um Eins größer ist als der ganze Theil des Logarithmus. Wenn man also für eine unbekannte Zahl diesen Logarithmus gefunden hätte 6,4771213, so wüßte man sogleich, daß diese Zahl aus 7 Ziffern besteht, und also größer sein muß als 1000000. Diese Zahl ist auch wirklich 3000000; denn log. 3000000 = log. 3 + log. 1000000. Nun aber ist log. 3 = 0,4771213 und log. 1000000 = 6, welche zwei Logarithmen zusammen addirt 6,4771213 geben.

250. Bei jedem Logarithmus kommt also die Hauptsache auf den nach dem Komma folgenden Decimalbruch an, welcher, wenn er einmal bekannt ist, für viele Zahlen dienen kann. Um dieses zu zeigen, wollen wir den Logarithmus der Zahl 365 betrachten, dessen erster Theil unstreitig 2 ist; für den andern Theil aber, nämlich den Decimalbruch, wollen wir, der Kürze halber, den Buchstaben x schreiben, also daß log. 365 = 2 + x; hieraus erhalten wir, wenn wir immerfort mit 10 multipliciren, log. 3650 = 3 + x; log. 36500 = 4 + x; log. 365000 = 5 + x. Wir können auch zurück gehen und immer durch 10 dividiren, so bekommen wir log. 36,5 = 1 + x; log. 3,65 = 0 + x; log. 0,365 = − 1 + x; log. 0,0365 = − 2 + x; log. 0,00365 = − 3 + x u. s. w.

251. Für alle diese Zahlen nun, welche aus den Ziffern 365 entstehen, sie mögen 0 hinter oder vor sich haben, bleibt derselbe Decimalbruch in ihren Logarithmen und der Unterschied befindet sich nur in der ganzen Zahl vor dem Komma, welche, wie wir gesehen, auch negativ werden kann, wenn nämlich die Zahl kleiner als 1 wird. Weil nun die gewöhnlichen Rechner nicht wohl mit den Negativzahlen umgehen können, so wird in diesen Fällen die ganze Zahl der Logarithmen um 10 vermehrt, und anstatt 0 vor dem Komma, pflegt man schon 10 zu schreiben, da man dann 9 bekommt anstatt − 1; anstatt − 2 bekommt man 8; anstatt − 3 bekommt man 7 u. s. w. Hier muß aber nicht

außer Acht gelassen werden, daß die ganzen Zahlen vor dem Komma um 10 zu groß angenommen worden, damit man nicht schließe, die Zahl bestehe aus 10, oder 9, oder 8 Ziffern, sondern daß die Zahl erst nach dem Komma entweder auf der ersten Stelle, wenn 9 vorhanden, oder auf der zweiten Stelle, wenn 8 vorhanden, oder gar erst auf der dritten, wenn 7 vom Anfang des Logarithmus steht, zu schreiben angefangen werden muß. Auf solche Art findet man die Logarithmen der Sinus in den Tabellen dargestellt.

252. In den gewöhnlichen Tabellen bestehen die Decimalbrüche für die Logarithmen in sieben Ziffern (oder Figuren), wovon also die letzte $\frac{1}{10000000}$ Theile andeutet, und man kann sicher sein, daß dieselben um kein einziges solches Theilchen von der Wahrheit abweichen, und daß daher der Fehler fast Nichts zu bedeuten hat. Wollte man aber noch genauer rechnen, so müßten die Logarithmen auf noch mehr als sieben Ziffern dargestellt werden, wie es in den großen Vlacquischen Tabellen geschieht, wo die Logarithmen auf zehn Ziffern berechnet sind.

253. Weil der erste Theil eines Logarithmus keine Schwierigkeit hat, so wird derselbe in den Tabellen nicht gesetzt, sondern man findet daselbst nur die sieben Ziffern des Decimalbruchs, welche den zweiten Theil ausmachen. In den englischen Tabellen findet man dieselben für alle Zahlen bis 100000 ausgedrückt, und wenn größere Zahlen noch vorkommen, sind kleine Täfelchen beigefügt, woraus man ersehen kann, wie viel wegen der folgenden Ziffern noch zu den Logarithmen addirt werden muß.

254. Hieraus ist also leicht zu verstehen, wie man aus einem gefundenen Logarithmus wiederum die ihm zukommende Zahl aus den Tabellen entnehmen muß. Um die Sache noch mehr zu erläutern, wollen wir z. B. die Zahlen 343 und 2401 mit einander multipliciren. Da nun

die Logarithmen davon addirt werden müssen, so kommt die Rechnung so zu stehen:

$$\begin{array}{r@{\;}l}
\left.\begin{array}{r} \text{log. } 343 = 2{,}5352941 \\ \underline{\text{log. } 2401 = 3{,}3803922} \end{array}\right\} & \text{addirt} \\
\left.\begin{array}{r} 5{,}9156863 \\ \underline{6847} \end{array}\right\} & \text{subtrahirt} \\
16. &
\end{array}$$

Die gesuchte Zahl ist daher 823543. Denn die Summe ist der Logarithmus des gesuchten Products, und aus dessen erstem Theil 5 erkennen wir, daß das Product aus 6 Ziffern besteht, welche aus dem Decimalbruche mittels der Tabelle gefunden worden 823543, und dieses ist wirklich das gesuchte Product.

255. Da bei Ausziehung der Wurzeln die Logarithmen einen besonders wichtigen Dienst leisten, so wollen wir auch dies an einem Beispiel erläutern. Es soll aus der Zahl 10 die Quadratwurzel gefunden werden. Da hat man also nur nöthig, den Logarithmus von 10, welcher 1,0000000 ist, durch 2 zu dividiren, so wird der Quotient 0,5000000 der Logarithmus der gesuchten Wurzel sein. Daher die Wurzel selbst aus den Tabellen gefunden wird 3,16228, wovon auch wirklich das Quadrat nur um $\frac{1}{100000}$ Theilchen größer ist als 10.

Zweiter Abschnitt.

Von den verschiedenen Rechnungsarten mit zusammengesetzten Größen.

Kapitel 1.

Von der Addition zusammengesetzter Größen.

