erhalten wir $(a+b)^{-2} = \frac{1}{(a+b)^2} = \frac{1}{a^2} - \frac{2}{1}\cdot\frac{b}{a^3} + \frac{2}{1}\cdot\frac{3}{2}\frac{b^2}{a^4}$, $-\frac{2}{1}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\frac{b^3}{a^5} + \frac{2}{1}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{5}{4}\frac{b^4}{a^6}$ ꝛc. Nun aber ist $\frac{2}{1} = 2$, $\frac{2}{1}\cdot\frac{3}{2} = 3$, $\frac{2}{1}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3} = 4$, $\frac{2}{1}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{5}{4} = 5$ ꝛc. Also werden wir haben:

$$\frac{1}{(a+b)^2} = \frac{1}{a^2} - 2\frac{b}{a^3} + 3\frac{b^2}{a^4} - 4\frac{b^3}{a^5} + 5\frac{b^4}{a^6} - 6\frac{b^5}{a^7} + 7\frac{b^6}{a^8} \text{ ꝛc.}$$

373. Setzen wir weiter $n = -3$, so bekommen wir eine Reihe für $(a+b)^{-3}$, das ist für $\frac{1}{(a+b)^3}$. Die Coefficienten werden also sein:

$$\frac{n}{1} = -\frac{3}{1},\ \frac{n-1}{2} = -\frac{4}{2},\ \frac{n-2}{3} = -\frac{5}{3},\ \frac{n-3}{4} = -\frac{6}{4} \text{ ꝛc.}$$

Die Potenzen von a werden sein: $a^n = \frac{1}{a^3}$, $a^{n-1} = \frac{1}{a^4}$, $a^{n-2} = \frac{1}{a^5}$ ꝛc. Hieraus erhalten wir:

$$\frac{1}{(a+b)^3} = \frac{1}{a^3} - \frac{3}{1}\cdot\frac{b}{a^4} + \frac{3}{1}\cdot\frac{4}{2}\cdot\frac{b^2}{a^5} - \frac{3}{1}\cdot\frac{4}{2}\cdot\frac{5}{3}\frac{b^3}{a^6} + \frac{3}{1}\cdot\frac{4}{2}\cdot\frac{5}{3}\cdot\frac{6}{4}\frac{b^4}{a^7} \text{ ꝛc.}$$
$$= \frac{1}{a^3} - 3\frac{b}{a^4} + 6\frac{b^2}{a^5} - 10\frac{b^3}{a^6} + 15\frac{b^4}{a^7} - 21\frac{b^5}{a^8} + 28\frac{b^6}{a^9} - 36\frac{b^7}{a^{10}} + 45\frac{b^8}{a^{11}}$$

u. s. w. Setzen wir ferner $n = -4$, so haben wir für die Coefficienten $\frac{n}{1} = -\frac{4}{1}$, $\frac{n-1}{2} = -\frac{5}{2}$, $\frac{n-2}{3} = -\frac{6}{3}$, $\frac{n-3}{4} = -\frac{7}{4}$ ꝛc.; für die Potenzen von a aber

$$a^n = \frac{1}{a^4},\ a^{n-1} = \frac{1}{a^5},\ a^{n-2} = \frac{1}{a^6},\ a^{n-3} = \frac{1}{a^7},\ a^{n-4} = \frac{1}{a^8}$$

u. s. w. Woraus gefunden wird:

$$\frac{1}{(a+b)^4} = \frac{1}{a^4} - \frac{4}{1}\frac{b}{a^5} + \frac{4}{1}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{b^2}{a^6} - \frac{4}{1}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{6}{3}\frac{b^3}{a^7} + \frac{4}{1}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{6}{3}\cdot\frac{7}{4}\frac{b^4}{a^8} \text{ ꝛc.}$$
$$= \frac{1}{a^4} - 4\frac{b}{a^5} + 10\frac{b^2}{a^6} - 20\frac{b^3}{a^7} + 35\frac{b^4}{a^8} - 56\frac{b^5}{a^9} \text{ ꝛc.}$$

374. Hieraus können wir nun sicher schließen, daß man für jede negative Potenz auf allgemeine Art haben wird:

$$\frac{1}{(a+b)^m} = \frac{1}{a^m} - \frac{m}{1}\cdot\frac{b}{a^{m+1}} + \frac{m}{1}\cdot\frac{m+1}{2}\cdot\frac{b^2}{a^{m+2}}$$
$$-\frac{m}{1}\cdot\frac{m+1}{2}\cdot\frac{m+2}{3}\cdot\frac{b^3}{a^{m+3}} \text{ ꝛc.}$$

Mittels dieser Formel kann man alle derartige Brüche in unendliche Reihen verwandeln, selbst wenn man für m Brüche setzt, um irrationale Formeln auszudrücken.

375. Zur weiteren Erläuterung wollen wir noch folgendes aufführen.

Da wir gefunden haben, daß

$$\frac{1}{a+b} = \frac{1}{a} - \frac{b}{a^2} + \frac{b^2}{a^3} - \frac{b^3}{a^4} + \frac{b^4}{a^5} - \frac{b^5}{a^6} \text{ ꝛc.}$$

so wollen wir diese Reihe mit $a+b$ multipliciren, weil alsdann die Zahl 1 herauskommen muß, und dies bestätigt die Multiplication:

$$\begin{array}{l}
\frac{1}{a} - \frac{b}{a^2} + \frac{b^2}{a^3} - \frac{b^3}{a^4} + \frac{b^4}{a^5} - \frac{b^5}{a^6} \text{ ꝛc.} \\
a+b \\
\hline
1 - \frac{b}{a} + \frac{b^2}{a^2} - \frac{b^3}{a^3} + \frac{b^4}{a^4} - \frac{b^5}{a^5} \text{ ꝛc.} \\
+ \frac{b}{a} - \frac{b^2}{a^2} + \frac{b^3}{a^3} - \frac{b^4}{a^4} + \frac{b^5}{a^5} \text{ ꝛc.} \\
\hline
\end{array}$$

Product 1, wie nothwendig folgen muß.

376. Wir haben ferner gefunden:

$$\frac{1}{(a+b)^2} = \frac{1}{a^2} - \frac{2b}{a^3} + \frac{3b^2}{a^4} - \frac{4b^3}{a^5} + \frac{5b^4}{a^6} - \frac{6b^5}{a^7} \text{ ꝛc.}$$

Wenn man diese Reihe mit $(a+b)^2$ multiplicirt, muß ebenfalls 1 herauskommen. Es ist aber $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ und die Multiplication wird folgendes Ergebniß haben:

$$\begin{array}{l}
\frac{1}{a^2} - \frac{2b}{a^3} + \frac{3b^2}{a^4} - \frac{4b^3}{a^5} + \frac{5b^4}{a^6} - \frac{6b^5}{a^7} \text{ ꝛc.} \\
a^2 + 2ab + b^2 \\
\hline
\end{array}$$

$$\begin{array}{l}
1 - \frac{2b}{a} + \frac{3b^2}{a^2} - \frac{4b^3}{a^3} + \frac{5b^4}{a^4} - \frac{6b^5}{a^5} \text{ ꝛc.} \\
+ \frac{2b}{a} - \frac{4b^2}{a^2} + \frac{6b^3}{a^3} - \frac{8b^4}{a^4} + \frac{10b^5}{a^5} \text{ ꝛc.} \\
+ \frac{b^2}{a^2} - \frac{2b^3}{a^3} + \frac{3b^4}{a^4} - \frac{4b^5}{a^5} \text{ ꝛc.} \\
\hline
\end{array}$$

Product 1, wie die Natur der Sache erfordert.

377. Wenn man aber die für $\frac{1}{(a+b)^2}$ gefundene Reihe nur mit $a+b$ multiplicirt, muß $\frac{1}{a+b}$ herauskommen, oder die für diesen Bruch oben gefundene Reihe $\frac{1}{a} - \frac{b}{a^2} + \frac{b^2}{a^3} - \frac{b^3}{a^4} + \frac{b^4}{a^5} - \frac{b^5}{a^6}$ ꝛc., was auch die folgende Multiplication bestätigen wird.

$$\begin{array}{l}
\frac{1}{a^2} - \frac{2b}{a^3} + \frac{3b^2}{a^4} - \frac{4b^3}{a^5} + \frac{5b^4}{a^6} \text{ ꝛc.} \\
a+b \\
\hline
\frac{1}{a} - \frac{2b}{a^2} + \frac{3b^2}{a^3} - \frac{4b^3}{a^4} + \frac{5b^4}{a^5} \text{ ꝛc.} \\
\quad + \frac{b}{a^2} - \frac{2b^2}{a^3} + \frac{3b^3}{a^4} - \frac{4b^4}{a^5} \text{ ꝛc.} \\
\hline
\frac{1}{a} - \frac{b}{a^2} + \frac{b^2}{a^3} - \frac{b^3}{a^4} + \frac{b^4}{a^5} \text{ ꝛc.}
\end{array}$$

Dritter Abschnitt.

Von den Verhältnissen und Proportionen.

Kapitel 1.

Vom arithmetischen Verhältniß oder dem Unterschied zwischen zwei Zahlen.

378. Entweder sind zwei Größen einander gleich, oder sie sind es nicht. In letzterem Falle ist eine größer als die andere, und wenn man nach ihrer Ungleichheit fragt, kann dies

auf zweierlei Weise geschehen. Man kann fragen, um wie viel die eine größer sei als die andere. Man kann aber auch fragen, wie viel mal die eine größer sei als die andere. In beiden Fällen wird die Beziehung der Größen zu einander ein Verhältniß genannt, und das erste pflegt ein arithmetisches, das letztere aber ein geometrisches Verhältniß genannt zu werden. Diese Benennungen haben aber mit der Sache selbst keine Gemeinschaft, sondern sind willkürlich eingeführt worden.

379. Es versteht sich hier von selbst, daß die Größen von einerlei Art sein müssen, weil sonst Nichts über ihre Gleichheit oder Ungleichheit bestimmt werden kann. Denn es würde ungereimt sein, wenn Jemand z. B. fragen wollte, ob 2 Pfund und 3 Ellen einander gleich wären oder nicht? Daher ist hier überall von Größen derselben Art die Rede, und da sich dieselben immer durch Zahlen angeben lassen, wird, wie schon anfänglich gesagt worden, hier nur von Zahlen gehandelt.

380. Wenn also in Bezug auf zwei Zahlen gefragt wird, um wie viel die eine größer sei, als die andere, wird durch die Antwort ihr arithmetisches Verhältniß bestimmt. Da nun dies geschieht, wenn man den Unterschied zwischen den beiden Zahlen angiebt, so ist ein arithmetisches Verhältniß nichts anderes als der Unterschied zwischen zwei Zahlen. Das letztere Wort (Unterschied) wird aber hier häufig gebraucht, so daß das Wort Verhältniß nur allein für die sogenannten geometrischen Verhältnisse beibehalten wird.

381. Der Unterschied zwischen zwei Zahlen wird aber gefunden, wenn man die kleinere von der größern subtrahirt, und dadurch erhält man die Antwort auf die Frage, um wie viel die eine größer sei als die andere. Wenn also die beiden Zahlen einander gleich sind, so ist der Unterschied Nichts oder Null; und wenn man fragt, um

wie viel die eine größer sei als die andere, muß man antworten, um Nichts. Da z. B. $6 = 2 \cdot 3$, so ist der Unterschied zwischen 6 und $2 \cdot 3$ Nichts.

382. Sind aber die beiden Zahlen ungleich wie 5 und 3 und man fragt, um wie viel 5 größer sei als 3, so ist die Antwort, um 2; was gefunden wird, wenn man 3 von 5 subtrahirt. Ebenso ist 15 um 5 größer als 10, und 20 ist um 8 größer als 12.

383. Hier sind also drei Dinge zu betrachten: erstlich die größere Zahl, zweitens die kleinere, und drittens der Unterschied. Diese drei Dinge haben unter sich eine solche Verbindung, daß man immer aus zwei derselben das dritte finden kann. Es sei die größere $= a$, die kleinere $= b$, und der Unterschied, welcher auch die Differenz genannt wird, $= d$, so wird der Unterschied d gefunden, wenn man b von a subtrahirt, so daß $d = a - b$; woraus erhellt, wie man, wenn a und b gegeben sind, d findet.

384. Wenn aber die kleinere Zahl b nebst dem Unterschied d gegeben ist, wird die größere daraus gefunden, wenn man den Unterschied zu der kleineren Zahl addirt; daher bekommt man die größere $a = b + d$. Denn wenn man von $b + d$ die kleinere b abzieht, so bleibt d übrig, welches der gegebene Unterschied ist. Gesetzt, die kleinere Zahl sei 12 und der Unterschied 8, so wird die größere $= 20$ sein.

385. Wenn aber die größere Zahl a nebst dem Unterschied d gegeben ist, wird die kleinere b gefunden, wenn man den Unterschied von der größeren Zahl subtrahirt. Daher bekommt man $b = a - d$. Denn wenn ich die Zahl $a - d$ von der größeren a subtrahire, so bleibt d übrig, welches der gegebene Unterschied ist.

386. Diese drei Zahlen a, b, d sind also derartig mit einander verbunden, daß man daraus die drei folgenden Bestimmungen erhält. Erstens hat man $d = a - b$,

zweitens $a = b + d$ und drittens $b = a - d$, und wenn von diesen drei Vergleichungen eine wahr ist, so sind es auch die beiden andern nothwendig. Wenn daher überhaupt $z = x + y$, so ist nothwendig $y = z - x$ und $x = z - y$.

387. Bei einem solchen arithmetischen Verhältniß ist zu merken, daß wenn zu den beiden Zahlen a und b eine beliebige Zahl c entweder addirt, oder davon subtrahirt wird, der Unterschied derselbe bleibt. Also wenn d der Unterschied ist zwischen a und b, so ist auch d der Unterschied zwischen den beiden Zahlen $a + c$ und $b + c$, und auch zwischen $a - c$ und $b - c$. Da z. B. zwischen den Zahlen 20 und 12 der Unterschied 8 ist, so bleibt auch dieser Unterschied, wenn man zu denselben Zahlen 20 und 12 eine Zahl nach Belieben entweder addirt oder davon subtrahirt.

388. Der Beweis hievon ist offenbar. Denn wenn $a - b = d$, so ist auch $(a + c) - (b + c) = d$. Ebenso wird auch $(a - c) - (b - c) = d$ sein.

389. Wenn die beiden Zahlen a und b verdoppelt werden, so wird auch der Unterschied zweimal so groß. Wenn also $a - b = d$, so wird $2a - 2b = 2d$ sein; und allgemein wird man haben $na - nb = nd$, was man auch immer für eine Zahl für n nimmt.

Kapitel 2.

Von den arithmetischen Proportionen.

390. Wenn zwei arithmetische Verhältnisse einander gleich sind, so wird die Gleichheit derselben eine arithmetische Proportion genannt.

Also wenn $a - b = d$ und auch $p - q = d$, so daß der Unterschied zwischen den Zahlen p und q ebenso groß ist, als zwischen den Zahlen a und b; so bilden diese vier Zahlen eine arithmetische Proportion, welche so geschrieben wird $a - b = p - q$, wodurch deutlich angegeben wird,

daß der Unterschied zwischen a und b ebenso groß als zwischen p und q ist.

391. Eine arithmetische Proportion besteht demnach aus vier Gliedern, welche so beschaffen sein müssen, daß wenn man das zweite von dem ersten subtrahirt, ebenso viel übrig bleibt, als wenn man das vierte von dem dritten subtrahirt. Also bilden die Zahlen 12, 7, 9, 4, eine arithmetische Proportion, weil $12 - 7 = 9 - 4$.

392. Wenn man eine arithmetische Proportion hat, wie $a - b = p - q$, so lassen sich darin das zweite und dritte Glied verwechseln und es wird auch $a - p = b - q$ sein. Denn da $a - b = p - q$, so addire man erstlich beiderseits b und da hat man $a = b + p - q$. Alsdann subtrahrie man beiderseits p, so bekommt man $a - p = b - q$. Da also $12 - 7 = 9 - 4$, so ist auch $12 - 9 = 7 - 4$.

393. In jeder arithmetischen Proportion kann man auch das erste Glied mit dem zweiten und zugleich das dritte mit dem vierten vertauschen. Denn wenn $a - b = p - q$, so ist auch $b - a = q - p$. Denn $b - a$ ist das Negative von $a - b$ und ebenso ist auch $q - p$ das Negative von $p - q$. Da nun $12 - 7 = 9 - 4$, so ist auch $7 - 12 = 4 - 9$.

394. Besonders aber ist bei jeder arithmetischen Proportion diese Haupteigenschaft wohl zu beachten, daß die Summe des zweiten und dritten Gliedes immer ebenso groß ist, als die Summe des ersten und vierten Gliedes. Man pflegt hiefür auch zu sagen: die Summe der mittlern Glieder ist so groß wie die Summe der äußern. Also da $12 - 7 = 9 - 4$, so ist $7 + 9 = 12 + 4$, denn jedes macht 16.

395. Um dies zu beweisen, setze man $a - b = p - q$. Man addire beiderseits $b + q$, so bekommt man $a + q = b + p$, also die Summe des ersten und vierten ist gleich der Summe des zweiten und dritten Gliedes. Umgekehrt

aber, wenn vier Zahlen wie a, b, p, q so beschaffen sind, daß die Summe der zweiten und dritten so groß ist wie die Summe der ersten und vierten, nämlich daß $b + p = a + q$, kann man daraus den Schluß ziehen, daß diese Zahlen in einer arithmetischen Proportion stehen, und es wird $a - b = p - q$ sein. Denn da $a + q = b + p$, so subtrahire man beiderseits $b + q$, und da bekommt man $a - b = p - q$.

Da nun die Zahlen 18, 13, 15, 10, so beschaffen sind, daß die Summe der mittlern $13 + 15 = 28$ der Summe der äußern $18 + 10 = 28$ gleich ist, so stehen dieselben auch in arithmetischer Proportion und folglich $18 - 13 = 15 - 10$.

396. In Folge dieser Eigenschaft kann man leicht die Frage beantworten, wie man, wenn von einer arithmetischen Proportion die drei ersten Glieder gegeben sind, daraus das vierte findet. Es seien die drei ersten Glieder a, b, p und für das vierte, das gefunden werden soll, schreibe man q, so wird man haben $a + q = b + p$. Nun subtrahire man beiderseits a, so bekommt man $q = b + p - a$. Also wird das vierte Glied gefunden, wenn man das zweite und dritte addirt und von der Summe das erste subtrahirt. Es seien z. B. 19, 28, 13 die drei ersten Glieder, so ist die Summe des zweiten und dritten $= 41$, davon das erste 19 subtrahirt, bleibt 22 für das vierte Glied, und die arithmetische Proportion wird $19 - 28 = 13 - 22$, oder $28 - 19 = 22 - 13$, oder $28 - 22 = 19 - 13$ sein.

