{a-c}{2}}$; wo-

bei noch zu bemerken, daß von $a - \sqrt{b}$ die Quadratwurzel $\sqrt{\frac{a+c}{2}} - \sqrt{\frac{a-c}{2}}$ sein wird. Denn nimmt man von dieser Formel das Quadrat, so wird solches $a - 2\sqrt{\frac{a^2-c^2}{4}}$; da nun $c^2 = a^2 - b$, so ist $a^2 - c^2 = b$; daher dieses Quadrat $= a - 2\sqrt{\frac{b}{4}} = a - \frac{2\sqrt{b}}{2} = a - \sqrt{b}$.

115. Wenn also aus einem solchen Binomium $a + \sqrt{b}$ die Quadratwurzel gezogen werden soll, subtrahirt man von dem Quadrat des rationalen Theils a^2 das Quadrat des irrationalen Theils b; aus dem Rest zieht man die Quadratwurzel, welche $= c$ sei, so ist die verlangte Quadratwurzel $\sqrt{\frac{a+c}{2}} \pm \sqrt{\frac{a-c}{2}}$.

116. Man suche z. B. die Quadratwurzel aus $2 + \sqrt{3}$, so ist $a = 2$ und $b = 3$; daher $a^2 - b = c^2 = 1$ und also $c = 1$; daher die verlangte Quadratwurzel $\sqrt{\frac{3}{2}} + \sqrt{\frac{1}{2}}$ ist.

Es sei ferner dieses Binomium gegeben $11 + 6\sqrt{2}$, woraus die Quadratwurzel gefunden werden soll. Hier ist nun $a = 11$ und $\sqrt{b} = 6\sqrt{2}$; daher $b = 36 . 2 = 72$ und $a^2 - b = 49$, folglich $c = 7$. Daher die Quadratwurzel aus $11 + 6\sqrt{2} = \sqrt{9} + \sqrt{2} = 3 + \sqrt{2}$ sein wird.

Man suche die Quadratwurzel aus $11 - 2\sqrt{30}$. Hier ist $a = 11$ und $\sqrt{b} = 2\sqrt{30}$, daher $b = 4 . 30 = 120$ und $a^2 - b = 1$ und $c = 1$; folglich die gesuchte Quadratwurzel $\sqrt{6} - \sqrt{5}$.

117. Diese Regel findet sogar auch Anwendung, wenn imaginäre, oder unmögliche, Zahlen vorkommen.

Wenn also gegeben ist dieses Binomium $1 + 4\sqrt{-3}$, so ist $a = 1$ und $\sqrt{b} = 4\sqrt{-3}$; daher $b = -48$ und $a^2 - b = 49$, daher $c = 7$; folglich die gesuchte Quadratwurzel $\sqrt{4} + \sqrt{-3} = 2 + \sqrt{-3}$.

Es sei ferner gegeben $-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{-3}$. Hier ist $a = -\frac{1}{2}$; $\sqrt{b} = \frac{1}{2}\sqrt{-3}$ und $b = \frac{1}{4} . -3 = -\frac{3}{4}$,

daher $a^2 - b = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1$ und $c = 1$; folglich ist die gesuchte Quadratwurzel $\sqrt{\frac{1}{4}} + \sqrt{-\frac{3}{4}} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{-3}}{2}$ oder $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{-3}$.

Ein anderes merkwürdiges Beispiel ist das, wenn aus $2\sqrt{-1}$ die Quadratwurzel gesucht werden soll.

Weil hier kein rationaler Theil ist, so ist $a = 0$ und $\sqrt{b} = 2\sqrt{-1}$, daher $b = -4$ und $a^2 - b = 4$, also $c = 2$, woraus die gesuchte Quadratwurzel $\sqrt{1} + \sqrt{-1} = 1 + \sqrt{-1}$ ist, wovon das Quadrat $1 + 2\sqrt{-1} - 1 = 2\sqrt{-1}$.

118. Nehmen wir an, es sollte eine Gleichung aufzulösen sein, wie $x^2 = a \pm \sqrt{b}$ und es wäre $a^2 - b = c^2$, so würde man daraus diesen Werth für x erhalten $x = \sqrt{\frac{a+c}{2}} \pm \sqrt{\frac{a-c}{2}}$, welches in vielen Fällen Nutzen haben kann.

Es sei z. B. $x^2 = 17 + 12\sqrt{2}$, so wird $x = 3 + \sqrt{8} = 3 + 2\sqrt{2}$.

119. Dieser Fall tritt besonders bei der Auflösung einiger Gleichungen des vierten Grades ein, als: $x^4 = 2ax^2 + d$. Denn setzt man hier $x^2 = y$, so wird $x^4 = y^2$, daher unsere Gleichung $y^2 = 2ay + d$, woraus gefunden wird $y = a \pm \sqrt{(a^2 + d)}$; daher für die erste Gleichung sein wird $x^2 = a \pm \sqrt{(a^2 + d)}$, woraus folglich noch die Quadratwurzel gezogen werden muß. Da nun hier $\sqrt{b} = \sqrt{(a^2 + d)}$, also $b = a^2 + d$, so wird $a^2 - b = -d$. Wäre nun $-d$ ein Quadrat, nämlich c^2 oder $d = -c^2$, so kann die Wurzel angegeben werden; es sei demnach $d = -c^2$, oder es sei diese Gleichung des vierten Grades gegeben $x^4 = 2ax^2 - c^2$, so wird daraus der Werth von x also ausgedrückt

$$x = \sqrt{\frac{a+c}{2}} \pm \sqrt{\frac{a-c}{2}}.$$

120. Wir wollen dieses durch folgende Beispiele erläutern:

I. Man suche zwei Zahlen, deren Product 105, und deren Quadrate die Summe 274 geben.

Nennt man diese Zahlen x und y, so hat man diese zwei Gleichungen: I. $xy = 105$ und II. $x^2 + y^2 = 274$.

Aus der ersten findet man $y = \frac{105}{x}$, welcher Werth in der andern für y gesetzt, $x^2 + \frac{105^2}{x^2} = 274$ giebt. Mit x^2 multiplicirt, wird: $x^4 + 105^2 = 274x^2$, oder $x^4 = 274x^4 - 105^2$.

Vergleicht man nun diese Gleichung mit der obigen, so wird $2a = 274$ und $-c^2 = -105^2$; daher $c = 105$ und $a = 137$. Also finden wir:

$$x = \sqrt{\frac{137 + 105}{2}} \pm \sqrt{\frac{137 - 105}{2}} = 11 \pm 4;$$

folglich entweder $x = 15$ oder $x = 7$. Im ersteren Falle wird $y = 7$, im letzteren aber $y = 15$. Daher sind die beiden gesuchten Zahlen 15 und 7.

121. Es ist hier aber wohl zu bemerken, daß die Rechnung auf andere Art weit leichter gemacht werden kann. Denn da $x^2 + 2xy + y^2$, und auch $x^2 - 2xy + y^2$ ein Quadrat ist, wir aber wissen, sowohl was $x^2 + y^2$ als auch was xy ist, so brauchen wir nur das letztere doppelt genommen, sowohl zu dem ersten zu addiren, als auch davon zu subtrahiren, wie hier zu sehen: $x^2 + y^2 = 274$. Erstlich $2xy = 210$ addirt $x^2 + 2xy + y^2 = 484$ und $x + y = 22$; alsdann $2xy$ subtrahirt, giebt $x^2 - 2xy + y^2 = 64$ und $x - y = 8$. Also $2x = 30$ und $2y = 14$, woraus erhellt, daß $x = 15$ und $y = 7$. Auf diese Art kann die Aufgabe auch allgemein aufgelöst werden:

II. Man suche zwei Zahlen, deren Product $= m$, und deren Quadratsumme $= n$ sei?

Die gesuchten Zahlen seien x und y, so hat man die zwei folgenden Gleichungen I. $xy = m$, II. $x^2 + y^2 = n$. Nun aber ist $2xy = 2m$, woraus erstlich $2xy$ addirt, giebt $x^2 + 2xy + y^2 = n + 2m$ und $x + y = \sqrt{(n + 2m)}$.

Hierauf $2xy$ subtrahirt, giebt $x^2 - 2xy + y^2 = n - 2m$ und $x - y = \sqrt{(n - 2m)}$; also $x = \frac{1}{2}\sqrt{(n + 2m)} + \frac{1}{2}\sqrt{(n - 2m)}$ und $y = \frac{1}{2}\sqrt{(n + 2m)} - \frac{1}{2}\sqrt{(n - 2m)}$.

122. III. Es sei ferner die Aufgabe gestellt, zwei Zahlen zu finden, deren Product $= 35$ und deren Differenz der Quadrate $= 24$ sei?

Es sei x die größere, und y die kleinere, so hat man diese beiden Gleichungen $xy = 35$ und $x^2 - y^2 = 24$; da nun hier die vorigen Vortheile nicht wahrgenommen werden können, so verfahre man in der gewöhnlichen Weise, und da giebt die erste $y = \frac{35}{x}$, welcher Werth in der andern für y gesetzt, giebt $x^2 - \frac{1225}{x^2} = 24$; wenn man mit x^2 multiplicirt, hat man $x^4 - 1225 = 24x^2$ und $x^4 = 24x^2 + 1225$. Weil hier das letzte Glied das Zeichen plus hat, so kann die obige Gleichung nicht angewandt werden, weil nämlich $c^2 = -1225$, und also c imaginär würde.

Man setze daher $x^2 = z$, so hat man $z^2 = 24z + 1225$, woraus gefunden wird $z = 12 \pm \sqrt{(144 + 1225)}$ oder $z = 12 \pm 37$, daher $x^2 = 12 \pm 37$, das ist entweder $x^2 = 49$ oder $x^2 = -25$.

Nach dem ersten Werthe wird $x = 7$ und $y = 5$. Nach dem andern aber wird $x = \sqrt{-25}$ und $y = \frac{35}{\sqrt{-25}}$, oder $y = \sqrt{\frac{1225}{-25}}$, oder $y = \sqrt{-49}$.

123. Zum Schluß dieses Kapitels wollen wir noch diese Aufgabe hinzufügen:

IV. Man suche zwei Zahlen, deren Summe, Product, und Differenz der Quadrate einander gleich sei.

Die größere Zahl sei x, die kleinere y, so müssen diese drei Formeln einander gleich sein: I. Summe $x + y$; II. Product xy; III. Differenz der Quadrate $x^2 - y^2$. Vergleicht man die erste mit der zweiten, so hat man $x + y = xy$ und daraus suche man x. Man wird also haben

$y = xy - x$ oder $y = x(y-1)$ und daraus wird $x = \frac{y}{y-1}$; daher wird $x + y = \frac{y^2}{y-1}$ und $xy = \frac{y^2}{y-1}$ und also ist die Summe dem Producte schon gleich. Diesem Werthe muß aber noch die Differenz der Quadrate gleich sein. Es wird aber $x^2 - y^2 = \frac{y^2}{y^2-2y+1} - y^2 = \frac{-y^4+2y^3}{y^2-2y-1}$, welches dem obigen Werthe $\frac{y^2}{y-1}$ gleich sein muß; daher bekommt man $\frac{y^2}{y-1} = \frac{-y^4+2y^3}{(y-1)^2}$; durch y^2 dividirt wird $\frac{1}{y-1} = \frac{-y^2+2y}{(y-1)^2}$; ferner mit $y-1$ multiplicirt wird $1 = \frac{-y^2+2y}{y-1}$, nochmals mit $y-1$ multiplicirt, giebt $y - 1 = -y^2 + 2y$; folglich $y^2 = y + 1$. Hieraus findet man $y = \frac{1}{2} \pm \sqrt{(\frac{1}{4}+1)} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{5}{4}}$ oder $y = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$; und daher erhalten wir $x = \frac{1+\sqrt{5}}{\sqrt{5}-1}$. Um hier die Irrationalität aus dem Nenner wegzubringen, multiplicire man oben und unten mit $\sqrt{5}+1$, so bekommt man $x = \frac{6+2\sqrt{5}}{4} = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$.

Antwort. Also die größere der gesuchten Zahlen wäre $x = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$, und die kleinere $y = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Ihre Summe ist also $x + y = 2 + \sqrt{5}$, ferner das Product $xy = 2 + \sqrt{5}$ und da $x^2 = \frac{7+3\sqrt{5}}{2}$ und $y^2 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$, so wird die Differenz der Quadrate $x^2 - y^2 = 2 + \sqrt{5}$ sein.

124. Diese Auflösung ist ziemlich mühsam; sie kann jedoch leichter auf folgende Art gefunden werden. Man setze erstlich die Summe $x + y$ der Differenz der Quadrate $x^2 - y^2$ gleich, so hat man $x + y = x^2 - y^2$. Hier kann man durch $x + y$ dividiren, weil $x^2 - y^2 = (x+y)(x-y)$, und da erhält man $1 = x - y$, woraus $x = y + 1$; daher $x + y = 2y + 1$ und $x^2 - y^2 = 2y + 1$; und diesem Werthe muß noch das Product $xy = y^2 + y$

gleich sein. Man hat also $y^2 + y = 2y + 1$, oder $y^2 = y + 1$, woraus wie oben gefunden wird $y = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

125. V. Diese Aufgabe führt uns noch zu folgender. Zwei Zahlen zu finden, deren Summe, Product und Summe der Quadrate einander gleich sei.

Die gesuchten Zahlen seien x und y, so müssen diese drei Formeln einander gleich sein I. $x + y$, II. xy, und III. $x^2 + y^2$.

Setzt man die erste der zweiten gleich $x + y = xy$, so findet man daraus $x = \frac{y}{y-1}$ und $x + y = \frac{y^2}{y-1}$, welchem auch xy gleich ist. Hieraus aber wird $x^2 + y^2 = \frac{y^2}{y^2-2y+1} + y^2$, welches $\frac{y^2}{y-1}$ gleich zu setzen ist.

Man multiplicire mit $y^2 - 2y + 1$, so bekommt man $y^4 - 2y^3 + 2y^2 = y^3 - y^2$ oder $y^4 = 3y^3 - 3y^2$, und durch y^2 dividirt $y^2 = 3y - 3$; daher $y = \frac{3}{2} \pm \sqrt{(\frac{9}{4} - 3)}$, also $y = \frac{3+\sqrt{-3}}{2}$, daher $y - 1 = \frac{1+\sqrt{-3}}{2}$, folglich $x = \frac{3+\sqrt{-3}}{1+\sqrt{-3}}$. Man multiplicire oben und unten mit $1 - \sqrt{-3}$, so wird $x = \frac{6-2\sqrt{-3}}{4}$ oder $x = \frac{3-\sqrt{-3}}{2}$.

Antwort. Also sind die beiden gesuchten Zahlen $x = \frac{3-\sqrt{-3}}{2}$ und $y = \frac{3+\sqrt{-3}}{2}$, ihre Summe ist $x + y = 3$, das Product $xy = 3$, und da endlich $x^2 = \frac{3-3\sqrt{-3}}{2}$ und $y^2 = \frac{3+3\sqrt{-3}}{2}$, so wird $x^2 + y^2 = 3$.

126. Diese Rechnung wird durch einen Kunstgriff sehr erleichtert, welcher noch in andern Fällen angewandt werden kann. Derselbe besteht darin, daß man die gesuchten Zahlen nicht durch einzelne Buchstaben, sondern durch die Summe und Differenz zweier andern ausdrückt.

Also in der vorigen Aufgabe setze man die eine der

gesuchten Zahlen gleich $p + q$ und die andere $p - q$, so wird die Summe derselben sein $2p$, ihr Product $p^2 - q^2$ und die Summe ihrer Quadrate $2p^2 + 2q^2$, welche drei Stücke einander gleich sein müssen. Man setze das erste gleich dem zweiten, so wird $2p = p^2 - q^2$ und daraus $q^2 = p^2 - 2p$. Diesen Werth setze man im dritten für q^2, so wird dasselbe $4p^2 - 4p$, welches dem ersten gleich gesetzt, giebt $2p = 4p^2 - 4p$. Man addire $4p$, so wird $6p = 4p^2$, durch p dividirt $6 = 4p$ und also $p = \frac{3}{2}$.

Hieraus $q^2 = -\frac{3}{4}$ und $q = \frac{\sqrt{-3}}{2}$; folglich sind unsere gesuchten Zahlen $p + q = \frac{3+\sqrt{-3}}{2}$ und die andere $p - q = \frac{3-\sqrt{-3}}{2}$, welche Zahlen wir auch vorher gefunden.

Kapitel 9.

Von der Natur der quadratischen Gleichungen.

127. Aus dem Vorhergehenden hat man zur Genüge ersehen, daß die quadratischen Gleichungen auf doppelte Art aufgelöst werden können. Diese Eigenschaft verdient in Erwägung gezogen zu werden, weil dadurch die Natur der Gleichungen höherer Grade nicht wenig erläutert wird. Wir wollen daher genauer untersuchen, woher es kommt, daß jede quadratische Gleichung zweierlei Auflösungen zuläßt, weil darin eine sehr wesentliche Eigenschaft dieser Gleichungen enthalten ist.

128. Man hat zwar schon gesehen, daß diese doppelte Auflösung dadurch entsteht, daß die Quadratwurzel aus jeder Zahl sowohl negativ als positiv gesetzt werden kann. Allein dieser Grund würde sich nicht wohl auf höhere Gleichungen anwenden lassen; daher wird es gut sein, den Grund davon noch auf eine andere Art deutlicher vor Augen zu führen. Es ist demnach nöthig zu erklären, woher es kommt, daß eine quadratische Gleichung als z. B.

$x^2 = 12x - 35$ auf doppelte Art aufgelöst werden, oder daß für x zweierlei Werthe angegeben werden können, welche beide der Gleichung ein Genüge leisten, wie in diesem Beispiel für x sowohl 5 als 7 gesetzt werden kann, indem in beiden Fällen x^2 und $12x - 35$ einander gleich werden.

129. Um den Grund hievon deutlicher darzulegen, ist es nöthig, alle Glieder der Gleichung auf eine Seite zu bringen, so daß auf der andern 0 stehen bleibt. Daher die obige Gleichung sein wird $x^2 - 12x + 35 = 0$, wobei es sich darum handelt, daß eine solche Zahl gefunden werde, welche, wenn sie für x gesetzt wird, die Formel $x^2 - 12x + 35$ wirklich in nichts verwandelt; und dann muß auch die Ursache gezeigt werden, warum es auf zweierlei Art geschehen kann.

130. Hier kommt nun alles darauf an, deutlich zu zeigen, daß eine solche Formel $x^2 - 12x + 35$ als ein Product aus 2 Factoren angesehen werden kann. Diese Formel besteht nun wirklich aus den 2 Factoren $(x-5).(x-7)$. Soll sie nun $= 0$ werden, so muß auch dieses Product $(x-5).(x-7) = 0$ sein. Ein Product aber, aus so viel Factoren es auch immer bestehen mag, wird stets 0, wenn einer seiner Factoren 0 wird. Denn so groß auch das Product aus den übrigen Factoren sein mag, wenn dasselbe noch mit 0 multiplicirt wird, so kommt immer 0 heraus, welcher Grundsatz für die höheren Gleichungen wohl zu beachten ist.