256. Wenn zwei oder mehr Formeln, welche aus vielen Gliedern bestehen, addirt werden sollen, so pflegt die Addition zuweilen nur durch gewisse Zeichen angedeutet zu

werden, indem man jede Formel in Klammern einschließt und dieselben mit dem Zeichen + verbindet. Also wenn die Formeln a + b + c und d + e + f addirt werden sollen, so wird die Summe so angegeben:

$$(a + b + c) + (d + e + f).$$

257. Auf diese Art wird die Addition nur angedeutet, nicht aber vollzogen. Es ist aber leicht einzusehen, daß man, um dieselbe zu vollziehen, nur die Klammern wegzulassen braucht; denn da die Zahl d + e + f zur ersten addirt werden soll, so geschieht es, wenn man erstens + d, hierauf + e und endlich + f hinzufügt, da dann die Summe sein wird:

$$a + b + c + d + e + f.$$

Eben dies würde auch zu beobachten sein, wenn einige Glieder das Zeichen − hätten, welche dann gleichfalls mit ihren Zeichen hinzugefügt werden müßten.

258. Um dies deutlicher zu machen, wollen wir ein Exempel in bloßen Zahlen betrachten, und zu der Formel 12 − 8 noch diese 15 − 6 addiren.

Man addire also erstlich 15, so hat man 12 − 8 + 15; man hat aber zu viel addirt, weil man nur 15 − 6 addiren sollte, und es ist klar, daß man 6 zu viel addirt hat; man nehme also die 6 wieder weg, oder schreibe sie mit ihrem Zeichen dazu, so hat man die wahre Summe:

$$12 - 8 + 15 - 6.$$

Hieraus erhellt, daß die Summe gefunden wird, wenn man alle Glieder, jedes mit seinem Zeichen, an einander reiht.

259. Wenn demnach zu der Formel a − b + c noch diese d − e − f addirt werden soll, so wird die Summe wie folgt ausgedrückt:

$$a - b + c + d - e - f.$$

Wobei wohl zu bemerken, daß es hier gar nicht auf die Reihenfolge der Glieder ankommt, sondern dieselben nach

Belieben unter einander versetzt werden können, wenn nur jedes sein ihm vorgesetztes Zeichen behält. Also könnte die obige Summe auch also geschrieben werden:

$$c - e + a - f + d - b.$$

260. Folglich hat die Addition nicht die geringste Schwierigkeit, wie auch immer die Glieder aussehen mögen. Also wenn zu dieser Formel

$$2a^3 + 6\sqrt{b} - 4 \log. c$$

noch diese $5\sqrt[5]{a} - 7c$ addirt werden sollte, so würde die Summe sein:

$$2a^3 + 6\sqrt{b} - 4 \log. c + 5\sqrt[5]{a} - 7c;$$

woraus erhellt, daß dies die Summe ist, und daß es auch erlaubt ist, diese Glieder nach Belieben unter einander zu versetzen, wenn nur jedes sein Zeichen behält.

261. Oft aber trägt es sich zu, daß die in solcher Art gefundene Summe weit kürzer zusammengezogen werden kann, indem zuweilen zwei oder mehr Glieder sich gänzlich aufheben, wie wenn z. B. in der Summe die Glieder $+ a - a$, oder $3a - 4a + a$ vorkämen. Auch können bisweilen zwei oder mehrere Glieder in eines gebracht werden, wie z. B.: $3a + 2a = 5a$; $7b - 3b = + 4b$; $- 6c + 10c = + 4c$; $5a - 8a = - 3a$; $- 7b + b = - 6b$; $- 3c - 4c = - 7c$; $2a - 5a + a = - 2a$; $- 3b - 5b + 2b = - 6b$.

Diese Abkürzung findet also statt, so oft zwei oder mehr Glieder in Bezug auf die Buchstaben völlig gleich sind. Hingegen $2a^2 + 3a$ läßt sich nicht zusammenziehen, und $2b^3 - b^4$ läßt sich auch nicht abkürzen.

262. Wir wollen also einige Beispiele dieser Art betrachten. Erstlich sollen die zwei Formeln addirt werden $a + b$ und $a - b$, da dann nach obiger Regel herauskommt $a + b + a - b$, nun aber ist $a + a = 2a$ und $b - b = 0$, folglich ist die Summe $= 2a$. Dieses Beispiel lehrt die wichtige Wahrheit:

Wenn zu der Summe zweier Zahlen $(a + b)$

ihre Differenz $(a - b)$ addirt wird, so kommt die größere Zahl doppelt heraus.

Man betrachte noch folgende Beispiele:

$$\begin{array}{r|r} 3a - 2b - c & a^3 - 2a^2b + 2ab^2 \\ \underline{5b - 6c + a} & \underline{- a^2b + 2ab^2 - b^3} \\ 4a + 3b - 7c & a^3 - 3a^2b + 4ab^2 - b^3. \end{array}$$

Kapitel 2.

Von der Subtraction zusammengesetzter Größen.

263. Wenn man die Subtraction nur andeuten will, so schließt man jede Formel in Klammern ein, und diejenige, welche abgezogen werden soll, wird mit Vorsetzung des Zeichens $-$ an diejenige angehängt, von welcher sie abgezogen werden soll. Also wenn von der Formel $a - b + c$ diese $d - e + f$ abgezogen werden soll, so wird der gesuchte Rest also angedeutet:

$$(a - b + c) - (d - e + f),$$

woraus deutlich zu ersehen, daß die letztere Formel von der ersteren abgezogen werden soll.

264. Um aber die Subtraction wirklich zu vollziehen, ist zuvörderst zu bemerken, daß, wenn von einer Größe a, eine andere positive Größe $+ b$ abgezogen werden soll, man $a - b$ bekommen wird.

Wenn aber eine negative Zahl $- b$ von a abgezogen werden soll, so wird man bekommen $a + b$, weil eine Schuld wegnehmen eben so viel ist, als etwas schenken.

265. Setzen wir nun den Fall, man solle von der Formel $a - c$ diese $b - d$ subtrahiren, so nehme man erstlich b weg, da bekommt man $a - c - b$; wir haben aber zu viel weggenommen, denn wir sollten nur $b - d$ wegnehmen, und zwar um d zu viel; wir müssen also dieses d wieder hinzusetzen, da wir dann erhalten

$$a - c - b + d,$$

woraus sich die Regel offenbar ergiebt, daß die Glieder derjenigen Formel, welche subtrahirt werden

sollen, mit umgekehrten Zeichen hinzugefügt werden müssen.

266. Mit Hülfe dieser Regel, ist es also ganz leicht, die Subtraction zu vollziehen, indem die Formel, von welcher subtrahirt werden soll, hingeschrieben, diejenige Formel aber, welche subtrahirt werden soll, mit umgekehrten Zeichen der Glieder angehängt wird. Also im ersten Exempel, da von $a - b + c$ diese Formel $d - e + f$ abgezogen werden soll, bekommt man: $a - b + c - d + e - f$.