397. Wenn in einer arithmetischen Proportion das zweite Glied dem dritten gleich ist, so hat man nur drei Zahlen, welche so beschaffen sind, daß die erste weniger der andern so groß ist als die andere weniger der dritten, oder daß der Unterschied zwischen der ersten und andern so groß ist, wie der Unterschied zwischen der andern und dritten. Solche drei Zahlen sind 19, 15, 11, weil $19 - 15 = 15 - 11$,

398. Solche drei Zahlen bilden eine sogenannte stetige Proportion. Sie schreiten in arithmetischer Reihe fort, welche entweder steigt, wenn die zweite um so viel die erste übersteigt, als die dritte die andere, wie in diesem Beispiel 4, 7, 10, oder fällt, wenn die Zahlen um gleich viel kleiner werden wie 9, 5, 1.

399. Es seien die Zahlen a, b, c in einer arithmetischen Reihe, so muß $a - b = b - c$ sein, woraus bei der Gleichheit der mittlern und der äußern Summe $2b = a + c$ folgt. Nimmt man beiderseits a weg, so bekommt man $c = 2b - a$.

400. Wenn also von einer arithmetischen Reihe die zwei ersten Glieder a, b gegeben sind, so wird daraus das dritte gefunden, wenn man das zweite verdoppelt und davon das erste subtrahirt. Es seien 1 und 3 die zwei ersten Glieder einer arithmetischen Reihe, so wird das dritte sein $= 2 \cdot 3 - 1 = 5$, und aus den Zahlen 1, 3, 5 hat man diese Proportion $1 - 3 = 3 - 5$.

401. Man kann nach dieser Regel weiter fortschreiten und wie man aus dem ersten und zweiten das dritte gefunden hat, so kann man aus dem zweiten und dritten das vierte u. s. w. finden, und in dieser Weise die arithmetische Reihe fortsetzen, so weit man will. Es sei a das erste Glied und b das zweite, so wird das dritte $= 2b - a$; das vierte $= 4b - 2a - b = 3b - 2a$; das fünfte $6b - 4a - 2b + a = 4b - 3a$; das sechste $= 8b - 6a - 3b + 2a = 5b - 4a$; das siebente $= 10b - 8a - 4b + 3a = 6b - 5a$ rc.

Kapitel 3.

Von den arithmetischen Reihen.

402. Eine Reihe Zahlen, welche immer um gleich viel wachsen und abnehmen, aus so viel Gliedern dieselbe auch immer bestehen mag, wird eine **arithmetische Reihe** der Progression genannt.

Also bilden die natürlichen Zahlen der Ordnung nach geschrieben: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 rc. eine arithmetische Reihe, weil dieselben immer um eins steigen und diese Reihe: 25, 22, 19, 16, 13, 10, 7, 4, 1 rc. ist auch eine arithmetische Reihe, weil diese Zahlen immer um 3 abnehmen.

403. Die Zahl, um welche die Glieder einer arithmetischen Reihe größer oder kleiner werden, wird die **Differenz** oder der **Unterschied** genannt. Wenn also das erste Glied nebst der Differenz gegeben ist, kann man die arithmetische Reihe so weit man will fortsetzen. Es sei z. B. das erste Glied $= 2$ und die Differenz $= 3$, so wird die steigende Reihe sein:

2, 5, 8, 11, 14, 17, 20, 23, 26, 29 rc.

in der jedes Glied gefunden wird, wenn man zu dem vorhergehenden die Differenz addirt.

404. Man pflegt über die Glieder einer solchen arithmetischen Reihe die natürlichen Zahlen 1, 2, 3, 4 rc. zu schreiben, damit man sogleich sehen kann, das wievielte Glied jedes sei, und die also darüber geschriebenen Zahlen werden **Zeiger** genannt; das obige Beispiel kommt daher so zu stehen:

Zeiger:	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9,	10.	
Arith. Reihe:	2,	5,	8,	11,	14,	17,	20,	23,	26,	29	rc.

woraus man sieht, daß 29 das zehnte Glied ist.

405. Es sei a das erste Glied und d die Differenz, so wird die arithmetische Reihe also folgende sein:

1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,
a,	$a+d$,	$a+2d$,	$a+3d$,	$a+4d$,	$a+5d$,	$a+6d$,	$a+7d$ rc.

Hieraus kann man jedes Glied finden, ohne daß man alle vorhergehenden zu kennen braucht, und zwar allein aus dem ersten Gliede a und der Differenz d. Also wird z. B. das zehnte Glied sein $= a+9d$, das hundertste $= a+99d$, und allgemein ausgedrückt wird das nte Glied $a+(n-1)d$ sein.

406. Wenn die arithmetische Reihe irgendwo abgebrochen wird, hat man hauptsächlich das erste Glied und das letzte zu beachten, und der Zeiger des letzten wird die Anzahl der Glieder anzeigen. Wenn also das erste Glied $= a$, die Differenz $= d$ und die Anzahl der Glieder $= n$, so ist das letzte Glied $= a + (n - 1)d$. Dasselbe wird also gefunden, wenn man die Differenz **mit 1 weniger als die Anzahl der Glieder multiplicirt, und dazu das erste Glied addirt.** Man habe z. B. eine arithmetische Reihe von 100 Gliedern, wovon das erste $= 4$ und die Differenz $= 3$, so wird das letzte Glied $99 \cdot 3 + 4 = 301$ sein.

407. Hat man das erste Glied $= a$ und das letzte $= z$ nebst der Anzahl der Glieder $= n$, so kann man daraus die Differenz $= d$ finden. Denn da das letzte Glied $z = a + (n - 1)d$ ist, so erhält man, wenn man beiderseits a subtrahirt, $z - a = (n - 1)d$. Wenn man also von dem letzten Gliede das erste subtrahirt, hat man die Differenz mit 1 weniger als die Anzahl der Glieder multiplicirt; oder $z - a$ ist das Product von $(n - 1)$ und d. Man braucht also nur $z - a$ durch $n - 1$ zu dividiren, so bekommt man die Differenz $d = \frac{z-a}{n-1}$, woraus die Regel sich ergiebt: **Man subtrahirt vom letzten Glied das erste, den Rest dividirt man durch die Anzahl der Glieder weniger eins: alsdann ist der Quotient die Differenz;** woraus man die ganze Reihe bestimmen kann.

408. Betrachten wir z. B. eine arithmetische Reihe von 9 Gliedern, wovon das erste Glied 2 und das letzte 26 sei, und es sei aufgegeben, die Differenz dieser Reihe zu finden. Dem angegebenen Verfahren entsprechend muß man das erste Glied 2 von dem letzten 26 subtrahiren und den Rest 24 durch $9 - 1$, das ist durch 8 dividiren.

So bekommt man die Differenz $= 3$, und die Reihe selbst wird sein:

1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9.
2,	5,	8,	11,	14,	17,	20,	23,	26.

Nehmen wir, um ein anderes Beispiel zu geben, an, das erste Glied sei 1, das letzte 2, und die Anzahl der Glieder 10, und es werde die arithmetische Reihe verlangt. Hier bekommt man also als Differenz $\frac{2-1}{10-1} = \frac{1}{9}$; und die verlangte Reihe wird sein:

1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9,	10.
1,	$1\frac{1}{9}$,	$1\frac{2}{9}$,	$1\frac{3}{9}$,	$1\frac{4}{9}$,	$1\frac{5}{9}$,	$1\frac{6}{9}$,	$1\frac{7}{9}$,	$1\frac{8}{9}$,	2.

Noch ein Beispiel. Es sei das erste Glied $2\frac{1}{3}$, das letzte $12\frac{1}{2}$ und die Anzahl der Glieder 7. Hieraus erhält man die Differenz $\frac{12\frac{1}{2} - 2\frac{1}{3}}{7-1} = \frac{10\frac{1}{6}}{6} = \frac{61}{36} = 1\frac{25}{36}$; folglich wird die Reihe sein:

1,	2,	3,	4,	5,	6,	7.
$2\frac{1}{3}$,	$4\frac{1}{36}$,	$5\frac{13}{18}$,	$7\frac{5}{12}$,	$9\frac{1}{9}$,	$10\frac{29}{36}$,	$12\frac{1}{2}$.

409. Wenn ferner das erste Glied a und das letzte z, nebst der Differenz d gegeben ist, so kann man daraus die Anzahl der Glieder n finden. Denn da $z - a = (n - 1)d$, so dividire man beiderseits mit d, und man bekommt $\frac{z-a}{d} = n - 1$. Da nun n um 1 größer ist als $n - 1$, so wird $n = \frac{z-a}{d} + 1$; **folglich findet man die Anzahl der Glieder, wenn man den Unterschied zwischen dem ersten und letzten Glied $z - a$ durch die Differenz dividirt und zum Quotienten $\frac{z-a}{d}$ noch eins addirt.**

Es sei z. B. das erste Glied $= 4$, das letzte $= 100$, und die Differenz $= 12$, so wird die Anzahl der Glieder sein $\frac{100-4}{12} + 1 = 9$, und diese neun Glieder sind folgende:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.
4, 16, 28, 40, 52, 64, 76, 88, 100.

Es sei das erste Glied $= 2$, das letzte $= 6$, und die Differenz $= 1\frac{1}{3}$, so wird die Anzahl der Glieder sein $\frac{4}{1\frac{1}{3}} + 1 = 4$, und diese vier Glieder sind:

1, 2, 3, 4.
2, $3\frac{1}{3}$, $4\frac{2}{3}$, 6.

Es sei ferner das erste Glied $= 3\frac{1}{3}$, das letzte $= 7\frac{2}{3}$, und die Differenz $= 1\frac{4}{9}$, so wird die Anzahl der Glieder $= \frac{7\frac{2}{3} - 3\frac{1}{3}}{1\frac{4}{9}} + 1 = 4$, und diese vier Glieder sind:

1, 2, 3, 4.
$3\frac{1}{3}$, $4\frac{7}{9}$, $6\frac{2}{9}$, $7\frac{2}{3}$.

410. Es ist aber hier wohl zu merken, daß die Anzahl der Glieder nothwendig eine ganze Zahl sein muß. Wenn man also in obigem Beispiel für n einen Bruch gefunden hätte, so wäre die Aufgabe ungereimt gewesen.

Wenn folglich für $\frac{z - a}{d}$ keine ganze Zahl gefunden würde, so ließe sich diese Aufgabe nicht lösen, und man müßte antworten, daß etwas Unmögliches verlangt worden sei. Daher muß sich in derartigen Aufgaben die Zahl $z - a$ durch d theilen lassen.

411. In jeder arithmetischen Reihe sind also folgende vier Stücke zu betrachten:

I. das erste Glied a, II. das letzte Glied z,
III. die Differenz d, IV. die Anzahl der Glieder n,

welche so beschaffen sind, daß wenn drei derselben bekannt, das vierte daraus bestimmt werden kann, als:

I. Wenn a, d und n bekannt sind, hat man $z = a + (n-1)d$.
II. Wenn z, d und n bekannt sind, hat man $a = z - (n-1)d$.
III. Wenn a, z und n bekannt sind, hat man $d = \frac{z - a}{n - 1}$.
IV. Wenn a, z und d bekannt sind, hat man $n = \frac{z - a}{d} + 1$.

Kapitel 4.

Von der Summirung der arithmetischen Reihen.

412. Wenn eine arithmetische Reihe vorgelegt ist, wird man selbstverständlich ihre Summe finden, wenn man alle Glieder addirt. Da nun diese Addition sehr weitläufig sein würde, wenn die Reihe aus vielen Gliedern besteht, so kann eine Regel gegeben werden, mit deren Hülfe diese Summe ganz leicht gefunden wird.

413. Wir wollen erstlich eine solche bestimmte Reihe betrachten, in der das erste Glied $= 2$, die Differenz $= 3$, das letzte Glied $= 29$, und die Anzahl der Glieder $= 10$ ist:

Zeiger 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10.
Reihe 2, 5, 8, 11, 14, 17, 20, 23, 26, 29.

Hier ist nun die Summe des ersten und letzten Gliedes $= 31$, die Summe des zweiten und vorletzten $= 31$, die Summe des dritten und drittletzten $= 31$, die Summe des vierten und viertletzten $= 31$, u. s. w., woraus man sieht, daß immer zwei Glieder, die von dem ersten und letzten gleich weit entfernt sind, zusammen genommen ebenso viel betragen, als das erste und letzte zusammen.

414. Der Grund davon fällt auch sogleich in die Augen. Denn wenn das erste Glied gesetzt wird $= a$ und das letzte $= z$, die Differenz aber $= d$, so ist die Summe des ersten und letzten $= a + z$. Demnächst ist das zweite Glied $a + d$ und das vorletzte $= z - d$, welche zusammen genommen $a + z$ machen. Ferner ist das dritte Glied $a + 2d$ und das drittletzte $= z - 2d$, welche zusammen betragen $a + z$, woraus die Wahrheit des obigen Satzes erhellt.

415. Um nun die Summe der obigen Reihe zu finden, nämlich von

$$2 + 5 + 8 + 11 + 14 + 17 + 20 + 23 + 26 + 29,$$

schreibe man darunter dieselbe Reihe rückwärts, und addire Glied für Glied wie folgt:

$$\begin{array}{l} 2 + 5 + 8 + 11 + 14 + 17 + 20 + 23 + 26 + 29 \\ \underline{29 + 26 + 23 + 20 + 17 + 14 + 11 + 8 + 5 + 2} \\ 31 + 31 + 31 + 31 + 31 + 31 + 31 + 31 + 31 + 31 \end{array}$$

Diese aus lauter gleichen Gliedern bestehende Reihe ist offenbar zweimal so groß als die Summe unserer Reihe. Die Anzahl dieser gleichen Glieder ist 10, eben wie in der Reihe, und also ist ihre Summe $= 10 \,.\, 31 = 310$. Da nun diese Summe zweimal so groß ist, als die Summe der arithmetischen Reihe, so wird die richtige Summe $= 155$ sein.

416. Wenn man auf diese Art mit jeder arithmetischen Reihe verfährt, wovon das erste Glied $= a$, das letzte $= z$, und die Anzahl der Glieder $= n$, indem man dieselbe Reihe rückwärts darunter schreibt und Glied für Glied addirt, so bekommt man für jedes Glied $a + z$, deren Anzahl $= n$, folglich ist die Summe derselben $= n(a + z)$, welche zweimal so groß ist, als die Summe der Reihe; daher ist die Summe der arithmetischen Reihe selbst $= \frac{n(a + z)}{2}$.

417. Hieraus ergiebt sich nun folgende leichte Regel, um die Summe jeder arithmetischen Reihe zu finden:

Man multiplicire die Summe des ersten und letzten Gliedes mit der Anzahl der Glieder, so wird die Hälfte dieses Products die Summe der ganzen Reihe angeben.

Oder, was dasselbe ist: man multiplicire die Summe des ersten und letzten Gliedes mit der halben Anzahl der Glieder.

Oder auch: man multiplicire die halbe Summe des ersten und letzten Gliedes mit der ganzen Anzahl der Glieder, so bekommt man die Summe der ganzen Reihe.

418. Es ist nöthig, diese Regel mit einigen Beispie-

len zu erläutern. Es sei demnach die Reihe der natürlichen Zahlen 1, 2, 3 bis 100 gegeben, deren Summe gesucht werden soll. Diese wird nach der ersten Regel sein $\frac{100 \,.\, 101}{2} = 50 \,.\, 101 = 5050$.

Es wird ferner gefragt, wie viel Schläge eine Schlaguhr in 12 Stunden macht? Zu diesem Behufe müssen die Zahlen 1, 2, 3 bis 12 addirt werden, die Summe wird also $\frac{12 \,.\, 13}{2} = 6 \,.\, 13 = 78$ sein.

Die Summe dieser Reihe bis 1000 fortgesetzt, würde 500500; bis 10000 fortgesetzt, $= 50005000$ sein.

419. Aufgabe. Jemand kauft ein Pferd unter der Bedingung, daß er für den ersten Hufnagel 5 Groschen, für den zweiten 8, für den dritten 11, und immer 3 Groschen mehr für jeden folgenden zahlen soll. Es sind aber im Ganzen 32 Nägel vorhanden. Wieviel muß er für das Pferd bezahlen?

Hier wird also die Summe einer arithmetischen Reihe deren erstes Glied 5, die Differenz $= 3$, und die Anzahl der Glieder $= 32$ ist, gesucht.

Hier muß nun zuvörderst das letzte Glied gesucht werden, welches nach obiger Regel gefunden wird $= 5 + 31 \,.\, 3 = 98$, und hieraus ergiebt sich die gesuchte Summe $\frac{103 \,.\, 32}{2} = 103 \,.\, 16$; also kostet das Pferd 1648 Groschen, also 54 Thaler 28 Groschen.

420. Es sei auf allgemeine Art das erste Glied $= a$, die Differenz $= d$, und die Anzahl der Glieder $= n$, woraus die Summe der ganzen Reihe gefunden werden soll. Da nun das letzte Glied sein muß $= a + (n - 1)d$, so ist die Summe des ersten und letzten Gliedes $= 2a + (n - 1)d$, welche mit der Anzahl der Glieder n multiplicirt $2na + n(n - 1)d$ giebt, daher die gesuchte Summe $= na + \frac{n(n-1)}{2}d$ sein wird.

Nach dieser Formel, weil in dem obigen Beispiel $a = 5$, $d = 3$, und $n = 32$ war, erhält man die Summe $5 \,.\, 32 + \frac{31 \,.\, 32 \,.\, 3}{2} = 160 + 1488 = 1648$ wie vorher.

421. Wenn die Reihe der natürlichen Zahlen 1, 2, 3 und so fort bis n addirt werden soll, so hat man, um diese Summe zu finden, das erste Glied $= 1$, das letzte $= n$ und die Anzahl der Glieder $= n$, woraus die Summe gefunden wird $\frac{n^2 + n}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$. Setzt man $n = 1766$, so wird die Summe aller Zahlen von 1 bis 1766 sein $= 883 \,.\, 1767 = 1560261$.

422. Es sei gegeben die Reihe der ungeraden Zahlen 1, 3, 5, 7 etc., welche bis auf n Glieder fortgesetzt sind, wovon die Summe verlangt wird.

Hier ist nun das erste Glied $= 1$, die Differenz $= 2$, die Anzahl der Glieder $= n$; daraus wird das letzte Glied sein $1 + (n-1)2 = 2n - 1$, daraus erhält man die gesuchte Summe $= n^2$.

Folglich braucht man nur die Anzahl der Glieder mit sich selbst zu multipliciren. Man mag also von dieser Reihe so viel Glieder addiren als man will, so ist die Summe immer ein Quadrat, nämlich das Quadrat der Anzahl der Glieder, wie aus folgendem zu ersehen.

Glied.	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9,	10	etc.
Reihe.	1,	3,	5,	7,	9,	11,	13,	15,	17,	19	etc.
Summe.	1,	4,	9,	16,	25,	36,	49,	64,	81,	100	etc.

423. Es sei ferner das erste Glied $= 1$, die Differenz $= 3$ und die Anzahl der Glieder $= n$, so hat man diese Reihe 1, 4, 7, 10 etc., wovon das letzte Glied sein wird: $1 + (n-1)3 = 3n - 2$; daher die Summe des ersten und letzten Gliedes $= 3n - 1$; folglich die Summe der Reihe $\frac{n(3n-1)}{2} = \frac{3n^2 - n}{2}$. Nimmt man $n = 20$, so ist die Summe $= 10 \,.\, 59 = 590$.