131. Hieraus ersieht man nun ganz deutlich, daß dieses Product $(x-5).(x-7)$ auf doppelte Art 0 werden kann: einmal nämlich, wenn der erste Factor $x - 5 = 0$ wird, und ferner auch, wenn der andere Factor $x - 7 = 0$ wird. Das erstere geschieht, wenn $x = 5$, das andere aber wenn $x = 7$. Hieraus erkennt man also den wahren Grund, warum eine Gleichung $x^2 - 12x + 35 = 0$ zweierlei Auf-

lösungen zuläßt, oder warum für x zwei Werthe gefunden werden können, welche beide der Gleichung Genüge leisten.

Der Grund besteht nämlich darin, daß sich die Formel $x^2 - 12x + 35$ als ein Product aus Factoren darstellen läßt.

132. Derselbe Umstand tritt bei allen quadratischen Gleichungen ein. Denn wenn alle Glieder auf eine Seite gebracht werden, so erhält man immer eine solche Formel $x^2 - ax + b = 0$; und diese Formel kann ebenfalls als ein Product von zwei Factoren angesehen werden, welche wir darstellen wollen als $(x - p)(x - q)$, ohne uns darum zu bekümmern, was p und q für Zahlen sein mögen. Da nun unsere Gleichung erfordert, daß dieses Product 0 gleich werde, so ist deutlich, daß solches auf zweierlei Art geschehen kann; erstens wenn $x = p$ und zweitens wenn $x = q$, welches die beiden Werthe für x sind, die der Gleichung Genüge leisten.

133. Laßt uns nun sehen, wie diese zwei Factoren beschaffen sein müssen, damit ihr Product genau unsere Formel $x^2 - ax + b$ ergebe. Man multiplicire demnach dieselben wirklich, so erhält man $x^2 - (p + q)x + pq$. Da dieser Werth nun gleich $x^2 - ax + b$ sein soll, so ist es klar, daß $p + q = a$ und $pq = b$ sein muß, woraus wir die bemerkenswerthe Wahrheit erkennen, daß für die Gleichung $x^2 - ax + b = 0$ die beiden Werthe von x so beschaffen sind, daß ihre Summe der Zahl a und ihr Product der Zahl b gleich ist. Daher sobald man einen Werth erkennt, ist es auch leicht den andern zu finden.

134. Dieses ist der Fall, wenn beide Werthe für x positiv sind, da dann in der Gleichung das zweite Glied das Zeichen —, das dritte aber das Zeichen + hat. Wir wollen nunmehr auch die Fälle erwägen, wenn einer von den beiden Werthen für x, oder auch alle beide negativ sind. Jenes geschieht, wenn die beiden Factoren der Gleichung also beschaffen sind: $(x - p)(x + q)$; woher diese

zwei Werthe für x entstehen, erstens $x = p$ und zweitens $x = -q$. Die Gleichung selbst aber ist alsdann $x^2 + (q - p)x - pq = 0$, wo das zweite Glied das Zeichen + hat, wenn nämlich q größer ist als p; wäre aber q kleiner als p, so hätte es das Zeichen —, das dritte Glied aber ist hier immer negativ.

Wären aber die beiden Factoren $(x + p)(x + q)$, so wären beide Werthe für x negativ, nämlich $x = -p$ und $x = -q$ und die Gleichung selbst würde $x^2 + (p + q)x + pq = 0$ sein, wo sowohl das zweite als auch das dritte Glied das Zeichen + haben muß.

135. Daher erkennen wir nun die Beschaffenheit der Wurzeln jeder quadratischen Gleichung aus dem Zeichen des zweiten und dritten Gliedes. Es sei die Gleichung $x^2 \ldots ax \ldots b = 0$. Wenn nun das zweite und dritte Glied das Zeichen + haben, so sind beide Werthe negativ; ist das zweite Glied —, das dritte aber +, so sind beide Werthe positiv; ist aber das dritte Glied negativ, so ist ein Werth positiv. Stets aber enthält das zweite Glied die Summe der beiden Werthe, und das dritte ihr Product.

136. Den vorangegangenen Erörterungen gemäß ist es ganz leicht, solche quadratische Gleichungen zu machen, welche nach Belieben zwei gegebene Werthe in sich enthalten. Man verlangt z. B. eine Gleichung, in der der eine Werth für x sein soll 7, der andere aber -3. Man mache daraus die einfachen Gleichungen $x = 7$ und $x = -3$; hieraus ferner diese $x - 7 = 0$ und $x + 3 = 0$, welches die Factoren der verlangten Gleichung sein werden; also daß die Gleichung sein wird $x^2 - 4x - 21 = 0$, woraus auch nach der obigen Regel dieselben beiden Werthe für x gefunden werden. Denn da $x^2 = 4x + 21$, so wird $x = 2 \pm \sqrt{25}$, also $x = 2 \pm 5$, also entweder $x = 7$ oder $x = -3$.

137. Es kann auch geschehen, daß beide Werthe für

x einander gleich werden; man suche z. B. eine Gleichung, in der beide Werthe für $x = 5$ sind; so werden die beiden Factoren sein $(x - 5)(x - 5)$ und die Gleichung ist also beschaffen $x^2 - 10x + 25 = 0$, welche nur einen Werth zu haben scheint, weil auf eine doppelte Art $x = 5$, wie auch die gewöhnliche Auflösung zeigt. Denn da $x^2 = 10x - 25$, so wird $x = 5 \pm \sqrt{0}$, oder $x = 5 \pm 0$ und daher wird $x = 5$ und $x = 5$.

138. Besonders ist hier noch zu bemerken, daß bisweilen beide Werthe für x imaginär oder unmöglich werden, in welchen Fällen es ganz und gar unmöglich ist, einen Werth für x anzugeben, welcher der Gleichung Genüge leistet, wie z. B. geschieht, wenn die Zahl 10 in zwei Theile getheilt werden soll, deren Product 30 sei. Denn es sei ein Theil $= x$, so wird der andere sein $10 - x$ und also ihr Product $10x - x^2 = 30$, folglich $x^2 = 10x - 30$ und $x = 5 \pm \sqrt{-5}$, welches eine imaginäre oder unmögliche Zahl ist, woraus erkannt wird, daß die Aufgabe unmöglich ist.

139. Es ist daher sehr wichtig, ein Kennzeichen zu finden, aus dem man sogleich erkennen kann, ob eine quadratische Gleichung möglich sei oder nicht. Es sei daher diese allgemeine Gleichung gegeben: $x^2 - ax + b = 0$, so wird $x^2 = ax - b$ und $x = \frac{1}{2}a \pm \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 - b)}$; woraus erhellt, daß, wenn die Zahl b größer ist als $\frac{1}{4}a^2$, oder 4b größer als a^2, die beiden Werthe unmöglich werden, weil man aus einer negativen Zahl die Quadratwurzel ausziehen müßte. So lange aber dagegen b kleiner ist als $\frac{1}{4}a^2$, oder auch gar kleiner als 0, das ist negativ, so sind die beiden Werthe immer möglich. Dieselben mögen indessen möglich sein oder nicht, so können sie doch in dieser Art stets ausgedrückt werden, und haben auch immer die Eigenschaft, daß ihre Summe ist $= a$ und ihr Product $= b$, wie in diesem Beispiel zu ersehen: $x^2 - 6x +$

$10 = 0$, wo die Summe der beiden Werthe für x sein muß $= 6$ und das Product $= 10$. Man findet aber diese beiden Werthe: I. $x = 3 + \sqrt{-1}$ und II. $x = 3 - \sqrt{-1}$, deren Summe $= 6$ und deren Product $= 10$ ist.

140. Man kann dieses Kennzeichen auf allgemeinere Art ausdrücken, so daß es auch auf solche Gleichungen angewandt werden kann wie $fx^2 \pm gx + h = 0$; denn hieraus hat man $x^2 = \mp \frac{gx}{f} - \frac{h}{f}$, daher $x = \mp \frac{g}{2f} \pm \sqrt{\left(\frac{g^2}{4f^2} - \frac{h}{f}\right)}$, oder $x = \frac{\mp g \pm \sqrt{(g^2 - 4fh)}}{2f}$, woraus erhellt, daß beide Werthe imaginär oder die Gleichung unmöglich wird, wenn 4fh größer ist als g^2, oder wenn in dieser Gleichung $fx^2 \pm gx + h = 0$ das vierfache Product des ersten und letzten Gliedes größer ist, als das Quadrat des zweiten Gliedes. Denn das vierfache Product des ersten und letzten Gliedes ist $4fhx^2$, das Quadrat aber des mittleren Gliedes ist g^2x^2. Wenn nun $4fhx^2$ größer ist als g^2x^2, so ist auch 4fh größer als g^2 und also die Gleichung unmöglich; in allen übrigen Fällen aber ist die Gleichung möglich und die beiden Werthe für x können wirklich angegeben werden, wenn dieselben oft auch irrational werden, in welchen Fällen man immer näher zu ihrem wahren Werthe gelangen kann, wie oben bemerkt worden; während bei imaginären Ausdrücken wie $\sqrt{-5}$ auch keine Näherung stattfindet, indem 100 davon eben so weit entfernt ist als 1 oder irgend eine andere Zahl.

141. Hiebei ist noch zu erinnern, daß jede Formel des zweiten Grades $x^2 \pm ax \pm b$ nothwendig stets in zwei solche Factoren $(x \pm p)(x \pm q)$ zerlegt werden kann. Denn wenn man drei solcher Factoren nehmen wollte, so würde man zu Werthen dritten Grades kommen, und nur einer allein würde nicht Werthe zweiten Grades hervorbringen. Daher ist es eine ausgemachte Sache, daß jede Gleichung zweiten Grades nothwendig zwei Werthe für x

in sich enthält, und daß derselben weder mehr noch weniger sein können.

142. Wir haben schon gesehen, daß, wenn diese beiden Factoren gefunden worden sind, man daraus auch die beiden Werthe für x feststellen kann; indem jeder Factor, wenn er gleich 0 gesetzt wird, einen Werth für x angiebt. Auch das Umgekehrte findet statt. Sobald man einen Werth für x gefunden, kann daraus auch ein Factor der quadratischen Gleichung erkannt werden. Denn wenn $x = p$ ein Werth für x in einer quadratischen Gleichung ist, so ist auch $x - p$ ein Factor derselben; oder die Gleichung, wenn alle Glieder auf eine Seite gebracht worden, läßt sich durch $x - p$ theilen, und der Quotient giebt den andern Factor.

143. Um dieses zu erläutern, sei diese Gleichung gegeben: $x^2 + 4x - 21 = 0$, von welcher wir wissen, daß $x = 3$ ein Werth für x sei, indem $3 \,.\, 3 + 4 \,.\, 3 - 21 = 0$ ist, und daher können wir sicher schließen, daß $x - 3$ ein Factor dieser Gleichung sei, oder daß sich $x^2 + 4x - 21$ durch $x - 3$ theilen läßt, wie aus folgender Division zu ersehen.

$$\begin{array}{l}
x - 3)\ x^2 + 4x - 21\ (x + 7 \\
\qquad\ \ \underline{x^2 - 3x} \\
\qquad\qquad\quad 7x - 21 \\
\qquad\qquad\quad \underline{7x - 21} \\
\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}$$

Also ist der andere Factor $x + 7$ und unsere Gleichung wird durch dieses Product dargestellt: $(x - 3)(x + 7) = 0$, woraus die beiden Werthe für x sogleich sich ergeben, da nämlich aus dem ersten Factor $x = 3$, aus dem andern aber $x = -7$ wird.

Kapitel 10.

Von der Auflösung der reinen cubischen Gleichungen.

144. Eine **cubische Gleichung** wird eine **reine** genannt, wenn der Cubus der unbekannten Zahl einer bekannten Zahl gleich gesetzt wird, so daß darin weder das Quadrat der unbekannten Zahl, noch dieselbe selbst vorkommt.

Eine solche Gleichung ist $x^3 = 125$, oder auf allgemeine Art $x^3 = a$, oder $x^3 = \frac{a}{b}$.

145. Wie nun aus einer solchen Gleichung der Werth von x gefunden wird, ist klar, indem man nur auf beiden Seiten die Cubikwurzel auszuziehen braucht.

Also aus der Gleichung $x^3 = 125$ findet man $x = 5$, und aus der Gleichung $x^3 = a$ bekommt man $x = \sqrt[3]{a}$; aus $x^3 = \frac{a}{b}$ aber hat man $x = \sqrt[3]{\frac{a}{b}}$ oder $x = \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}}$. Wenn man daher nur die Cubikwurzel aus einer gegebenen Zahl auszuziehen gelernt hat, kann man auch solche Gleichungen auflösen.

146. In solcher Art erhält man aber nur einen Werth für x; da nun jede quadratische Gleichung zwei Werthe hat, so hat man Grund zu vermuthen, daß eine cubische Gleichung auch mehr als einen Werth haben werde. Daher wird es der Mühe werth sein, die Sache genauer zu untersuchen, und im Falle eine solche Gleichung mehrere Werthe für x haben sollte, diese auch ausfindig zu machen.

147. Wir wollen z. B. die Gleichung $x^3 = 8$ betrachten, woraus alle Zahlen gefunden werden sollen, deren Cubus gleich 8 ist. Da nun eine solche Zahl unstreitig $x = 2$ ist, so muß nach dem vorigen Kapitel die Formel $x^3 - 8 = 0$ sich nothwendig durch $x - 2$ theilen lassen; wir wollen also diese Theilung wie folgt vollziehen.

$$\begin{array}{l}
x - 2)\ x^3 - 8\ (x^2 + 2x + 4 \\
\qquad\ \ \underline{x^3 - 2x^2} \\
\qquad\qquad 2x^2 - 8 \\
\qquad\qquad \underline{2x^2 - 4x} \\
\qquad\qquad\qquad 4x - 8 \\
\qquad\qquad\qquad \underline{4x - 8} \\
\qquad\qquad\qquad\quad 0
\end{array}$$

Also läßt sich unsere Gleichung $x^3 - 8 = 0$ durch diese Factoren darstellen $(x - 2)(x^2 + 2x + 4) = 0$.

148. Da nun die Frage ist, was für eine Zahl für x angenommen werden müsse, damit $x^3 = 8$ oder $x^3 - 8 = 0$ werde, so ist klar, daß dieses geschieht, wenn das gefundene Product gleich 0 wird. Dasselbe wird aber 0, nicht nur wenn der erste Factor $x - 2 = 0$ wird, woraus entsteht $x = 2$, sondern auch, wenn der andere Factor $x^2 + 2x + 4 = 0$ ist. Man setze also $x^2 + 2x + 4 = 0$, so hat man $x^2 = -2x - 4$ und daher wird $x = -1 \pm \sqrt{-3}$.

149. Außer dem Falle also $x = 2$, in welchem die Gleichung $x^3 = 8$ giebt, haben wir noch zwei andere Werthe für x, deren Cuben ebenfalls 8 sind, und welche also beschaffen sind:

I. $x = -1 + \sqrt{-3}$ und II. $x = -1 - \sqrt{-3}$, was außer Zweifel gesetzt wird, wenn man die Cuben davon nimmt, wie folgt:

$$\begin{array}{ll}
\quad -1 + \sqrt{-3} & \qquad -1 - \sqrt{-3} \\
\quad \underline{-1 + \sqrt{-3}} & \qquad \underline{-1 - \sqrt{-3}} \\
\qquad 1 - \sqrt{-3} & \qquad\ \ 1 + \sqrt{-3} \\
\qquad\ \underline{- \sqrt{-3} - 3} & \qquad\quad \underline{+ \sqrt{-3} - 3} \\
-2 - 2\sqrt{-3}\ \text{Quadrat} & \qquad -2 + 2\sqrt{-3} \\
\quad \underline{-1 + \sqrt{-3}} & \qquad \underline{-1 - \sqrt{-3}} \\
\quad\ 2 + 2\sqrt{-3} & \qquad\ \ 2 - 2\sqrt{-3} \\
\qquad \underline{- 2\sqrt{-3} + 6} & \qquad\quad \underline{+ 2\sqrt{-3} + 6} \\
\qquad\quad 8 \quad \text{Cubus} & \qquad\qquad 8.
\end{array}$$

Diese beiden Werthe sind zwar imaginär oder unmöglich, verdienen aber nichts desto weniger beachtet zu werden.

150. Dieser Grundsatz hat auch überhaupt für jede cubische Gleichung $x^3 = a$ Geltung, daß nämlich außer dem Werthe $x = \sqrt[3]{a}$ noch zwei andere ebenfalls vorhanden sind. Man setze der Kürze halber $\sqrt[3]{a} = c$, so daß $a = c^3$ und unsere Gleichung diese Form bekomme:

$x^3 - c^3 = 0$, welche letztere sich durch $x - c$ theilen läßt, wie aus dieser Division zu sehen:

$$\begin{array}{l}
x - c)\ x^3 - c^3\ (x^2 + cx + c^2 \\
\qquad\ \ \underline{x^3 - cx^2} \\
\qquad\qquad cx^2 - c^3 \\
\qquad\qquad \underline{cx^2 - c^2x} \\
\qquad\qquad\qquad c^2x - c^3 \\
\qquad\qquad\qquad \underline{c^2x - c^3} \\
\qquad\qquad\qquad\quad 0
\end{array}$$

Daher wird unsere Gleichung durch dieses Product dargestellt: $(x - c)(x^2 + cx + c^2) = 0$, welches wirklich gleich 0 wird, nicht nur wenn $x - c = 0$ oder $x = c$, sondern auch wenn $x^2 + cx + c^2 = 0$, daraus aber wird $x^2 = -cx - c^2$ und daher $x = -\frac{c}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{c^2}{4} - c^2\right)}$ oder $x = \frac{-c \pm \sqrt{-3c^2}}{2}$, das ist $x = \frac{-c \pm c\sqrt{-3}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2} \,.\, c$, in welcher Formel noch zwei Werthe für x enthalten sind.

151. Da nun c anstatt $\sqrt[3]{a}$ geschrieben worden, so ziehen wir daher den Schluß, daß aus jeder cubischen Gleichung von der Form $x^3 = a$ dreierlei Werthe für x gefunden werden können, welche so ausgedrückt werden:
I. $x = \sqrt[3]{a}$, II. $x = \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2} \,.\, \sqrt[3]{a}$, III. $x = \frac{-1 - \sqrt{-3}}{2} \,.\, \sqrt[3]{a}$, woraus erhellt, daß jede Cubikwurzel dreierlei Werthe hat, von denen der erste möglich, die beiden andern aber unmöglich sind. Dies ist deswegen hier wohl zu bemerken, weil wir schon oben gesehen, daß jede quadratische Gleichung zweierlei Werthe hat; und unten noch gezeigt werden wird, daß jede Wurzel vom vierten Grade vier verschiedene Werthe, vom fünften Grade fünf dergleichen zc. hat.

Bei gewöhnlichen Rechnungen wird zwar nur der erste von diesen drei Werthen gebraucht, weil die beiden andern unmöglich sind, und darüber wollen wir noch einige Beispiele beifügen.

152. I. Aufgabe. Suche eine Zahl, deren Quadrat mit ihrem Viertel multiplicirt 432 giebt.

Diese Zahl sei x, so muß x^2 mit $\frac{1}{4}x$ multiplicirt der Zahl 432 gleich werden; daher wird $\frac{1}{4}x^3 = 432$, mit 4 multiplicirt $x^3 = 1728$ und die Cubikwurzel ausgezogen, giebt $x = 12$.

Antwort. Die gesuchte Zahl ist 12, denn ihr Quadrat ist 144; mit ihrem $\frac{1}{4}$ multiplicirt, das ist 3, giebt 432.