Um dieses mit bloßen Zahlen zu erläutern, subtrahire man von $9-3+2$ diese Formel $6-2+4$. Man bekommt:

$$9 - 3 + 2 - 6 + 2 - 4 = 0;$$

welches auch sogleich in die Augen fällt; denn

$$9 - 3 + 2 = 8 \text{ und } 6 - 2 + 4 = 8, \text{ also } 8 - 8 = 0.$$

267. Da nun die Subtraction selbst weiter keine Schwierigkeit hat, so bleibt nur noch übrig zu bemerken, daß, wenn in dem gefundenen Rest zwei oder mehrere Glieder vorkommen, welche gleiche Buchstabenbezeichnung haben, die Abkürzung nach denselben Regeln vorgenommen werden kann, welche oben bei der Addition gegeben worden.

268. Soll von $a + b$, wodurch die Summe zweier Zahlen angedeutet wird, ihre Differenz $a - b$ subtrahirt werden, so bekommt man erstlich $a + b - a + b$; nun aber ist $a - a = 0$ und $b + b = 2b$, folglich ist der gesuchte Rest $2b$, das ist die kleinere Zahl doppelt genommen.

269. Zu weiterer Erläuterung wollen wir noch einige Exempel beifügen:

$$\begin{array}{cc} a^2 + ab + b^2 & 3a - 4b + 5c \\ \underline{b^2 - ab + a^2} & \underline{2b + 4c - 6a} \\ 2ab & 9a - 6b + c \\ & \\ a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 & \sqrt{a} + 2\sqrt{b} \\ \underline{a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3} & \underline{\sqrt{a} - 3\sqrt{b}} \\ 6a^2b + 2b^3 & 5\sqrt{b} \end{array}$$

Kapitel 3.

Von der Multiplication zusammengesetzter Größen.

270. Wenn eine solche Multiplication angezeigt werden soll, so wird jede von den Formeln, welche mit einander multiplicirt werden sollen, in Klammern eingeschlossen, und beide werden ohne Zeichen oder mit einem dazwischen gesetzten Punkt an einander gehängt.

Also wenn diese beiden Formeln $a - b + c$ und $d - e + f$ mit einander multiplicirt werden sollen, so wird das Product wie folgt angezeigt:

$$(a - b + c) . (d - e + f)$$

oder $(a - b + c)\ (d - e + f)$.

Diese Art wird sehr häufig gebraucht, weil man daraus sogleich sieht, aus welchen Factoren ein solches Product zusammengesetzt ist.

271. Um aber zu zeigen, wie eine solche Multiplication wirklich vollzogen werden muß, so ist erstlich zu merken, daß, wenn eine solche Formel $a - b + c$ z. B. mit 2 multiplicirt werden soll, jedes Glied derselben besonders mit 2 multiplicirt werden muß, und also herauskommt:

$$2a - 2b + 2c.$$

Eben dies gilt auch von allen andern Zahlen. Wenn also dieselbe Formel mit d multiplicirt werden soll, so bekommt man: $ad - bd + cd$.

272. Hier haben wir vorausgesetzt, daß die Zahl d positiv sei; wenn aber mit einer Negativzahl $- e$ multiplicirt werden soll, so ist die oben gegebene Regel zu beobachten, daß nämlich zwei ungleiche Zeichen multiplicirt $-$, zwei gleiche aber $+$ geben. Daher bekommt man:

$$- ae + be - ce.$$

273. Um nun zu zeigen, wie eine Formel, sie mag einfach oder zusammengesetzt sein, als A, durch eine zusammengesetzte, als $d - e$, multiplicirt werden soll, so wollen wir zuerst bloße Zahlen betrachten, und annehmen,

daß A mit 7 — 3 multiplicirt werden soll. Hier ist nun klar, daß man das Vierfache von A verlangt; nimmt man nun erstlich das Siebenfache, so muß man hierauf das Dreifache davon subtrahiren. Also auch überhaupt, wenn man mit $d - e$ multiplicirt, so multiplicirt man die Formel A erstlich mit d und hierauf mit e, und subtrahirt das letztere Product von dem ersteren, so daß herauskommt $dA - eA$. Laßt uns nun setzen $A = a - b$, welches mit $d - e$ multiplicirt werden soll, so erhalten wir:

$$\begin{array}{l} dA = ad - bd \\ eA = ae - be \\ \hline ad - bd - ae + be, \end{array}$$

welches das verlangte Product ist.

274. Da wir nun das Product $(a - b) \cdot (d - e)$ gefunden haben, und von der Richtigkeit desselben überzeugt sind, so wollen wir dieses Multiplicationsexempel in folgender Art deutlich vor Augen führen:

$$\begin{array}{l} a - b \\ d - e \\ \hline ad - bd - ae + be, \end{array}$$

woraus wir sehen, daß jedes Glied der oberen Formel mit jedem der unteren multiplicirt werden muß, und daß in Bezug auf die Zeichen die oben gegebene Regel sich bewährt hat, und hiedurch von Neuem bestätigt wird.

275. Nach dieser Regel wird es also leicht sein, folgendes Exempel auszurechnen; $a + b$ soll multiplicirt werden mit $a - b$:

$$\begin{array}{rrr} a & + b & \\ a & - b & \\ \hline a^2 & + ab & \\ & - ab & - b^2 \\ \hline \end{array}$$

Das Product wird sein $= a^2 - b^2$.

276. Wenn also für a und b nach Belieben bestimmte Zahlen gesetzt werden, so lehrt uns dieses Exempel folgende Wahrheit: Wenn die Summe zweier Zahlen mit

ihrer Differenz multiplicirt wird, so ist das Product die Differenz ihrer Quadrate. Dies kann so dargestellt werden: $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$; folglich ist wiederum die Differenz zweier Quadratzahlen immer ein Product, oder sie läßt sich theilen, sowohl durch die Summe als auch durch die Differenz der Wurzelzahlen, und ist also keine Primzahl.