424. Es sei das erste Glied $= 1$, die Differenz $= d$, und die Anzahl der Glieder $= n$, so wird das letzte Glied sein $1 + (n-1)d$. Hierzu das erste addirt, giebt $2 + (n-1)d$ mit der Anzahl der Glieder multiplicirt $2n + n(n-1)d$, woher die Summe der Reihe $n + \frac{n(n-1)d}{2}$ sein wird.

Hier wollen wir folgendes Täfelchen anhängen:

wenn $d = 1$, so ist die Summe $n + \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n^2 + n}{2}$

$d = 2$, „ „ „ „ $n + \frac{2n(n-1)}{2} = n^2$

$d = 3$, „ „ „ „ $n + \frac{3n(n-1)}{2} = \frac{3n^2 - n}{2}$

$d = 4$, „ „ „ „ $n + \frac{4n(n-1)}{2} = 2n^2 - n$

$d = 5$, „ „ „ „ $n + \frac{5n(n-1)}{2} = \frac{5n^2 - 3n}{2}$

$d = 6$, „ „ „ „ $n + \frac{6n(n-1)}{2} = 3n^2 - 2n$

$d = 7$, „ „ „ „ $n + \frac{7n(n-1)}{2} = \frac{7n^2 - 5n}{2}$

$d = 8$, „ „ „ „ $n + \frac{8n(n-1)}{2} = 4n^2 - 3n$

$d = 9$, „ „ „ „ $n + \frac{9n(n-1)}{2} = \frac{9n^2 - 7n}{2}$

$d = 10$, „ „ „ „ $n + \frac{10n(n-1)}{2} = 5n^2 - 4n$

u. s. w.

Kapitel 5.

Von den vieleckigen Zahlen.

425. Die Summirung der arithmetischen Reihen, welche von 1 anfangen und deren Differenz entweder 1, 2 oder 3, oder eine andere beliebige ganze Zahl ist, leitet uns auf die Lehre von den vieleckigen Zahlen, welche entstehen, wenn man einige Glieder solcher Reihen addirt.

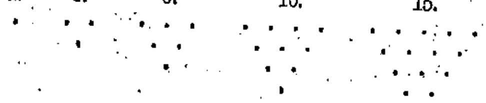
426. Setzt man die Differenz $= 1$, indem das erste

Glied beständig 1 ist, so entsteht daher die arithmetische Reihe $= 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12$ etc. Nimmt man nun in derselben die Summe von einem, zweien, dreien, vieren etc. Gliedern, so entsteht daraus diese Reihe von Zahlen:

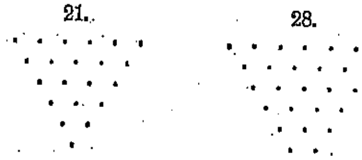
1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, 45, 55, 66, 78 etc.

so daß $1 = 1$, $3 = 1 + 2$, $6 = 1 + 2 + 3$, $10 = 1 + 2 + 3 + 4$ etc. Diese Zahlen werden dreieckige Zahlen genannt, weil sich so viel Punkte als eine solche Zahl anzeigt, durch ein Dreieck darstellen lassen, wie aus folgendem zu ersehen.

1. 3. 6. 10. 15.



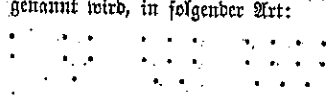
21. 28.



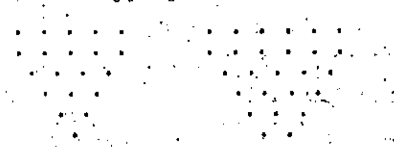
etc.

427. In jedem dieser Dreiecke sieht man, wie viel Punkte jede Seite hat. Im ersten ist nur 1, in dem zweiten 2, in dem dritten 3, in dem vierten 4, u. s. w. Also nach der Anzahl der Punkte in einer Seite, welche schlechtweg die Seite genannt wird, verhalten sich die dreieckigen Zahlen, oder die Anzahl aller Punkte, welche schlechtweg ein Dreieck genannt wird, in folgender Art:

Seite
Dreieck



Seite
Dreieck



428. Hier entsteht die Frage, wie aus der gegebenen Seite das Dreieck gefunden werden soll? Diese Frage ist leicht zu beantworten, durch Anwendung der in 421 gegebenen Regel.

Denn es sei die Seite $= n$, so wird das Dreieck sein $1 + 2 + 3 + 4 + \ldots n$, deren Summe $= \frac{n^2 + n}{2}$, folglich wird das Dreieck $\frac{n^2 + n}{2}$. Ist also $n = 1$, so wird das Dreieck $= 1$.

Ist $n = 2$ so ist das Dreieck $= 3$.
$n = 3$ „ „ „ „ $= 6$.
$n = 4$ „ „ „ „ $= 10$ u. s. w.

Nimmt man $n = 100$, so wird das Dreieck $= 5050$ etc.

429. Diese Formel $\frac{n^2 + n}{2}$ wird nun die Generalformel für alle dreieckigen Zahlen genannt, weil sich aus derselben für jede Seite, die durch n angedeutet wird, die dreieckige Zahl finden läßt.

Dieselbe Formel kann auch also dargestellt werden $\frac{n(n+1)}{2}$, was zur Erleichterung der Rechnung dient, weil entweder n oder $n + 1$ eine gerade Zahl ist und sich durch 2 theilen läßt.

Also wenn $n = 12$, so ist das Dreieck $= \frac{12 \,.\, 13}{2} = 6 \,.\, 13 = 78$. Ist $n = 15$, so ist das Dreieck $= \frac{15 \,.\, 16}{2} = 15 \,.\, 8 = 120$ etc.

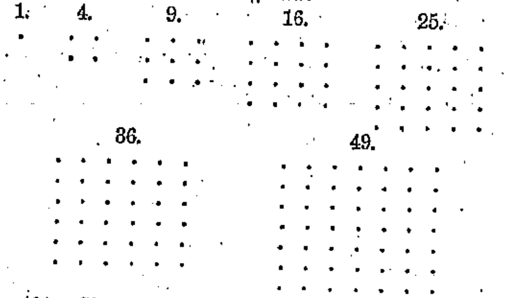
430. Setzt man die Differenz = 2, so hat man diese arithmetische Reihe:

1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21 rc.,

deren Summen, in gleicher Art genommen, die Reihe bilden:

1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, 121 rc.,

welche Zahlen viereckige Zahlen genannt werden, und eben diejenigen sind, welche oben (115) Quadrate genannt wurden. Es lassen sich nämlich so viel Punkte, als eine solche Zahl angiebt, als Viereck aufstellen:



431. Hier sieht man, daß die Seite eines solchen Vierecks ebenso viel Punkte enthält, als die Quadratwurzel davon angiebt. Also ist von der Seite 5 das Viereck 25, und von der Seite 6 das Viereck 36; überhaupt aber wenn die Seite n ist, wodurch die Anzahl der Glieder dieser Reihe 1, 3, 5, 7 rc. bis n angedeutet wird, so ist das Viereck die Summe derselben Glieder, welche oben (422) gefunden worden $= n^2$. Von diesem Viereck oder Quadrat aber ist schon oben (115) ausführlich gehandelt worden.

432. Setzt man die Differenz = 3 und nimmt in gleicher Art die Summen, so werden dieselben fünfeckige Zahlen genannt, obgleich sich dieselben nicht mehr so gut

durch Punkte darstellen lassen. Dieselben schreiten demnach folgendermaßen fort.

Zeiger	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9,	10,	11
Arith. Reihe	1,	4,	7,	10,	13,	16,	19,	22,	25,	28,	31
Fünfeck	1,	5,	12,	22,	35,	51,	70,	92,	117,	145,	176

u. s. w., und der Zeiger giebt die Seite jedes Fünfecks an.

433. Wenn also die Seite n gesetzt wird, so ist nach der in 423 angegebenen Formel die fünfeckige Zahl $= \frac{3n^2 - n}{2} = \frac{n(3n-1)}{2}$. Wenn z. B. $n = 7$, so ist das Fünfeck 70. Will man die fünfeckige Zahl von der Seite 100 wissen, so setzt man $n = 100$ und bekommt 14950.

434. Setzt man die Differenz = 4, so erhält man auf diese Art die sechseckigen Zahlen, welche also fortschreiten.

Zeiger	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9,	10.
Arith. Reihe	1,	5,	9,	13,	17,	21,	25,	29,	33,	37.
Sechseck	1,	6,	15,	28,	45,	66,	91,	120,	153,	190.

Der Zeiger giebt wiederum die Seite jedes Sechsecks an.

435. Wenn also die Seite n ist, so wird die sechseckige Zahl nach der in 424 gegebenen Formel $= 2n^2 - n = n(2n-1)$, wobei zu bemerken, daß alle diese sechseckigen Zahlen zugleich dreieckige Zahlen sind. Denn wenn man in diesen immer eine überspringt, so erhält man die sechseckige.

436. Auf gleiche Weise findet man die siebeneckigen, achteckigen, neuneckigen Zahlen u. s. w., deren Generalformeln wir hier sämmtlich angeben wollen. Wenn also die Seite n ist, so wird sein:

das Dreieck $= \frac{n^2 + n}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$

Viereck $= \frac{2n^2 + 0n}{2} = n^2$

Fünfeck $= \frac{3n^2 - n}{2} = \frac{n(3n-1)}{2}$

das Sechseck $= \frac{4n^2 - 2n}{2} = 2n^2 - n = n(2n-1)$

Siebeneck $= \frac{5n^2 - 3n}{2} = \frac{n(5n-3)}{2}$

Achteck $= \frac{6n^2 - 4n}{2} = 3n^2 - 2n = n(3n-2)$

Neuneck $= \frac{7n^2 - 5n}{2} = \frac{n(7n-5)}{2}$

Zehneck $= \frac{8n^2 - 6n}{2} = 4n^2 - 3n = n(4n-3)$

Elfeck $= \frac{9n^2 - 7n}{2} = \frac{n(9n-7)}{2}$

Zwölfeck $= \frac{10n^2 - 8n}{2} = 5n^2 - 4n = n(5n-4)$

Zwanzigeck $= \frac{18n^2 - 16n}{2} = 9n^2 - 8n = n(9n-8)$

Fünfundzwanzigeck $= \frac{23n^2 - 21n}{2} = \frac{n(23n-21)}{2}$

meck $= \frac{(m-2)n^2 - (m-4)n}{2}$.

Diese Tafel ist nur eine weitere Ausdehnung der in 424 angegebenen.

437. Wenn also die Seite n ist, so hat man auf allgemeine Art die meckige Zahl $= \frac{(m-2)n^2 - (m-4)n}{2}$, woraus man alle nur möglichen Zahlen finden kann, deren Seite $= n$. Wollte man daraus die zweieckigen Zahlen finden, so würde $m = 2$ und dieselbe $= n$ sein. Setzt man $m = 3$, so wird die dreieckige Zahl $= \frac{n^2 + n}{2}$. Setzt man $m = 4$, so wird die viereckige Zahl $= n^2$ rc.

438. Um diese Regel durch einige Beispiele zu erläutern, suche man die fünfundzwanzigeckige Zahl, deren Seite 36 ist. Man suche erstlich für die Seite n die fünfundzwanzigeckige Zahl, indem man in der allgemeinen Formel $m = 25$ setzt, so wird dieselbe $= \frac{23n^2 - 21n}{2}$. Nun setze man $n = 36$, so bekommt man die gesuchte Zahl = 14526.

439. **Aufgabe.** Jemand hat ein Haus gekauft und wird gefragt, für welchen Preis? Darauf antwortet er, die Zahl der Thaler, die er dafür bezahlt, sei die 365eckige Zahl von 12.

Um nun diese Zahl zu finden, wird $m = 365$ und also das 365eck von $n = \frac{363n^2 - 361n}{2}$. Nun ist also $n = 12$, woraus der gesuchte Preis des Hauses 23970 Thaler ergiebt.

Kapitel 6.

Vom geometrischen Verhältniß.

440. Das **geometrische Verhältniß** zwischen zwei Zahlen enthält die Antwort auf die Frage, wie vielmal die eine Zahl größer sei als die andere? Es wird gefunden, wenn man die eine durch die andere dividirt, da dann der Quotient den Exponenten des Verhältnisses angiebt.

441. Es sind demnach in einem geometrischen Verhältniß drei Dinge zu betrachten. Erstlich, die erste der beiden gegebenen Zahlen, welche der **Vorsatz** oder das **Vorderglied** genannt wird. Zweitens, die andere derselben, welche der **Nachsatz** oder das **Hinterglied**, heißt. Drittens der **Exponent** des Verhältnisses, welcher gefunden wird, wenn man den Vorsatz durch den Nachsatz dividirt. Wenn z. B. zwischen den Zahlen 18 und 12 das Verhältniß angezeigt werden soll, so ist 18 der Vorsatz, 12 der Nachsatz und der Exponent wird sein $\frac{18}{12} = 1\frac{1}{2}$; woraus man erkennt, daß der Vorsatz 18 den Nachsatz 12 einmal und noch $\frac{1}{2}$ mal in sich begreift.

442. Um das geometrische Verhältniß zwischen zwei Zahlen anzuzeigen, bedient man sich zweier über einander gesetzten Punkte, welche zwischen den Vorsatz und Nachsatz gesetzt werden.

Also $a : b$ zeigt das Verhältniß zwischen a und b an, welches Zeichen, wie schon oben bemerkt worden, auch die Division anzuzeigen pflegt, und eben deswegen hier gebraucht wird, weil um dieses Verhältniß zu erkennen, die Zahl a durch b getheilt werden muß. Dieses Zeichen wird mit Worten ausgesprochen: a verhält sich zu b, oder kürzer: a zu b.

443. Der Exponent eines solchen Verhältnisses wird demnach durch einen Bruch dargestellt, dessen Zähler der Vorsatz, dessen Nenner aber der Nachsatz ist. Der Deutlichkeit wegen aber muß man diesen Bruch immer in seine kleinste Form bringen, welches geschieht, wenn man den Zähler und Nenner durch ihren größten gemeinschaftlichen Theiler theilt, wie oben geschehen, da der Bruch $\frac{18}{12}$ auf $\frac{3}{2}$ gebracht worden, indem man den Zähler und Nenner durch 6 getheilt hat.

444. Die Verhältnisse sind nur in so fern unterschieden, als ihr Exponent verschieden ist, und es giebt daher so viel verschiedene Arten von Verhältnissen, als verschiedene Exponenten gefunden werden können.

Die erste Art ist nun unstreitig, wenn der Exponent 1 wird; und dieses geschieht, wenn die beiden Zahlen gleich sind, wie: $3 : 3$, $4 : 4$, $a : a$, wovon der Exponent 1 wird, und deswegen wird diese Art das Verhältniß der Gleichheit genannt.

Hierauf folgen diejenigen, deren Exponent eine ganze Zahl wird, wie $4 : 2$, wo der Exponent 2 ist. Ferner $12 : 4$, wo der Exponent 3 ist, und $24 : 6$, wo der Exponent 4 ist u. s. w.

Ferner kommen solche vor, deren Exponent durch Brüche ausgedrückt wird. So $12 : 9$, dessen Exponent $\frac{4}{3}$ oder $1\frac{1}{3}$ ist; $18 : 27$, dessen Exponent $\frac{2}{3}$ ist u. s. w.

445. Es sei nun a der Vorsatz, b der Nachsatz und der Exponent d, so haben wir schon gesehen, daß wenn a und b gegeben ist, daraus $d = \frac{a}{b}$ gefunden wird.

Ist aber der Nachsatz b nebst dem Exponenten d ge-

geben, so findet man daraus den Vorsatz $a = bd$, weil bd durch b dividirt d giebt; endlich, wenn der Vorsatz a nebst dem Exponenten d gegeben ist, so findet man daraus den Nachsatz $b = \frac{a}{d}$. Denn wenn man den Vorsatz a durch den Nachsatz $\frac{a}{d}$ dividirt, so ist der Quotient d, das ist der Exponent.

446. Jedes Verhältniß $a : b$ bleibt unverändert, wenn man den Vorsatz und Nachsatz mit derselben Zahl entweder multiplicirt oder dividirt, weil der Exponent derselbe bleibt. Denn wenn d der Exponent von $a : b$ ist, so daß $d = \frac{a}{b}$, so ist auch von diesem Verhältniß $na : nb$ der Exponent $\frac{a}{b} = d$; und von diesem Verhältniß $\frac{a}{n} : \frac{b}{n}$ ist der Exponent gleichfalls $\frac{a}{b} = d$.

447. Wenn der Exponent in die kleinste Form gebracht worden, so läßt sich daraus das Verhältniß deutlich erkennen und mit Worten ausdrücken. Nämlich wenn der Exponent auf den Bruch $\frac{p}{q}$ gebracht worden, so sagt man: $a : b = p : q$, das ist mit Worten: a zu b wie p zu q. Also da von diesem Verhältnisse $6 : 3$ der Exponent $\frac{2}{1}$ ist, oder 2, so hat man $6 : 3 = 2 : 1$. Ebenso sagt man $18 : 12 = 3 : 2$ und $24 : 18 = 4 : 3$ und ferner $30 : 45 = 2 : 3$. Läßt sich aber der Exponent nicht abkürzen, so wird auch das Verhältniß nicht deutlicher: denn wenn man sagt $9 : 7 = 9 : 7$, so wird es nicht verkürzt.

448. Wenn sich aber der Exponent auf sehr kleine Zahlen bringen läßt, so erhält man eine deutlichere Erkenntniß des Verhältnisses zwischen zwei sehr großen Zahlen. Also wenn man sagt $288 : 144 = 2 : 1$, so ist die Sache ganz deutlich; und wenn man fragt, wie sich $105 : 70$ verhalte, so antwortet man: wie $3 : 2$. Fragt man weiter

wie sich $576 : 252$ verhalte, so antwortet man: wie $16 : 7$.

449. Um also jedes Verhältniß auf das deutlichste darzustellen, muß man den Exponenten desselben auf die geringsten Zahlen zu bringen suchen, was auf einmal geschehen kann, wenn die beiden Glieder des Verhältnisses durch ihren größten gemeinschaftlichen Theiler dividirt werden. Also das Verhältniß $576 : 252$ wird auf einmal zu diesem $16 : 7$ gebracht, wenn man die beiden Zahlen 576 und 252 durch 36, welches ihr größter gemeinschaftlicher Theiler ist, dividirt.

450. Weil es nun darauf ankommt, zu wissen, wie man von zwei gegebenen Zahlen ihren größten gemeinschaftlichen Theiler findet, soll hiezu in dem folgenden Kapitel die nöthige Anleitung gegeben werden.

Kapitel 7.

Von dem größten gemeinschaftlichen Theiler zweier gegebenen Zahlen.

451. Es giebt Zahlen, welche außer 1 keinen andern gemeinschaftlichen Theiler haben, und wenn Zähler und Nenner eines Bruches so beschaffen sind, läßt sich derselbe auch in keine kleinere Form bringen.

Also sieht man, daß diese beiden Zahlen 48 und 35 keinen gemeinschaftlichen Theiler haben, obwohl jede für sich ihre besonderen Theiler hat. Deswegen kann auch das Verhältniß $48 : 35$ nicht in kleineren Zahlen ausgedrückt werden, denn obgleich sich beide durch 1 theilen lassen, werden doch dadurch die Zahlen nicht kleiner.

452. Wenn aber die Zahlen einen gemeinschaftlichen Theiler haben, wird derselbe, und sogar der größte gemeinschaftliche Theiler durch folgende Regel gefunden.