153. II. Aufgabe. Suche eine Zahl, deren vierte Potenz durch ihre Hälfte dividirt und dazu $14\frac{1}{4}$ addirt, 100 giebt.

Die Zahl sei x, so ist ihre vierte Potenz x^4, welche durch ihre Hälfte $\frac{1}{2}x$ dividirt $2x^3$ giebt, dazu $14\frac{1}{4}$ addirt, soll 100 machen; also hat man $2x^3 + 14\frac{1}{4} = 100$, wo $14\frac{1}{4}$ subtrahirt giebt $2x^3 = \frac{343}{4}$, durch 2 dividirt, wird $x^3 = \frac{343}{8}$ und die Cubikwurzel ausgezogen, erhält man $x = \frac{7}{2}$.

154. III. Aufgabe. Einige Hauptleute liegen zu Felde. Jeder hat unter seinem Befehl dreimal so viel Reiter und 20 mal so viel Fußgänger als Hauptleute sind; und ein Reiter erhält als Monatssold gerade so viel Gulden, ein Fußgänger aber halb so viel Gulden als Hauptleute sind; nun beträgt der monatliche Sold im Ganzen 13000 Gulden. Wie viel Hauptleute sind es gewesen?

Es seien x Hauptleute gewesen, so hat jeder unter seinem Befehl 3x Reiter und 20x Fußgänger gehabt. Also war die Zahl aller Reiter $3x^2$ und der Fußgänger $20x^2$. Da nun ein Reiter x Fl. bekommt, ein Fußgänger aber $\frac{1}{2}x$ Fl., so ist der monatliche Sold der Reiter $3x^3$ Fl., der der Fußgänger aber $10x^3$ Fl. Beide zusammen bekommen also $13x^3$ Fl., welche Zahl der Zahl 13000 gleich sein muß; da also $13x^3 = 13000$, so wird $x^3 = 1000$ und $x = 10$. So viel sind also der Hauptleute gewesen.

155. IV. Aufgabe. Einige Kaufleute bilden eine Gesellschaft, und jeder legt 100 mal so viel ein als Gesellschafter sind; sie schicken damit einen Factor nach Venedig, der gewinnt mit je 100 Fl. zweimal so viel als Gesellschafter sind, er kommt wieder zurück, und der Gewinn den er mitbringt beträgt 2662 Fl. Die Frage ist, wie viel Kaufleute sind es gewesen?

Es seien x Kaufleute gewesen, so hat jeder eingelegt 100x Fl. und das ganze Capital war $100x^2$ Fl. Da nun mit 100 Fl. 2x Fl. gewonnen worden, so war der Gewinn $2x^3$, welcher der Zahl 2662 gleich sein soll; also $2x^3 = 2662$, daher $x^3 = 1331$ und folglich $x = 11$. Also sind es 11 Kaufleute gewesen.

156. V. Aufgabe. Eine Bäuerin vertauscht Käse gegen Hühner, giebt je 2 Käse für 3 Hühner; die Hühner legen Eier, jedes $\frac{1}{3}$ so viel als es Hühner sind. Mit den Eiern geht sie auf den Markt, giebt je 9 Eier für so viel Pfennige als ein Huhn Eier gelegt hat, und löst 72 Pfennige. Wie viel Käse hat die Bäuerin vertauscht?

Die Zahl der Käse sei gewesen x, so sind dieselben gegen $\frac{3}{2}x$ Hühner vertauscht worden. Da nun ein Huhn $\frac{1}{2}x$ Eier legt, so ist die Zahl aller Eier $\frac{3}{4}x^2$. Nun werden 9 Eier verkauft für $\frac{1}{2}x$ Pf., also wird im Ganzen gelöst $\frac{1}{24}x^3$, was 72 gleich sein muß; so daß $\frac{1}{24}x^3 = 72$, folglich $x^3 = 24 . 72 = 8 . 3 . 8 . 9$ oder $x^3 = 8 . 8 . 27$, folglich $x = 12$, und daher hat die Bäuerin 12 Käse gehabt, welche gegen 18 Hühner vertauscht worden sind.

Kapitel 11.

Von der Auflösung der vollständigen cubischen Gleichungen.

157. Eine vollständige cubische Gleichung wird eine solche genannt, in der außer dem Cubus der unbekannten Zahl noch diese unbekannte Zahl selbst und ihr Quadrat vorkommen, daher die allgemeine Form solcher Gleichungen ist: $ax^3 \pm bx^2 \pm cx \pm d = 0$, wenn nämlich alle Glieder auf eine Seite gebracht worden sind. Wie nun

aus einer solchen Gleichung die Werthe für x, welche auch die Wurzeln der Gleichung genannt werden, zu finden sind, soll in diesem Kapitel gezeigt werden. Denn man kann hier schon voraussetzen, daß eine solche Gleichung immer drei Wurzeln hat, weil dieses schon im vorigen Kapitel von den reinen Gleichungen dieses Grades gezeigt worden ist.

158. Wir wollen für den Anfang diese Gleichung betrachten: $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$, und da eine quadratische Gleichung als ein Product von zwei Factoren angesehen wird, so kann man diese cubische Gleichung als ein Product von drei Factoren ansehen, welche in diesem Falle sind: $(x - 1)(x - 2)(x - 3) = 0$, da sie mit einander multiplicirt, die obige Gleichung hervorbringen. Denn $(x - 1) . (x - 2)$ giebt $x^2 - 3x + 2$, und dieses noch mit $x - 3$ multiplicirt, giebt $x^3 - 6x^2 + 11x - 6$, welches die obige Form ist, die $= 0$ sein soll. Dieses geschieht demnach, wenn dieses Product $(x - 1)(x - 2)(x - 3)$ Null wird, welches eintrifft, wenn nur einer von den drei Factoren $= 0$ wird, und also in drei Fällen, erstens, wenn $x - 1 = 0$, oder $x = 1$, zweitens, wenn $x - 2 = 0$, oder $x = 2$, und drittens, wenn $x - 3 = 0$ oder $x = 3$.

Man sieht auch sogleich, daß, wenn für x jede andere Zahl gesetzt wird, keiner von diesen drei Factoren 0 wird, und also auch nicht das Product. Daher hat unsere Gleichung keine andern Wurzeln, als diese drei.

159. Könnte man in jedem andern Falle die drei Factoren einer solchen Gleichung angeben, so hätte man sogleich die drei Wurzeln derselben. Wir wollen zu diesem Behufe drei solcher Factoren auf allgemeine Art betrachten, welche sein sollen $x - p$, $x - q$, $x - r$. Man suche demnach ihr Product, und da der erste mit dem zweiten multiplicirt $x^2 - (p + q)x + pq$ giebt, so giebt dieses Product noch mit $x - r$ multiplicirt folgende Formel: $x^3 - (p + q + r)x^2 + (pq + pr + qr)x - pqr$. Soll nun diese Formel gleich 0 sein, so geschieht dies in drei Fällen; erstens, wenn $x - p = 0$ oder $x = p$, zweitens, wenn $x - q = 0$ oder $x = q$ und drittens, wenn $x - r = 0$ oder $x = r$.

160. Es sei nun diese Gleichung gegeben $x^3 - ax^2 + bx - c = 0$, und wenn die Wurzeln derselben sind I. $x = p$, II. $x = q$, III. $x = r$, so muß erstens $a = p + q + r$, und zweitens $b = pq + pr + qr$, und drittens $c = pqr$ sein, woraus wir sehen, daß das zweite Glied die Summe der drei Wurzeln enthält, das dritte Glied die Summe der Producte von je zwei Wurzeln und endlich das vierte Glied das Product aller drei Wurzeln.

Diese letzte Eigenschaft läßt uns sogleich den wichtigen Schluß ziehen, daß eine cubische Gleichung keine andern Rationalwurzeln haben kann, als solche, durch die sich das letzte Glied theilen läßt. Denn da dasselbe das Product aller drei Wurzeln ist, so muß es sich auch durch jede derselben theilen lassen. Man weiß daher sogleich, wenn man eine Wurzel nur errathen will, mit welchen Zahlen man die Probe machen muß.

Dies zu erläutern wollen wir die Gleichung betrachten $x^3 = x + 6$ oder $x^3 - x - 6 = 0$. Da nun dieselbe keine andere Rationalwurzeln haben kann, als solche, durch welche sich das letzte Glied 6 theilen läßt, so braucht nur mit den Zahlen 1, 2, 3, 6 die Probe zu machen. Diese Proben ergeben:

I. wenn $x = 1$, so kommt $1 - 1 - 6 = -6$.
II. wenn $x = 2$, so kommt $8 - 2 - 6 = 0$.
III. wenn $x = 3$, so kommt $27 - 3 - 6 = 18$.
IV. wenn $x = 6$, so kommt $216 - 6 - 6 = 204$.

Hieraus sehen wir, daß $x = 2$ eine Wurzel der gegebenen Gleichung ist, aus welcher es nun leicht ist, die beiden übrigen zu finden. Denn da $x = 2$ eine Wurzel ist, so ist $x - 2$ ein Factor der Gleichung, man braucht also nur den andern zu suchen, welches durch folgende Division geschieht:

$$\begin{array}{l}
x-2)\;x^3-x-6\;(x^2+2x+3\\
\quad\quad\;\underline{x^3-2x^2}\\
\quad\quad\quad\quad\;\;2x^2-x-6\\
\quad\quad\quad\quad\;\;\underline{2x^2-4x}\\
\quad\quad\quad\quad\quad\quad\;\;3x-6\\
\quad\quad\quad\quad\quad\quad\;\;\underline{3x-6}\\
\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\;\;0
\end{array}$$

Da nun unsere Formel durch dieses Product dargestellt wird $(x-2)(x^2+2x+3)$, so wird dieselbe 0, nicht nur wenn $x-2=0$, sondern auch wenn $x^2+2x+3=0$. Hieraus aber bekommen wir $x^2=-2x-3$ und daher $x=-1\pm\sqrt{-2}$, welches die beiden andern Wurzeln unserer Gleichung sind, die, wie man sieht, unmöglich oder imaginär sind.

161. Dies findet aber nur statt, wenn das erste Glied der Gleichung x^3 mit 1, die übrigen aber mit ganzen Zahlen multiplicirt sind. Wenn aber darin Brüche vorkommen, so hat man ein Mittel, die Gleichung in eine andere zu verwandeln, welche von Brüchen befreit ist, worauf dann die vorige Probe angestellt werden kann.

Denn es sei diese Gleichung gegeben $x^3-3x^2+\frac{11}{4}x-\frac{3}{4}=0$; weil hier nun Viertel vorkommen, so setze man $x=\frac{y}{2}$; dann bekommt man $\frac{y^3}{8}-\frac{3y^2}{4}+\frac{11y}{8}-\frac{3}{4}=0$, welche mit 8 multiplicirt giebt $y^3-6y^2+11y-6=0$, wovon die Wurzeln sind, wie wir oben gesehen, $y=1$, $y=2$, $y=3$, daher ist für unsere Gleichung I. $x=\frac{1}{2}$, II. $x=1$, III. $x=\frac{3}{2}$.

162. Wenn nun das erste Glied mit einer Zahl multiplicirt, das letzte aber 1 ist, wie in dieser Gleichung $6x^3-11x^2+6x-1=0$, woraus durch 6 dividirt diese entsteht $x^3-\frac{11}{6}x^2+x-\frac{1}{6}=0$, welche nach obiger Regel

von den Brüchen befreit werden kann, indem man setzt $x=\frac{y}{6}$; dann erhält man $\frac{y^3}{216}-\frac{11y^2}{216}+\frac{y}{6}-\frac{1}{6}=0$, und diese mit 216 multiplicirt, wird $y^3-11y^2+36y-36=0$. Hier würde es mühsam sein, die Probe mit allen Theilern der Zahl 36 anzustellen; weil aber in unserer ersten Gleichung das letzte Glied 1 ist, so setze man $x=\frac{1}{z}$, so wird $\frac{6}{z^3}-\frac{11}{z^2}+\frac{6}{z}-1=0$, welche mit z^3 multiplicirt giebt $6-11z+6z^2-z^3=0$ und alle Glieder auf die andere Seite gebracht $z^3-6z^2+11z-6=0$, deren Wurzeln sind $z=1$, $z=2$, $z=3$; daher wir für unsere Gleichung erhalten $x=1$, $x=\frac{1}{2}$, $x=\frac{1}{3}$.

163. Aus dem Obigen erkennt man, daß, wenn alle Wurzeln positive Zahlen sind, in der Gleichung die Zeichen plus und minus mit einander abwechseln müssen, so daß die Gleichung diese Form bekommt: $x^3-ax^2+bx-c=0$, wo drei Abwechselungen vorkommen, nämlich eben so viel als positive Wurzeln vorhanden. Wären aber alle drei Wurzeln negativ gewesen, und man hätte diese drei Factoren mit einander multiplicirt $x+p$, $x+q$, $x+r$, so würden alle Glieder das Zeichen plus und die Gleichung diese Form bekommen haben $x^3+ax^2+bx+c=0$, wo dreimal zwei gleiche Zeichen auf einander folgen, das ist, eben so viel als negative Wurzeln sind.

Hieraus hat man nun den Schluß gezogen, daß, so oft die Zeichen abwechseln, die Gleichung auch so viel positive Wurzeln hat; so oft aber gleiche Zeichen auf einander folgen, dieselbe eben so viel negative Wurzeln hat. Diese Bemerkung ist hier von großer Wichtigkeit, damit man wisse, ob man die Theiler des letzten Gliedes, mit denen man die Probe anstellen will, negativ oder positiv nehmen soll.

164. Um dieses mit einem Beispiel zu erläutern, wollen wir diese Gleichung betrachten: $x^3+x^2-34x+56=0$, in welcher zwei Abwechselungen der Zeichen und nur

eine Folge desselben Zeichens vorkommt, woraus wir schließen, daß diese Gleichung zwei positive und eine negative Wurzel hat, welche Theiler sein müssen des letzten Gliedes 56, und also unter diesen Zahlen $\pm 1, 2, 4, 7, 8, 14, 28, 56$ begriffen sind.

Setzt man nun $x=2$, so wird $8+4-68+56=0$, woraus wir sehen, daß $x=2$ eine positive Wurzel, und also $x-2$ ein Theiler unserer Gleichung ist, woraus die beiden übrigen Wurzeln leicht gefunden werden können, wenn man nur die Gleichung durch $x-2$, wie folgt, dividirt:

$$\begin{array}{l}
x-2)\;x^3+x^2-34x+56\;(x^2+3x-28\\
\quad\quad\;\underline{x^3-2x^2}\\
\quad\quad\quad\quad\;3x^2-34x+56\\
\quad\quad\quad\quad\;\underline{3x^2-6x}\\
\quad\quad\quad\quad\quad\quad-28x+56\\
\quad\quad\quad\quad\quad\quad\underline{-28x+56}\\
\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad 0
\end{array}$$

Man setze also diesen Quotienten $x^2+3x-28=0$, so wird man daraus die beiden übrigen Wurzeln finden, welche sein werden $x=-\frac{3}{2}\pm\frac{11}{2}$, daher die beiden übrigen Wurzeln sind $x=4$ und $x=-7$, wozu die obige $x=2$ zu nehmen.

Daraus geht hervor, daß wirklich zwei positive und nur eine negative Wurzel vorhanden sind. Dieses wollen wir noch durch folgende Beispiele erläutern.

165. I. Aufgabe. Die Differenz zweier Zahlen ist 12. Wenn man ihr Product mit ihrer Summe multiplicirt, so erhält man 14560. Welche Zahlen sind es?

Die kleinere sei x, so ist die größere $x+12$, ihr Product ist x^2+12x, das mit ihrer Summe $2x+12$ multiplicirt giebt $2x^3+36x^2+144x=14560$, durch 2 dividirt wird $x^3+18x^2+72x=7280$.

Weil nun das letzte Glied 7280 allzu groß ist, als daß die Probe mit allen seinen Theilern angestellt werden

könnte, dasselbe aber durch 8 theilbar ist, setze man $x=2y$. Dann ist $8y^3+72y^2+144y=7280$, welche Gleichung durch 8 dividirt wird $y^3+9y^2+18y=910$, und jetzt braucht man nur mit den Theilern der Zahl 910 zu probiren, welche sind 1, 2, 5, 7, 10, 13. Nun aber sind die ersten 1, 2, 5 offenbar zu klein; nimmt man aber $y=7$, so bekommt man $343+441+126=910$; also ist eine Wurzel $y=7$, folglich $x=14$. Will man noch die beiden übrigen Wurzeln von y wissen, so dividire man $y^3+9y^2+18y-910$ durch $y-7$ wie folgt:

$$\begin{array}{l}
y-7)\;y^3+9y^2+18y-910\;(y^2+16y+130\\
\quad\quad\;\underline{y^3-7y^2}\\
\quad\quad\quad\quad\;16y^2+18y-910\\
\quad\quad\quad\quad\;\underline{16y^2-112y}\\
\quad\quad\quad\quad\quad\quad\;130y-910\\
\quad\quad\quad\quad\quad\quad\;\underline{130y-910}\\
\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad 0
\end{array}$$

Setzt man nun diesen Quotienten $y^2+16y+130=0$, so bekommt man $y^2=-16y-130$ und daher $y=-8\pm\sqrt{-66}$; also sind die beiden andern Wurzeln unmöglich.

Antwort. Die beiden gesuchten Zahlen sind demnach 14 und 26, deren Product 364 mit ihrer Summe 40 multiplicirt 14560 giebt.

166. II. Aufgabe. Suche zwei Zahlen, deren Differenz 18 ist und die auch so beschaffen sind, daß, wenn man ihre Summe mit der Differenz ihrer Cuben multiplicirt, 275184 herauskommt. Welche Zahlen sind es?

Die kleinere Zahl sei x, so ist die größere $x+18$, der Cubus der kleinern aber x^3 und der Cubus der größern $=x^3+54x^2+972x+5832$, also die Differenz derselben $54x^2+972x+5832=54(x^2+18x+108)$, welche mit der Summe der Zahlen $2x+18=2(x+9)$ multiplicirt werden soll; das Product ist aber $108(x^3+27x^2+270x+972)=275184$; man dividire durch 108, so kommt $x^3 + 27x^2 + 270x + 972 = 2548$ oder $x^3 + 27x^2 + 270x = 1576$. Die Theiler der Zahl 1576 sind 1, 2, 4, 8 ꝛc., von denen 1 und 2 zu klein, 4 aber für x gesetzt dieser Gleichung ein Genüge leistet; wollte man die beiden übrigen Wurzeln finden, so müßte man die Gleichung durch $x - 4$ wie folgt dividiren:

$$
\begin{array}{l}
x - 4)\; x^3 + 27x^2 + 270x - 1576\; (x^2 + 31x + 394 \\
\qquad\quad \underline{x^3 - 4x^2} \\
\qquad\qquad\quad 31x^2 + 270x \\
\qquad\qquad\quad \underline{31x^2 - 124x} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad 394x - 1576 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad \underline{394x - 1576} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

Aus dem Quotienten erhält man daher $x^2 = -31x - 394$ und daraus wird $x = -\frac{31}{2} \pm \sqrt{(\frac{961}{4} - \frac{1576}{4})}$, welche beide Wurzeln imaginär oder unmöglich sind.

Antwort. Also sind die gesuchten Zahlen 4 und 22.

167. III. **Aufgabe.** Suche zwei Zahlen, deren Differenz 720 ist, und die auch so beschaffen sind, daß die Quadratwurzel der größern Zahl multiplicirt mit der kleinern Zahl 20736 giebt. Welche Zahlen sind es?