277. Laßt uns ferner noch folgende Exempel ausrechnen:

$$\text{I.}\quad \begin{array}{rrr} 2a & - 3 & \\ a & + 2 & \\ \hline 2a^2 & - 3a & \\ & + 4a & - 6 \\ \hline 2a^2 & + a & - 6 \end{array} \qquad \text{II.}\quad \begin{array}{rrrr} 4a^2 & - 6a & + 9 & \\ 2a & + 3 & & \\ \hline 8a^3 & - 12a^2 & + 18a & \\ & + 12a^2 & - 18a & + 27 \\ \hline 8a^3 & & & + 27. \end{array}$$

$$\text{III.}\quad \begin{array}{rrrr} 3a^2 & - 2ab & - b^2 & \\ 2a & - 4b & & \\ \hline 6a^3 & - 4a^2b & - 2ab^2 & \\ & - 12a^2b & + 8ab^2 & + 4b^3 \\ \hline 6a^3 & - 16a^2b & + 6ab^2 & + 4b^3. \end{array}$$

$$\text{IV.}\quad \begin{array}{rrrrr} a^2 & + 2ab & + 2b^2 & & \\ a^2 & - 2ab & + 2b^2 & & \\ \hline a^4 & + 2a^3b & + 2a^2b^2 & & \\ & - 2a^3b & - 4a^2b^2 & - 4ab^3 & \\ & & + 2a^2b^2 & + 4ab^3 & + 4b^4 \\ \hline a^4 & & & & + 4b^4. \end{array}$$

$$\text{V.}\quad \begin{array}{rrrrr} 2a^2 & - 3ab & - 4b^2 & & \\ 3a^2 & - 2ab & + b^2 & & \\ \hline 6a^4 & - 9a^3b & - 12a^2b^2 & & \\ & - 4a^3b & + 6a^2b^2 & + 8ab^3 & \\ & & + 2a^2b^2 & - 3ab^3 & - 4b^4 \\ \hline 6a^4 & - 13a^3b & - 4a^2b^2 & + 5ab^3 & - 4b^4. \end{array}$$

$$\text{VI.}\quad \begin{array}{l} a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc \\ a + b + c \\ \hline a^3 + ab^2 + ac^2 - a^2b - a^2c - abc \\ \quad - ab^2 - ac^2 + a^2b + a^2c - abc + b^3 + bc^2 - b^2c \\ \qquad - abc - bc^2 + b^2c + c^3 \\ \hline a^3 - 3abc + b^3 + c^3. \end{array}$$

278. Wenn mehr als zwei Formeln mit einander multiplicirt werden sollen, so begreift man leicht, daß, nachdem man zwei davon mit einander multiplicirt, das Product nach und nach auch mit den übrigen multiplicirt werden muß, und daß es gleichgültig ist, welche Ordnung man darin beobachtet. Soll z. B. folgendes Product, das aus vier Factoren besteht, gefunden werden:

$$\overset{\text{I.}}{(a + b)}\quad \overset{\text{II.}}{(a^2 + ab + b^2)}\quad \overset{\text{III.}}{(a - b)}\quad \overset{\text{IV.}}{(a^2 - ab + b^2)},$$

so multiplicirt man erstlich den I. und II. Factor:

$$\begin{array}{lrrrr} \text{II.} & a^2 & + ab & + b^2 & \\ \text{I.} & a & + b & & \\ \hline & a^3 & + a^2b & + ab^2 & \\ & & + a^2b & + ab^2 & + b^3 \\ \hline \text{I. II.} & a^3 & + 2a^2b & + 2ab^2 & + b^3. \end{array}$$

Hierauf multiplicirt man den III. und IV. Factor:

$$\begin{array}{lrrrr} \text{IV.} & a^2 & - ab & + b^2 & \\ \text{III.} & a & - b & & \\ \hline & a^3 & - a^2b & + ab^2 & \\ & & - a^2b & + ab^2 & - b^3 \\ \hline \text{III. IV.} & a^3 & - 2a^2b & + 2ab^2 & - b^3. \end{array}$$

Nun bleibt also noch übrig, jenes Product I. II. mit diesem III. IV. zu multipliciren:

$$\begin{array}{l} \text{I. II.} = a^3 + 2a^2b + 2ab^2 + b^3 \\ \text{III. IV.} = a^3 - 2a^2b + 2ab^2 - b^3 \\ \hline a^6 + 2a^5b + 2a^4b^2 + a^3b^3 \\ \quad - 2a^5b - 4a^4b^2 - 4a^3b^3 + 2a^2b^4 \\ \qquad + 2a^4b^2 + 4a^3b^3 + 4a^2b^4 + 2ab^5 \\ \qquad\quad - a^3b^3 - 2a^2b^4 - 2ab^5 - b^6. \\ \hline a^6 - b^6, \end{array}$$

dieses ist nun das gesuchte Product.

279. Laßt uns nun bei demselben Exempel die Ordnung verändern und erstlich die I. Formel mit der III. und dann die II. mit der IV. multipliciren:

$$\begin{array}{lrrr} \text{I.} & a & + b & \\ \text{III.} & a & - b & \\ \hline & a^2 & + ab & \\ & & - ab & - b^2 \\ \hline \text{I. III.} & & = a^2 & - b^2 \end{array}$$

$$\begin{array}{lrrrrr} \text{II.} & a^2 & + ab & + b^2 & & \\ \text{IV.} & a^2 & - ab & + b^2 & & \\ \hline & a^4 & + a^3b & + a^2b^2 & & \\ & & - a^3b & - a^2b^2 & - ab^3 & \\ & & & + a^2b^2 & + ab^3 & + b^4 \\ \hline \text{II. IV.} & a^4 & & + a^2b^2 & & + b^4. \end{array}$$

Nun bleibt noch übrig, das Product II. IV. mit dem I. III. zu multipliciren:

$$\begin{array}{l} \text{II. IV.} = a^4 + a^2b^2 + b^4 \\ \text{I. III.} = a^2 - b^2 \\ \hline a^6 + a^4b^2 + a^2b^4 \\ \quad - a^4b^2 - a^2b^4 - b^6 \\ \hline a^6 - b^6, \end{array}$$

welches das gesuchte Product ist.

280. Wir wollen die Rechnung noch nach einer andern Ordnung anstellen, nämlich zuerst die I. Formel mit der IV. und hierauf die II. mit der III. multipliciren:

$$\begin{array}{lrrrr} \text{IV.} & a^2 & - ab & + b^2 & \\ \text{I.} & a & + b & & \\ \hline & a^3 & - a^2b & + ab^2 & \\ & & + a^2b & - ab^2 & + b^3 \\ \hline \text{I. IV.} & = a^3 & & & + b^3. \end{array}$$

$$\begin{array}{lrrrr} \text{II.} & a^2 & + ab & + b^2 & \\ \text{III.} & a & - b & & \\ \hline & a^3 & + a^2b & + ab^2 & \\ & & - a^2b & - ab^2 & - b^3 \\ \hline \text{II. III.} & = a^3 & & & - b^3. \end{array}$$

Nun bleibt noch übrig, das Product I. IV. mit II. III. zu multipliciren:

$$\begin{array}{rl}
\text{I. IV.} & = a^3 + b^3 \\
\text{II. III.} & = a^3 - b^3 \\ \hline
 & a^6 + a^3b^3 \\
 & \quad - a^3b^3 - b^6 \\ \hline
 & a^6 - b^6.
\end{array}$$

281. Es ist der Mühe werth, dieses Exempel mit Zahlen zu erläutern. Es sei daher $a = 3$ und $b = 2$; so hat man $a + b = 5$ und $a - b = 1$; ferner $a^2 = 9$, $ab = 6$, $b^2 = 4$. Also ist $a^2 + ab + b^2 = 19$, und $a^2 - ab + b^2 = 7$. Folglich wird dieses Product verlangt: $5.19.1.7$, welches 665 giebt. Es ist aber $a^6 = 729$ und $b^6 = 64$, folglich $a^6 - b^6 = 665$, wie wir schon gesehen haben.