Man dividire die größere Zahl durch die kleinere; durch den überbleibenden Rest dividire man ferner den vorhergehenden Divisor, durch den hier übrigbleibenden Rest divi-

dire man wieder den letzt vorhergehenden Divisor, und auf solche Art verfahre man so lange bis die Division aufgeht; worauf dann der letzte Divisor der größte gemeinschaftliche Theiler der beiden gegebenen Zahlen sein wird.

Diese Untersuchung wird für die vorgesetzten Zahlen 576 und 252 also zu stehen kommen.

```
252|576|2
   |504|
    ---
     72|252|3
       |216|
        ---
         36|72|2
           |72|
            --
             0
```

Hier ist also der größte gemeinschaftliche Theiler 36.

453. Es wird dienlich sein, diese Regel durch einige Beispiele zu erläutern. Man suche demnach den größten gemeinschaftlichen Theiler zwischen der Zahl 504 und 312.

```
312|504|1
   |312|
    ---
    192|312|1
       |192|
        ---
        120|192|1
           |120|
            ---
             72|120|1
               | 72|
                ---
                 48|72|1
                   |48|
                    --
                    24|48|2
                      |48|
                       --
                        0
```

Also ist 24 der größte gemeinschaftliche Theiler, und deswegen läßt sich das Verhältniß $504 : 312$ auf diese Form $21 : 13$ bringen.

454. Es seien ferner diese zwei Zahlen gegeben

625 : 529, für welche der größte gemeinschaftliche Theiler gesucht werden soll:

```
529|625|1
   |529|
    96|529|5
      |480|
       49|96|1
         |49|
         47|49|1
           |47|
            2|47|23
             |46|
             1|2|2
              |2|
               0
```

Hier ist also der größte gemeinschaftliche Theiler 1, und deswegen läßt sich das Verhältniß 625 : 529 auf keine kleinere Form bringen; oder dasselbe läßt sich durch kleinere Zahlen nicht ausdrücken.

455. Es ist nun noch nöthig, den Beweis dieser Regel zu geben. Es sei a die größere und b die kleinere der gegebenen Zahlen, d aber ein gemeinschaftlicher Theiler derselben. Da sich nun sowohl a als b durch d theilen lassen, so wird sich auch $a - b$ dadurch theilen lassen, auch $a - 2b$ und $a - 3b$, und überhaupt $a - nb$.

456. Dies verhält sich auch rückwärts so; wenn sich die Zahlen b und $a - nb$ durch d theilen lassen, so muß sich auch die Zahl a dadurch theilen lassen. Denn da sich nb durch d theilen läßt, so würde sich $a - nb$ nicht durch d theilen lassen, wenn sich nicht auch a durch d theilen ließe.

457. Ferner ist zu bemerken, daß wenn d der größte gemeinschaftliche Theiler der beiden Zahlen b und $a - nb$ ist, derselbe auch der größte gemeinschaftliche Theiler

von den Zahlen a und b sein wird. Denn wenn für diese Zahlen a und b noch ein größerer gemeinschaftlicher Theiler als d vorhanden wäre, so würde derselbe auch ein gemeinschaftlicher Theiler von b und $a - nb$, folglich d nicht der größte sein. Nun aber ist d der größte gemeinschaftliche Theiler von b und $a - nb$, also muß auch d der größte gemeinschaftliche Theiler von a und b sein.

458. Diese drei Sätze vorausgesetzt, wollen wir die größere Zahl a durch die kleinere b, wie die Regel befiehlt, theilen, und für den Quotienten n annehmen, so erhält man den Rest $a - nb$, welcher immer kleiner ist als b. Da nun dieser Rest $a - nb$ mit dem Divisor b denselben größten gemeinschaftlichen Theiler hat wie die gegebenen Zahlen a und b, so theile man den vorigen Divisor b durch diesen Rest $a - nb$, und da wird wiederum der herauskommende Rest mit dem nächst vorhergehenden Divisor denselben größten gemeinschaftlichen Theiler haben, und so immer weiter.

459. Man fährt aber in dieser Art fort, bis man zu einer Division kommt, welche aufgeht oder wo kein Rest übrig bleibt. Es sei demnach p der letzte Divisor, welcher gerade etliche mal in seinem Dividendus enthalten ist, daher der Dividendus durch p theilbar sein, und folglich die Form mp haben wird; diese Zahlen p und mp lassen sich nun beide durch p theilen, und haben ganz gewiß keinen größern gemeinschaftlichen Theiler, weil sich keine Zahl durch eine größere, als sie selbst ist, theilen läßt. Daher ist auch der letzte Divisor der größte gemeinschaftliche Theiler der beiden im Anfang gegebenen Zahlen a und b, welches der Beweis der vorher gegebenen Regel ist.

460. Wir wollen noch ein Beispiel geben, indem wir von den Zahlen 1728 und 2304 den größten gemeinschaftlichen Theiler suchen. Die Rechnung geschieht dann wie folgt:


```
1728|2304|1
    |1728|
     576|1728|3
        |1728|
          0
```

Also ist 576 der größte gemeinschaftliche Theiler, und das Verhältniß 1728 : 2304 wird auf dieses gebracht 3 : 4; folglich verhält sich 1728 : 2304 ebenso wie 3 : 4.

Kapitel 8.

Von den geometrischen Proportionen.

461. Zwei geometrische Verhältnisse sind einander gleich, wenn ihre Exponenten einander gleich sind, und die Gleichheit zweier solcher Verhältnisse wird **geometrische Proportion** genannt, welche geschrieben wird, $a : b = c : d$. Mit Worten aber wird dieselbe so ausgesprochen: a verhält sich zu b wie sich c verhält zu d, oder a zu b wie c zu d. Ein Beispiel einer solchen Proportion ist nun $8 : 4 = 12 : 6$. Denn von dem Verhältniß 8 : 4 ist der Exponent 2, und ebenfalls ist er es auch von dem Verhältniß 12 : 6.

462. Wenn also $a : b = c : d$ eine geometrische Proportion ist, so muß beiderseits derselbe Exponent da sein und folglich $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ sein; und umgekehrt wenn die Brüche $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$ einander gleich sind, so ist $a : b = c : d$.

463. Eine geometrische Proportion besteht demnach aus vier Gliedern, welche so beschaffen sind, daß das erste durch das zweite dividirt ebenso viel beträgt, als das dritte durch das vierte dividirt. Hieraus folgt als Haupteigenschaft aller geometrischen Proportionen, daß **das Product des ersten und vierten Gliedes immer ebenso groß ist, als das Product des zweiten und dritten.** Oder kürzer: **das Product der**

äußern ist gleich dem Product der mittlern Glieder.

464. Um diese Eigenschaft zu beweisen, sei $a : b = c : d$ eine geometrische Proportion, und also $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. Man multiplicire jeden dieser Brüche mit b, so bekommt man $a = \frac{bc}{d}$; man multiplicire ferner beiderseits mit d, so bekommt man $ad = bc$. Nun aber ist ad das Product der äußern Glieder und bc das Product der mittlern, welche beide Producte folglich einander gleich sind.

465. Wenn wiederum vier Zahlen a, b, c, d, so beschaffen sind, daß das Product der äußern ad gleich ist dem Product der mittlern bc, so stehen dieselben in geometrischer Proportion. Denn da $ad = bc$, so dividire man beiderseits durch bd, und man bekommt $\frac{ad}{bd} = \frac{bc}{bd}$ oder $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$; daher wird $a : b = c : d$.

466. Die vier Glieder einer geometrischen Proportion als $a : b = c : d$ können auf verschiedene Art versetzt werden, so daß die Proportion bleibt. Es kommt nämlich nur darauf an, daß das Product der äußern Glieder dem Product der mittlern gleich bleibe, oder daß $ad = bc$. Also wird man haben, erstlich $b : a = d : c$, zweitens $a : c = b : d$, drittens $d : b = c : a$, viertens $d : c = b : a$.

467. Außer diesen lassen sich auch noch viele andere geometrische Proportionen aus einer gegebenen ableiten. Denn wenn $a : b = c : d$, so ist erstlich $a + b : a$ oder das erste Glied + dem zweiten zum ersten, wie $c + d : c$ oder das dritte + dem vierten zum dritten: nämlich $a + b : a = c + d : c$.

Ferner ist auch das erste — dem zweiten zum ersten, wie das dritte — dem vierten zum dritten; oder $a - b : a = c - d : c$.

Denn nimmt man die Producte der äußern und mittlern Glieder, so ist offenbar $ac - bc = ac - ad$, weil $ad = bc$. Ferner wird auch $a - b : b = c - d : d$, weil $ad - bd = bc - bd$ und $ad = bc$ ist.

468. Alle Proportionen, die aus $a : b = c : d$ abgeleitet sind, können auf allgemeine Art also dargestellt werden: $ma + nb : pa + qb = mc + nd : pc + qd$. Denn das Product der äußern Glieder ist $mpac + npbc + mqad + nqbd$, und weil $ad = bc$, so wird dasselbe $mpac + npbc + mqbc + nqbd$; das Product der mittlern Glieder aber ist $mpac + mqbc + npad + nqbd$, und weil $ad = bc$, so wird dasselbe $mpac + mqbc + npbc + nqbd$, welches mit jenem einerlei ist.

469. Also kann man aus einer gegebenen Proportion wie z. B. $6 : 3 = 10 : 5$, unendlich viel andere ableiten, von denen wir einige angeben wollen.

$$3 : 6 = 5 : 10;\quad 6 : 10 = 3 : 5;\quad 9 : 6 = 15 : 10.$$
$$3 : 3 = 5 : 5;\quad 9 : 15 = 3 : 5;\quad 9 : 3 = 15 : 5.$$

470. Da in einer geometrischen Proportion das Product der äußern Glieder dem Product der mittlern gleich ist, kann man, wenn die drei ersten Glieder bekannt sind, aus denselben das vierte finden. Es seien die drei ersten Glieder $24 : 15 = 40 : \ldots$ Denn da hier das Product der mittleren 600 ist, so muß das vierte Glied mit dem ersten also mit 24 multiplicirt, auch 600 machen, folglich muß man 600 durch 24 dividiren, und der Quotient wird das gesuchte vierte Glied 25 geben. Daher ist die Proportion $24 : 15 = 40 : 25$. Und wenn allgemein die drei ersten Glieder $a : b = c : \ldots$ sind, so setze man für das unbekannte vierte Glied den Buchstaben d, und da $ad = bc$ sein muß, so dividire man beiderseits durch a und man wird bekommen $d = \frac{bc}{a}$; folglich ist das vierte Glied $= \frac{bc}{a}$, und wird gefunden, wenn man das

zweite Glied mit dem dritten multiplicirt und das Product durch das erste Glied dividirt.

471. Hierauf beruht nun der Grund der aus den Rechenbüchern bekannten Regel de Tri, weil darin aus drei gegebenen Zahlen stets eine vierte gesucht wird, welche mit jenen in einer geometrischen Proportion stehet, sodaß sich also die erste zur zweiten, wie die dritte zur vierten verhalte.

472. Hiebei sind noch einige besondere Umstände zu bemerken. Zuvörderst wenn zwei Proportionen dasselbe erste und dritte Glied haben, wie in diesen $a : b = c : d$ und $a : f = c : g$, so werden auch die zweiten den vierten proportional sein. Es wird sich nämlich verhalten $b : d = f : g$; denn da aus der ersten folgt $a : c = b : d$, und aus der andern $a : c = f : g$, so sind die Verhältnisse $b : d$ und $f : g$ einander gleich, weil jedes dem Verhältnisse $a : c$ gleich ist. Also da $5 : 100 = 2 : 40$ und $5 : 15 = 2 : 6$, so folgt daraus daß $100 : 40 = 15 : 6$.

473. Wenn aber zwei Proportionen so beschaffen sind, daß sich dieselben mittleren Glieder darin befinden, so werden sich die ersten Glieder umgekehrt verhalten wie die vierten. Wenn nämlich $a : b = c : d$ und $f : b = c : g$, so wird daraus folgen $a : f = g : d$. Es sei z. B. diese Proportion gegeben $24 : 8 = 9 : 3$ und $6 : 8 = 9 : 12$, so wird daraus folgen $24 : 6 = 12 : 3$. Der Grund davon ist offenbar: die erste giebt $ad = bc$ und die zweite $fg = bc$, folglich wird $ad = fg$, und $a : f = g : d$, oder $a : g = f : d$.

474. Aus zwei gegebenen Proportionen aber kann immer eine neue gemacht werden, wenn man besonders die ersten und die zweiten, die dritten und die vierten Glieder mit einander multiplicirt. Also aus diesen Proportionen $a : b = c : d$ und $e : f = g : h$ entstehet durch die Zusammensetzung diese $ae : bf = cg : dh$. Denn da aus der ersten $ad = bc$ und aus der zweiten $eh = fg$ sich ergiebt, wird auch

$adeh = bcfg$ sein. Nun aber ist $adeh$ das Product der äußern und $bcfg$ das Product der mittlern Glieder in der neuen Proportion, welche folglich einander gleich sind.

475. Es seien z. B. diese zwei Proportionen gegeben $6 : 4 = 15 : 10$ und $9 : 12 = 15 : 20$, so giebt uns ihre Zusammensetzung folgende Proportion:

$$6 \,.\, 9 : 4 \,.\, 12 = 15 \,.\, 15 : 10 \,.\, 20$$
das ist $54 : 48 = 225 : 200$
oder $9 : 8 = 9 : 8$.

476. Zuletzt ist hier noch zu bemerken, daß wenn zwei Producte einander gleich sind, als $ad = bc$, daraus wieder eine geometrische Proportion gebildet werden kann. Es verhält sich nämlich immer der eine Factor des ersten Products zu einem des zweiten, wie der andere Factor des zweiten zum andern des ersten. Es wird also $a : c = b : d$ sein. Da z. B. $3 \,.\, 8 = 4 \,.\, 6$, so folgt daraus diese Proportion $8 : 4 = 6 : 3$ oder $3 : 4 = 6 : 8$; und da $3 \,.\, 5 = 1 \,.\, 15$, so bekommt man $3 : 15 = 1 : 5$ oder $5 : 1 = 15 : 3$ oder $3 : 1 = 15 : 5$.

Kapitel 9.

Anmerkungen über die Proportionen und ihren Nutzen.

477. Diese Lehre ist im Handel und Wandel von der größten Wichtigkeit. Die Preise und Waaren sind einander immer proportional und bei den verschiedenen Geldsorten kommt alles darauf an, ihre Verhältnisse zu einander zu bestimmen. Beispiele dieser Art werden zur Erläuterung der vorgetragenen Lehre beitragen.

478. Will man das Verhältniß zwischen zwei Münzsorten z. B. einem Louisd'or und einem Ducaten feststellen, so muß man sehen, wie viel diese Stücke in derselben Münzsorte gelten. Da also in Berlin ein Louisd'or

5 Rthlr. 10 Gr., ein Ducaten aber 3 Rthlr. gilt,*) so braucht man diese beiden Werthe nur auf einerlei Münze zu bringen, entweder auf Thaler und da bekommt man die Proportion 1 L. : 1 D. = $5\frac{1}{3}$ Rthlr. : 3 Rthl. d. i. wie $16 : 9$ oder auf Groschen und man hat die Proportion 1 L. : D. = $160 : 90 = 16 : 9$. Aus dieser Proportion erhält man die Vergleichung zwischen Louisd'or und Ducaten, indem die Gleichheit der Producte der äußern und mittleren Glieder 9 Louisd'or = 16 Ducaten giebt. Mit Hülfe dieses Verhältnisses kann man also jede Summe Louisd'or in Ducaten verwandeln. Also wenn man gefragt wird, wie viel 1000 Louisd'or in Ducaten betragen, so macht man diese Regel de Tri: 9 Louisd'or geben 16 Ducaten, wieviel Ducaten 1000 Louisd'or? Antwort: $1777\frac{7}{9}$ Ducaten.

Fragt man aber, wie viel 1000 Ducaten in Louisd'or betragen, so setzt man diese Regel de Tri auf: 16 Ducaten geben 9 Louisd'or, wieviel geben 1000 Ducaten? Antwort: $562\frac{1}{2}$ Louisd'or.

479. Hier in St. Petersburg ist der Werth eines Ducaten veränderlich und beruhet auf dem Wechselkurs, nach welchem der Werth eines Rubels in holländischen Stübern bestimmt wird, deren 105 einen Ducaten ausmachen.

Wenn also der Kurs 45 Stüber ist, so hat man diese Proportion 1 Rub. : 1 D. = $45 : 105 = 3 : 7$, und daher diese Vergleichung 7 Rbl. = 3 Duc. Hieraus kann man finden, wie viel ein Ducaten in Rubeln beträgt; denn 3 D. : 7 Rbl. = 1 D. : . . . Antwort $2\frac{1}{3}$ Rubel. Ist aber der Kurs 50 Stüber, so hat man diese Proportion 1 Rbl. : 1 D. = $50 : 105 = 10 : 21$, und daher diese Vergleichung 21 Rbl. = 10 Duc. Hieraus wird 1 Duc. = $2\frac{1}{10}$ Rbl. Ist

*) Es ist hier zu bemerken, daß im Jahre 1766, als dieses Buch verfaßt wurde, die angegebenen Kurse galten.

aber der Kurs nur 44 Stüber, so hat man 1 Rbl. : 1 Duc. = 44 : 105, und also 1 Duc. = $2\frac{17}{44}$ Rbl. = 2 Rbl. $38\frac{7}{11}$ Kopeken.

480. In dieser Art kann man auch mehr als zwei verschiedene Münzsorten unter einander vergleichen, was besonders im Wechselverkehr häufig geschieht. Nehmen wir an, um ein Beispiel zu geben, es wolle Jemand von hier (Petersburg) 1000 Rbl. nach Berlin senden, und wolle wissen, wie viel diese Summe in Berlin in Ducaten betragen werde. Es ist aber der hiesige (Petersburger) Kurs $47\frac{1}{2}$ Stüber (nämlich 1 Rbl. macht $47\frac{1}{2}$ Stüber holländisch). In Holland aber machen 20 Stüber einen Fl. holl. Ferner $2\frac{1}{2}$ Fl. holl. machen einen Species Rthl. holl. Außerdem ist der Kurs von Holland nach Berlin 142, d. i. für 100 Spec. Rthl. zahlt man in Berlin 142 Rthlr. Endlich gilt 1 Duc. in Berlin 3 Rthlr.

481. Um diese Frage zu beantworten, wollen wir Schritt für Schritt vorgehen. Wir fangen also bei den Stübern an, und da 1 Rbl. = $47\frac{1}{2}$ Stüber, oder 2 Rbl. = 95 Stüb., so setzt man 2 Rbl. : 95 Stüb. = 1000 ... Antwort 47500 Stüb. Ferner gehen wir weiter und setzen 20 Stüb : 1 Fl. = 47500 Stüb. : ... Antwort 2375 Fl. Ferner da $2\frac{1}{2}$ Fl. = 1 Spec. Rthlr., das ist, da 5 Fl. = 2 Spec. Rthlr., so setzt man 5 Fl. : 2 Spec. Rthl. = 2375 Fl. : ... Antwort 950 Spec. Rthlr.