Es sei die kleinere $= x$, so ist die größere $x + 720$ und soll sein $x\sqrt{(x + 720)} = 20736 = 8 . 8 . 4 . 81$. Nun nehme man beiderseits die Quadrate, so wird:
$x^2 (x + 720) = x^3 + 720x^2 = 8^2 . 8^2 . 4^2 . 81^2$.
Man setze $x = 8y$,
so wird $8^3y^3 + 720 . 8^2y^2 = 8^2 . 8^2 . 4^2 . 81^2$.
Durch 8^3 dividirt, wird $y^3 + 90y^2 = 8 . 4^2 . 81^2$.
Es sei nun $y = 2z$,
so wird $8z^3 + 4 . 90z^2 = 8 . 4^2 . 81^2$.
Durch 8 dividirt, wird $z^3 + 45z^2 = 4^2 . 81^2$.
Man setze ferner $z = 9u$,
so wird $9^3u^3 + 45 . 9^2u^2 = 4^2 . 9^4$.
Durch 9^3 dividirt wird $u^3 + 5u^2 = 4^2 . 9$ oder $u^2 (u + 5) = 16 . 9 = 144$. Hier sieht man offenbar, daß $u = 4$;

dann wird $u^2 = 16$ und $u + 5 = 9$. Da nun $u = 4$, so ist $z = 36$, $y = 72$ und $x = 576$, welches die kleinere Zahl war; die größere aber ist 1296, wovon die Quadratwurzel 36, welche mit der kleineren Zahl 576 multiplicirt, 20736 giebt.

168. **Anmerkung.** Diese Aufgabe kann bequemer in folgender Art aufgelöst werden. Weil die größere Zahl ein Quadrat sein muß, indem sonst ihre Wurzel mit der kleinern multiplicirt nicht die gegebene Zahl hervorbringen könnte, sei die größere Zahl x^2, die kleinere also $x^2 - 720$, welche mit der Quadratwurzel jener, also mit x multiplicirt $x^3 - 720x = 20736 = 64 . 27 . 12$ giebt.
Man setze $x = 4y$,
so wird $64y^3 - 720 . 4y = 64 . 27 . 12$.
Durch 64 dividirt, wird $y^3 - 45y = 27 . 12$.
Man setze ferner $y = 3z$,
so wird $27z^3 - 135z = 27 . 12$.
Durch 27 dividirt, wird $z^3 - 5z = 12$ oder $z^3 - 5z - 12 = 0$.
Die Theiler von 12 sind 1, 2, 3, 4, 6, 12. Von diesen sind 1 und 2 zu klein, setzt man aber $z = 3$, so kommt $27 - 15 - 12 = 0$; daher ist $z = 3$, $y = 9$ und $x = 36$. Also ist die größere Zahl $x^2 = 1296$ und die kleinere $x^2 - 720 = 576$, wie vorher angegeben.

169. IV. **Aufgabe.** Es giebt 2 Zahlen, deren Differenz 12 ist. Wenn man diese Differenz multiplizirt mit der Summe ihrer Cuben, kommt 102144 heraus. Welche Zahlen sind es?

Es sei die kleinere x, so ist die größere $x + 12$. Der Cubus der ersteren ist x^3, der der zweiten aber $x^3 + 36x^2 + 432x + 1728$; die Summe derselben mit 12 multiplicirt giebt $12 (2x^3 + 36x^2 + 432x + 1728) = 102144$; durch 12 dividirt wird $2x^3 + 36x^2 + 432x + 1728 = 8512$; durch 2 dividirt giebt $x^3 + 18x^2 + 216x + 864 = 4256$ oder $x^3 + 18x^2 + 216x = 3392 = 8 . 8 . 53$. Man setze

$x = 2y$ und dividire sogleich durch 8, so wird $y^3 + 9y^2 + 54y = 8 . 53 = 424$.

Die Theiler des letzten Gliedes sind 1, 2, 4, 8, 53 ꝛc., von denen 1 und 2 zu klein sind. Setzt man aber $y = 4$, so kommt $64 + 144 + 216 = 424$. Also ist $y = 4$ und $x = 8$; daher sind die beiden Zahlen 8 und 20.

170. V. **Aufgabe.** Einige Personen bilden eine Gesellschaft. Jeder legt zehnmal so viel Thaler ein, als es Personen sind. Sie gewinnen je mit 100 Thalern 6 Thaler mehr als ihrer sind. Nun stellt sich heraus, daß der Gewinn zusammen 392 Thaler beträgt. Aus wie viel Personen bestand die Gesellschaft?

Man setze, es seien x Personen in der Gesellschaft gewesen, so legt einer 10x Thaler ein, alle aber legen $10x^2$ Thaler ein, und gewinnen mit 100 Thalern 6 Thaler mehr als ihrer sind; also mit 100 Thalern gewinnen sie $x + 6$ Thaler und mit dem ganzen Capital gewinnen sie zusammen $\frac{x^3 + 6x^2}{10} = 392$. Mit 10 multiplicirt kommt $x^3 + 6x^2 = 3920$.
Setzt man nun $x = 2y$,
so erhält man $8y^3 + 24y^2 = 3920$,
welches durch 8 dividirt $y^3 + 3y^2 = 490$ giebt.
Die Theiler des letzten Gliedes sind 1, 2, 5, 7, 10 ꝛc., von denen 1, 2 und 5 zu klein sind.
Setzt man aber $y = 7$, so kommt $343 + 147 = 490$, also ist $y = 7$ und $x = 14$.

Antwort. In der Gesellschaft sind 14 Personen gewesen, und jeder hat 140 Thaler eingelegt.

171. VI. **Aufgabe.** Einige Kaufleute haben zusammen ein Capital von 8240 Rthlr., dazu legt jeder noch 40 mal so viel Rthlr. als der Kaufleute sind. Mit dieser ganzen Summe gewinnen sie so viel Procent als die Zahl der Kaufleute beträgt; hierauf theilen sie den Gewinn, und da zeigt es sich, daß, nachdem jeder 10 mal so viel Rthlr.

genommen als ihre Personenzahl beträgt, noch 224 Rthlr. übrig bleiben. Wie viel Kaufleute sind es gewesen?

Die Zahl der Gesellschafter sei $= x$, so legt jeder noch 40x Rthlr. zu dem Capital von 8240 Rthlr.; alle zusammen legen also dazu noch $40x^2$ Rthlr., also war die ganze Summe $40x^2 + 8240$. Mit dieser gewinnen sie x Procent, daher wird der ganze Gewinn sein:

$$\frac{40x^3}{100} + \frac{8240x}{100} = \frac{4}{10}x^3 + \frac{824x}{10} = \frac{2}{5}x^3 + \frac{412x}{5}.$$

Hievon nimmt nun jeder 10x Rthlr. und also alle zusammen $10x^2$ Rthlr. und alsdann bleiben noch 224 Rthlr. übrig. Hieraus geht hervor, daß der Gewinn $10x^2 + 224$ betragen hat; woraus diese Gleichung entsteht: $\frac{2}{5}x^3 + \frac{412x}{5} = 10x^2 + 224$, welche mit 5 multiplicirt und durch 2 dividirt, wird $x^3 + 206x = 25x^2 + 560$ oder $x^3 - 25x^2 + 206x - 560 = 0$. Doch um zu probiren, wird die erste Form bequemer sein. Die Theiler des letzten Gliedes sind: 1, 2, 4, 5, 7, 8, 10, 14, 16 ꝛc., welche positiv genommen werden müssen, weil in der letzten Gleichung drei Abwechselungen der Zeichen vorkommen, woraus man sicher schließen kann, daß alle drei Wurzeln positiv sind (siehe 163). Probirt man nun mit $x = 1$ oder $x = 2$, so ist offenbar, daß der erste Theil viel kleiner wird als der zweite. Wir wollen also mit den folgenden probiren:
wenn $x = 4$, so wird $64 + 824 = 400 + 560$.
Dies trifft nicht zu.
Wenn $x = 5$, so wird $125 + 1030 = 625 + 560$;
dies trifft auch nicht zu.
Wenn $x = 7$, so wird $343 + 1442 = 1225 + 560$,
dies trifft genau zu. Daher ist $x = 7$ eine Wurzel unserer Gleichung. Um die beiden andern zu finden, theile man die letzte Form durch $x - 7$ wie folgt:

$$\begin{array}{l} x - 7)\, x^3 - 25x^2 + 206x - 560\, (x^2 - 18x + 80 \\ \quad\;\; \underline{x^3 - \;\, 7x^2} \\ \qquad\;\; - 18x^2 + 206x \\ \qquad\;\; \underline{- 18x^2 + 126x} \\ \qquad\qquad\qquad\;\; 80x - 560 \\ \qquad\qquad\qquad\;\; \underline{80x - 560} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\;\; 0 \end{array}$$

Man setze also den Quotienten gleich 0, so hat man $x^2 - 18x + 80 = 0$ oder $x^2 = 18x - 80$, daher $x = 9 \pm 1$. Also sind die beiden andern Wurzeln $x = 8$ und $x = 10$.

Antwort. Diese Aufgabe hat also drei Auflösungen. Nach der ersten war die Zahl der Kaufleute 7, nach der zweiten war dieselbe 8, und nach der dritten 10, wie dies die von allen hier beigefügte Probe zeigt.

	I.	II.	III.
Zahl der Kaufleute	7	8	10
Jeder legt ein $40x$	280	320	400
Alle zusammen legen ein $40x^2$	1960	2560	4000
Das alte Capital war . . .	8240	8240	8240
Das ganze Capital ist $40x^2 + 8240$	10200	10800	12240
Mit demselben wird gewonnen so viel Procent als Kaufleute sind	714	864	1224
Davon nimmt jeder weg $10x$.	70	80	100
Also alle zusammen $10x^2$ . .	490	640	1000
Bleibt also noch übrig . . .	224	224	224

Kapitel 12.

Von der Regel des Cardanus oder des Scipio Ferreo.

172. Wenn eine cubische Gleichung auf ganze Zahlen gebracht ist, wie oben gezeigt worden, und kein Theiler des letzten Gliedes eine Wurzel der Gleichung ist, so ist dieses ein sicheres Zeichen, daß die Gleichung keine Wurzel weder

in ganzen Zahlen noch auch in Brüchen hat. Dies wird in folgender Art erwiesen.

Es sei die Gleichung $x^3 - ax^2 + bx - c = 0$, wo a, b und c ganze Zahlen sind. Wollte man z. B. setzen $x = \frac{3}{2}$, so kommt $\frac{27}{8} - \frac{9}{4}a + \frac{3}{2}b - c$. Hier hat nun das erste Glied allein 8 zum Nenner. Die übrigen sind nur durch 4 und 2 getheilt oder ganze Zahlen, welche also mit dem ersten nicht 0 werden können; und dieses gilt auch von allen andern Brüchen.

173. Da nun in diesen Fällen die Wurzeln der Gleichung weder ganze Zahlen noch Brüche sind, so sind dieselben irrational, und auch sogar oft imaginär. Die Art jedoch, wie dieselben ausgedrückt werden sollen, und was darin für Wurzelzeichen vorkommen, ist eine Sache von großer Wichtigkeit, und das zum Ziele führende Verfahren, das Cardanus erfunden, verdient sorgfältige Erörterung.

174. Man muß zu diesem Behufe die Natur eines Cubus, dessen Wurzel ein Binomium ist, genauer in Erwägung ziehen.

Es sei demnach die Wurzel $a + b$, so ist der Cubus davon $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$, welche erstlich aus dem Cubus eines jeden Theils besteht und außer denselben noch zwei Mittelglieder enthält, nämlich $3a^2b + 3ab^2$, welche beide $3ab$ zum Factor haben; der andere Factor aber ist $a + b$. Denn $3ab$ mit $a + b$ multiplicirt, giebt $3a^2b + 3ab^2$. Diese beiden Glieder enthalten also das dreifache Product der beiden Theile a und b mit ihrer Summe multiplicirt.

175. Man setze nun, es sei $x = a + b$ und nehme beiderseits den Cubus, so wird $x^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a + b)$. Da nun $a + b = x$ ist, so hat man diese cubische Gleichung: $x^3 = a^3 + b^3 + 3abx$ oder $x^3 = 3abx + a^3 + b^3$, von welcher wir wissen, daß eine Wurzel $x = a + b$ sein muß. So oft demnach eine solche Gleichung vorkommt, können wir eine Wurzel davon angeben.

Es sei z. B. $a = 2$ und $b = 3$, so bekommt man diese Gleichung: $x^3 = 18x + 35$, von welcher wir gewiß wissen, daß $x = 5$ eine Wurzel ist.

176. Man setze nun ferner $a^3 = p$ und $b^3 = q$, so wird $a = \sqrt[3]{p}$ und $b = \sqrt[3]{q}$, folglich $ab = \sqrt[3]{pq}$; wenn daher diese cubische Gleichung vorkommt $x^3 = 3x\sqrt[3]{pq} + p + q$, so ist eine Wurzel davon $\sqrt[3]{p} + \sqrt[3]{q}$.

Man kann aber p und q immer derartig bestimmen, daß sowohl $3\sqrt[3]{pq}$ als auch $p + q$ jeder gegebenen Zahl gleich wird, wodurch man im Stande ist, jede cubische Gleichung dieser Art aufzulösen.

177. Es sei daher diese allgemeine cubische Gleichung gegeben: $x^3 = fx + g$. Hier muß also f verglichen werden mit $3\sqrt[3]{pq}$, und g mit $p + q$; oder man muß p und q so bestimmen, daß $3\sqrt[3]{pq}$ der Zahl f, und $p + q$ der Zahl g gleich werde, und alsdann wissen wir, daß eine Wurzel unserer Gleichung $x = \sqrt[3]{p} + \sqrt[3]{q}$ sein wird.

178. Man hat also diese beiden Gleichungen aufzulösen: I. $3\sqrt[3]{pq} = f$ und II. $p + q = g$. Aus der ersten hat man $\sqrt[3]{pq} = \frac{1}{3}f$ und $pq = \frac{f^3}{27} = \frac{1}{27}f^3$ und $4pq = \frac{4}{27}f^3$. Die andere Gleichung quadrire man, so kommt $p^2 + 2pq + q^2 = g^2$; davon subtrahire man $4pq = \frac{4}{27}f^3$, so wird $p^2 - 2pq + q^2 = g^2 - \frac{4}{27}f^3$, woraus die Quadratwurzel gezogen giebt $p - q = \sqrt{(g^2 - \frac{4}{27}f^3)}$. Da nun $p + q = g$, so wird $2p = g + \sqrt{(g^2 - \frac{4}{27}f^3)}$ und $2g = g - \sqrt{(g^2 - \frac{4}{27}f^3)}$. Daher erhalten wir $p = \frac{g + \sqrt{(g^2 - \frac{1}{27}f^3)}}{2}$ und $q = \frac{g - \sqrt{(g^2 - \frac{4}{27}f^3)}}{2}$.

179. Wenn also eine solche cubische Gleichung vorkommt $x^3 = fx + g$, die Zahlen f und g mögen beschaffen sein wie sie wollen, so ist eine Wurzel derselben stets

$$x = \sqrt[3]{\frac{g + \sqrt{(g^2 - \frac{4}{27}f^3)}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{g - \sqrt{(g^2 - \frac{4}{27}f^3)}}{2}}.$$

Hieraus ersieht man, daß diese Irrationalität nicht nur das Quadratwurzel-Zeichen sondern auch das cubische in sich faßt; und diese Formel ist es, welche die Regel des Cardanus genannt zu werden pflegt.

180. Wir wollen dieselbe mit einigen Beispielen erläutern:

Es sei $x^3 = 6x + 9$, so ist hier $f = 6$ und $g = 9$, also $g^2 = 81$, $f^3 = 216$ und $\frac{4}{27}f^3 = 32$. Daher $g^2 - \frac{4}{27}f^3 = 49$ und $\sqrt{(g^2 - \frac{4}{27}f^3)} = 7$; daher wird von der gegebenen Gleichung die Wurzel sein $x = \sqrt[3]{\frac{9 + 7}{2}} + \sqrt[3]{\frac{9 - 7}{2}}$, das ist $x = \sqrt[3]{\frac{16}{2}} + \sqrt[3]{1} = \sqrt[3]{8} + \sqrt[3]{1}$ oder $x = 2 + 1 = 3$. Also ist $x = 3$ eine Wurzel der gegebenen Gleichung.

181. Es sei ferner diese Gleichung gegeben: $x^3 = 3x + 2$, so wird $f = 3$ und $g = 2$, also $g^2 = 4$, $f^3 = 27$ und $\frac{4}{27}f^3 = 4$; folglich die Quadratwurzel aus $g^2 - \frac{4}{27}f^3 = 0$; daher eine Wurzel $x = \sqrt[3]{\frac{2 + 0}{2}} + \sqrt[3]{\frac{2 - 0}{2}} = 1 + 1 = 2$ sein wird.

182. Wenn aber auch eine solche Gleichung in der That eine rationale Wurzel hat, so geschieht es doch oft, daß dieselbe durch diese Regel nicht gefunden wird, ob gleich sie darin steckt.

Es sei die Gleichung $x^3 = 6x + 40$ gegeben, wo $x = 4$ eine Wurzel ist. Hier ist nun $f = 6$ und $g = 40$, ferner $g^2 = 1600$ und $\frac{4}{27}f^3 = 32$, also $g^2 - \frac{4}{27}f^3 = 1568$ und $\sqrt{(g^2 - \frac{4}{27}f^3)} = \sqrt{1568} = \sqrt{4 . 4 . 49 . 2} = 28\sqrt{2}$; folglich ist eine Wurzel $x = \sqrt[3]{\frac{40 + 28\sqrt{2}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{40 - 28\sqrt{2}}{2}}$ oder $x = \sqrt[3]{(20 + 14\sqrt{2})} + \sqrt[3]{(20 - 14\sqrt{2})}$, welche Formel wirklich 4 ergiebt, obwohl dies nicht sofort erkennbar ist.

Denn da der Cubus von $2 + \sqrt{2} = 20 + 14\sqrt{2}$, ist, so ist umgekehrt die Cubikwurzel aus $20 + 14\sqrt{2}$ gleich $2 + \sqrt{2}$, und eben so auch $\sqrt[3]{(20 - 14\sqrt{2})} = 2 - \sqrt{2}$; hieraus wird unsere Wurzel $x = 2 + \sqrt{2} + 2 - \sqrt{2} = 4$.

183. Man kann gegen diese Regel einwenden, daß dieselbe sich nicht auf alle cubische Gleichungen erstrecke, weil darin nicht das Quadrat von x vorkommt, oder weil darin das zweite Glied fehlt. Es ist aber zu bemerken, daß jede vollständige Gleichung stets in eine andere verwandelt werden kann, in der das zweite Glied fehlt, und auf welche folglich diese Regel angewandt werden kann. Um dieses zu zeigen, sei die vollständige cubische Gleichung gegeben: $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$. Man nehme nun den dritten Theil der Zahl 6 im zweiten Gliede und setze $x - 2 = y$, so wird $x = y + 2$, und die übrige Rechnung gestaltet sich wie folgt. Da $x = y + 2$, $x^2 = y^2 + 4y + 4$ und $x^3 = y^3 + 6y^2 + 12y + 8$, so ist

$$\begin{array}{rl}
x^3 = & y^3 + 6y^2 + 12y + 8 \\
-6x^2 = & \quad\; - 6y^2 - 24y - 24 \\
+11x = & \qquad\qquad + 11y + 22 \\
-6 = & \qquad\qquad\qquad\; - 6 \\
\hline
x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = & y^3 \qquad\quad - y
\end{array}$$

Daher erhalten wir die Gleichung $y^3 - y = 0$, deren Auflösung sogleich in die Augen fällt. Denn nach den Factoren hat man $y(y^2 - 1) = y(y + 1)(y - 1) = 0$; setzt man nun jeden Factor gleich 0, so bekommt man:

$$\text{I.}\left\{\begin{array}{l} y = 0, \\ x = 2, \end{array}\right. \quad \text{II.}\left\{\begin{array}{l} y = -1, \\ x = 1, \end{array}\right. \quad \text{III.}\left\{\begin{array}{l} y = 1, \\ x = 3, \end{array}\right.$$

welches die drei schon oben gefundenen Wurzeln sind.