Kapitel 4.

Von der Division zusammengesetzter Größen.

282. Wenn man die Division nur anzeigen will, so bedient man sich entweder des gewöhnlichen Zeichens eines Bruchs, indem man den Dividendus über die Linie und den Divisor unter die Linie schreibt; oder man schließt beide in Klammern ein, und schreibt den Divisor nach dem Dividendus mit dazwischen gesetzten zwei Punkten. Also wenn $a + b$ durch $c + d$ getheilt werden soll, so wird der Quotient nach der ersten Art also angezeigt:

$$\frac{a+b}{c+d}.$$

Nach der andern Art aber also:

$$(a + b) : (c + d).$$

Beides wird ausgesprochen $a + b$ getheilt durch $c + d$.

283. Wenn eine zusammengesetzte Formel durch eine einfache getheilt werden soll, wird jedes Glied besonders getheilt, z. B.:

$6a - 8b + 4c$ getheilt durch 2 giebt $3a - 4b + 2c$.

Ebenso $a^3 - 2a^2b + 3ab^2 : a$
$= a^2 - 2ab + 3b^2$.

Ferner $4a^2b - 6a^2c + 8\,abc : 2a$
$= 2ab - 3ac + 4bc$.

Endlich $9a^2bc - 12ab^2c + 15abc^2 : 3abc$
$= 3a - 4b + 5c$.

284. Wenn sich etwa ein Glied des Dividendus nicht theilen läßt, so wird der entstehende Quotient durch einen Bruch bezeichnet. Also wenn $a + b$ durch a getheilt werden soll, so bekommt man als Quotienten $1 + \frac{b}{a}$.

Ferner $(a^2 - ab + b^2) : (a^2) = 1 - \frac{b}{a} + \frac{b^2}{a^2}$.

Wenn weiter $(2a + b)$ durch 2 getheilt werden soll, so bekommt man $a + \frac{b}{2}$; wobei zu merken, daß anstatt $\frac{b}{2}$ auch geschrieben werden kann $\frac{1}{2}b$, weil $\frac{1}{2}$mal b so viel ist als $\frac{b}{2}$. Eben so ist $\frac{b}{3}$ so viel als $\frac{1}{3}b$, und $\frac{2b}{3}$ so viel als $\frac{2}{3}b$ u. s. w.

285. Wenn aber der Divisor selbst eine zusammengesetzte Größe ist, hat die Division mehr Schwierigkeit. Dieselbe kann oft wirklich vollzogen werden, wo es nicht zu vermuthen steht. Wenn aber die Division nicht angeht, so muß man sich begnügen, den Quotienten, wie oben erwähnt, durch einen Bruch anzudeuten; wir wollen daher hier nur solche Fälle betrachten, da die Division wirklich gelingt.

286. Es soll demnach der Dividendus $ac - bc$ durch den Divisor $a - b$ getheilt werden: der Quotient muß daher so beschaffen sein, daß, wenn der Divisor $a - b$ damit multiplicirt wird, der Dividendus $ac - bc$ herauskommt. Man sieht nun leicht, daß in dem Quotienten c stehen muß, weil sonst nicht ac herauskommen könnte. Um nun zu sehen, ob c der völlige Quotient ist, braucht man nur den Divisor damit zu multipliciren und zu sehen, ob der ganze Dividendus herauskommt, oder nur ein Theil desselben. In unserm Fall aber, wenn $a - b$ mit c multiplicirt wird, bekommen wir $ac - bc$, welches der

Dividendus selbst ist; folglich ist c der völlige Quotient. Eben so ist klar, daß $(a^2 + ab) : (a + b) = a$, und $(3a^2 - 2ab) : (3a - 2b) = a$, ferner $(6a^2 - 9ab) : (2a - 3b) = 3a$.

287. Auf solche Art findet man gewiß einen Theil des Quotienten. Denn wenn derselbe mit dem Divisor multiplicirt noch nicht den Dividendus erschöpft, so muß man das Uebrige gleichfalls noch durch den Divisor theilen, wodurch man dann wiederum einen Theil des Quotienten herausbringt. In dieser Art verfährt man, bis man den ganzen Quotienten erhält.

Wir wollen z. B. $a^2 + 3ab + 2b^2$ durch $a + b$ theilen; da ist nun sogleich klar, daß der Quotient das Glied a enthalten muß, weil sonst nicht a^2 herauskommen könnte. Wenn aber der Divisor $a + b$ mit a multiplicirt wird, so kommt $a^2 + ab$, welches vom Dividendus abgezogen $2ab + 2b^2$ übrig läßt, welches also noch durch $a + b$ getheilt werden muß, wobei sogleich in die Augen fällt, daß im Quotienten $2b$ stehen muß. Nun giebt aber $2b$ mit $a + b$ multiplicirt gerade $2ab + 2b^2$; folglich ist der gesuchte Quotient $a + 2b$, welcher mit dem Divisor $a + b$ multiplicirt den Dividendus giebt. Diese ganze Operation wird wie folgt dargestellt:

$$\begin{array}{l}
a + b)\; a^2 + 3ab + 2b^2\; (a + 2b \\
\qquad\quad a^2 + ab \\ \hline
\qquad\qquad\; + 2ab + 2b^2 \\
\qquad\qquad\; + 2ab + 2b^2 \\ \hline
\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}$$