Dann gehen wir auf Berliner Rthlr. nach dem Kurs zu 142. Also 100 Spec. Rthlr. : 142 Rthlr. = 950 : ... Antwort 1349 Rthlr.

Nun gelangen wir endlich zu den Ducaten und setzen also 3 Rthlr. : 1 Duc. = 1349 Rthlr. : ... Antwort $449\frac{2}{3}$ Duc.

482. Um diese Rechnungsart noch mehr zu erläutern, wollen wir annehmen, der Banquier in Berlin mache unter irgend einem Vorwande Schwierigkeit, diese Summe zu bezahlen, und wolle den Wechsel nicht anders als mit 5 Procent Abzug versilbern. Dies ist aber also zu ver-

stehen, daß er anstatt 105 nur 100 bezahlt, daher muß noch diese Regel de Tri hinzugefügt werden: 105 : 100 = $449\frac{2}{3}$: ... Giebt also $428\frac{16}{63}$ Ducaten.

483. Zur Lösung dieser Aufgabe wurden nun sechs Rechnungen nach der Regel de Tri erfordert. Man hat aber Mittel gefunden, diese Rechnungen mit Hülfe der sogenannten **Kettenregel** erheblich abzukürzen. Um diese Regel zu erklären, wollen wir von den sechs obigen Rechnungen die zwei Vordersätze in Betracht ziehen und hier vor Augen führen:

I. 2 Rbl. : 95 Stüb.	II. 20 Stüb. : 1 Fl. holl.
III. 5 Fl. holl. : 2 Sp. Rthl.	IV. 100 Sp. Rthl. : 142 Rth.
V. 3 Rthl. : 1 Sp. Duc.	VI. 105 Duc. : 100 Duc.

Wenn wir nun diese Rechnungen betrachten, finden wir, daß wir die gegebene Summe immer mit den zweiten Sätzen multiplicirt und durch die ersten dividirt haben; daraus geht hervor, daß man dasselbe findet, wenn man die gegebene Summe auf einmal mit dem Product aller zweiten multiplicirt und durch das Product aller ersten Sätze dividirt; oder wenn man nur diese eine Regel de Tri macht: Wie sich das Product aller ersten Sätze verhält zu dem Producte aller zweiten Sätze, also verhält sich die gegebene Anzahl Rubel zu der Anzahl Ducaten, die in Berlin bezahlt wird.

484. Diese Rechnung wird noch mehr abgekürzt, wenn sich irgend ein erster Satz gegen irgend einen zweiten Satz aufheben läßt, indem man dann dieselben Sätze ausstreicht und an ihre Stelle die Quotienten setzt, welche man durch die Aufhebung erhält. Auf diese Art wird obiges Exempel so zu stehen kommen:

Rbl. ~~2~~. 19 ~~95~~ St. holl. Kurs. 1000 Rbl.
~~20~~. 1 holl. Fl.
~~5~~. 2 Rthl.
100. 142 Rthl.
3. 1 Duc.
~~105~~. 21. ~~5~~. ~~100~~ Duc.

~~6300~~ : 2698 = ~~1000~~ : ...
7) 26980
9) 3854 (2
428 (2 Antwort: $428\frac{16}{63}$ Ducaten.

485. Um die Kettenregel zu gebrauchen, muß man folgende Ordnung beobachten; man fängt mit derselben Münzsorte an, von welcher die Rede ist und vergleicht dieselbe mit einer andern, mit welcher das folgende Verhältniß wieder anfängt, in welchem diese zweite Sorte mit einer dritten verglichen wird, so daß jedes Verhältniß mit der Münzsorte anfängt, mit welcher das vorige aufgehört, und so fährt man fort, bis man auf diejenige Sorte kommt, in welcher die Antwort stehen soll, und zuletzt werden noch die Spesen oder Unkosten berechnet.

486. Zu weiterer Erläuterung wollen wir noch einige Beispiele hinzufügen.

Wenn die Ducaten in Hamburg 1 p. C. besser sind als 2 Rthl. B° (das ist, wenn 50 Duc. nicht 100, sondern 101 Rthl. B° machen) und der Kurs zwischen Hamburg und Königsberg 119 Gr. Poln. ist (das ist, 1 Rthl. B° macht 119 Gr. Poln.) wie viel betragen 1000 Duc. in Fl. Poln. (30 Gr. Poln. machen 1 Fl. Poln.)

Duc. 1 : 2 Rthl. B° 1000 Duc.
~~100~~. 50 : 101 Rthl. B°
1 : 119 Gr. Poln.
30 : 1 Fl. Poln.

~~1500~~ : 12019 = ~~1000~~ Duc. : ...
3) 120190
5) 40063 (1
8012 (3. Antwort $8012\frac{2}{3}$ Fl. Poln.

487. Noch zu weiterer Abkürzung kann die Fragezahl über die zweite Reihe gesetzt werden, da dann das Product der zweiten Reihe, durch das Product der ersten dividirt, die verlangte Antwort giebt.

Aufgabe. Leipzig läßt aus Amsterdam Ducaten kommen, welche daselbst 5 Fl. 4 St. Courant gelten (das ist, 1 Duc. gilt 104 St. oder 5 Duc. machen 26 Fl. Holl.). Wenn nun Agio di B° in Amsterdam 5 p. C. (das ist 105 Cour. macht 100 B°) und der Wechselkurs von Leipzig nach Amsterdam in B° $133\frac{1}{4}$ p. C. (das ist für 100 Rthl. zahlt man in Leipzig $133\frac{1}{4}$ Thl.); endlich 2 Rthl. Holl. 5 Fl. Holl. sind, wie viel sind nach diesen Kursen für solche 1000 Ducaten in Leipzig an Thalern zu bezahlen?

5. ~~1000~~ Duc.
Duc. ~~5~~ : 26 Fl. holl. Kur.
~~105~~. 21 : 4. ~~20~~. ~~100~~ Fl. holl. B°
~~5~~ : ~~2~~ Rthl. holl. B°
~~400~~. ~~2~~ : 533 Thl. in Leipzig.

21 : 3) 55432 (1.
7) 18477 (4.
2639

Antwort $2639\frac{13}{21}$ Thl.
oder 2639 Thl. 15 gute Grsch.

Kapitel 10.

Von den zusammengesetzten Verhältnissen.

488. Zwei oder mehrere Verhältnisse werden zusammengesetzt, wenn man sowohl die Vordersätze, als auch die Hintersätze besonders mit einander multiplicirt; und alsdann sagt man, daß das Verhältniß zwischen diesen beiden Producten zusammengesetzt sei aus den zwei oder mehr gegebenen Verhältnissen.

Also aus den Verhältnissen $a : b$, $c : d$, $e : f$ entsteht durch die Zusammensetzung das Verhältniß $ace : bdf$.

489. Da ein Verhältniß unverändert bleibt, wenn man seine beiden Glieder durch dieselbe Zahl dividirt oder abkürzt, kann man die obige Zusammensetzung ungemein erleichtern, wenn man die Vordersätze gegen die Hintersätze aufhebt oder abkürzt, wie schon im vorigen Kapitel geschehen.

Also aus folgenden gegebenen Verhältnissen wird das daraus zusammengesetzte in dieser Art gefunden.

Die gegebenen Verhältnisse sind:

$$12 : 25,\ 28 : 33 \text{ und } 55 : 56$$

$$\begin{array}{rcl} \cancel{12}.\ \cancel{4}.\ 2 & : & 5.\ \cancel{25} \\ \cancel{28} & : & 3.\ \cancel{33} \\ \cancel{55}.\ \cancel{5} & : & 2.\ \cancel{56} \\ \hline 2 & : & 5 \end{array}$$

Also erhält man durch die Zusammensetzung das Verhältniß $2 : 5$.

490. Dasselbe Verfahren hat allgemeine Anwendung für Buchstaben und es ist besonders der Fall merkwürdig, wenn immer ein Vordersatz dem vorigen Hintersatz gleich ist. Also wenn die gegebenen Verhältnisse sind:

$$\begin{array}{c} a : b \\ b : c \\ c : d \\ d : e \\ e : a \\ \hline \end{array}$$

so ist das zusammengesetzte Verhältniß wie $1 : 1$.

491. Den Nutzen dieser Lehre wollen wir an einem Beispiel zeigen. Man bemerke, daß zwei viereckige Felder in einem Verhältniß zu einander stehen, welches zusammengesetzt ist aus den Verhältnissen ihrer Längen und ihrer Breiten.

Es seien z. B. zwei solche Felder A und B. Für jenes sei die Länge 500 Fuß, die Breite aber 60 Fuß. Für dieses sei die Länge 360 Fuß und die Breite 100 Fuß; dann ist das Verhältniß der Länge wie $500 : 360$ und das der Breite wie $60 : 100$. Also steht:

$$\begin{array}{rcl} \cancel{500}.\ 5 & : & 6.\ \cancel{360} \\ \cancel{60} & : & \cancel{100} \\ \hline 5 & : & 6 \end{array}$$

Daher verhält sich das Feld A zu dem Felde B wie $5 : 6$.

492. Ein anderes Beispiel. Das Feld A sei 720 Fuß lang und 88 Fuß breit; das Feld B aber sei 660 Fuß lang und 90 Fuß breit, so muß man folgende zwei Verhältnisse zusammensetzen:

$$\begin{array}{lrcl} \text{Verhältniß der Längen} & \cancel{720}.\ 8. & : & 15.\ \cancel{60}.\ \cancel{660} \\ \text{Verhältniß der Breiten} & 88.\ 8.\ 2 & : & \cancel{90} \\ \hline & 16 & : & 15 \end{array}$$

Und dies ist das Verhältniß der Felder A und B.

493. Um ferner den Raum oder Inhalt zweier Zimmer mit einander zu vergleichen, bemerke man, daß ihr Verhältniß aus dreien zusammengesetzt ist; nämlich aus dem Verhältnisse der Länge, der Breite und der Höhe. Es sei z. B. ein Zimmer A, dessen Länge = 36 Fuß, die Breite = 16 Fuß und die Höhe = 14 Fuß. Von einem

andern Zimmer B aber sei die Länge = 42 Fuß, die Breite = 24 Fuß und die Höhe = 10 Fuß, so sind die drei Verhältnisse:

$$\begin{array}{lrcl} \text{der Länge} & \cancel{36}.\ \cancel{6}.\ \cancel{3} & : & \cancel{42}.\ \cancel{6} \\ \text{der Breite} & \cancel{16}.\ 2. & : & \cancel{24}.\ \cancel{3} \\ \text{der Höhe} & \cancel{14}.\ 2. & : & \cancel{10}.\ 5 \\ \hline & 4 & : & 5 \end{array}$$

Also verhält sich der Inhalt des Zimmers A zu dem Inhalte des Zimmers B wie $4 : 5$.

494. Wenn die Verhältnisse, welche man in solcher Art zusammensetzt, einander gleich sind, so entstehen daraus vervielfältigte Verhältnisse. Nämlich aus zwei gleichen entsteht ein doppeltes oder quadratisches Verhältniß; aus drei gleichen ein dreifaches oder cubisches ꝛc. Also aus den Verhältnissen $a : b$ und $a : b$ ist das zusammengesetzte Verhältniß $a^2 : b^2$; daher sagt man die Quadrate stehen im doppelten Verhältnisse ihrer Wurzeln. Und aus dem Verhältnisse $a : b$ dreimal gesetzt entsteht das Verhältniß $a^3 : b^3$, daher sagt man, daß die Cuben ein dreifaches Verhältniß ihrer Wurzeln haben.

495. In der Geometrie wird gezeigt, daß zwei kreisrunde Plätze im doppelten Verhältnisse ihrer Durchmesser zu einander stehen, d. h. daß sie sich verhalten wie die Quadrate ihrer Durchmesser.

Es sei ein solcher Platz A, dessen Durchmesser = 45 Fuß; eines andern kreisrunden Platzes B Durchmesser sei = 30 Fuß, so wird sich jener Platz zu diesem verhalten wie $45 . 45$ zu $30 . 30$, oder ihr Verhältniß ist aus folgenden zwei gleichen Verhältnissen zusammengesetzt:

$$\begin{array}{rcl} \cancel{45}.\ \cancel{9}.\ 3 & : & \cancel{30}.\ \cancel{6}.\ 2 \\ \cancel{45}.\ \cancel{9}.\ 3 & : & \cancel{30}.\ \cancel{6}.\ 2 \\ \hline 9 & : & 4 \end{array}$$

Folglich verhalten sich diese Plätze wie 9 zu 4.

496. Ferner wird auch in der Geometrie bewiesen,

daß sich die Inhalte der Kugeln, wie die Cuben ihrer Durchmesser verhalten. Wenn also der Durchmesser einer Kugel A ein Fuß, und der einer andern Kugel B zwei Fuß ist, so wird der Inhalt der Kugel A zum Inhalt der Kugel B wie $1^3 : 2^3$ oder wie $1 : 8$ sich verhalten.

Wenn also die Kugeln aus demselben Stoffe bestehen, so wird die Kugel B achtmal soviel wiegen als die Kugel A.

497. Demnach kann man das Gewicht der Kanonenkugeln aus ihren Durchmessern finden, wenn man nur das Gewicht einer hat. Es sei z. B. eine Kugel A gegeben, deren Durchmesser = 2 Zoll, und die fünf ℔. schwer ist. Man fragt nach dem Gewicht einer andern Kugel B, deren Durchmesser = 8 Zoll ist. Hier hat man nun diese Proportion $2^3 : 8^3 = 5 : \ldots$ ergiebt als viertes Glied des Verhältnisses 320 ℔., und dieses ist das Gewicht der Kugel B. Von einer andern Kugel C aber, deren Durchmesser = 15 Zoll, wird das Gewicht gefunden:

$$2^3 : 15^3 = 5 : \ldots \quad \text{Antwort } 2109\tfrac{3}{8} \text{ ℔.}$$

498. Sucht man das Verhältniß zweier Brüche, $\frac{a}{b} : \frac{c}{d}$, so kann dasselbe immer durch ganze Zahlen ausgedrückt werden. Denn man braucht nur beide Brüche mit bd zu multipliciren, so kommt das Verhältniß $ad : bc$ heraus, welches jenem gleich ist, daher die Proportion entsteht $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = ad : bc$. Haben nun ad und bc gemeinschaftliche Theiler, so wird das Verhältniß auf noch kleinere Zahlen gebracht. Also $\frac{15}{24} : \frac{25}{36} = 15.36 : 24.25 = 9 : 10$.

499. Wird ferner gefragt, wie sich die Brüche $\frac{1}{a}$ und $\frac{1}{b}$ zu einander verhalten, so ist klar, daß $\frac{1}{a} : \frac{1}{b} = b : a$ sein wird. Also mit Worten ausgedrückt: Zwei Brüche, deren Zähler 1 ist, verhalten sich umgekehrt wie ihre Nenner. Dieses gilt auch von zwei Brüchen, welche

gleiche Zähler haben. Denn da $\frac{c}{a} : \frac{c}{b} = b : a$, so verhalten sie sich gleichfalls umgekehrt wie ihre Nenner. Haben aber zwei Brüche gleiche Nenner, wie $\frac{a}{c} : \frac{b}{c}$, so verhalten sie sich wie die Zähler, nämlich wie $a : b$. Also ist $\frac{3}{8} : \frac{3}{16} = \frac{6}{16} : \frac{3}{16} = 6 : 3 = 2 : 1$ und $\frac{10}{7} : \frac{15}{7} = 10 : 15$ oder $2 : 3$.

500. Für den frei fallenden Körper ist das Gesetz festgestellt, daß er in 1 Secunde 15 Fuß, in 2 Secunden 60 Fuß, in 3 Secunden 135 Fuß fällt, und daß im allgemeinen die Höhen sich verhalten, wie die Quadrate der Zeiten und umgekehrt die Zeiten wie die Quadratwurzeln der Höhen.

Fragt man nun, wie viel Zeit ein Stein braucht, um aus einer Höhe von 2160 Fuß herab zu fallen, so ist $15 : 2160 = 1$: Quadrat der gesuchten Zeit.

Also ist das Quadrat der gesuchten Zeit 144, die Zeit aber selbst 12 Secunden.

501. Man fragt, wie tief ein Stein in einer Stunde herunterfallen könne, das ist in 3600 Secunden?

Die Antwort lautet: Wie die Quadrate der Zeiten, also wie $1^2 : 3600^2$, so verhält sich die gegebene Höhe = 15 Fuß zu der gesuchten Höhe.

$$\begin{array}{r}
1 : 12960000 = 15 \text{ zu} \ldots \\
15 \\
\hline
64800000 \\
1296 \\
\hline
194400000
\end{array}$$

Antwort: 194400000 Fuß.

Rechnen wir nun 24000 Fuß auf eine deutsche Meile, so wird diese Höhe 8100 Meilen betragen, welche Höhe vier Mal so groß ist, als der Durchmesser der Erde.

502. Eine gleiche Bewandtniß hat es mit dem Preise der Edelsteine, welche sich nicht nach ihrem Gewichte selbst, sondern nach einem größern Verhältnisse richten. Bei den

Diamanten gilt die Regel, daß sich der Preis wie das Quadrat des Gewichts verhält, oder das Verhältniß der Preise ist gleich dem doppelten Verhältnisse des Gewichts. Dieselben werden nun nach einem Gewichte, welches ein Karath genannt wird und vier Gran hält, gewogen. Wenn nun ein Diamant von einem Karath zwei Thaler gilt, so wird ein Diamant von 100 Karath so viel mal mehr gelten, als das Quadrat von 100 größer ist als das Quadrat von 1. Also muß die Regelbetri so gesetzt werden:

$1^2 : 100^2 = 2$ Thaler: ...

oder $1 : 10000 = 2$ Thaler zu ... Antwort 20000 Thlr.

In Portugal befindet sich ein Diamant von 1680 Karath, dessen Preis demnach also gefunden wird.

$1^2 : 1680^2 = 2$ Thaler: ... oder

$1 : 2822400 = 2$: .... Antwort 5644800 Thaler.

503. Von zusammengesetzten Verhältnissen geben die Posten ein bemerkenswerthes Beispiel, weil das Postgeld nach einem zusammengesetzten Verhältnisse der Zahl der Pferde und der Zahl der Meilen bezahlt werden muß. Wenn also für ein Pferd auf eine Meile 10 Gr. oder $\frac{1}{3}$ Rthl. bezahlt wird, und man wissen will, wie viel für 28 Pferde auf $4\frac{1}{2}$ Meilen bezahlt werden soll, so setzt man erstlich das Verhältniß der Pferde, das ist

$1 : 28$; darunter schreibt man das Verhältniß der Meilen

$2 : 9$ und setzt die zwei Verhältnisse zusammen

$2 : 252$ oder kürzer $1 : 126 = \frac{1}{3}$ zu ... Antwort 42 Rthl.

Wenn man für 8 Pferde auf 3 Meilen einen Ducaten bezahlt, wieviel kosten 30 Pferde auf 4 Meilen? Hier kommt die Rechnung also zu stehen:

$$\begin{array}{l}
\cancel{8}, \cancel{2} : \cancel{30}, \cancel{15}, 5 \\
\cancel{3} \quad : \cancel{4} \\
\hline
1 \quad : 5 = 1 \text{ Ducaten} : -
\end{array}$$

Daher beträgt der Preis 5 Ducaten.