184. Es sei nun diese allgemeine cubische Gleichung gegeben: $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$, aus welcher das zweite Glied weggebracht werden soll.

Zu diesem Zwecke setze man zu x den dritten Theil der Zahl des zweiten Gliedes mit ihrem Zeichen, und schreibe

dafür einen neuen Buchstaben, z. B. y; dieser Regel zufolge werden wir haben $x + \frac{1}{3}a = y$ und also $x = y - \frac{1}{3}a$, woraus die folgende Rechnung entsteht:

$x = y - \frac{1}{3}a$ und daher $x^2 = y^2 - \frac{2}{3}ay + \frac{1}{9}a^2$; ferner $x^3 = y^3 - ay^2 + \frac{1}{3}a^2y - \frac{1}{27}a^3$; also

$$\begin{array}{rl}
x^3 = & y^3 - ay^2 + \frac{1}{3}a^2y - \frac{1}{27}a^3 \\
ax^2 = & \quad\;\; + ay^2 - \frac{2}{3}a^2y + \frac{1}{9}a^3 \\
bx = & \qquad\qquad + by \;\; - \frac{1}{3}ab \\
c = & \qquad\qquad\qquad\;\; + c \\
\hline
\multicolumn{2}{c}{y^3 - (\frac{1}{3}a^2 - b)\,y + \frac{2}{27}a^3 - \frac{1}{3}ab + c = 0}
\end{array}$$

in welcher Gleichung das zweite Glied fehlt.

185. Nun kann man auch des Cardanus Regel leicht auf diesen Fall anwenden. Denn da wir oben die Gleichung hatten $x^3 = fx + g$ oder $x^3 - fx - g = 0$, so wird für unsern Fall $f = \frac{1}{3}a^2 - b$, und $g = -\frac{2}{27}a^3 + \frac{1}{3}ab + c$. Aus diesen für die Buchstaben f und g gefundenen Werthen erhalten wir wie oben:

$$y = \sqrt[3]{\frac{g + \sqrt{(g^2 - \frac{4}{27}f^3)}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{g - \sqrt{(g^2 - \frac{4}{27}f^3)}}{2}}$$

und da in solcher Art y gefunden worden, so werden wir für die gegebene Gleichung $x = y - \frac{1}{3}a$ haben.

186. Mit Hülfe dieser Veränderung sind wir nun im Stande, die Wurzeln aller cubischen Gleichungen zu finden, welches wir durch folgendes Beispiel zeigen wollen. Es sei z. B. die gegebene Gleichung folgende: $x^3 - 6x^2 + 13x - 12 = 0$. Um hier das zweite Glied wegzubringen, setze man $x - 2 = y$, so wird $x = y + 2$, $x^2 = y^2 + 4y + 4$, ferner $x^3 = y^3 + 6y^2 + 12y + 8$, also

$$\begin{array}{rl}
x^3 = & y^3 + 6y^2 + 12y + 8 \\
-6x^2 = & \quad\; - 6y^2 - 24y - 24 \\
+13x = & \qquad\qquad + 13y + 26 \\
-12 = & \qquad\qquad\qquad - 12 \\
\hline
\multicolumn{2}{c}{y^3 + y - 2 = 0}
\end{array}$$

oder $y^3 = -y + 2$, welche Gleichung, mit der Formel $x^3 =$

$fx + g$ verglichen, $f = -1$, $g = 2$; also $g^2 = 4$, und $\frac{4}{27}f^3 = -\frac{4}{27}$ giebt.

Also $g^2 - \frac{4}{27}f^3 = 4 + \frac{4}{27} = \frac{112}{27}$; daher erhalten wir $\sqrt{(g^2 - \frac{4}{27}f^3)} = \sqrt{\frac{112}{27}} = \frac{4\sqrt{21}}{9}$, woraus folgt

$$y = \sqrt[3]{\left(\frac{2 + \frac{4\sqrt{21}}{9}}{2}\right)} + \sqrt[3]{\left(\frac{2 - \frac{4\sqrt{21}}{9}}{2}\right)} \text{ oder}$$

$y = \sqrt[3]{(1 + \frac{2\sqrt{21}}{9})} + \sqrt[3]{(1 - \frac{2\sqrt{21}}{9})}$, oder $y = \sqrt[3]{\left(\frac{9+2\sqrt{2}}{9}\right)} + \sqrt[3]{\left(\frac{9-2\sqrt{21}}{9}\right)}$, oder $y = \sqrt[3]{\left(\frac{27+6\sqrt{21}}{27}\right)} + \sqrt[3]{\left(\frac{27-6\sqrt{21}}{27}\right)}$, oder $y = \frac{1}{3}\sqrt[3]{(27 + 6\sqrt{21})} + \frac{1}{3}\sqrt[3]{(27 - 6\sqrt{21})}$; und alsdann bekommt man $x = y + 2$.

187. Bei Auflösung dieses Beispiels sind wir auf eine doppelte Irrationalität gerathen; gleichwohl muß man daraus nicht schließen, daß die Wurzel schlechterdings irrational sei, indem es sich glücklicherweise fügen könnte, daß die Binomie $27 \pm 6\sqrt{21}$ wirkliche Cuben wären. Dieses trifft auch hier zu, denn da der Cubus von $\frac{3 + \sqrt{21}}{2}$ dem $\frac{216 + 48\sqrt{21}}{8} = 27 + 6\sqrt{21}$ gleich ist, so ist die Cubikwurzel aus $27 + 6\sqrt{21}$ gleich $\frac{3 + \sqrt{21}}{2}$ und die Cubikwurzel aus $27 - 6\sqrt{21}$ gleich $\frac{3 - \sqrt{21}}{2}$. Hieraus also wird der obige Werth für y sein $y = \frac{1}{3}\left(\frac{3 + \sqrt{21}}{2}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{3 - \sqrt{21}}{2}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$. Da nun $y = 1$, so bekommen wir $x = 3$, welches eine Wurzel der gegebenen Gleichung ist. Wollte man die beiden andern auch finden, so müßte man die Gleichung durch $x - 3$ wie folgt dividiren:

$$\begin{array}{rl}
x - 3)\; & x^3 - 6x^2 + 13x - 12\;(x^2 - 3x + 4 \\
& \underline{x^3 - 3x^2} \\
& \quad\; -3x^2 + 13x \\
& \quad\; \underline{-3x^2 + \;\,9x} \\
& \qquad\qquad + 4x - 12 \\
& \qquad\qquad \underline{+ 4x - 12} \\
& \qquad\qquad\qquad 0
\end{array}$$

und diesen Quotienten $x^2 - 3x + 4 = 0$ setzen, also daß $x^2 = 3x - 4$ und $x = \frac{3}{2} \pm \sqrt{(\frac{9}{4} - \frac{16}{4})} = \frac{3}{2} \pm \sqrt{-\frac{7}{4}}$, das ist $x = \frac{3 \pm \sqrt{-7}}{2}$. Dieses sind nun die beiden andern Wurzeln, welche imaginär sind.

188. Es war aber hier ein bloßer Zufall, daß man aus den gefundenen Binomien wirklich die Cubikwurzel ausziehen konnte. Das geschieht auch nur dann, wenn die Gleichung eine Rationalwurzel hat, die daher weit leichter nach den Regeln des vorigen Kapitels hätte gefunden werden können. Wenn aber keine Rationalwurzel vorhanden ist, so kann dieselbe auch nicht anders als auf diese Art nach der Regel des Cardanus ausgedrückt werden, so daß alsdann keine weitere Abkürzung möglich ist, wie z. B. in dieser Gleichung geschieht $x^3 = 6x + 4$, wo $f = 6$ und $g = 4$. Daher gefunden wird $x = \sqrt[3]{(2 + 2\sqrt{-1})} + \sqrt[3]{(2 - 2\sqrt{-1})}$, was sich nicht anders ausdrücken läßt.

Kapitel 13.

Von der Auflösung der Gleichungen des vierten Grades, welche auch biquadratische Gleichungen genannt werden.

189. Wenn die höchste Potenz der Zahl x bis zum vierten Grade hinauf steigt, so werden solche Gleichungen des vierten Grades auch **biquadratische** genannt, deren allgemeine Form sein wird: $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$. Von diesen müssen nun zuerst die sogenannten **reinen biquadratischen Gleichungen** betrachtet werden, deren Form $x^4 = f$ ist, woraus man sogleich die Wurzel findet, wenn

man beiderseits die Wurzel des vierten Grades auszieht, da man dann erhält $x = \sqrt[4]{f}$.

190. Da x^4 das Quadrat ist von x^2, so wird die Rechnung sehr erleichtert, wenn man zuerst nur die Quadratwurzel auszieht, da man dann bekommt $x^2 = \sqrt{f}$; alsdann zieht man nochmals die Quadratwurzel aus, so bekommt man $x = \sqrt{\sqrt{f}}$, also daß $\sqrt[4]{f}$ nichts anders ist, als die Quadratwurzel aus der Quadratwurzel von f.

Hätte man z. B. die Gleichung $x^4 = 2401$, so findet man daraus erstens $x^2 = 49$ und ferner $x = 7$.

191. In solcher Art aber findet man nur eine Wurzel, und da die cubischen Gleichungen immer drei Wurzeln haben, so ist kein Zweifel, daß hier vier Wurzeln vorhanden sind, welche auch auf diese Art herausgebracht werden können. Denn da aus dem letzten Beispiele nicht nur folgt $x^2 = 49$, sondern auch $x^2 = -49$, so erhalten wir aus jenem diese zwei Wurzeln $x = 7$, $x = -7$, aus diesem aber bekommen wir ebenfalls: $x = \sqrt{-49} = 7\sqrt{-1}$ und $x = -\sqrt{-49} = -7\sqrt{-1}$, welches die vier biquadratischen Wurzeln aus 2401 sind. Und so verhält es sich auch mit allen andern Zahlen.

192. Nach diesen reinen Gleichungen folgen der Ordnung nach diejenigen, in welchen das zweite und vierte Glied fehlt, oder die diese Form haben: $x^4 + fx^2 + g = 0$, welche nach der Regel der quadratischen Gleichungen aufgelöst werden können. Denn setzt man $x^2 = y$, so hat man $y^2 + fy + g = 0$, oder $y^2 = -fy - g$, woraus gefunden wird: $y = -\frac{1}{2}f \pm \sqrt{(\frac{1}{4}f^2 - g)} = \frac{-f \pm \sqrt{(f^2 - 4g)}}{2}$. Da nun $x^2 = y$, so wird daraus $x = \pm\sqrt{\frac{-f \pm \sqrt{(f^2 - 4g)}}{2}}$, wo die zweideutigen Zeichen $\pm$ alle vier Wurzeln angeben.

193. Kommen aber alle Glieder in der Gleichung vor,

so kann man dieselbe immer als ein Product von vier Factoren ansehen. Denn multiplicirt man diese vier Factoren mit einander $(x - p)(x - q)(x - r)(x - s)$, so findet man folgendes Product $x^4 - (p + q + r + s)x^3 + (pq + pr + ps + qr + qs + rs)x^2 - (pqr + pqs + prs + qrs)x + pqrs$, welche Formel nicht anders gleich 0 werden kann, als wenn einer von den obigen vier Factoren $= 0$ ist. Dieses kann demnach auf viererlei Art geschehen: I. wenn $x = p$, II. $x = q$, III. $x = r$, IV. $x = s$. Dies sind demnach die vier Wurzeln dieser Gleichung.

194. Betrachten wir diese Form etwas genauer, so finden wir, daß in dem zweiten Gliede die Summe aller vier Wurzeln vorkommt, welche mit $-x^3$ multiplicirt ist, im dritten Gliede befindet sich die Summe aller möglichen Producte von je zwei Wurzeln mit x^2 multiplicirt; im vierten Gliede sieht man die Summe der Producte von je drei Wurzeln, welche mit $-x$ multiplicirt ist, und endlich das fünfte und letzte Glied enthält das Product von allen vier Wurzeln mit einander multiplicirt.

195. Da das letzte Glied das Product aller Wurzeln enthält, so kann eine solche biquadratische Gleichung keine anderen Rationalwurzeln haben, als solche, welche zugleich Theiler des letzten Gliedes sind; daher man aus diesem Grunde alle Rationalwurzeln, wenn dergleichen vorhanden, leicht finden kann, wenn man für x nach und nach jeden Theiler des letzten Gliedes setzt und prüft, mit welchem der Gleichung Genüge geschehe. Hat man aber auch nur eine solche Wurzel gefunden, z. B. $x = p$, so braucht man nur die Gleichung, nachdem alle Glieder auf eine Seite gebracht worden, durch $x - p$ zu dividiren, und den Quotienten gleich 0 zu setzen. Dies wird eine cubische Gleichung geben, die nach den obigen Regeln weiter aufgelöst werden kann.

196. Hiezu aber ist nun unumgänglich erforderlich,

daß alle Glieder aus ganzen Zahlen bestehen, und daß das erste nur mit 1 multiplicirt sei. Kommen daher in einigen Gliedern Brüche vor, so müssen dieselben vorher weggeschafft werden, was jederzeit geschehen kann, wenn man für x schreibt y getheilt durch eine Zahl, welche die Nenner der Brüche in sich schließt.

Wenn z. B. diese Gleichung vorkäme: $x^4 - \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{3}x^2 + \frac{3}{4}x + \frac{1}{18} = 0$, so setze man, weil in den Nennern 2 und 3 nebst ihren Potenzen vorkommen, $x = \frac{y}{6}$, so wird $\frac{y^4}{6^4} - \frac{\frac{1}{2}y^3}{6^3} + \frac{\frac{1}{3}y^2}{6^2} - \frac{\frac{3}{4}y}{6} + \frac{1}{18} = 0$, welche mit 6^4 multiplicirt giebt $y^4 - 3y^3 + 12y^2 - 162y + 72 = 0$. Wollte man nun untersuchen, ob diese Gleichung Rationalwurzeln habe, so müßte man für y nach und nach die Theiler der Zahl 72 schreiben, um zu sehen, in welchen Fällen die Formel wirklich 0 wird.

197. Da aber die Wurzeln sowohl negativ als positiv sein können, so müßte man mit jedem Theiler zwei Proben anstellen, die erste, indem derselbe positiv, die andere, indem derselbe negativ genommen würde. Man hat aber auch hier wiederum zu bemerken, daß so oft die zwei Zeichen + und — mit einander abwechseln, die Gleichung eben so viel positive Wurzeln hat; so oft aber gleiche Zeichen auf einander folgen, eben so viel negative Wurzeln vorhanden sein müssen. Da nun in unserem Beispiel vier Abwechselungen vorkommen, und keine Folge, so sind alle Wurzeln positiv, und daher hat man nicht nöthig, einen Theiler des letzten Gliedes negativ zu nehmen.

198. Es sei z. B. die Gleichung gegeben: $x^4 + 2x^3 - 7x^2 - 8x + 12 = 0$. Hier kommen nun zwei Abwechselungen der Zeichen, und auch zwei Folgen vor, woraus man sicher schließen kann, daß diese Gleichung zwei positive und auch zwei negative Wurzeln haben muß, welche alle Theiler der Zahl 12 sein müssen. Da nun diese

Theiler 1, 2, 3, 4, 6, 12 sind, probire man erstens mit $x = +1$, so kommt wirklich 0 heraus, also ist eine Wurzel $x = 1$. Setzt man ferner $x = -1$, so kommt folgendes: $+1 - 2 - 7 + 8 + 12 = 21 - 9 = 12$, und daher giebt $x = -1$ keine Wurzel. Man setze ferner $x = 2$, so wird unsere Formel wieder $= 0$, und also $x = 2$ eine Wurzel; hingegen $x = -2$ geht nicht an. Setzt man weiter $x = 3$, so kommt $81 + 54 - 63 - 24 + 12 = 60$, geht also auch nicht an. Man setze aber $x = -3$, so kommt $81 - 54 - 63 + 24 + 12 = 0$. Folglich ist $x = -3$ eine Wurzel; eben so findet man auch, daß $x = -4$ eine Wurzel sein wird, also daß alle vier Wurzeln rational sind und sich also verhalten: I. $x = 1$, II. $x = 2$, III. $x = -3$, IV. $x = -4$, von welchen zwei positiv und zwei negativ sind, wie die obige Regel angiebt.

199. Wenn aber keine Wurzel rational ist, so läßt sich auch auf diesem Wege keine finden. Daher hat man andere Mittel ersonnen, um in diesen Fällen die Irrationalwurzeln ausdrücken zu können. Zwei verschiedene Wege sind entdeckt worden, um zur Kenntniß solcher Wurzeln zu gelangen, die biquadratische Gleichung mag auch beschaffen sein, wie sie wolle.

Ehe wir aber diese allgemeinen Wege erörtern, wird es dienlich sein, einige besondere Fälle aufzulösen, weil man oft ähnlich verfahren kann.

200. Wenn die Gleichung so beschaffen ist, daß die Zahlen in den Gliedern rückwärts eben so fortgehen, als vorwärts, wie in dieser Gleichung geschieht: $x^4 + mx^3 + nx^2 + mx + 1 = 0$, welche noch etwas allgemeiner also dargestellt werden kann: $x^4 + max^3 + na^2x^2 + ma^3x + a^4 = 0$, so kann eine solche Form stets als ein Product zweier Factoren, welche quadratische Gleichungen sind, angesehen werden, die sich leicht bestimmen lassen. Denn man setze für diese Gleichung folgendes Product $(x^2 + pax + a^2)(x^2 +$

$qax + a^2) = 0$, wo p und q gesucht werden müssen, daß die obige Gleichung herauskomme. Es wird aber durch die wirkliche Multiplication gefunden: $x^4 + (p + q)\,ax^3 + (pq + 2)\,a^2x^2 + (p + q)\,a^3x + a^4 = 0$; damit also diese Gleichung der gegebenen gleich sei, ist es nothwendig, I. daß $p + q = m$, und II. $pq + 2 = n$, folglich $pq = n - 2$ ist.