288. Um diese Operation zu erleichtern, wählt man einen Theil des Divisors, wie hier geschehen, a, welchen man zuerst schreibt und nach diesem Buchstaben schreibt man auch den Dividendus in solcher Ordnung, daß die höchsten Potenzen desselben Buchstabens a zuerst gesetzt werden, wie aus folgenden Exempeln zu ersehen:

$$\begin{array}{l}
a - b)\; a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3\; (a^2 - 2ab + b^2 \\
\qquad\quad a^3 - a^2b \\ \hline
\qquad\qquad - 2a^2b + 3ab^2 \\
\qquad\qquad - 2a^2b + 2ab^2 \\ \hline
\qquad\qquad\qquad + ab^2 - b^3 \\
\qquad\qquad\qquad + ab^2 - b^3 \\ \hline
\qquad\qquad\qquad\quad 0
\end{array}$$

$$\begin{array}{l}
a + b)\; a^2 - b^2\; (a - b \\
\qquad\; a^2 + ab \\ \hline
\qquad\quad - ab - b^2 \\
\qquad\quad - ab - b^2 \\ \hline
\qquad\qquad 0
\end{array}
\qquad\Bigg|\qquad
\begin{array}{l}
3a - 2b)\; 18a^2 - 8b^2\; (6a + 4b \\
\qquad\quad 18a^2 - 12ab \\ \hline
\qquad\qquad + 12ab - 8b^2 \\
\qquad\qquad + 12ab - 8b^2 \\ \hline
\qquad\qquad\quad 0
\end{array}$$

$$\begin{array}{l}
a + b)\; a^3 + b^3\; (a^2 - ab + b^2 \\
\qquad a^3 + a^2b \\ \hline
\qquad\quad - a^2b + b^3 \\
\qquad\quad - a^2b - ab^2 \\ \hline
\qquad\qquad + ab^2 + b^3 \\
\qquad\qquad + ab^2 + b^3 \\ \hline
\qquad\qquad\quad 0
\end{array}
\qquad\Bigg|\qquad
\begin{array}{l}
2a - b)\; 8a^3 - b^3\; (4a^2 + 2ab + b^2 \\
\qquad\quad 8a^3 - 4a^2b \\ \hline
\qquad\qquad + 4a^2b - b^3 \\
\qquad\qquad + 4a^2b - 2ab^2 \\ \hline
\qquad\qquad\quad + 2ab^2 - b^3 \\
\qquad\qquad\quad + 2ab^2 - b^3 \\ \hline
\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}$$

$$\begin{array}{l}
a^2 - 2ab + b^2)\; a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4\; (a^2 - 2ab + b^2 \\
\qquad\qquad a^4 - 2a^3b + a^2b^2 \\ \hline
\qquad\qquad\quad - 2a^3b + 5a^2b^2 - 4ab^3 \\
\qquad\qquad\quad - 2a^3b + 4a^2b^2 - 2ab^3 \\ \hline
\qquad\qquad\qquad + a^2b^2 - 2ab^3 + b^4 \\
\qquad\qquad\qquad + a^2b^2 - 2ab^3 + b^4 \\ \hline
\qquad\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}$$

$$\begin{array}{l}
a^2 - 2ab + 4b^2)\; a^4 + 4a^2b^2 + 16b^4\; (a^2 + 2ab + 4b^2 \\
\qquad\qquad a^4 - 2a^3b + 4a^2b^2 \\ \hline
\qquad\qquad\quad + 2a^3b + 16b^4 \\
\qquad\qquad\quad + 2a^3b - 4a^2b^2 + 8ab^3 \\ \hline
\qquad\qquad\qquad + 4a^2b^2 - 8ab^3 + 16b^4 \\
\qquad\qquad\qquad + 4a^2b^2 - 8ab^3 + 16b^4 \\ \hline
\qquad\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}$$

$$\begin{array}{r} a^2-2ab+2b^2)\ a^4+4b^4\ (a^2+2ab+2b^2 \\ a^4-2a^3b+2a^2b^2\qquad\qquad \\ \hline +2a^3b-2a^2b^2+4b^4\quad \\ +2a^3b-4a^2b^2+4ab^3\quad \\ \hline +2a^2b^2-4ab^3+4b^4 \\ +2a^2b^2-4ab^3+4b^4 \\ \hline 0\qquad\quad \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 1-2x+x^2)\ 1-5x+10x^2-10x^3+5x^4-x^5\ (1-3x+3x^2-x^3 \\ \qquad\qquad 1-2x+x^2 \\ \hline \qquad\qquad\ -3x+9x^2-10x^3 \\ \qquad\qquad\ -3x+6x^2-\ \,3x^3 \\ \hline \qquad\qquad\qquad +3x^2-\ 7x^3+5x^4 \\ \qquad\qquad\qquad +3x^2-\ 6x^3+3x^4 \\ \hline \qquad\qquad\qquad\qquad -\ x^3+2x^4-x^5 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad -\ x^3+2x^4-x^5 \\ \hline \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 0 \end{array}$$

Kapitel 5.

Von der Auflösung der Brüche in unendliche Reihen.

289. Wenn sich der Dividendus durch den Divisor nicht theilen läßt, wird der Quotient, wie schon oben gezeigt, durch einen Bruch ausgedrückt.

Also wenn 1 durch $1-a$ getheilt werden soll, bekommt man den Bruch $\frac{1}{1-a}$. Jedenfalls kann die Division nach den vorhergehenden Regeln angestellt und so weit man will fortgesetzt werden, da dann immer der wahre Quotient, obgleich in verschiedenen Formen, herauskommen muß.

290. Um dies zu zeigen, wollen wir den Dividendus 1 wirklich durch den Divisor $1-a$ theilen, wie folgt:

$$\begin{array}{l} 1-a)\ 1\ (1+\frac{a}{1-a} \\ \quad\ \ +1-a \\ \hline \quad\ \text{Rest}+a \end{array} \quad \text{oder} \quad \begin{array}{l} 1-a)\ 1\ (1+a+\frac{a^2}{1-a} \\ \quad\ \ +1-a \\ \hline \qquad\quad +a \\ \qquad\quad +a-a^2 \\ \hline \qquad\quad \text{Rest}+a^2 \end{array}$$

Um noch mehr Formen zu finden, theile man a^2 durch $1-a$ als:

$$\begin{array}{l} 1-a)\ a^2\ (a^2+\frac{a^3}{1-a} \\ \qquad a^2-a^3 \\ \hline \qquad\quad +a^3 \end{array}, \quad \text{ferner} \quad \begin{array}{l} 1-a)\ a^3\ (a^3+\frac{a^4}{1-a} \\ \qquad a^3-a^4 \\ \hline \qquad\quad +a^4 \end{array}$$

$$\text{ferner} \quad \begin{array}{l} 1-a)\ a^4\ (a^4+\frac{a^5}{1-a} \\ \qquad a^4-a^5 \\ \hline \qquad\quad +a^5 \ \text{ꝛc.} \end{array}$$

291. Hieraus ersehen wir, daß der Bruch $\frac{1}{1-a}$ durch alle folgenden Formen ausgedrückt werden kann:

I. $1+\frac{a}{1-a}$, II. $1+a+\frac{a^2}{1-a}$,

III. $1+a+a^2+\frac{a^3}{1-a}$, IV. $1+a+a^2+a^3+\frac{a^4}{1-a}$,

V. $1+a+a^2+a^3+a^4+\frac{a^5}{1-a}$ ꝛc.

Man betrachte die erste Form $1+\frac{a}{1-a}$, offenbar ist 1 so viel als $\frac{1-a}{1-a}$; folglich $1+\frac{a}{1-a}=\frac{1-a}{1-a}+\frac{a}{1-a}=\frac{1-a+a}{1-a}=\frac{1}{1-a}$.