504. Bei der Bezahlung der Arbeiter kommt diese

Zusammensetzung der Verhältnisse auch vor, da die Bezahlung nach dem zusammengesetzten Verhältniß der Zahl der Arbeiter, und der Zahl der Tage ihrer Thätigkeit geschehen muß.

Wenn also z. B. ein Maurer täglich 10 Gr. erhält und man wissen will, wie viel 24 Maurern, welche 50 Tage lang gearbeitet haben, bezahlt werden muß, wird die Rechnung so gemacht:

$$\begin{array}{r}
1 : 24 \\
1 : 50 \\
\hline
1 : 1200 = 10 \text{ Gr.} : 500 \text{ Rthl.} \\
10 \\
\hline
12000 \text{ Gr.} \\
3) \overline{} \\
4000 \\
8) \overline{} \\
500 \text{ Rthl.*)}
\end{array}$$

Weil in dergleichen Exempeln fünf Sätze gegeben sind, so wird in den Rechenbüchern die Art, dieselben zu berechnen, die Regel Quinque genannt.

Kapitel 11.

Von den geometrischen Reihen.

505. Eine Reihe Zahlen, welche immer gleich vielmal größer oder kleiner werden, wird eine geometrische Reihe genannt, weil immer jedes Glied zu dem folgenden in demselben geometrischen Verhältnisse steht, und die Zahl, welche anzeigt, wie viel mal jedes Glied größer ist, als das vorhergehende, wird der Nenner oder der Exponent genannt. Wenn also das erste Glied 1 ist und der Nenner = 2, so ist die geometrische Reihe folgende:

Glieder	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9,	10.
Reihe	1,	2,	4,	8,	16,	32,	64,	128,	256,	512 2c.

*) Euler berechnet hier den Thaler mit 24 Groschen.

Die Anzeiger sind darüber gesetzt, um anzugeben, das wievielte Glied jedes sei.

506. Wenn man überhaupt das erste Glied = a und den Nenner = b setzt, so entsteht folgende geometrische Reihe

	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8.	...	n
Reihe	a,	ab,	ab^2,	ab^3,	ab^4,	ab^5,	ab^6,	ab^7,	...	ab^{n-1}

Wenn also die Reihe aus n Gliedern besteht, so ist das letzte $= ab^{n-1}$. Hiebei ist zu merken daß wenn der Nenner b größer ist als 1, die Glieder immer größer werden; ist aber der Nenner $b = 1$, so bleiben die Glieder immer einander gleich, und ist der Nenner b kleiner als 1, oder ein Bruch, so werden die Glieder auch immer kleiner. Also wenn $a = 1$ und $b = \frac{1}{2}$, so bekommt man diese geometrische Reihe:

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \frac{1}{64}, \frac{1}{128} \text{ 2c.}$$

507. Hiebei sind zu betrachten:

I) das erste Glied, welches hier a genannt wird;
II) der Nenner, welcher hier b genannt wird;
III) die Anzahl der Glieder, welche = n gesetzt worden;
IV) das letzte Glied, welches gefunden worden $= ab^{n-1}$.

Wenn daher die 3 ersten Stücke gegeben sind, wird das letzte Glied gefunden, wenn man die $n - 1$ste Potenz des Nenners b, das ist b^{n-1} mit dem ersten Gliede a multiplicirt.

Wollte man nun von dieser geometrischen Reihe 1, 2, 4, 8 2c. das 50ste Glied wissen, so ist hier $a = 1$, $b = 2$ und $n = 50$. Daher das 50ste Glied sein wird $= 2^{49}$. Da nun $2^5 = 32$, so ist $2^{10} = 1024$. Hievon das Quadrat genommen, giebt $2^{20} = 1048576$. Hievon wieder das Quadrat genommen, giebt 2^{40} 1099511627776. Wenn man nun 2^{40} mit $2^9 = 512$ multiplicirt, so bekommt man $2^{49} = 512.\ 1099511627776 = 562949953421312$.

508. Eine der wichtigsten Fragen, die sich hier darbieten, besteht darin, wie man die Summe aller Glieder

einer solchen Reihe finden soll. Es sei erstlich diese Reihe von zehn Gliedern gegeben 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, deren Summe wir durch den Buchstaben s andeuten wollen, so daß

$s = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + 128 + 256 + 512,$

so wird dieses doppelt genommen geben:

$2s = 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + 128 + 256 + 512 + 1024.$

Hievon ziehe man nun die obige Reihe ab, so bleibt übrig: $s = 1024 - 1 = 1023$; also ist die gesuchte Summe $= 1023$.

509. Wir wollen nun für dieselbe Reihe die Anzahl der Glieder unbestimmt annehmen und $= n$ setzen, so daß die Summe sein wird $s = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 \ldots 2^{n-1}$. Diese Formel mit 2 multiplicirt giebt $2s = 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 \ldots 2^n$. Subtrahirt man hievon die erste Formel, so bekommt man $s = 2^n - 1$. Daher wird die gesuchte Summe gefunden, wenn man das letzte Glied 2^{n-1} mit dem Nenner 2 multiplicirt, um zu bekommen 2^n, und von diesem Product 1 subtrahirt.

510. Dieses wollen wir durch folgende Beispiele erläutern, indem wir für n nach und nach 1, 2, 3, 4, schreiben: $1 = 1$, $1 + 2 = 3$, $1 + 2 + 4 = 7$, $1 + 2 + 4 + 8 = 15$, $1 + 2 + 4 + 8 + 16 = 31$, $1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 = 63$ rc.

511. Demnach kann die folgende Aufgabe leicht gelöst werden. Jemand verkauft sein Pferd in folgender Art nach der Zahl der Hufnägel, deren 32 sind; für den ersten Nagel fordert er 1 Pfennig, für den zweiten 2 Pfennige, für den dritten 4 Pfennige, für den vierten 8 Pfennige und immer für den folgenden zweimal so viel als für den vorigen. Nun ist die Frage, für welchen Preis ist dieses Pferd verkauft worden?

Hier muß also die geometrische Reihe 1, 2, 4, 8, 16, 32 rc. bis auf das 32ste Glied fortgesetzt und die Summe von allen gesucht werden. Da nun das letzte Glied sein

wird $= 2^{31}$, so ist früher schon gefunden worden $2^{20} = 1048576$, dieses multiplicirt man mit $2^{10} = 1024$, um zu haben $2^{30} = 1073741824$. Dieses mit 2 multiplicirt, giebt das letzte Glied $2^{31} = 2147483648$; folglich wird die Summe gleich dieser Zahl doppelt genommen weniger 1, das ist 4294967295 Pfennige sein.

2) 4294967295 Pf.
6) 2147483647
oder 357913941 Gr. 3 Pf.*)
3) 357913941
8) 119304647
oder 14913080 Rthlr. 21 Gr. 3 Pf.

Also wird der Preis des Pferdes 14913080 Rthlr. 21 Gr. 3 Pf. betragen.

512. Es sei nun der Nenner $= 3$ und die geometrische Reihe sei 1, 3, 9, 27, 81, 243, 729, und von diesen 7 Gliedern soll die Summe gefunden werden. Man setze dieselbe vorläufig $= s$, so daß

$$s = 1 + 3 + 9 + 27 + 81 + 243 + 729.$$

Man multiplicire mit 3, und man hat:

$$3s = 3 + 9 + 27 + 81 + 243 + 729 + 2187.$$

Hievon subtrahire man die obige Reihe, so bekommt man $2s = 2187 - 1 = 2186$. Daher ist die doppelte Summe $= 2186$ und folglich die Summe 1093.

513. In derselben Reihe sei die Anzahl der Glieder $= n$ und die Summe $= s$, so daß $s = 1 + 3 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + \ldots 3^{n-1}$, dieses mit 3 multiplicirt giebt $3s = 3 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + \ldots 3^n$. Hievon subtrahire man das obige; und weil sich alle Glieder der untern Reihe, außer den letzten, gegen alle Glieder der obern, außer dem ersten, aufheben, so bekommt man $2s = 3^n - 1$ und also $s = \frac{3^n - 1}{2}$.

*) Der Groschen ist hier mit 12 Pfennigen und der Thaler mit 24 Groschen berechnet.

Also wird die Summe gefunden, wenn man das letzte Glied mit 3 multiplicirt, vom Product 1 subtrahirt und den Rest durch 2 theilt, wie aus folgenden Beispielen zu ersehen: $1 = 1$; $1 + 3 = \frac{3 \cdot 3 - 1}{2} = 4$; $1 + 3 + 9 = \frac{3 \cdot 9 - 1}{2} = 13$; $1 + 3 + 9 + 27 = \frac{3 \cdot 27 - 1}{2} = 40$; $1 + 3 + 9 + 27 + 81 = \frac{3 \cdot 81 - 1}{2} = 121$.

514. Nun sei auf allgemeine Art das erste Glied $= a$, der Nenner $= b$, die Anzahl der Glieder $= n$ und die Summe derselben $= s$, so daß

$$s = a + ab + ab^2 + ab^3 + ab^4 + \ldots ab^{n-1}.$$

Dieses multiplicirt mit b, giebt $bs = ab + ab^2 + ab^3 + ab^4 + \ldots ab^n$. Hievon subtrahire man die erste Formel, so erhält man $(b - 1) . s = ab^n - a$. Daher bekommt man die gesuchte Summe $s = \frac{ab^n - a}{b - 1}$. Daher wird die Summe jeder geometrischen Reihe gefunden, wenn man das letzte Glied mit dem Nenner der Reihe multiplicirt, von dem Product das erste Glied subtrahirt, und den Rest durch den Nenner weniger 1 dividirt.

515. Man habe eine geometrische Reihe von 7 Gliedern; das erste $= 3$ und der Nenner $= 2$, so ist $a = 3$, $b = 2$ und $n = 7$, folglich das letzte Glied $3 . 2^6$, das ist $3 . 64 = 192$, und die Reihe selbst: 3, 6, 12, 24, 48, 96, 192, und also das letzte Glied 192 mit dem Nenner 2 multiplicirt, giebt 384, davon das erste Glied 3 subtrahirt, bleibt 381, dieser Rest durch $b - 1$, das ist, durch 1 dividirt, giebt 381, welches die Summe der Reihe ist.

516. Es sei ferner eine geometrische Reihe von sechs Gliedern gegeben, von denen das erste 4 und der Nenner $\frac{3}{2}$; so daß die Reihe ist

$$4,\ 6,\ 9,\ \tfrac{27}{2},\ \tfrac{81}{4},\ \tfrac{243}{8}.$$

Das letzte Glied $\frac{243}{8}$ mit dem Nenner $\frac{3}{2}$ multiplicirt giebt

$\frac{729}{16}$, davon das erste Glied 4 subtrahirt giebt $\frac{665}{16}$, endlich dieser Rest dividirt durch $b - 1 = \frac{1}{2}$ giebt $\frac{665}{8} = 83\frac{1}{8}$.

517. Wenn der Nenner kleiner ist als 1 und also die Glieder der Reihe immer abnehmen, so kann die Summe einer solchen Reihe, die ohne Ende fortläuft, angegeben werden.

Es sei z. B. das erste Glied $= 1$, der Nenner $= \frac{1}{2}$ und die Summe $= s$, so daß

$$s = 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{16} + \tfrac{1}{32} + \tfrac{1}{64} \text{ rc. ohne Ende.}$$

Man multiplicire mit 2, so bekommt man:

$$2s = 2 + 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{16} + \tfrac{1}{32} \text{ rc. ohne Ende.}$$

Hievon ziehe man das obige ab, so bleibt $ſ = 2$, welches die Summe der unendlichen Reihe ist.

518. Es sei ferner das erste Glied $= 1$, der Nenner $\frac{1}{3}$ und die Summe $= ſ$, so daß

$$s = 1 + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{9} + \tfrac{1}{27} + \tfrac{1}{81} \text{ rc. ohne Ende.}$$

Man multiplicire Alles mit 3, so hat man:

$$3s = 3 + 1 + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{9} + \tfrac{1}{27} + \tfrac{1}{81} \text{ rc. ohne Ende.}$$

Hievon nehme man die obige Reihe weg, so bleibt $2ſ = 3$, folglich ist die Summe $= 1\frac{1}{2}$.

519. Es sei ferner das erste Glied $= 2$, der Nenner $= \frac{3}{4}$, die Summe $= s$ so daß $s = 2 + \frac{3}{2} + \frac{9}{8} + \frac{27}{32} + \frac{81}{128}$ rc. ohne Ende. Dieses multiplicire man mit $\frac{4}{3}$, so hat man $\frac{4}{3}s = \frac{8}{3} + 2 + \frac{3}{2} + \frac{9}{8} + \frac{27}{32} + \frac{81}{128}$ rc. ohne Ende. Hievon das obige subtrahirt, bleibt $\frac{1}{3}s = \frac{8}{3}$, also die Summe selbst wird gerade 8 sein.

520. Wenn überhaupt das erste Glied $= a$ und der Nenner der Reihe $= \frac{b}{c}$ gesetzt wird, so daß dieser Bruch kleiner ist als 1 und folglich b kleiner ist als c, so kann die Summe dieser unendlichen Reihe in folgender Art gefunden werden. Man setzt

$$s = a + \frac{ab}{c} + \frac{ab^2}{c^2} + \frac{ab^3}{c^3} + \frac{ab^4}{c^4} \text{ rc. ohne Ende.}$$

Hier multiplicirt man mit $\frac{b}{c}$, so bekommt man

$$\frac{b}{c}s = \frac{ab}{c} + \frac{ab^2}{c^2} + \frac{ab^3}{c^3} + \frac{ab^4}{c^4} \text{ ꝛc. ohne Ende.}$$

Dieses subtrahirt man von dem obigen, so bleibt $(1 - \frac{b}{c})\, s = a$, folglich ist $s = \frac{a}{1 - \frac{b}{c}}$

Multiplicirt man nun oben und unten mit c, so bekommt man $s = \frac{a\ c}{c - b}$, daher ist die Summe dieser unendlichen geometrischen Reihe

$$= \frac{a}{1 - \frac{b}{c}} \text{ oder } = \frac{a\ c}{c - b}.$$

Diese Summe wird folglich gefunden wenn man das erste Glied a dividirt durch 1 weniger dem Nenner; oder wenn man den Nenner von 1 subtrahirt und durch den Rest das erste Glied dividirt.

521. Wenn in solchen Reihen die Zeichen + und — mit einander abwechseln, so kann die Summe in derselben Art gefunden werden. Denn es sei

$$s = a - \frac{ab}{c} + \frac{ab^2}{c^2} - \frac{ab^3}{c^3} + \frac{ab^4}{c^4} \text{ ꝛc.}$$

Dieses multiplicire man mit $\frac{b}{c}$, so bekommt man

$$\frac{b}{c}s = \frac{ab}{c} - \frac{ab^2}{c^2} + \frac{ab^3}{c^3} - \frac{ab^4}{c^4} \text{ ꝛc.}$$

Dieses addire man zu dem obigen, so erhält man $(1 + \frac{b}{c})\, s = a$. Hieraus findet man die gesuchte Summe $s = \frac{a}{1 + \frac{b}{c}}$ oder $s = \frac{a\ c}{c + b}$.

522. Es sei z. B. das erste Glied $a = \frac{3}{5}$ und der Nenner der Reihe $= \frac{2}{5}$, das ist $b = 2$ und $c = 5$, so wird von dieser Reihe $\frac{3}{5} + \frac{6}{25} + \frac{12}{125} + \frac{24}{625}$ ꝛc. die

Summe also gefunden: der Nenner von 1 subtrahirt bleibt $\frac{3}{5}$, dadurch muß man das erste Glied $\frac{3}{5}$ dividiren, so bekommt man die Summe = 1.

Wenn aber die Zeichen + und — abwechseln und diese Reihe vorgelegt ist:

$$\frac{3}{5} - \frac{6}{25} + \frac{12}{125} - \frac{24}{625} \text{ ꝛc.}$$

so wird die Summe sein

$$\frac{a}{1 + \frac{b}{c}} = \frac{\frac{3}{5}}{\frac{7}{5}} = \frac{3}{7}.$$

523. Zur Uebung soll diese unendliche Reihe vorgelegt sein:

$$\frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{1000} + \frac{3}{10000} + \frac{3}{100000} \text{ ꝛc.}$$

Hier ist das erste Glied $\frac{3}{10}$ und der Nenner $\frac{1}{10}$. Dieser von 1 subtrahirt bleibt $\frac{9}{10}$. Hiedurch das erste Glied dividirt, giebt die Summe $= \frac{1}{3}$. Nimmt man nur ein Glied $\frac{3}{10}$, so fehlt noch $\frac{1}{30}$. Nimmt man zwei Glieder $\frac{3}{10} + \frac{3}{100} = \frac{33}{100}$, so fehlt noch $\frac{1}{300}$ zu $\frac{1}{3}$.

524. Wenn diese unendliche Reihe gegeben ist:

$$9 + \frac{9}{10} + \frac{9}{100} + \frac{9}{1000} + \frac{9}{10000} \text{ ꝛc.}$$

so ist das erste Glied 9, und der Nenner $\frac{1}{10}$. Also 1 weniger dem Nenner ist $\frac{9}{10}$. Hiedurch das erste Glied 9 dividirt, ergiebt die Summe = 10. Hier ist zu bemerken, daß diese Reihe durch einen Decimalbruch also dargestellt wird 9,9999999 ꝛc.

Kapitel 12.

Von den unendlichen Decimalbrüchen.

525. Wir haben schon oben gesehen, daß in den Logarithmischen Rechnungen statt der gewöhnlichen Brüche Decimalbrüche gebraucht werden; was auch bei andern Rechnungen mit großem Vortheil geschehen kann. Es kommt also darauf an, zu zeigen, wie ein gewöhnlicher Bruch in einen Decimalbruch verwandelt wird, und wie

man umgekehrt den Werth eines Decimalbruchs in einen gewöhnlichen Bruch verwandeln kann.

526. Es sei auf allgemeine Art der gegebene Bruch $\frac{a}{b}$, welcher in einen Decimalbruch verwandelt werden soll. Da nun dieser Bruch den Quotienten ausdrückt, welcher entsteht, wenn man den Zähler a durch den Nenner b dividirt, so schreibe man statt a die Formel a,0000000, welche offenbar nichts anders angiebt als die Zahl a, weil keine 10tel, keine 100tel ꝛc. vorhanden sind. Diese Formel theile man nun durch die Zahl b, nach den gewöhnlichen Regeln der Division, wobei man nur zu beachten hat, daß das Komma, welches die Decimalbrüche von den ganzen Zahlen absondert, an seinen gehörigen Ort gesetzt werde. Dieses wollen wir nun durch nachfolgende Beispiele erläutern.

Es sei erstlich der gegebene Bruch $\frac{1}{2}$, so kommt die Decimaldivision wie folgt zu stehen.

$$2)\ \frac{1,0000000}{0,5000000} = \frac{1}{2}.$$

Hieraus ersehen wir, daß $\frac{1}{2}$ so viel ist wie 0,5000000, oder wie 0,5, welches auch offenbar ist, indem dieser Decimalbruch $\frac{5}{10}$ beträgt, was eben so viel ist wie $\frac{1}{2}$.