Die erstere quadrirt giebt $p^2 + 2pq + q^2 = m^2$, davon die andere viermal genommen, nämlich $4pq = 4n - 8$ subtrahirt, bleibt $p^2 - 2pq + q^2 = m^2 - 4n + 8$; davon ist die Quadratwurzel: $p - q = \sqrt{(m^2 - 4n + 8)}$. Da nun $p + q = m$, so erhalten wir durch die Addition $2p = m + \sqrt{(m^2 - 4n + 8)}$ oder $p = \frac{m + \sqrt{(m^2 - 4n + 8)}}{2}$; durch die Subtraction aber bekommen wir $2q = m - \sqrt{(m^2 - 4n + 8)}$ oder $q = \frac{m - \sqrt{(m^2 - 4n + 8)}}{2}$. Hat man nun p und q gefunden, so braucht man nur jeden der Factoren $= 0$ zu setzen, um daraus die Werthe von x zu finden; der erste giebt $x^2 + pax + a^2 = 0$ oder $x^2 = -pax - a^2$, woraus man findet $x = -\frac{pa}{2} \pm \sqrt{(\frac{p^2a^2}{4} - a^2)}$ oder $x = -\frac{pa}{2} \pm a\sqrt{(\frac{p^2}{4} - 1)}$ oder $x = -\frac{pa}{2} \pm \frac{1}{2}a\sqrt{(p^2 - 4)}$; der andere Factor giebt aber $x = -\frac{a^2}{2} \pm \frac{1}{2}a\sqrt{(q^2 - 4)}$ und also hat man die vier Wurzeln der gegebenen Gleichung.

201. Um dieses zu erläutern, sei die Gleichung gegeben $x^4 - 4x^3 - 3x^2 - 4x + 1 = 0$. Hier ist nun $a = 1$, $m = -4$, $n = -3$, daher $m^2 - 4n + 8 = 36$ und die Quadratwurzel daraus $= 6$; daher bekommen wir $p = -\frac{4 + 6}{2} = -5$ und $q = -\frac{4 - 6}{2} = 1$, woraus die vier Wurzeln sein werden: I. und II. $x = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{-3} = -\frac{1 \pm \sqrt{-3}}{2}$; und ferner die III. und IV. $x = \frac{5}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{21} =$

$\frac{5 \pm \sqrt{21}}{2}$. Also sind die vier Wurzeln der gegebenen Gleichung folgende:

$$\text{I. } x = \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2}, \quad \text{II. } x = \frac{-1 - \sqrt{-3}}{2},$$

$$\text{III. } x = \frac{5 + \sqrt{21}}{2}, \quad \text{IV. } x = \frac{5 - \sqrt{21}}{2},$$

von welchen die zwei ersten imaginär oder unmöglich, die beiden andern aber möglich sind, weil man $\sqrt{21}$ so genau angeben kann, als man will, indem man die Wurzel durch Decimalbrüche ausdrückt. Denn da 21 so viel als 21,00000000, so ziehe man daraus die Quadratwurzel wie folgt:

```
      21|00|00|00|00|4,5825
      16|
   85 |500
      |425
  908 |7500
      |7264
 9162 |23600
      |18324
91645 |527600
      |458225
        69375
```

Da nun $\sqrt{21} = 4,5825$, so ist die dritte Wurzel ziemlich genau $x = 4,7912$, und die vierte $x = 0,2087$, welche man leicht noch genauer hätte berechnen können.

Weil die vierte Wurzel dem Bruch $\frac{2}{10}$ oder $\frac{1}{5}$ ziemlich nahe kommt, so wird dieser Werth der Gleichung auch ziemlich genau Genüge leisten; man setze also $x = \frac{1}{5}$, so bekommt man $\frac{1}{625} - \frac{4}{125} - \frac{3}{25} - \frac{4}{5} + 1 = \frac{31}{625}$ und dieses sollte $= 0$ sein, welches ziemlich genau zutrifft.

202. Der zweite Fall, in dem eine ähnliche Auflösung stattfindet, ist den Zahlen nach dem vorigen gleich, nur daß das zweite und vierte Glied verschiedene Zeichen haben.

Eine solche Gleichung ist daher: $x^4 + max^3 + na^2x^2 - ma^3x^3 + a^4 = 0$, welche durch folgendes Product dargestellt werden kann: $(x^2 + pax - a^2)(x^2 + qax - a^2) = 0$. Denn durch die Multiplication bekommt man $x^4 + (p + q)\,ax^3 + (pq - 2)\,a^2x^2 - (p + q)\,a^3x + a^4$, welche mit der gegebenen identisch wird, wenn erstens $p + q = m$ und ferner $pq - 2 = n$ oder $pq = n + 2$; denn auf diese Art werden die vierten Glieder einander gleich sein. Man quadrire wie vorher die erste Gleichung, so hat man $p^2 + 2pq + q^2 = m^2$; davon subtrahire man die andere viermal genommen $4pq = 4n + 8$, so bekommt man $p^2 - 2pq + q^2 = m^2 - 4n - 8$, woraus die Quadratwurzel giebt: $p - q = \sqrt{(m^2 - 4n - 8)}$, und daher erhalten wir $p = \frac{m + \sqrt{(m^2 - 4n - 8)}}{2}$ und $q = \frac{m - \sqrt{(m^2 - 4n - 8)}}{2}$. Hat man nun p und q gefunden, so giebt der erste Factor diese zwei Wurzeln $x = -\frac{1}{2}pa \pm \frac{1}{2}a\sqrt{(p^2 + 4)}$ und der zweite Factor giebt diese: $x = -\frac{1}{2}qa \pm \frac{1}{2}a\sqrt{(q^2 + 4)}$ und also hat man die vier Wurzeln der gegebenen Gleichung.

203. Es sei z. B. diese Gleichung gegeben: $x^4 - 3 . 2x^3 + 3 . 8x + 16 = 0$; hier ist nun $a = 2$ und $m = -3$ und $n = 0$, daher $\sqrt{(m^2 - 4n - 8)} = 1$; folglich $p = \frac{-3 + 1}{2} = -1$, und $q = \frac{-3 - 1}{2} = -2$, woraus die zwei ersteren Wurzeln sein werden $x = 1 \pm \sqrt{5}$, und die zwei letzteren $x = 2 \pm \sqrt{8}$, so daß die vier gesuchten Wurzeln sein werden: I. $x = 1 + \sqrt{5}$, II. $x = 1 - \sqrt{5}$, III. $x = 2 + \sqrt{8}$, IV. $x = 2 - \sqrt{8}$, woraus die vier Factoren unserer Gleichung sich ergeben: $(x - 1 - \sqrt{5})(x - 1 + \sqrt{5})(x - 2 - \sqrt{8})(x - 2 + \sqrt{8})$, welche wirklich mit einander multiplicirt unsere Gleichung hervorbringen müssen. Denn der erste und zweite mit einander multiplicirt geben $x^2 - 2x - 4$ und die beiden andern geben $x^2 - 4x - 4$, welche zwei Producte wiederum mit einander

multiplicirt $x^4 - 6x^3 + 24x + 16$ geben, welches gerade die gegebene Gleichung ist.

Kapitel 14.

Von der Regel des Bombelli, die Auflösung der biquadratischen Gleichungen auf cubische zu bringen.

204. Da schon oben gezeigt worden, wie die cubischen Gleichungen durch Hülfe der Regel des Cardanus aufgelöst werden können, so kommt es hauptsächlich bei den biquadratischen Gleichungen darauf an, daß man die Auflösung derselben auf cubische Gleichungen zu bringen wisse. Denn ohne Hülfe der cubischen Gleichungen ist es nicht möglich, die biquadratischen auf allgemeine Art aufzulösen, weil, wenn man auch eine Wurzel gefunden, die übrigen Wurzeln die Lösung einer cubischen Gleichung erfordern. Hieraus erkennt man sogleich, daß auch die Gleichungen höherer Grade die Auflösung aller niedrigen voraussetzen.

205. Hiezu hat nun schon vor einigen 100 Jahren ein Italiener, Namens **Bombelli**, eine Regel gegeben, welche wir in diesem Kapitel vortragen wollen.

Es sei demnach die allgemeine biquadratische Gleichung gegeben $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, wo die Buchstaben a, b, c, d alle nur ersinnlichen Zahlen bedeuten können. Nun stelle man sich vor, daß diese Gleichung mit der folgenden identisch sei: $(x^2 + \frac{1}{2}ax + p)^2 - (qx + r)^2 = 0$, wo es nur darauf ankommt, die Buchstaben p, q und r so zu bestimmen, daß die gegebene Gleichung herauskommt. Bringt man nun diese letztere in Ordnung, so kommt heraus:

$$\begin{aligned} x^4 + ax^3 + \tfrac{1}{4}a^2x^2 &+ apx + p^2 \\ + 2px^2 &- 2qrx - r^2 \\ - q^2x^2 & \end{aligned}$$

Hier sind nun die zwei ersten Glieder mit denen unserer Gleichung schon identisch; für das dritte Glied muß man setzen $\frac{1}{4}a^2 + 2p - q^2 = b$, woraus man hat $q^2 = \frac{1}{4}a^2 + 2p - b$; für das vierte Glied muß man setzen $ap - 2qr = c$, woraus man hat $2qr = ap - c$; für das letzte Glied aber $p^2 - r^2 = d$, woraus $r^2 = p^2 - d$ wird. Aus diesen drei Gleichungen müssen nun die drei Buchstaben p, q und r bestimmt werden.

206. Um dieses auf die leichteste Art zu erreichen, nehme man die erste viermal, wodurch man erhält $4q^2 = a^2 + 8p - 4b$, diese multiplicire man mit der letzten Gleichung $r^2 = p^2 - d$, so bekommt man $4q^2r^2 = 8p^3 + (a^2 - 4b)p^2 - 8dp - d(a^2 - 4b)$; nun quadrire man die zweite Gleichung, woraus sich ergiebt $4q^2r^2 = a^2p^2 - 2acp + c^2$; wir haben also zweierlei Werthe für $4q^2r^2$, welche einander gleich gesetzt, diese Gleichung geben $8p^3 + (a^2 - 4b)p^2 - 8dp - d(a^2 - 4b) = a^2p^2 - 2acp + c^2$; und wenn alle Glieder auf eine Seite gebracht sind, ist dann $8p^3 - 4bp^2 + (2ac - 8d)p - a^2d + 4bd - c^2$, welches eine cubische Gleichung ist, aus der in jedem Fall der Werth von p nach den oben gegebenen Regeln bestimmt werden muß.

207. Hat man nun aus den gegebenen Zahlen a, b, c und d die drei Werthe des Buchstaben p gefunden, wozu es genügt, nur einen davon entdeckt zu haben, so erhält man daraus sogleich die beiden andern Buchstaben q und r. Denn aus der ersten Gleichung wird $q = \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 + 2p - b)}$ sein und aus der zweiten erhält man $r = \frac{ap - c}{2q}$. Wenn aber diese drei Buchstaben für jeden Fall gefunden worden sind, können daraus alle vier Wurzeln der gegebenen Gleichung in folgender Art bestimmt werden.

Da wir die gegebene Gleichung auf diese Form gebracht haben $(x^2 + \frac{1}{2}ax + p)^2 - (qx + r)^2 = 0$, so ist $(x^2 + \frac{1}{2}ax + p)^2 = (qx + r)^2$; und die Quadratwurzel davon $x^2 + \frac{1}{2}ax + p = qx + r$, oder auch $x^2 + \frac{1}{2}ax + p = -qx - r$. Die erstere giebt $x^2 = (q - \frac{1}{2}a)x - p + r$, woraus zwei Wurzeln gefunden werden; die übrigen zwei werden aber aus der andern gefunden, welche lautet $x^2 = -(q + \frac{1}{2}a)x - p - r$.

208. Um diese Regel mit einem Beispiel zu erläutern, sei diese Gleichung gegeben: $x^4 - 10x^3 + 35x^2 - 50x + 24 = 0$, welche mit unserer allgemeinen Formel verglichen giebt $a = -10$, $b = 35$, $c = -50$, $d = 24$, woraus für die Bestimmung des Buchstabens p folgende Gleichung entsteht: $8p^3 - 140p^2 + 808p - 1540 = 0$; welche durch 4 dividirt giebt $2p^3 - 35p^2 + 202d - 385 = 0$. Die Theiler der letzten Zahl sind 1, 5, 7, 11 ꝛc., von welchen 1 nicht angeht; setzt man aber $p = 5$, so kommt $250 - 875 + 1010 - 385 = 0$, folglich ist $p = 5$; will man auch setzen $p = 7$, so kommt $686 - 1715 + 1414 - 385 = 0$; also ist $p = 7$ die zweite Wurzel. Um die dritte zu finden, dividire man die Gleichung durch 2, so kommt $p^3 - \frac{35}{2}p^2 + 101p - \frac{385}{2} = 0$, und da die Zahl im zweiten Gliede $\frac{35}{2}$ die Summe aller drei Wurzeln ist, die beiden ersteren aber zusammen 12 machen, so muß die dritte sein $\frac{11}{2}$. Also haben wir alle drei Wurzeln. Es wäre aber genügend nur eine zu wissen, weil aus jeder die vier Wurzeln unserer biquadratischen Gleichung herauskommen müssen.

209. Um dieses zu zeigen, sei erstens $p = 5$, daraus wird alsdann $q = \sqrt{(25 + 10 - 35)} = 0$ und $r = \frac{-50 + 50}{0} = \frac{0}{0}$. Da nun hiedurch Nichts bestimmt wird, so nehme man die dritte Gleichung $r^2 = p^2 - d = 25 - 24 = 1$, und also $r = 1$; daher unsere beiden quadratischen Gleichungen sein werden:

I. $x^2 = 5x - 4$, II. $x^2 = 5x - 6$;

die erstere giebt nun diese zwei Wurzeln $x = \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4}}$, also $x = \frac{5 \pm 3}{2}$, folglich entweder $x = 4$, oder $x = 1$; die andere aber giebt $x = \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}}$; also $x = \frac{5 \pm 1}{2}$; daraus wird entweder $x = 3$ oder $x = 2$.

Will man aber setzen $p = 7$, so wird

$q = \sqrt{(25 + 14 - 35)} = 2$ und $r = \frac{-70 + 50}{4} = -5$, woraus diese zwei quadratischen Gleichungen entstehen: I. $x^2 = 7x - 12$, II. $x^2 = 3x - 2$; deren erstere giebt $x = \frac{7}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}}$, also $x = \frac{7 \pm 1}{2}$, daher $x = 4$ und $x = 3$; die zweite giebt diese Wurzel $x = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}}$, also $x = \frac{3 \pm 1}{2}$, daher $x = 2$ und $x = 1$, welches die vier Wurzeln sind, die schon vorher gefunden worden. Und eben dieselben folgen auch aus dem dritten Werth $p = \frac{11}{2}$; denn da wird $q = \sqrt{(25 + 11 - 35)} = 1$ und $r = \frac{-55 + 50}{2} = -\frac{5}{2}$, woraus die quadratischen Gleichungen hervorgehe:

I. $x^2 = 6x - 8$, II. $x^2 = 4x - 3$.

Aus der ersteren bekommt man $x = 3 \pm \sqrt{1}$, also $x = 4$ und $x = 2$; aus der zweiten aber $x = 2 \pm \sqrt{1}$, also $x = 3$ und $x = 1$, welches die schon gefundenen vier Wurzeln sind.

210. Es sei ferner die Gleichung gegeben $x^4 - 16x - 12 = 0$, in welcher $a = 0$, $b = 0$, $c = -16$, $d = -12$ ist; daher unsere cubische Gleichung sein wird $8p^3 + 96p - 256 = 0$, das ist $p^3 + 12p - 32 = 0$, welche Gleichung noch einfacher wird, wenn man setzt $p = 2t$; da wird nämlich $8t^3 + 24t - 32 = 0$ oder $t^3 + 3t - 4 = 0$. Die Theiler des letzten Gliedes sind 1, 2, 4, aus welchen $t = 1$ eine Wurzel ist, daraus wird $p = 2$ und ferner $q = \sqrt{4} = 2$ und $r = \frac{16}{4} = 4$. Daher sind die beiden quadratischen Gleichungen $x^2 = 2x + 2$ und $x^2 = -2x - 6$, wovon die Wurzeln sein werden $x = 1 \pm \sqrt{3}$ und $x = -1 \pm \sqrt{-5}$.

211. Um die bisherige Auflösung noch deutlicher zu machen, wollen wir dieselbe im folgenden Beispiel ganz wiederholen.

Es sei die Gleichung $x^4 - 6x^3 + 12x^2 - 12x + 4 = 0$ gegeben, welche in dieser Formel enthalten sein soll $(x^2 - 3x + p)^2 - (qx + r)^2 = 0$, wo im ersten Theil $-3x$ gesetzt worden, weil -3 die Hälfte der Zahl -6 im zweiten Glied der Gleichung ist; diese Form aber entwickelt giebt $x^4 - 6x^3 + (2p + 9 - q^2)x^2 - (6p + 2qr)x + p^2 - r^2 = 0$, mit dieser Form vergleicht man nun unsere Gleichung, so bekommt man: I. $2p + 9 - q^2 = 12$; II. $6p + 2qr = 12$, III. $p^2 - r^2 = 4$; aus der ersten erhalten wir $q^2 = 2p - 3$, aus der zweiten $2qr = 12 - 6p$ oder $qr = 6 - 3p$, aus der dritten $r^2 = p^2 - 4$. Nun multiplicire man r^2 und q^2 mit einander, so bekommt man $q^2r^2 = 2p^3 - 3p^2 - 8p + 12$. Quadrirt man aber den Werth von qr, so kommt $q^2r^2 = 36 - 36p + 9p^2$; daher erhalten wir diese Gleichung: $2p^3 - 3p^2 - 8p + 12 = 9p^2 - 36p + 36$, oder $2p^3 - 12p^2 + 28p - 24 = 0$, oder durch 2 dividirt diese $p^3 - 6p^2 + 14p - 12 = 0$, wovon die Wurzel ist $p = 2$; daraus wird $q^2 = 1$, $q = 1$ und $qr = r = 0$. Unsere Gleichung wird also sein: $(x^2 - 3x + 2)^2 = x^2$, daraus die Quadratwurzel $x^2 - 3x + 2 = \pm x$; gilt das obere Zeichen, so hat man $x^2 = 4x - 2$, für das untere Zeichen aber $x^2 = 2x - 2$; woraus diese vier Wurzeln gefunden werden: $x = 2 \pm \sqrt{2}$ und $x = 1 \pm \sqrt{-1}$.

Kapitel 15.

Von einer neuen Auflösung der biquadratischen Gleichungen.

212. Durch die obige Regel des Bombelli werden die biquadratischen Gleichungen durch Hülfe einer cubischen aufgelöst. Seit jener Zeit ist noch ein anderer Weg gefunden worden, der dasselbe leistet, jedoch von dem vorigen ganz verschieden ist und besondere Erklärung verdient.

213. Man nehme an, die Wurzel einer biquadratischen Gleichung habe diese Form $x = \sqrt{p} + \sqrt{q} + \sqrt{r}$, wo die Buchstaben p, q und r die drei Wurzeln einer solchen

cubischen Gleichung $z^3 - fz^2 + gz - h = 0$ bezeichnen, so daß $p + q + r = f$, $pq + pr + qr = g$ und $pqr = h$ sein wird. Dieses vorausgesetzt, quadrire man die angenommene Form der Wurzel $x = \sqrt{p} + \sqrt{q} + \sqrt{r}$, wodurch man erhält $x^2 = p + q + r + 2\sqrt{pq} + 2\sqrt{pr} + 2\sqrt{qr}$. Da nun $p + q + r = f$, so wird $x^2 - f = 2\sqrt{pq} + 2\sqrt{pr} + 2\sqrt{qr}$. Nun nehme man nochmals die Quadrate, so wird $x^4 - 2fx^2 + f^2 = 4pq + 4pr + 4qr + 8\sqrt{p^2qr} + 8\sqrt{pq^2r} + 8\sqrt{pqr^2}$. Da nun $4pq + 4pr + 4qr = 4g$, so wird $x^4 - 2fx^2 + f^2 - 4g = 8\sqrt{pqr}(\sqrt{p} + \sqrt{q} + \sqrt{r})$; da aber $\sqrt{p} + \sqrt{q} + \sqrt{r} = x$ und $pqr = h$, also $\sqrt{pqr} = \sqrt{h}$, so gelangen wir zu dieser biquadratischen Gleichung $x^4 - 2fx^2 - 8x\sqrt{h} + f^2 - 4g = 0$, wovon die Wurzel gewiß ist $x = \sqrt{p} + \sqrt{q} + \sqrt{r}$, und wo p, q und r die drei Wurzeln der obigen cubischen Gleichung sind: $z^3 - fz^2 + gz - h = 0$.