Für die zweite Form $1+a+\frac{a^2}{1-a}$ bringe man den ganzen Theil $1+a$ auch zum Nenner $1-a$, so bekommt man $\frac{1-a^2}{1-a}$, dazu $\frac{+a^2}{1-a}$ giebt $\frac{1-a^2+a^2}{1-a}$, das ist $\frac{1}{1-a}$.

Für die dritte Form $1+a+a^2+\frac{a^3}{1-a}$, giebt der ganze Theil auf den Nenner $1-a$ gebracht $\frac{1-a^3}{1-a}$ dazu der Bruch $\frac{a^3}{1-a}$ macht $\frac{1}{1-a}$; woraus erhellt, daß alle diese Formen in der That so viel sind als der gegebene Bruch $\frac{1}{1-a}$.

292. Man kann daher in dieser Art so weit fortgehen als man will, ohne daß man weiter nöthig hat zu rechnen.

Also wird sein $\frac{1}{1-a}=1+a+a^2+a^3+a^4+a^5+a^6+a^7+\frac{a^8}{1-a}$. Man kann sogar immer weiter fortgehen, ohne jemals aufzuhören, und dadurch wird der vorgelegte Bruch $\frac{1}{1-a}$ in eine unendliche Reihe verwandelt, welche ist:

$$1+a+a^2+a^3+a^4+a^5+a^6+a^7+a^8+a^9 \\ +a^{10}+a^{11}+a^{12}$$

u. s. w. ins Unendliche. Und von dieser unendlichen Reihe kann man mit Recht behaupten, daß ihr Werth gleich dem des Bruches $\frac{1}{1-a}$ sei.

293. Dies scheint anfänglich sehr wunderbar; jedoch wird es durch die Betrachtung einiger Fälle begreiflich werden. Es sei erstlich $a=1$, so wird unsere Reihe $1+1+1+1+1+1+1-1+1$ ꝛc. bis ins Unendliche, welche dem Bruch $\frac{1}{1-1}$ d. h. $\frac{1}{0}$ gleich sein soll. Wir haben aber schon bemerkt, daß $\frac{1}{0}$ eine unendlich große Zahl ist, und dies wird hier von Neuem in anschaulichster Art bestätigt.

Wenn man aber setzt $a=2$, so wird unsere Reihe $=1+2+4+8+16+32+64$ ꝛc. bis ins Unendliche, deren Werth sein soll $\frac{1}{1-2}$, das ist $\frac{1}{-1}=-1$; welches dem ersten Anblick nach ungereimt scheint.

Es ist aber zu erwägen, daß, wenn man irgendwo in obiger Reihe stehen bleiben will, dazu stets noch ein Bruch gesetzt werden muß.

Also wenn wir z. B. bei 64 still stehen, so müssen wir zu $1+2+4+8+16+32+64$ noch diesen Bruch $\frac{128}{1-2}$, das ist $\frac{128}{-1}=-128$, hinzusetzen, woraus $127-128$, das ist -1, entsteht.

Geht man aber ohne Ende fort, so fällt der Bruch zwar weg, man steht aber auch niemals still.

294. So verhält es sich, wenn für a größere Zahlen

als 1 angenommen werden. Nimmt man aber für a kleinere Zahlen, so läßt sich Alles leichter begreifen.

Es sei z. B. $a=\frac{1}{2}$, so bekommt man $\frac{1}{1-a}=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\frac{1}{2}}=2$, welches folgender Reihe gleich sein wird: $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{64}+\frac{1}{128}$ ꝛc. ohne Ende. Denn nimmt man nur zwei Glieder, so hat man $1+\frac{1}{2}$, und so fehlt noch $\frac{1}{2}$. Nimmt man drei Glieder, so hat man $1\frac{3}{4}$, fehlt noch $\frac{1}{4}$; nimmt man vier Glieder, so hat man $1\frac{7}{8}$, fehlt noch $\frac{1}{8}$; woraus man sieht, daß immer weniger fehlt, folglich, wenn man unendlich weit fortgeht, gar Nichts mehr fehlen kann.

295. Man setze $a=\frac{1}{3}$, so wird unser Bruch $\frac{1}{1-a}=\frac{1}{1-\frac{1}{3}}=\frac{3}{2}=1\frac{1}{2}$, welchem daher folgende Reihe gleich ist: $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\frac{1}{81}+\frac{1}{243}$ ꝛc. bis ins Unendliche. Nimmt man zwei Glieder, so hat man $1\frac{1}{3}$, fehlt noch $\frac{1}{6}$. Nimmt man drei Glieder, so hat man $1\frac{4}{9}$, fehlt noch $\frac{1}{18}$. Nimmt man vier Glieder, so hat man $1\frac{13}{27}$, fehlt noch $\frac{1}{54}$. Da nun der Fehler immer dreimal kleiner wird, so muß derselbe endlich verschwinden.

296. Nehmen wir $a=\frac{2}{3}$, so wird der Bruch $\frac{1}{1-a}=\frac{1}{1-\frac{2}{3}}=3$, die Reihe aber wird:

$1+\frac{2}{3}+\frac{4}{9}+\frac{8}{27}+\frac{16}{81}+\frac{32}{243}$ ꝛc. bis ins Unendliche.

Nimmt man erstlich $1\frac{2}{3}$, so fehlt noch $1\frac{1}{3}$.

Nimmt man drei Glieder $2\frac{1}{9}$, so fehlt noch $\frac{8}{9}$.

Nimmt man vier Glieder $2\frac{11}{27}$, so fehlt noch $\frac{16}{27}$.

297. Es sei $a=\frac{1}{4}$, so wird der Bruch $\frac{1}{1-\frac{1}{4}}=\frac{1}{\frac{3}{4}}=1\frac{1}{3}$, die Reihe aber wird $1+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64}+\frac{1}{256}$ ꝛc.

Nimmt man zwei Glieder $1\frac{1}{4}$, so fehlt noch $\frac{1}{12}$; nimmt man man drei, so hat man $1\frac{5}{16}$, fehlt noch $\frac{1}{48}$ ꝛc.