527. Es sei ferner der gegebene Bruch $\frac{1}{3}$, so hat man diesen Decimalbruch

$$3)\ \frac{1,0000000}{0,3333333} \text{ ꝛc.} = \frac{1}{3}.$$

Hieraus sieht man daß dieser Decimalbruch, dessen Werth $= \frac{1}{3}$ ist, nirgend abgebrochen werden kann, sondern ins Unendliche durch lauter 3 fortläuft. Also machen alle diese Brüche $\frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{1000} + \frac{3}{10000}$ ꝛc. ohne Ende zusammen genommen gerade so viel als $\frac{1}{3}$, wie wir schon oben gezeigt haben.

Für $\frac{2}{3}$ findet man folgenden Decimalbruch, der auch ins Unendliche fortläuft:

$$3)\ \frac{2,0000000}{0,6666666} \text{ ꝛc.} = \frac{2}{3}$$

was auch aus dem Vorigen sich ergiebt, weil dieser Bruch zweimal so groß ist als der vorige.

528. Es sei der gegebene Bruch $\frac{1}{4}$, so hat man diese Decimaldivision:

$$4)\ \frac{1,0000000}{0,2500000} = \frac{1}{4}$$

also ist $\frac{1}{4}$ so viel als 0,2500000, oder 0,25, und dies ist klar, da $\frac{2}{10} + \frac{5}{100} = \frac{25}{100} = \frac{1}{4}$. Eben so bekommt man für $\frac{3}{4}$ diesen Decimalbruch

$$4)\ \frac{3,0000000}{0,7500000} = \frac{3}{4}.$$

also ist $\frac{3}{4} = 0{,}75$ das ist $\frac{7}{10} + \frac{5}{100} = \frac{75}{100}$, welcher Bruch durch 25 gehoben $\frac{3}{4}$ giebt.

Wollte man $\frac{5}{4}$ in einen Decimalbruch verwandeln, so hätte man

$$4)\ \frac{5,0000000}{1,2500000} = \frac{5}{4},$$

dieses ist aber $1 + \frac{25}{100}$, das ist $1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$.

529. Auf solche Art wird $\frac{1}{5} = 0{,}2$ und $\frac{2}{5} = 0{,}4$; ferner $\frac{3}{5} = 0{,}6$; $\frac{4}{5} = 0{,}8$ und $\frac{5}{5} = 1$; weiter $\frac{6}{5} = 1{,}2$ ꝛc.

Wenn der Nenner 6 ist, so finden wir $\frac{1}{6} = 0{,}1666666$ ꝛc., welches so viel ist als 0,666666 — 0, 5. Nun aber ist 0,666666 $= \frac{2}{3}$ und 0, 5 $= \frac{1}{2}$, folglich ist 0,1666666 $= \frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$.

Ferner findet man $\frac{2}{6} = 0{,}3333333$ ꝛc. $= \frac{1}{3}$; hingegen $\frac{3}{6}$ wird 0,5000000 $= \frac{1}{2}$. Weiter wird $\frac{5}{6} = 0{,}833333 = 0{,}3333333 + 0{,}5$, das ist $\frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{5}{6}$.

530. Wenn der Nenner 7 ist, werden die Decimalbrüche verwickelter. Also für $\frac{1}{7}$ findet man 0,142857 ꝛc., wobei zu merken, daß immer diese sechs Zahlen 142857 wiederkehren. Um nun zu zeigen, daß dieser Decimalbruch gerade $\frac{1}{7}$ ausmacht, verwandele man denselben in eine geometrische Reihe, wovon das erste Glied $= \frac{142857}{1000000}$, der Nenner aber $= \frac{1}{1000000}$; also wird die Summe =

$\dfrac{\frac{142857}{1000000}}{1-\frac{1}{1000000}}$. Man multiplicire oben und unten mit 1000000, so wird die Summe $= \frac{142857}{999999} = \frac{1}{7}$.

531. Daß der gefundene Decimalbruch gerade $\frac{1}{7}$ beträgt, kann in folgender Art noch leichter gezeigt werden. Man setze für den Werth desselben den Buchstaben s, so daß

$$\begin{array}{rrl}
 & s = & 0,\ 142857142857142857\ \text{ꝛc.} \\
\text{so wird } & 10\ s = & 1,\ 42857142857142857\ \text{ꝛc.} \\
 & 100\ s = & 14,\ 2857142857142857\ \text{ꝛc.} \\
 & 1000\ s = & 142,\ 857142857142857\ \text{ꝛc.} \\
 & 10000\ s = & 1428,\ 57142857142857\ \text{ꝛc.} \\
 & 100000\ s = & 14285,\ 7142857142857\ \text{ꝛc.} \\
 & 1000000\ s = & 142857,\ 142857142857\ \text{ꝛc.} \\
\text{Subtrahire} & s = & 0,\ 142857142857\ \text{ꝛc.} \\ \hline
 & 999999\ s = & 142857,
\end{array}$$

Nun theile man durch 999999, so bekommt man $s = \frac{142857}{999999}$ und dieses ist der Werth des obigen Decimalbruchs $\frac{1}{7}$.

532. Eben so verwandelt man $\frac{2}{7}$ in einen Decimalbruch 0,28571428 ꝛc. Dieses leitet uns darauf, wie man den Werth des vorigen Decimalbruchs, den wir s gesetzt haben, leichter finden kann, weil dieser Bruch gerade zweimal so groß ist als der vorige und also $= 2\ s$. Da wir nun gehabt haben

$$\begin{array}{rrl}
 & 100\ s = & 14,28571428571\ \text{ꝛc.} \\
\text{hievon } 2\ s \text{ abgezogen} & 2\ s = & 0,28571428571\ \text{ꝛc.} \\ \hline
\text{bleiben} & 98\ s = & 14,
\end{array}$$

daher wird $s = \frac{14}{98} = \frac{1}{7}$.

Ferner wird $\frac{3}{7} = 0,42857142857$ ꝛc., dieses ist also nach dem obigen Satz $= 3\ s$; wir haben aber gefunden

$$\begin{array}{rrl}
 & 10\ s = & 1,42857142857\ \text{ꝛc.} \\
\text{subtrahire} & 3\ s = & 0,42857142857\ \text{ꝛc.} \\ \hline
\text{so wird} & 7\ s = & 1,\ \text{folglich}\ s = \frac{1}{7}.
\end{array}$$

533. Wenn also der Nenner des gegebenen Bruchs

7 ist, so läuft der Decimalbruch ins Unendliche und werden darin 6 Zahlen immer wiederholt, wovon der Grund leicht einzusehen ist, weil bei fortgesetzter Division endlich einmal so viel übrig bleiben muß, als man anfänglich gehabt. Es können aber nicht mehr verschiedene Zahlen übrig bleiben, als 1, 2, 3, 4, 5, 6, also müssen von der 6ten Division an wieder dieselben Zahlen herauskommen wie am Anfange. Wenn aber der Nenner so beschaffen ist, daß die Division endlich aufgeht, so fällt dieses weg.

534. Es sei der Nenner des Bruchs 8, so werden folgende Decimalbrüche gefunden:
$\frac{1}{8} = 0,125$; $\frac{2}{8} = 0,250$; $\frac{3}{8} = 0,375$; $\frac{4}{8} = 0,500$; $\frac{5}{8} = 0,625$; $\frac{6}{8} = 0,750$; $\frac{7}{8} = 0,875$ ꝛc.

535. Ist der Nenner 9, so findet man folgende Decimalbrüche: $\frac{1}{9} = 0,111$ ꝛc. $\frac{2}{9} = 0,222$ ꝛc. $\frac{3}{9} = 0,333$ ꝛc. Ist aber der Nenner 10, so bekommt man folgende Brüche: $\frac{1}{10} = 0,100$; $\frac{2}{10} = 0,2$; $\frac{3}{10} = 0,3$, wie aus der Natur der Sache erhellt. Eben so wird $\frac{1}{100} = 0,01$; $\frac{37}{100} = 0,37$; ferner $\frac{256}{1000} = 0,256$; weiter $\frac{24}{10000} = 0,0024$; was an und für sich klar ist.

536. Es sei der Nenner des Bruchs 11, so findet man diesen Decimalbruch $\frac{1}{11} = 0,0909090$ ꝛc. Wäre nun dieser Bruch gegeben und man wollte seinen Werth finden, so setze man denselben $= s$. Es wird also $s = 0,0909090$; und $10\ s = 0,909090$, weiter $100\ s = 9,09090$. Hievon s subtrahirt giebt $99\ s = 9$ und daher $s = \frac{9}{99} = \frac{1}{11}$. Ferner wird $\frac{2}{11} = 0,181818$; $\frac{3}{11} = 0,272727$; $\frac{6}{11} = 0,545454$.

537. Hier sind nun diejenigen Decimalbrüche sehr merkwürdig, in denen einige Zahlen immer wiederholt werden und in solcher Art ins Unendliche fortgehen. Wie nun von diesen Brüchen der Werth leicht zu finden ist, soll sogleich gezeigt werden.

Es werde erstlich nur eine Zahl wiederholt, welche $= a$ sei, so haben wir $s = 0,\ aaaaaaa$. Demnach wird

$$\begin{array}{rrl}
 & 10\ s = & a,aaaaaaa \\
\text{Man subtrahire} & s = & 0,aaaaaaa \\ \hline
\text{so wird} & 9\ s = & a,\ \text{folglich}\ s = \frac{a}{9}.
\end{array}$$

Werden immer zwei Zahlen wiederholt, als ab, so hat man $s = 0,\ abababa$. Daher wird $100\ s = ab,ababab$, hievon s subtrahirt, bleibt $99\ s = ab$; also $s = \frac{ab}{99}$.

Werden drei Zahlen abc immer wiederholt, so hat man $s = 0,\ abcabcabc$; folglich $1000\ s = abc,\ abcabc$. Hievon das Obige subtrahirt, bleibt $999\ s = abc$; also $s = \frac{abc}{999}$ u. s. w.

538. So oft also ein solcher Decimalbruch vorkommt, ist es leicht seinen Werth festzustellen. Also wenn dieser gegeben wäre 0,296296, so wird sein Werth $= \frac{296}{999}$ sein. Dieser Bruch durch 37 gehoben, ist $= \frac{8}{27}$.

Hieraus muß nun wiederum der obige Decimalbruch entstehen. Um dieses leichter zu zeigen, weil $27 = 3 . 9$, theile man 8 erstlich durch 9, und den Quotienten ferner durch 3, wie folgt:

$$\begin{array}{rl}
9) & 8,0000000 \\ \hline
3) & 0,8888888 \\ \hline
 & 0,2962962\ \text{ꝛc.}
\end{array}$$

welches der gegebene Decimalbruch ist.

539. Um noch ein Beispiel zu geben, verwandele man diesen Bruch $\frac{1}{1 . 2 . 3 . 4 . 5 . 6 . 7 . 8 . 9 . 10}$ in einen Decimalbruch, welches auf folgende Art geschieht:

$$\begin{array}{rl}
2) & 1,0000000000000 \\ \hline
3) & 0,5000000000000 \\ \hline
4) & 0,1666666666666 \\ \hline
5) & 0,0416666666666 \\ \hline
6) & 0,0083333333333 \\ \hline
7) & 0,0013888888888 \\ \hline
\end{array}$$

$$\begin{array}{rl}
8) & 0,0001984126984\,1 \\ \hline
9) & 0,0000248015873\,0 \\ \hline
10) & 0,0000027557319\,2 \\ \hline
 & 0,00000027557319.
\end{array}$$

Kapitel 13.

Von der Interessenrechnung.

540. Die Interessen oder Zinsen eines Capitals pflegen in Procenten ausgedrückt zu werden, indem man sagt, wie viel für 100 jährlich bezahlt werden. Gewöhnlich wird das Geld mit 5% verzinset, so daß für 100 Rthlr. jährlich 5 Rthlr. Interessen gezahlt werden. Hieraus ist nun leicht der Zins jedes Capitals zu berechnen, indem man nach der Regel de Tri sagt: 100 geben 5, was giebt das gegebene Capital? Es sei nun z. B. das Capital 860 Rthlr., so findet man den jährlichen Zins also:

$100 : 5 = 860$ zu . . . Antwort 43 Rthlr.

$$\begin{array}{rr}
 & 5 \\ \hline
100) & 4300 \\ \hline
 & 43
\end{array}$$

541. Bei Berechnung dieser einfachen Interessen wollen wir uns nicht aufhalten, sondern die Interessen auf Interessen betrachten, wenn jährlich die Zinsen wieder zum Capital geschlagen und dadurch das Capital vermehrt wird, wobei dann gefragt wird: wie hoch ein gegebenes Capital nach Verlauf einiger Jahre anwachse? Da nun das Capital jährlich größer wird, indem 100 Rthlr. zu 5% nach einem Jahr auf 105 anwachsen, so kann man daraus finden, wie groß jedes Capital nach Ablauf eines Jahres werden muß.

Es sei das Capital $= a$, so wird es nach einem Jahre gefunden, wenn man sagt 100 geben 105, was giebt a?

Antwort $\frac{105a}{100} = \frac{21a}{20}$, welches auch also geschrieben werden kann $\frac{21}{20} \cdot a$ oder $a + \frac{1}{20} \cdot a$.

542. Wenn also zu dem gegenwärtigen Capitale sein 20ster Theil addirt wird, so bekommt man das Capital für das folgende Jahr. Wenn man nun zu diesem wieder seinen 20sten Theil addirt, so findet man das Capital für das zweite Jahr; und zu diesem wieder sein 20ster Theil addirt, giebt das Capital für das dritte Jahr, &c. Hieraus ist leicht zu sehen, wie das Capital jährlich anwächst, und kann diese Rechnung so weit fortgesetzt werden, als man will.

543. Es sei das Capital jetzt 1000 Rthlr., welches zu 5% angelegt ist, und von dem die Zinsen jährlich wieder zum Capital geschlagen werden. Weil nun die Rechnung bald auf Brüche führen wird, so wollen wir solche in Decimalbrüchen ausdrücken, aber nicht weiter als bis auf 1000ste Theile eines Rthlr. gehen, weil kleinere Theile hier nicht in Betracht kommen.

Gegenwärtiges Capital von 1000 Rthlr. wird

nach 1 Jahr . . .	1050 Rthlr.
	52, 5
nach 2 Jahren . . .	1102, 5
	55, 125
nach 3 Jahren . . .	1157, 625
	57, 881
nach 4 Jahren . . .	1215, 506
	60, 775
nach 5 Jahren . . .	1276, 281 &c.

544. In dieser Art kann man auf so viele Jahre fortgehen als man will. Wenn aber die Anzahl der Jahre sehr groß ist, wird diese Rechnung sehr weitläuftig und mühsam. Sie läßt sich aber wie folgt abkürzen:

Es sei das gegenwärtige Capital $= a$, und da ein Capital von 20 Rthlr. nach einem Jahre 21 Rthlr. beträgt, so wird das Capital a nach einem Jahre auf $\frac{21}{20} \cdot a$ anwachsen. Ferner im folgenden Jahre auf $\frac{21^2}{20^2} \cdot a = (\frac{21}{20})^2 \cdot a$. Dieses ist nun das Capital nach zwei Jahren, welches in einem Jahre wieder anwächst auf $(\frac{21}{20})^3 \cdot a$, welches das Capital nach drei Jahren sein wird; nach 4 Jahren wird nun dasselbe sein $(\frac{21}{20})^4 \cdot a$; nach 5 Jahren $(\frac{21}{20})^5 \cdot a$; nach 100 Jahren $(\frac{21}{20})^{100} \cdot a$; und allgemein nach n Jahren wird dasselbe sein $(\frac{21}{20})^n \cdot a$; woraus man nach jeder beliebigen Zahl von Jahren die Größe des Capitals finden kann.

545. Der hier vorkommende Bruch $\frac{21}{20}$ gründet sich darauf, daß die Interessen zu 5% gerechnet werden, und $\frac{21}{20}$ so viel ist wie $\frac{105}{100}$. Sollten nun die Interessen zu 6% gerechnet werden, so würde das Capital a nach einem Jahre anwachsen auf $\frac{106}{100} \cdot a$; nach zwei Jahren auf $(\frac{106}{100})^2 \cdot a$; und nach n Jahren auf $(\frac{106}{100})^n \cdot a$.

Sollten aber die Interessen nur 4% betragen, so würde das Capital a nach n Jahren anwachsen auf $(\frac{104}{100})^n \cdot a$.

546. Wenn nun sowohl das Capital a als auch die Anzahl der Jahre gegeben ist, kann man diese Formeln leicht durch die Logarithmen auflösen. Denn man braucht nur den Logarithmus von dieser Formel zu suchen, welche zu 5% ist $(\frac{21}{20})^n \cdot a$. Da nun dieselbe ein Product ist von $(\frac{21}{20})^n$ und a, so ist ihr Logarithmus $= \log. (\frac{21}{20})^n + \log. a$. Da weiter $(\frac{21}{20})^n$ eine Potenz ist, so ist $\log. (\frac{21}{20})^n = n \log. \frac{21}{20}$. Daher ist der Logarithmus von dem gesuchten Capitale $= n \cdot \log. \frac{21}{20} + \log. a$. Es ist aber der Logarithmus des Bruchs $\frac{21}{20} = \log. 21 - \log. 20$.

547. Es sei nun das Capital $= 1000$ Rthlr. und man fragt, wie groß dasselbe nach 100 Jahren zu 5% sein werde?

Hier ist also $n = 100$. Der Logarithmus von diesem gesuchten Capitale wird nun $= 100 \log. \frac{21}{20} + \log. 1000$ sein, welches wie folgt berechnet wird:

$$\begin{array}{rl} \log. 21 = & 1{,}3222193 \\ \text{subtrah. } \log. 20 = & 1{,}3010300 \\ \hline \log. \frac{21}{20} = & 0{,}0211893 \\ \text{multiplic. mit } 100 & \\ \hline 100 \log. \frac{21}{20} = & 2{,}1189300 \\ \text{addirt } \log. 1000 = & 3{,}0000000 \\ \hline & 5{,}1189300 \end{array}$$

Dieses ist der Logarithmus des gesuchten Capitals und die Zahl desselben wird daher aus 6 Ziffern bestehen und also 131501 Rthlr. sein.

548. Ein Capital von 3452 Rthlr. zu 6%, wie groß wird dasselbe nach 64 Jahren?

Hier ist also $a = 3452$ und $n = 64$. Also der Logarithmus des gesuchten Capitals $= 64 \log. \frac{53}{50} + \log. 3452$, welches also berechnet wird:

$$\begin{array}{rl} \log. 53 = & 1{,}7242759 \\ \text{subtrah. } \log. 50 = & 1{,}6989700 \\ \hline \log. \frac{53}{50} = & 0{,}0253059 \\ \hline \text{mult. mit } 64;\ 64 \log. \frac{53}{50} = & 1{,}6195776 \\ \hline \log. 3452 = & 3{,}5380708 \\ \hline & 5{,}1576484 \end{array}$$

Also das gesuchte Capital $= 143763$ Rthlr.