214. Die herausgebrachte biquadratische Gleichung kann als allgemein angesehen werden, obgleich das zweite Glied x^3 darin fehlt. Denn man kann immer jede vollständige Gleichung in eine andere verwandeln, in der das zweite Glied fehlt, wie wir bald zeigen wollen.

Es sei daher die biquadratische Gleichung gegeben: $x^4 - ax^2 - bx - c = 0$, wovon eine Wurzel gefunden werden soll. Man vergleiche dieselbe daher mit der gefundenen Form, um dadurch die Buchstaben f, g und h zu bestimmen. Dazu ist erforderlich, daß I. $2f = a$, also $f = \frac{a}{2}$, II. $8\sqrt{h} = b$, also $h = \frac{b^2}{64}$, III. $f^2 - 4g = -c$ oder $\frac{a^2}{4} - 4g + c = 0$, oder $\frac{1}{4}a^2 + c = 4g$, folglich $g = \frac{1}{16}a^2 + \frac{1}{4}c$.

215. Aus der gegebenen Gleichung $x^4 - ax^2 - bx - c = 0$, findet man demnach die Buchstaben f, g und h also bestimmt: $f = \frac{1}{2}a$, $g = \frac{1}{16}a^2 + \frac{1}{4}c$ und $h = \frac{1}{64}b^2$ oder $\sqrt{h} = \frac{1}{8}b$; daraus bilde man die cubische Gleichung $z^3 - fz^2 + gz - h = 0$, woraus man nach der

obigen Regel die drei Wurzeln suchen muß. Dieselben sind nun I. $z = p$, II. $z = q$, III. $z = r$, aus welchen, wenn sie gefunden worden, eine Wurzel unserer biquadratischen Gleichung $x = \sqrt{p} + \sqrt{q} + \sqrt{r}$ sein wird.

216. In solcher Art scheint es zwar, als werde nur eine Wurzel unserer Gleichung gefunden; allein da jedes Quadratwurzel-Zeichen sowohl negativ als auch positiv genommen werden kann, so enthält diese Form sogar alle vier Wurzeln.

Wollte man jedoch alle Veränderungen der Zeichen gelten lassen, so kämen 8 verschiedene Werthe für x heraus, während doch nur 4 gelten können. Es ist aber zu bemerken, daß das Product dieser drei Glieder, nämlich $\sqrt{pqr}$ gleich sein müsse dem $\sqrt{h} = \frac{1}{8}b$; daher wenn $\frac{1}{8}b$ positiv ist, muß das Product der Theile auch positiv sein, in welchem Falle nur diese vier Aenderungen gelten:

$$\begin{array}{ll} \text{I.} & x = \sqrt{p} + \sqrt{q} + \sqrt{r}, \\ \text{II.} & x = \sqrt{p} - \sqrt{q} - \sqrt{r}, \\ \text{III.} & x = -\sqrt{p} + \sqrt{q} - \sqrt{r}, \\ \text{IV.} & x = -\sqrt{p} - \sqrt{q} + \sqrt{r}, \end{array}$$

Ist aber $\frac{1}{8}b$ negativ, so sind die 4 Werthe von x folgende:

$$\begin{array}{ll} \text{I.} & x = \sqrt{p} + \sqrt{q} - \sqrt{r}, \\ \text{II.} & x = \sqrt{p} - \sqrt{q} + \sqrt{r}, \\ \text{III.} & x = -\sqrt{p} + \sqrt{q} + \sqrt{r}, \\ \text{IV.} & x = -\sqrt{p} - \sqrt{q} - \sqrt{r}. \end{array}$$

Mit Hülfe dieser Anmerkung können in jedem Fall alle vier Wurzeln bestimmt werden, wie aus folgendem Beispiel zu ersehen.

217. Es sei folgende biquadratische Gleichung gegeben, in welcher das zweite Glied fehlt: $x^4 - 25x^2 + 60x - 36 = 0$, welche mit der obigen Formel verglichen $a = 25$, $b = -60$ und $c = 36$ giebt, woraus man ferner $f = \frac{25}{2}$, $g = \frac{625}{16} + 9 = \frac{769}{16}$ und $h = \frac{225}{4}$ erhält; also ist unsere cubische Gleichung: $z^3 - \frac{25}{2}z^2 + \frac{769}{16}z - \frac{225}{4} = 0$. Um hier die Brüche wegzubringen, setze man $z = \frac{u}{4}$, so wird $\frac{u^3}{64} -$

$\frac{25}{2} \cdot \frac{u^2}{16} + \frac{769}{16} \cdot \frac{u}{4} - \frac{225}{4} = 0$, welche mit 64 multiplicirt $u^3 - 50u^2 + 769u - 3600 = 0$ giebt, wovon die drei Wurzeln gefunden werden sollen, welche alle drei positiv sind, und wovon eine Wurzel $u = 9$ ist. Um die andern zu finden, theile man $u^3 - 50u^2 + 769u - 3600$ durch $u - 9$, und es entsteht diese neue Gleichung $u^2 - 41u + 400 = 0$ oder $u^2 = 41u - 400$, woraus gefunden wird $u = \frac{41}{2} \pm \sqrt{(\frac{1681}{4} - \frac{1600}{4})} = \frac{41 \pm 9}{2}$. Also sind die drei Wurzeln $u = 9$, $u = 16$, $u = 25$, daher wir erhalten:

$$\text{I. } z = \tfrac{9}{4},\ \text{II. } z = 4,\ \text{III. } z = \tfrac{25}{4}.$$

Dieses sind nun die Werthe der Buchstaben p, q und r, so daß $p = \frac{9}{4}$, $q = 4$, $r = \frac{25}{4}$. Weil nun $\sqrt{pqr} = \sqrt{h} = -\frac{15}{2}$ und dieser Werth $= \frac{1}{8}b$ negativ ist, so muß man sich mit den Zeichen der Wurzeln $\sqrt{p}$, $\sqrt{q}$, $\sqrt{r}$ darnach richten. Es muß nämlich entweder nur ein $-$ oder drei $-$ vorhanden sein. Da nun $\sqrt{p} = \frac{3}{2}$, $\sqrt{q} = 2$ und $\sqrt{r} = \frac{5}{2}$, so werden die vier Wurzeln unserer gegebenen Gleichung sein:

$$\begin{array}{ll} \text{I.} & x = \frac{3}{2} + 2 - \frac{5}{2} = 1, \\ \text{II.} & x = \frac{3}{2} - 2 + \frac{5}{2} = 2, \\ \text{III.} & x = -\frac{3}{2} + 2 + \frac{5}{2} = 3, \\ \text{IV.} & x = -\frac{3}{2} - 2 - \frac{5}{2} = -6, \end{array}$$

aus welchen die folgenden vier Factoren der Gleichung entstehen $(x - 1)(x - 2)(x - 3)(x + 6) = 0$, wovon aber die beiden ersten $x^2 - 3x + 2$, die beiden letzteren aber $x^2 + 3x - 18$ geben, und diese zwei Producte mit einander multiplicirt bringen gerade unsere Gleichung hervor.

218. Nun erübrigt noch zu zeigen, wie eine biquadratische Gleichung, in der das zweite Glied vorhanden ist, in eine andere verwandelt werden kann, in der das zweite Glied fehlt. Hiezu dient folgendes Verfahren.

Es sei die allgemeine Gleichung gegeben $y^4 + ay^3 + by^2 + cy + d = 0$. Hier setze man zu y den vierten

Theil der Zahl des zweiten Gliedes, nämlich $\frac{1}{4}a$ und schreibe dafür einen neuen Buchstaben x, also daß $y + \frac{1}{4}a = x$, folglich $y = x - \frac{1}{4}a$; daraus wird $y^2 = x^2 - \frac{1}{2}ax + \frac{1}{16}a^2$, ferner $y^3 = x^3 - \frac{3}{4}ax^2 + \frac{3}{16}a^2x - \frac{1}{64}a^3$, und daraus endlich:

$$\begin{array}{rl} y^4 = & x^4 - ax^3 + \frac{3}{8}a^2x^2 - \frac{1}{16}a^3x + \frac{1}{256}a^4 \\ +\,ay^3 = & + ax^3 - \frac{3}{4}a^2x^2 + \frac{3}{16}a^3x - \frac{1}{64}a^4 \\ +\,by^2 = & + bx^2 - \frac{1}{2}abx + \frac{1}{16}a^2b \\ +\,cy = & + cx - \frac{1}{4}ac \\ +\,d = & + d \\ \hline & \left.\begin{array}{r} x^4 + 0 - \frac{3}{8}a^2x^2 + \frac{1}{8}a^3x - \frac{3}{256}a^4 \\ + bx^2 - \frac{1}{2}abx + \frac{1}{16}a^2b \\ + cx - \frac{1}{4}ac \\ + d \end{array}\right\} = 0 \end{array}$$

In dieser Gleichung ist, wie man sieht, das zweite Glied weggefallen, so daß man jetzt die gegebene Regel darauf anwenden und daraus die vier Wurzeln von x bestimmen kann, aus welchen dann die vier Werthe von y von selbst sich ergeben, weil $y = x - \frac{1}{4}a$.

219. So weit ist man bisher in der Auflösung der algebraischen Gleichungen gelangt, nämlich bis auf den vierten Grad. Alle Bemühungen jedoch, die Gleichungen höherer Grade auf gleiche Art aufzulösen, oder wenigstens auf die niedrigsten Grade zu bringen, sind fruchtlos gewesen, so daß man nicht im Stande ist, allgemeine Regeln zu geben, durch welche die Wurzeln von höheren Gleichungen ausfindig gemacht werden können.

Alles was darin geleistet worden, bezieht sich nur auf ganz besondere Fälle, worunter derjenige als wichtigster gilt, wenn irgend eine Rationalwurzel vorhanden ist, welche durch Probiren leicht gefunden werden kann, weil man weiß, daß dieselbe immer ein Theiler des letzten Gliedes sein muß; und hiemit ist es eben so beschaffen, wie wir schon bei den Gleichungen des dritten und vierten Grades gelehrt haben.

220. Es wird jedoch noch nöthig sein, diese Regel auch auf eine Gleichung anzuwenden, deren Wurzeln nicht rational sind.

Eine solche Gleichung sei nun $y^4 - 8y^3 + 14y^2 + 4y - 8 = 0$. Hier muß man vor allen Dingen das zweite Glied wegschaffen; daher setze man zu der Wurzel y noch den vierten Theil der Zahl des zweiten Gliedes, nämlich $y - 2 = x$, so wird $y = x + 2$ und $y^2 = x^2 + 4x + 4$, ferner $y^3 = x^3 + 6x^2 + 12x + 8$.

$$\begin{array}{rrrrrr}
\text{und } y^4 = & x^4 & + 8x^3 & + 24x^2 & + 32x & + 16 \\
-8y^3 = & & - 8x^3 & - 48x^2 & - 96x & - 64 \\
+14y^2 = & & & + 14x^2 & + 56x & + 56 \\
+4y = & & & & + 4x & + 8 \\
-8 = & & & & & - 8 \\
\hline
& x^4 & + 0 & - 10x^2 & - 4x & + 8 = 0,
\end{array}$$

welche Gleichung mit unserer allgemeinen Form verglichen $a = 10$, $b = 4$, $c = -8$ giebt; woraus wir demnach schließen $f = 5$, $g = \frac{17}{4}$, $h = \frac{1}{4}$ und $\sqrt{h} = \frac{1}{2}$. Daraus sehen wir, daß das Product $\sqrt{pqr}$ positiv sein wird. Die cubische Gleichung wird also sein $z^3 - 5z^2 + \frac{17}{4}z - \frac{1}{4} = 0$, von welcher die drei Wurzeln p, q und r gesucht werden müssen.

221. Hier müssen nun erstens die Brüche weggeschafft werden; deswegen setze man $z = \frac{u}{2}$, so wird $\frac{u^3}{8} - \frac{5u^2}{4} + \frac{17}{4} \cdot \frac{u}{2} - \frac{1}{4} = 0$; mit 8 multiplicirt giebt $u^3 - 10u^2 + 17u - 2 = 0$, wo alle Wurzeln positiv sind. Da nun die Theiler des letzten Gliedes 1 und 2 sind, so sei erstens $u = 1$, alsdann wird $1 - 10 + 17 - 2 = 6$ und also nicht 0. Setzt man aber $u = 2$, so wird $8 - 40 + 34 - 2 = 0$, welches Genüge leistet. Daher ist eine Wurzel $u = 2$; um die andere zu finden, theile man durch $u - 2$ wie folgt:

$$\begin{array}{l}
u - 2)\; u^3 - 10u^2 + 17u - 2\; (u^2 - 8u + 1 \\
\quad\quad\;\; u^3 - 2u^2 \\
\hline
\quad\quad\quad\;\; - 8u^2 + 17u \\
\quad\quad\quad\;\; - 8u^2 + 16u \\
\hline
\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad u - 2 \\
\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad u - 2 \\
\hline
\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\;\; 0
\end{array}$$

und da bekommt man $u^2 - 8u + 1 = 0$, oder $u^2 = 8u - 1$, woraus die beiden übrigen Wurzeln $u = 4 \pm \sqrt{15}$ hervorgehen. Da nun $z = \frac{1}{2}u$, so sind die drei Wurzeln der cubischen Gleichung:

I. $z = p = 1$, II. $z = q = \frac{4 + \sqrt{15}}{2}$, III. $z = r = \frac{4 - \sqrt{15}}{2}$.

222. Da wir nun p, q und r gefunden, so werden ihre Quadratwurzeln $\sqrt{p} = 1$, $\sqrt{q} = \frac{\sqrt{(8 + 2\sqrt{15})}}{2}$, $\sqrt{r} = \frac{\sqrt{(8 - 2\sqrt{15})}}{2}$ sein.

Da aber, nach der Darlegung in 115, die Quadratwurzel aus $(a \pm \sqrt{b})$, wenn $\sqrt{(a^2 - b)} = c$ so ausgedrückt werden kann: $\sqrt{(a \pm b)} = \sqrt{\frac{a + c}{2}} \pm \sqrt{\frac{a - c}{2}}$, so ist für unsern Fall $a = 8$ und $\sqrt{b} = 2\sqrt{15}$, folglich $b = 60$, daher $c = 2$. Hieraus bekommen wir $\sqrt{(8 + 2\sqrt{15})} = \sqrt{5} + \sqrt{3}$, und $\sqrt{(8 - 2\sqrt{15})} = \sqrt{5} - \sqrt{3}$. Da wir nun gefunden haben $\sqrt{p} = 1$, $\sqrt{q} = \frac{\sqrt{5} + \sqrt{3}}{2}$ und $\sqrt{r} = \frac{\sqrt{5} - \sqrt{3}}{2}$, so werden die vier Werthe für x, da wir wissen, daß ihr Product positiv sein muß, folgende sein.

I. $x = \sqrt{p} + \sqrt{q} + \sqrt{r} = 1 + \frac{\sqrt{5} + \sqrt{3} + \sqrt{5} - \sqrt{3}}{2} = 1 + \sqrt{5}$.

II. $x = \sqrt{p} - \sqrt{q} - \sqrt{r} = 1 - \frac{\sqrt{5} + \sqrt{3} - \sqrt{5} + \sqrt{3}}{2} = 1 - \sqrt{3}$.

III. $x = -\sqrt{p} + \sqrt{q} - \sqrt{r} = -1 + \frac{\sqrt{5} + \sqrt{3} - \sqrt{5} + \sqrt{3}}{2} = -1 + \sqrt{3}$.

IV. $x = -\sqrt{p} - \sqrt{q} + \sqrt{r} = -1 - \frac{\sqrt{5} - \sqrt{3} + \sqrt{5} + \sqrt{3}}{2} = -1 - \sqrt{5}$.

Da nun für die gegebene Gleichung $y = x + 2$ war, so sind die vier Wurzeln derselben:

I. $y = 3 + \sqrt{5}$,
II. $y = 3 - \sqrt{5}$,
III. $y = 1 + \sqrt{3}$,
IV. $y = 1 - \sqrt{3}$.

Kapitel 16.

Von der Auflösung der Gleichungen durch Näherung.

223. Wenn die Wurzeln einer Gleichung nicht rational sind, dieselben mögen nun durch Wurzelzeichen ausgedrückt werden können oder nicht, wie bei den Gleichungen höheren Grades geschieht, muß man sich begnügen, den Werth derselben durch Näherungen zu bestimmen, in der Art, daß man dem wahren Werthe derselben immer näher komme, bis der Fehler endlich für nichts zu achten ist. Es sind zu diesem Zwecke verschiedene Methoden erfunden worden, von denen wir die wichtigsten hier erklären wollen.

224. Die erste Methode beruht auf der Voraussetzung, daß man den Werth einer Wurzel schon ziemlich genau erforscht habe, z. B. schon wisse, daß derselbe größer sei als 4, und doch kleiner als 5. Alsdann setze man den Werth der Wurzel $= 4 + p$, da dann p gewiß einen Bruch bedeuten wird; ist aber p ein Bruch, und also kleiner als 1, so ist das Quadrat, der Cubus und jede höhere Potenz von p noch weit kleiner, daher man dieselben aus der Rechnung weglassen kann, weil es doch nur auf eine Näherung ankommt. Hat man nun weiter diesen Bruch p nur beinahe bestimmt, so erkennt man die Wurzel $4 + p$ schon genauer. Hieraus erforscht man in gleicher Art einen noch genaueren

Werth, und geht so weit fort, bis man der Wahrheit so nahe gekommen, als man wünscht.

225. Wir wollen dieses Verfahren zuerst durch ein leichtes Beispiel erläutern, und die Wurzel dieser Gleichung $x^2 = 20$ durch Näherungen bestimmen.

Hier sieht man nun, daß x größer ist als 4, und doch kleiner als 5; daher setze man $x = 4 + p$, so wird $x^2 = 16 + 8p + p^2 = 20$; weil aber p^2 sehr klein ist, so lasse man dieses Glied weg, um die Gleichung zu haben: $16 + 8p = 20$, oder $8p = 4$, daraus wird $p = \frac{1}{2}$ und $x = 4\frac{1}{2}$, welches der Wahrheit schon weit näher kommt. Man setze also ferner $x = 4\frac{1}{2} + p$, so ist gewiß, daß p ein noch weit kleinerer Bruch sein wird, als vorher; daher p^2 jetzt mit größerem Rechte weggelassen werden kann. Man wird also haben $x^2 = 20\frac{1}{4} + 9p = 20$, oder $9p = -\frac{1}{4}$, und also $p = -\frac{1}{36}$, folglich $x = 4\frac{1}{2} - \frac{1}{36} = 4\frac{17}{36}$. Wollte man der Wahrheit noch näher kommen, so setze man $x = 4\frac{17}{36} + p$, so bekommt man $x^2 = 20\frac{1}{1296} + 8\frac{34}{36}p = 20$; daher $8\frac{34}{36}p = -\frac{1}{1296}$, mit 36 multiplicirt, kommt $322p = -\frac{36}{1296} = -\frac{1}{36}$ und daraus wird $p = -\frac{1}{36 \cdot 322} = -\frac{1}{11592}$, folglich $x = 4\frac{17}{36} - \frac{1}{11592} = 4\frac{4473}{11592}$, welcher Werth der Wahrheit so nahe kommt, daß der Fehler fast als nichts angesehen werden kann.

226. Um dieses Verfahren allgemeiner darzustellen, sei die Gleichung $x^2 = a$ gegeben und man wisse schon, daß x größer ist als n, doch aber kleiner als $n + 1$. Man setze $x = n + p$, also daß p ein Bruch sein muß und daher p^2 als zu klein verworfen werden kann. Daraus bekommt man $x^2 = n^2 + 2np = a$, also $2np = a - n^2$ und $p = \frac{a - n^2}{2n}$, folglich $x = n + \frac{a - n^2}{2n} = \frac{n^2 + a}{2n}$. Kam nun n der Wahrheit schon nahe, so kommt ihr dieser neue Werth $\frac{n^2 + a}{2n}$ noch weit näher. Diesen setze man von neuem

für n, so wird man der Wahrheit noch näher kommen und wenn man diesen neuen Werth nochmals für n setzt, so wird man noch näher gelangen; und in solcher Art kann man fortgehen, so weit man will.

Es sei z. B. $a = 2$, oder man verlangt die Quadratwurzel aus 2 zu wissen. Hat man nun dafür schon einen ziemlich nahen Werth gefunden, welcher n genannt werde, so wird $\frac{n^2+2}{2n}$ einen noch näheren Werth geben. Es sei daher:

I. $n = 1$, so wird $x = \frac{3}{2}$,
II. $n = \frac{3}{2}$, so wird $x = \frac{17}{12}$,
III. $n = \frac{17}{12}$, so wird $x = \frac{577}{408}$,

welcher letztere Werth der $\sqrt{2}$ schon so nahe kommt, daß das Quadrat davon $= \frac{332929}{166464}$ nur um $\frac{1}{166464}$ größer ist als 2.

227. Eben so kann man verfahren, wenn die Cubikwurzel oder eine noch höhere Wurzel durch die Näherung gefunden werden soll.

Es sei z. B. diese cubische Gleichung $x^3 = a$ gegeben oder man verlange $\sqrt[3]{a}$ zu finden; dieselbe sei nun beinahe $= n$ und man setze $x = n + p$; so wird, wenn man p^2 und die höheren Potenzen davon wegläßt, $x^3 = n^3 + 3n^2p = a$; daher $3n^2p = a - n^3$ und $p = \frac{a - n^3}{3n^2}$; folglich $x = \frac{2n^3 + a}{3n^2}$. Kommt also n der $\sqrt[3]{a}$ schon nahe, so kommt diese Form noch weit näher. Setzt man nun diesen neuen Werth wiederum für n, so kommt diese Formel der Wahrheit noch weit näher, und so kann man fortfahren, so weit man will.

Es sei z. B. $x^3 = 2$ oder man verlange $\sqrt[3]{2}$ zu finden, welcher die Zahl n schon ziemlich nahe komme, so wird diese Formel $x = \frac{2n^3 + 2}{3n^2}$ noch näher kommen; also setze man:

I. $n = 1$, so wird $x = \frac{4}{3}$;
II. $n = \frac{4}{3}$, so wird $x = \frac{91}{72}$;
III. $n = \frac{91}{72}$, so wird $x = \frac{162130886}{128634264}$.

228. Diese Methode kann mit gleichem Erfolge gebraucht werden, um die Wurzeln aller Gleichungen durch Annäherung zu finden. Es sei zu diesem Behufe die folgende allgemeine cubische Gleichung gegeben: $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$, und n bezeichne eine Zahl, die einer Wurzel derselben schon ziemlich nahe kommt. Man setze daher $x = n - p$ und da p ein Bruch sein wird, so lasse man p^2 und die höheren Potenzen davon weg; in solcher Art bekommt man $x^2 = n^2 - 2np$ und $x^3 = n^3 - 3n^2p$, woraus diese Gleichung entsteht: $n^3 - 3n^2p + an^2 - 2anp + bn - bp + c = 0$, oder $n^3 + an^2 + bn + c = 3n^2p + 2anp + bp = (3n^2 + 2an + b)\, p$; daher $p = \frac{n^3 + an^2 + bn + c}{3n^2 + 2an + b}$ und folglich bekommen wir für x den folgenden genaueren Werth:

$$x = n - \left(\frac{n^3 + an^2 + bn + c}{3n^2 + 2an + b}\right) = \frac{2n^3 + an^2 - c}{3n^2 + 2an + b}.$$

Setzt man nun diesen neuen Werth wieder für n, so erhält man dadurch einen Werth, der der Wahrheit noch näher kommt.

229. Es sei z. B. $x^3 + 2x^2 + 3x - 50 = 0$, wo $a = 2$, $b = 3$ und $c = -50$, daher wenn n einer Wurzel schon nahe kommt, so wird ein noch näherer Werth sein $x = \frac{2n^3 + 2n^2 + 50}{3n^2 + 4n + 3}$. Nun aber kommt der Werth $x = 3$ der Wahrheit schon ziemlich nahe; man setze daher $n = 3$, so bekommt man $x = \frac{61}{21}$. Wollte man nun diesen Werth wiederum für n schreiben, so würde man einen neuen Werth bekommen, der der Wahrheit noch weit näher käme.

230. Von höheren Gleichungen wollen wir nur dieses Beispiel beifügen $x^5 = 6x + 10$ oder $x^5 - 6x - 10 = 0$, wo leicht zu ersehen, daß 1 zu klein und 2 zu groß ist.

Es sei aber $x = n$ ein schon naher Werth und man setze $x = n + p$, so wird $x^5 = n^5 + 5n^4p$ und also $n^5 + 5n^4p = 6n + 6p + 10$, oder $5n^4p - 6p = 6n + 10 - n^5$, und folglich $p = \frac{6n + 10 - n^5}{5n^4 - 6}$ und daher $x = \frac{4n^5 + 10}{5n^4 - 6}$. Man setze nun $n = 1$, so wird $x = \frac{14}{-1} = -14$, welcher Werth ganz ungeschickt ist und dies rührt daher, daß der Annäherungswerth n zu klein war; man setze nunmehr $n = 2$, so wird $x = \frac{138}{74} = \frac{69}{37}$, welcher der Wahrheit schon weit näher kommt. Wollte man sich nun die Mühe geben für n den Bruch $\frac{69}{37}$ zu schreiben, so würde man zu einem noch weit genaueren Werth der Wurzel x gelangen.

231. Dieses ist nun die bekannteste Art, die Wurzeln der Gleichung durch Näherungen zu finden, welche auch in allen Fällen mit Nutzen angewandt werden kann.

Wir wollen jedoch noch eine andere Methode angeben, welche wegen der Leichtigkeit der Rechnung Beachtung verdient. Der Grund derselben beruht darauf, daß man für jede Gleichung eine Reihe von Zahlen suche, wie a, b, c ꝛc., die so beschaffen sind, daß jedes Glied durch das vorhergehende dividirt den Werth der Wurzel um so viel genauer angebe, je weiter man diese Reihe Zahlen fortsetzt.

Nehmen wir an, wir wären damit schon bis zu den Gliedern p, q, r, s, t ꝛc. gekommen, so muß $\frac{q}{p}$ die Wurzel x schon ziemlich genau angeben, oder es wird $\frac{q}{p}$ beinahe $= x$ sein.

Eben so wird man auch haben $\frac{r}{q} = x$, woraus wir durch die Multiplication erhalten $\frac{r}{p} = x^2$. Da ferner auch $\frac{s}{r} = x$, so wird ebenfalls $\frac{s}{p} = x^3$, und da weiter $\frac{t}{s} = x$, so wird $\frac{t}{p} = x^4$ ꝛc.

232. Um dieses zu erläutern, wollen wir mit der quadratischen Gleichung $x^2 = x + 1$ anfangen und wiederum

annehmen, daß in der vorher angeführten Reihe von Zahlen die Glieder p, q, r, s, t ꝛc. vorkommen. Da nun $\frac{q}{p} = x$ und $\frac{r}{p} = x^2$, so erhalten wir daraus diese Gleichung:

$$\frac{r}{p} = \frac{q}{p} + 1 \text{ oder } q + p = r.$$

Eben so wird auch $s = r + q$ und $t = s + r$ sein, woraus wir erkennen, daß jedes Glied unserer Reihe Zahlen die Summe der beiden vorhergehenden ist, wodurch die Reihe, so weit man will, leicht fortgesetzt werden kann, wenn man nur die zwei ersten Glieder hat, und diese kann man nach Belieben annehmen. Daher setze man dafür 0, 1, so wird unsere Reihe also herauskommen:

0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144 ꝛc.

Hier wird von den entfernteren Gliedern jedes, durch das vorhergehende dividirt, den Werth für x um so viel genauer angeben, als man die Reihe weiter fortgesetzt hat. Anfangs ist zwar der Fehler sehr groß, wird aber je weiter man geht, um so geringer. Diese der Wahrheit immer näher kommenden Werthe für x gehen demnach also fort:

$x = \frac{1}{0}, \frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{8}{5}, \frac{13}{8}, \frac{21}{13}, \frac{34}{21}, \frac{55}{34}, \frac{89}{55}, \frac{144}{89}$ ꝛc.

wovon z. B. $x = \frac{21}{13}$ giebt $\frac{441}{169} = \frac{21}{13} + 1 = \frac{442}{169}$, wo der Fehler nur $\frac{1}{169}$ beträgt; die folgenden Brüche aber kommen der Wahrheit immer näher.

233. Betrachten wir nun auch die Gleichung $x^2 = 2x + 1$, und weil stets $x = \frac{q}{p}$ und $x^2 = \frac{r}{p}$, so erhalten wir $\frac{r}{p} = \frac{2q}{p} + 1$, oder $r = 2q + p$; woraus wir erkennen, daß jedes Glied doppelt genommen, nebst dem vorhergehenden, das folgende giebt. Wenn wir also wiederum mit 0, 1 anfangen, so bekommen wir folgende Reihe:

0, 1, 2, 5, 12, 29, 70, 169, 408 ꝛc.,

daher der gesuchte Werth von x immer genauer durch folgende Brüche ausgedrückt wird:

$$x = \frac{1}{0}, \frac{2}{1}, \frac{5}{2}, \frac{12}{5}, \frac{29}{12}, \frac{70}{29}, \frac{169}{70}, \frac{408}{169} \text{ rc.},$$

welche dem wahren Werthe $x = 1 + \sqrt{2}$ immer näher kommen. Nimmt man nun 1 weg, so geben folgende Brüche den Werth von $\sqrt{2}$ immer genauer: $\frac{1}{0}$, $\frac{1}{1}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{7}{5}$, $\frac{17}{12}$, $\frac{41}{29}$, $\frac{99}{70}$, $\frac{239}{169}$ rc., von welchen $\frac{99}{70}$ zum Quadrat hat $\frac{9801}{4900}$, das nur um $\frac{1}{4900}$ größer ist als 2.

234. Bei höheren Gleichungen findet diese Methode ebenfalls Anwendung. Gesetzt, es wäre die cubische Gleichung gegeben: $x^3 = x^2 + 2x + 1$, so setze man $x = \frac{q}{p}$, $x^2 = \frac{r}{p}$ und $x^3 = \frac{s}{p}$, und da bekommt man $s = r + 2q + p$. Hieraus sieht man, wie man aus drei Gliedern p, q und r das folgende s findet, und alsdann kann man wiederum den Anfang nach Belieben machen. Eine solche Reihe wird demnach sein:

$$0, 0, 1, 1, 3, 6, 13, 28, 60, 129 \text{ rc.},$$

woraus folgende Brüche den Werth für x immer genauer angeben werden:

$$x = \frac{0}{0}, \frac{1}{0}, \frac{1}{1}, \frac{3}{1}, \frac{6}{3}, \frac{13}{6}, \frac{28}{13}, \frac{60}{28}, \frac{129}{60} \text{ rc.}$$

Von diesen genügen die ersten nicht; aber $x = \frac{60}{28} = \frac{15}{7}$ giebt in der Gleichung $\frac{3375}{343} = \frac{225}{49} + \frac{30}{7} + 1 = \frac{3388}{343}$, und der Fehler beträgt nur $\frac{13}{343}$.

235. Es ist hier wohl zu bemerken, daß nicht alle Gleichungen so beschaffen sind, daß man bei ihnen diese Methode anwenden kann; besonders wenn das zweite Glied fehlt, kann dieselbe nicht gebraucht werden. Es sei z. B. $x^2 = 2$ und man wollte setzen $x = \frac{q}{p}$ und $x^2 = \frac{r}{p}$, so würde man bekommen $\frac{r}{p} = 2$ oder $r = 2p$, das ist $r = 0q + 2p$, woraus diese Reihe Zahlen entstünde:

$$1, 1, 2, 2, 4, 4, 8, 8, 16, 16, 32, 32 \text{ rc.}$$

Aus dieser Reihe kann jedoch kein Schluß gezogen werden, indem jedes Glied durch das vorhergehende dividirt entweder $x = 1$ oder $x = 2$ giebt. Es kann diesem Uebel-

stande aber abgeholfen werden, wenn man setzt $x = y - 1$; so bekommt man $y^2 + 2y - 1 = 2$, und wenn man hier setzt $y = \frac{q}{p}$ und $y^2 = \frac{r}{p}$, so erhält man die schon oben gegebene Näherung,

236. Eben so verhält es sich auch mit der Gleichung $x^3 = 2$, aus welcher eine solche Reihe Zahlen nicht gefunden wird, die den Werth von $\sqrt[3]{2}$ angiebt.

Man setze aber nur $x = y - 1$, um die Gleichung zu bekommen $y^3 - 3y^2 + 3y - 1 = 2$, oder $y^3 = 3y^2 - 3y + 3$. Setzt man nun für die Reihe Zahlen $y = \frac{q}{p}$, $y^2 = \frac{r}{p}$ und $y^3 = \frac{s}{p}$; so wird $s = 3r - 3q + 3p$ sein, woraus man sieht, wie aus drei Gliedern das folgende zu bestimmen ist. Man nimmt also die drei ersten Glieder nach Belieben an, z. B. 0, 0, 1, so bekommt man diese Reihe:

$$0, 0, 1, 3, 6, 12, 27, 63, 144, 324 \text{ rc.}$$

Die zwei letzten Glieder in dieser geben $y = \frac{324}{144}$ und $x = \frac{5}{4}$, welcher Bruch auch der Cubikwurzel aus 2 ziemlich nahe kommt, denn der Cubus von $\frac{5}{4}$ ist $\frac{125}{64}$, dagegen ist $2 = \frac{128}{64}$.

237. Bei dieser Methode ist noch ferner zu bemerken, daß, wenn die Gleichung eine Rationalwurzel hat, und der Anfang der Reihe also angenommen wird, daß daraus diese Wurzel herauskommt; so wird auch jedes Glied derselben, durch das vorhergehende dividirt, eben dieselbe Wurzel genau geben.

Um dieses zu zeigen, betrachten wir die Gleichung: $x^2 = x + 2$, worin eine Wurzel ist $x = 2$; da man nun für die Reihe diese Formel hat $r = q + 2p$, so erhält man, wenn man den Anfang setzt 1, 2, diese Reihe 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64 rc., welches eine geometrische Reihe ist, deren Nenner = 2.

Eben dieses erhellt auch aus der cubischen Gleichung: $x^3 = x^2 + 3x + 9$, von der eine Wurzel $x = 3$ ist. Setzt man nun für den Anfang der Reihe 1, 3, 9, so findet man aus der Formel $s = r + 3q + 9p$ die Reihe 1, 3, 9, 27, 81, 243, 729 rc., welches wieder eine geometrische Reihe ist, deren Nenner = 3.

238. Weicht aber der Anfang der Reihe von dieser Wurzel ab, so folgt daraus nicht, daß man dadurch immer genauer zu derselben Wurzel kommen werde. Denn wenn die Gleichung mehr Wurzeln hat, so nähert sich diese Reihe immer nur der größten Wurzel, und die kleinere erhält man nicht anders, als wenn gerade der Anfang nach derselben eingerichtet wird. Dieses wird durch ein Beispiel deutlich werden. Es sei die Gleichung $x^2 = 4x - 3$, deren zwei Wurzeln sind $x = 1$ und $x = 3$. Nun ist die Formel für die Reihe Zahlen $r = 4q - 3p$ und setzt man als Anfang derselben 1, 1, nämlich für die kleinere Wurzel, so wird die ganze Reihe: 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1 rc. Setzt man aber den Anfang 1, 3, worin die größere Wurzel enthalten, so wird die Reihe: 1, 3, 9, 27, 81, 243, 729 rc., wo alle Glieder die Wurzel 3 genau angeben. Setzt man aber den Anfang anders, wie man will, nur daß darin die kleinere Wurzel nicht genau enthalten ist, so nähert sich die Reihe immer der größern Wurzel 3, wie aus folgenden Reihen zu ersehen:

Der Anfang sei 0, 1, 4, 13, 40, 121, 364 rc.
ferner 1, 2, 5, 14, 41, 122, 365 rc.
ferner 2, 3, 6, 15, 42, 123, 366, 1095 rc.
ferner 2, 1, — 2, — 11, — 38, — 118, — 362, — 1091, — 3278 rc.,

wo die letzten Glieder durch die vorhergehenden dividirt, immer der größern Wurzel 3 näher kommen, niemals aber der kleineren.

239. Diese Methode kann auch sogar auf Gleichungen,

die in das Unendliche fortlaufen, angewandt werden. Zum Beispiel diene die Gleichung:

$$x^{\infty} = x^{\infty - 1} + x^{\infty - 2} + x^{\infty - 3} + x^{\infty - 4} + \text{rc.},$$

für welche die Reihe Zahlen so beschaffen sein muß, daß jede gleich sei der Summe aller vorhergehenden, woraus diese Reihe entsteht:

$$1, 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128 \text{ rc.}$$

Hieraus sieht man, daß die größte Wurzel dieser Gleichung $x = 2$ ganz genau ist; welches auch auf diese Art gezeigt werden kann: Man theile die Gleichung durch x^{∞}, so bekommt man:

$$1 = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^4} \text{ rc.},$$

welches eine geometrische Reihe ist, deren Summe gefunden wird $= \frac{1}{x - 1}$, so daß $1 = \frac{1}{x - 1}$; man multiplicire mit $x - 1$, so wird $x - 1 = 1$ und $x = 2$.

240. Außer diesen zwei Methoden, die Wurzel der Gleichung durch Näherungen zu finden, wendet man hin und wieder noch andere an, welche aber entweder zu mühsam, oder doch nicht allgemein sind. Vor allen aber verdient die hier zuerst erklärte Methode den Vorzug, weil sie auf alle Arten von Gleichungen mit erwünschtem Erfolg angewandt werden kann, während die andere oft eine gewisse Vorbereitung in der Gleichung erfordert, ohne welche dieselbe nicht gebraucht werden kann, wie wir hier in verschiedenen Fällen dargethan haben.