549. Wenn die Anzahl der Jahre sehr groß ist, so könnte, weil mit derselben der Logarithmus eines Bruchs multiplicirt werden muß, die Logarithmen in den Tabellen aber nur auf 7 Ziffern berechnet werden, daraus ein merklicher Fehler entstehen. Daher muß der Logarithmus des Bruchs auf mehrere Ziffern genommen werden, wie aus folgendem Beispiel zu ersehen. Ein Capital von einem Rthlr. zu 5% bleibt 500 Jahre lang stehen, während inzwischen die jährlichen Zinsen immer dazu geschlagen werden. Nun fragt es sich, wie groß dieses Capital nach 500 Jahren sein wird.

Hier ist also $a = 1$ und $n = 500$, also der Logarithmus des gesuchten Capitals $= 500 \log. \frac{21}{20} + \log. 1$, woraus diese Rechnung entsteht:

$$\begin{array}{rl} \log. 21 = & 1{,}322219294733919 \\ \text{subtrahirt } \log. 20 = & 1{,}301029995663981 \\ \hline \log. \frac{21}{20} = & 0{,}021189299069938 \\ \hline \text{mult. mit } 500 \text{ giebt } & 10{,}594649534969000 \end{array}$$

Dieses ist nun der Logarithmus des gesuchten Capitals, welches daher selbst 39323200000 Rthlr. betragen wird.

550. Wenn man aber jährlich zu dem Capital nicht nur die Interessen schlagen, sondern noch jährlich eine neue Summe $= b$ dazu legen wollte, so wird das gegenwärtige Capital alle Jahr wie folgt anwachsen. Gegenwärtig hat man a:

nach 1 Jahr $\frac{21}{20} a + b$

nach 2 Jahren $(\frac{21}{20})^2 a + \frac{21}{20} b + b$

nach 3 Jahren $(\frac{21}{20})^3 a + (\frac{21}{20})^2 b + \frac{21}{20} b + b$

nach 4 Jahren $(\frac{21}{20})^4 a + (\frac{21}{20})^3 b + (\frac{21}{20})^2 b + \frac{21}{20} b + b$

nach n Jahren $(\frac{21}{20})^n a + (\frac{21}{20})^{n-1} b + (\frac{21}{20})^{n-2} b + \ldots$
$\ldots + \frac{21}{20} b + b$.

Dieses Capital besteht aus 2 Theilen, von denen der erste $= (\frac{21}{20})^n a$, der andere aber aus dieser Reihe rückwärts geschrieben $b + (\frac{21}{20}) b + (\frac{21}{20})^2 b + (\frac{21}{20})^3 b + \ldots (\frac{21}{20})^{n-1} b$ besteht, welches eine geometrische Reihe ist, deren Nenner $= \frac{21}{20}$ ist. Die Summe davon wird nun also gefunden:

Man multiplicirt das letzte Glied $(\frac{21}{20})^{n-1} b$ mit dem Nenner $\frac{21}{20}$, so bekommt man $(\frac{21}{20})^n b$; davon subtrahirt man das erste Glied b, so bleibt $(\frac{21}{20})^n b - b$. Dieses muß durch 1 weniger als der Nenner ist, dividirt werden, das ist durch $\frac{1}{20}$; daher wird die Summe der obigen

Reihe $= 20\,(\frac{21}{20})^n\,b - 20\,b$; folglich wird das gesuchte Capital sein:

$(\frac{21}{20})^n\,a + 20 \cdot (\frac{21}{20})^n\,b - 20\,b = (\frac{21}{20})^n \cdot (a + 20\,b) - 20\,b.$

551. Um dieses nun auszurechnen, muß man das erste Glied $(\frac{21}{20})^n$ a. $(a + 20\,b)$ besonders betrachten und berechnen, welches geschieht, wenn man den Logarithmus desselben sucht, welcher ist $n \log. \frac{21}{20} + \log. (a + 20\,b)$. Zu diesem sucht man in den Tabellen die gehörige Zahl, so hat man das erste Glied; davon subtrahirt man 20 b, so bekommt man das gesuchte Capital.

552. Aufgabe: Jemand hat ein Capital von 1000 Rthlr. zu 5% ausstehen, wozu er jährlich außer den Zinsen noch 100 Rthlr. hinzulegt, wie groß wird dieses Capital nach 25 Jahren sein?

Hier ist also $a = 1000$; $b = 100$; $n = 25$; daher wird die Rechnung wie folgt stehn:

$$\log. \tfrac{21}{20} = 0{,}021189299$$

multiplic. mit 25 giebt

$$25 \log. \tfrac{21}{20} = 0{,}5297324750$$
$$\log. (a + 20\,b) = 3{,}4771213135$$
$$4{,}0068537885$$

Also ist der erste Theil 10159, 1 Rthlr. davon subtrahirt $20\,b = 2000$, so beträgt das Capital nach 25 Jahren 8159, 1 Rthlr.

553. Da nun das Capital immer größer wird und nach 25 Jahren auf 8159 $\frac{1}{10}$ Rthlr. angewachsen, so kann man weiter fragen, nach wie viel Jahren dasselbe bis 1000000 Rthlr. anwachsen werde? Es sei n diese Anzahl der Jahre, und weil $a = 1000$, $b = 100$, so wird nach n Jahren das Capital sein: $(\frac{21}{20})^n\,(3000) - 2000$; dieses muß nun 1000000 Rthlr. sein, woraus diese Gleichung entspringt:

$$3000\,(\tfrac{21}{20})^n - 2000 = 1000000.$$

Man addire beiderseits 2000, so bekommt man

$$3000\,(\tfrac{21}{20})^n = 1002000.$$

Man dividire beiderseits durch 3000, so hat man $(\frac{21}{20})^n = 334$. Hievon nehme man die Logarithmen, so hat man $n \,.\, \log. \frac{21}{20} = \log. 334$. Hier dividire man durch $\log. \frac{21}{20}$, so hat man $n = \frac{\log. 334}{\log. \frac{21}{20}}$. Nun aber ist $\log. 334 = 2{,}5237465$ und $\log. \frac{21}{20} = 0{,}0211893$; daher wird $n = \frac{2{,}5237465}{0{,}0211893}$. Man multiplicire oben und unten mit 10000000, so kommt $n = \frac{25237465}{211893}$, das ist 119 Jahr, 1 Monat, 7 Tage, und nach so langer Zeit wird das Capital anwachsen auf 1000000 Rthlr.

554. Wenn aber, anstatt daß alle Jahr etwas zum Capital gelegt, etwas davon weggenommen wird, das man für seinen Unterhalt verwendet, und diese Summe $= b$ gesetzt wird, so wird das zu 5% angelegte Capital a in folgender Art fortgehen. Gegenwärtig ist es a:

nach 1 Jahr $\frac{21}{20}\,a - b$

nach 2 Jahren $(\frac{21}{20})^2\,a - \frac{21}{20}\,b - b$

nach 3 Jahren $(\frac{21}{20})^3\,a - (\frac{21}{20})^2\,b - \frac{21}{20}\,b - b$

nach n Jahren $(\frac{21}{20})^n\,a - (\frac{21}{20})^{n-1}\,b - (\frac{21}{20})^{n-2}\,b \ldots$
$\ldots - (\frac{21}{20})\,b - b.$

555. Dasselbe wird uns also in zwei Stücken vorgelegt, das erste ist $(\frac{21}{20})^n\,a$; davon wird diese geometrische Reihe rückwärts geschrieben subtrahirt:

$$b + \tfrac{21}{20}\,b + (\tfrac{21}{20})^2\,b + \ldots (\tfrac{21}{20})^{n-1}.$$

Hievon ist oben die Summe gefunden worden $= 20\,(\frac{21}{20})^n\,b - 20\,b$, welche von dem ersten $(\frac{21}{20})^n\,a$ subtrahirt, das nach n Jahren gesuchte Capital giebt $(\frac{21}{20})^n\,(a - 20\,b) + 20\,b$.

556. Diese Formel hätte sofort aus der vorigen gefunden werden können. Denn da vorher jährlich b

addirt wurde, so wird nun jährlich b subtrahirt. Also braucht man in der vorhergehenden Formel anstatt $+ b$ nur $- b$ zu schreiben. Hier ist nun besonders zu bemerken, daß wenn 20 b größer ist als a, so wird das erste Glied negativ, und also das Capital immer kleiner; welches an und für sich klar ist. Denn wenn vom Capital jährlich mehr weggenommen wird, als der Zins beträgt, so muß dasselbe alle Jahre kleiner werden und endlich ganz verschwinden. Dies wollen wir noch mit einem Beispiel erläutern.

557. Jemand hat ein Capital von 100000 Rthlr. zu 5% ausstehen; braucht aber alle Jahr zu seinem Unterhalte 6000 Rthlr., welches mehr ist als die Interessen von 100000 Rthlr., die nur 5000 Rthlr. betragen, daher das Capital immer kleiner wird. Nun ist die Frage, nach wie viel Jahren dasselbe gänzlich verschwinden wird.

Für diese Anzahl Jahre setze man n, und da $a = 100000$ Rthlr. und $b = 6000$, so wird nach n Jahren das Capital sein $= -20000\,(\frac{21}{20})^n + 120000$ oder $120000 - 20000\,(\frac{21}{20})^n$. Also verschwindet das Capital, wenn $20000\,(\frac{21}{20})^n$ auf 120000 anwächst, oder wenn $20000\,(\frac{21}{20})^n = 120000$. Man dividire durch 20000, so kommt $(\frac{21}{20})^n = 6$. Alsdann nehme man die Logarithmen, so kommt $n \log \frac{21}{20} = \log. 6$, und dividire durch $\log. \frac{21}{20}$, so findet man $n = \frac{\log. 6}{\log. \frac{21}{20}} = \frac{0{,}7781513}{0{,}0211893}$, oder $n = \frac{7781513}{211893}$; folglich wird $n =$ 36 Jahre 8 Monate 22 Tage. Also nach Verlauf dieser Frist wird das Capital ganz verschwinden.

558. Hier ist noch nöthig zu zeigen, wie nach diesem Princip die Interessen auch für eine kürzere Zeit als ganze Jahre berechnet werden können. Hiezu dient nun auch die oben gefundene Formel, daß ein Capital zu 5% nach n Jahren auf $(\frac{21}{20})^n\,a$ anwächst; ist nun die Zeit kürzer als ein Jahr, so wird der Exponent n ein Bruch, und die Rechnung kann wie vorher durch Logarithmen gemacht

werden. Sollte das Capital nach einem Tage gesucht werden, so muß man setzen $n = \frac{1}{365}$; will man es auf zwei Tage wissen, so wird $n = \frac{2}{365}$ ꝛc.

559. Es sei das Capital $a = 100000$ Rthlr. zu 5%, wie groß wird es nach 8 Tagen sein?

Hier ist $a = 100000$ und $n = \frac{8}{365}$; folglich wird das Capital sein $(\frac{21}{20})^{\frac{8}{365}}\,100000$. Hievon ist der Logarithmus $= \log. (\frac{21}{20})^{\frac{8}{365}} + \log. 100000 = \frac{8}{365} \log. \frac{21}{20} + \log. 100000$. Nun aber ist $\log. \frac{21}{20} = 0{,}0211892$, dieser mit $\frac{8}{365}$ multiplicirt, giebt 0,0004644; hierzu addirt log. 100000, welcher ist 5,0000000

5,0004644

so erhält man den Logarithmus von dem Capital = 5,0004644. Folglich ist das Capital selbst 100107 Rthlr., so daß in den ersten 8 Tagen die Interessen schon 107 Rthlr. betragen.

560. Hieher gehören noch andere Fragen, welche dahin gerichtet sind, daß wenn eine Summe Geld erst nach einigen Jahren verfällt, wie viel dieselbe jetzt werth sei. Hier ist zu bemerken, daß da 20 Rthlr. nach einem Jahre 21 Rthlr. betragen, wiederum 21 Rthlr., die nach einem Jahre zahlbar sind, jetzt nur 20 Rthlr. werth sind. Wenn also das nach einem Jahre verfallene Capital a gesetzt wird, so ist dessen Werth $\frac{20}{21}\,a$. Um also zu finden, wie viel das Capital a, das zu einer gewissen Zeit verfällt, ein Jahr früher werth sei, muß man dasselbe multipliciren mit $\frac{20}{21}$; zwei Jahre früher ist dasselbe $(\frac{20}{21})^2\,a$; drei Jahre früher ist dasselbe $(\frac{20}{21})^3\,a$ und überhaupt n Jahre früher ist der Werth desselben $(\frac{20}{21})^n\,a$.

561. Jemand genießt 5 Jahre lang eine jährliche Rente von 100 Rthlr.; dieselbe wollte er nun für baares Geld zu 5% verkaufen, wie viel wird er dafür bekommen?

Für die 100 Rthlr., welche verfallen

nach 1 Jahr bekommt er		95,239
nach 2 Jahren	=	= 90,704
nach 3 Jahren	=	= 86,385
nach 4 Jahren	=	= 82,272
nach 5 Jahren	=	= 78,355
Summe aller 5 Jahre	=	= 432,955

Also kann er für diese Rente nicht mehr fordern als 432,955 Rthlr. oder 432 Rthlr. 22 Gr. 11 Pf.

562. Sollte aber eine Rente viel mehr Jahre dauern, so würde die Rechnung auf diese Art sehr mühsam werden, sie kann aber in folgender Art erleichtert werden:

Es sei die jährliche Rente = a, welche jetzt schon anfängt und n Jahre lang dauert, so wird dieselbe jetzt werth sein:

$$a + \tfrac{20}{21} a + (\tfrac{20}{21})^2 a + (\tfrac{20}{21})^3 a + (\tfrac{20}{21})^4 a + \ldots (\tfrac{20}{21})^n a.$$

Dies ist nun eine geometrische Reihe, deren Summe gefunden werden muß. Man multiplicirt also das letzte Glied mit dem Nenner, so hat man $(\tfrac{20}{21})^{n+1} a$; davon das erste Glied subtrahirt, bleibt $(\tfrac{20}{21})^{n+1} a - a$; dieses muß mit dem Nenner weniger eins, das ist, mit $-\tfrac{1}{21}$ dividirt, oder welches gleich viel, mit -21 multiplicirt werden. Daher wird die gesuchte Summe sein $= -21 (\tfrac{20}{21})^{n+1} a + 21 a$, das ist $21 a - 21 (\tfrac{20}{21})^{n+1} a$, wovon das letztere Glied, das subtrahirt werden soll, leicht durch Logarithmen berechnet werden kann.

Zweiter Theil.

Erster Abschnitt.

Von den algebraischen Gleichungen und ihrer Auflösung.

Kapitel 1.

Von der Auflösung der Aufgaben überhaupt.

1. Der Hauptzweck der Algebra so wie aller Theile der Mathematik besteht darin, den Werth solcher Größen zu bestimmen, die bisher unbekannt gewesen, was aus genauer Erwägung der Bedingungen geschieht, welche stets durch bekannte Größen ausgedrückt sind. Daher wird die Algebra auch als die Wissenschaft definirt, welche zeigt, wie man aus bekannten Größen unbekannte findet.

2. Dieses stimmt auch mit allem überein, was bisher vorgetragen worden, indem überall aus bekannten Größen andere gefunden worden sind, die vorher als unbekannt angesehen werden konnten.

Das erste Beispiel zeigt sich gleich in der Addition, indem von zwei oder mehr gegebenen Zahlen die Summe gefunden wird. Es wurde nämlich eine Zahl gesucht, welche den gegebenen zusammen genommen gleich war.

In der Subtraction wurde eine Zahl gesucht, welche dem Unterschied zweier gegebenen Zahlen gleich war.

Und eben so verhält es sich auch mit der Multiplication und Division, wie auch mit der Erhebung der Potenzen

und der Ausziehung der Wurzeln, indem hier immer eine vorher unbekannte Zahl aus bekannten gefunden wird.

3. In dem letzten Abschnitte haben wir schon verschiedene Aufgaben aufgelöst, in denen es immer auf die Auffindung einer Zahl ankam, welche aus andern gegebenen Zahlen unter gewissen Bedingungen festgestellt werden mußte.

Alle Aufgaben laufen also darauf hinaus, daß aus einigen gegebenen Zahlen eine neue gefunden werden soll, welche mit jenen in einer gewissen Verbindung steht, und diese Verbindung wird durch gewisse Bedingungen oder Eigenschaften, welche der gesuchten Zahl zukommen müssen, bestimmt.

4. Bei jeder vorkommenden Aufgabe wird nun diejenige Zahl, die gesucht werden soll, durch einen der letzten Buchstaben des Alphabets bezeichnet, und alsdann werden alle vorgeschriebenen Bedingungen in Erwägung gezogen, durch welche eine Gleichheit zweier Werthe dargestellt wird. Aus einer solchen Gleichung muß sodann der Werth der gesuchten Zahl bestimmt werden, wodurch die Aufgabe aufgelöst wird. Bisweilen müssen auch mehrere Zahlen gesucht werden, was in gleicher Weise durch Gleichungen geschehen muß.

5. Dieses wird durch ein Beispiel deutlicher werden. Es werde folgende Aufgabe gestellt:

20 Personen, Männer und Frauen besuchen ein Gasthaus. Ein Mann giebt 8 Gr., eine Frau aber 7 Gr. aus und die ganze Zeche beläuft sich auf 6 Rthlr. Nun ist die Frage, wie viel Männer und Frauen sind es gewesen?

Um diese Aufgabe aufzulösen, setze man die Zahl der Männer = x, und sehe dieselbe als bekannt an, oder man verfahre damit, als wenn man die Probe machen wollte, ob dadurch der Aufgabe ein Genüge geschähe. Da nun die Anzahl der Männer = x ist, und Männer und Frauen zusammen 20 Personen sind, so kann man daraus die Anzahl der Frauen bestimmen, welche gefunden wird, wenn man die Anzahl der Männer von 20 subtrahirt. Also war die Zahl der Frauen = 20 — x.

Da nun ein Mann 8 Gr. ausgiebt, so werden diese x Männer 8x Gr. ausgeben.

Und weil eine Frau 7 Gr. ausgiebt, so werden diese 20 — x Frauen 140 — 7x Gr. ausgeben.

Also geben Männer und Frauen zusammen 140 + x Gr. aus. Wir wissen aber, wie viel sie ausgegeben haben, nämlich 6 Rthlr., welche zu Gr. gemacht 144 Gr. geben*). Daher erhalten wir diese Gleichung $140 + x = 144$, woraus man leicht sieht, daß $x = 4$.

Daher besuchten das Gasthaus 4 Männer und 16 Frauen.

6. Eine andere Aufgabe von gleicher Art:

20 Personen, Männer und Frauen, sind in einem Gasthause. Die Männer geben 24 Fl., die Frauen geben auch 24 Fl. aus und es findet sich, daß ein Mann einen Gulden mehr als eine Frau hat zahlen müssen. Wie viel waren es Männer und Frauen?

Es sei die Zahl der Männer = x, so ist die Zahl der Frauen = 20 — x.

Da nun diese x Männer 24 Fl. ausgegeben haben, so hat ein Mann $\frac{24}{x}$ Fl. ausgegeben.

Und weil die 20 — x Frauen auch 24 Fl. ausgegeben haben, so hat eine Frau $\frac{24}{20 - x}$ ausgegeben. Diese Zeche einer Frau ist nun um 1 geringer als die Zeche eines Mannes. Wenn man also von der Zeche eines Mannes 1 Fl. subtrahirt, so muß die Zeche einer Frau herauskommen;

*) Der Thaler wurde 1760 mit 24 Groschen berechnet.