298. In gleicher Weise kann auch der Bruch $\frac{1}{1+a}$ in eine unendliche Reihe verwandelt werden, wenn man

den Zähler 1 durch den Nenner $1 + a$ wirklich dividirt, wie folgt:

$$
\begin{array}{l}
1 + a)\ 1\ (1 - a + a^2 - a^3 + a^4 \\
\quad \underline{1 + a} \\
\qquad - a \\
\qquad \underline{- a - a^2} \\
\qquad\qquad + a^2 \\
\qquad\qquad \underline{+ a^2 + a^3} \\
\qquad\qquad\qquad - a^3 \\
\qquad\qquad\qquad \underline{- a^3 - a^4} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad + a^4 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad \underline{+ a^4 + a^5} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad - a^5 \text{ ꝛc.}
\end{array}
$$

Daher ist unser Bruch $\frac{1}{1+a}$ gleich dieser unendlichen Reihe: $1 - a + a^2 - a^3 + a^4 - a^5 + a^6 - a^7$ ꝛc.

299. Setzt man $a = 1$, so erhält man diese merkwürdige Gleichheit: $\frac{1}{1+1} = \frac{1}{2} = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1$ ꝛc. bis ins Unendliche, was widersinnig zu sein scheint; denn wenn man irgendwo mit -1 aufhört, so giebt diese Reihe 0; hört man irgendwo aber mit $+1$ auf, so giebt dieselbe 1. Allein eben hieraus läßt sich die Sache begreifen, weil, wenn man ohne Ende fortgehen und weder bei -1 noch $+1$ irgendwo aufhören muß, weder 1 noch 0 herauskommen kann, sondern etwas, das dazwischen liegt, welches $\frac{1}{2}$ ist.

300. Es sei ferner $a = \frac{1}{2}$, so wird unser Bruch $\frac{1}{1+\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$, welchem folglich gleich sein wird die Reihe $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - \frac{1}{32} + \frac{1}{64}$ ꝛc. ohne Ende. Nimmt man zwei Glieder, so hat man $\frac{1}{2}$, ist zu wenig um $\frac{1}{6}$. Nimmt man drei Glieder, so hat man $\frac{3}{4}$, ist zu viel um $\frac{1}{12}$. Nimmt man vier Glieder, so hat man $\frac{5}{8}$, ist zu wenig um $\frac{1}{24}$ ꝛc.

301. Setzt man $a = \frac{1}{3}$, so wird unser Bruch $\frac{1}{1+\frac{1}{3}} = \frac{3}{4}$, welchem diese Reihe gleich sein wird: $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \frac{1}{27} + \frac{1}{81} - \frac{1}{243} + \frac{1}{729}$ ꝛc. ohne Ende. Nimmt man

zwei Glieder, so hat man $\frac{2}{3}$, ist zu wenig um $\frac{1}{12}$. Nimmt man drei Glieder, so hat man $\frac{7}{9}$, ist zu viel um $\frac{1}{36}$. Nimmt man vier Glieder, so hat man $\frac{20}{27}$, ist zu wenig um $\frac{1}{108}$ u. s. w.

302. Man kann den Bruch $\frac{1}{1+a}$ noch auf eine andere Art auflösen, indem man 1 durch $a + 1$ theilt, nämlich:

$$
\begin{array}{l}
a + 1)\ 1\ \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^3} - \frac{1}{a^4} + \frac{1}{a^5} \text{ ꝛc.}\right. \\
\quad \underline{1 + \frac{1}{a}} \\
\text{Erster Rest} - \frac{1}{a} \\
\qquad \underline{- \frac{1}{a} - \frac{1}{a^2}} \\
\quad \text{Zweiter Rest} + \frac{1}{a^2} \\
\qquad\qquad \underline{+ \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^3}} \\
\qquad\quad \text{Dritter Rest} - \frac{1}{a^3} \\
\qquad\qquad\qquad \underline{- \frac{1}{a^3} - \frac{1}{a^4}} \\
\qquad\qquad \text{Vierter Rest} + \frac{1}{a^4} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad \underline{+ \frac{1}{a^4} + \frac{1}{a^5}} \\
\qquad\qquad\qquad \text{Fünfter Rest} - \frac{1}{a^5} \text{ ꝛc.}
\end{array}
$$

Folglich ist unser Bruch $\frac{1}{a+1}$ dieser Reihe gleich $\frac{1}{a} - \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^3} - \frac{1}{a^4} + \frac{1}{a^5} - \frac{1}{a^6}$ ꝛc. ohne Ende.

Setzt man $a = 1$, so bekommt man diese Reihe $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1$ ꝛc. $= \frac{1}{2}$ wie oben.

Setzt man $a = 2$, so bekommt man diese Reihe $\frac{1}{3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{16} + \frac{1}{32} - \frac{1}{64}$ ꝛc.

303. Auf gleiche Weise kann man auf allgemeine Art den Bruch $\frac{c}{a+b}$ in einer Reihe auflösen:

$$
\begin{array}{l}
a + b)\ c\ \left(\frac{c}{a} - \frac{bc}{a^2} + \frac{b^2c}{a^3} - \frac{b^3c}{a^4} \text{ ꝛc.}\right. \\
\qquad \underline{c + \frac{bc}{a}} \\
\text{Erster Rest} - \frac{bc}{a} \\
\qquad\quad \underline{- \frac{bc}{a} - \frac{b^2c}{a^2}} \\
\quad \text{Zweiter Rest} + \frac{b^2c}{a^2} \\
\qquad\qquad\quad \underline{+ \frac{b^2c}{a^2} + \frac{b^3c}{a^3}} \\
\qquad\quad \text{Dritter Rest} - \frac{b^3c}{a^3}
\end{array}
$$

a > b

Woraus wir diese Gleichheit erhalten:

$\frac{c}{a+b} = \frac{c}{a} - \frac{bc}{a^2} + \frac{b^2c}{a^3} - \frac{b^3c}{a^4}$ bis ins Unendliche.

Es sei $a = \overset{4}{\cancel{2}}$, $b = \overset{2}{\cancel{4}}$ und $c = 3$, so haben wir:

$$\frac{c}{a+b} = \frac{3}{4+2} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} = \frac{3}{2} - \overset{3/8}{\cancel{3}} + \overset{+3/16}{\cancel{6}} - \overset{-3/32}{\cancel{12}} \text{ ꝛc.}$$

Es sei $a = 10$, $b = 1$ und $c = 11$, so haben wir:

$$\frac{c}{a+b} = \frac{11}{10+1} = 1 = \frac{11}{10} - \frac{11}{100} + \frac{11}{1000} - \frac{11}{10000} \text{ ꝛc.}$$

Nimmt man nur ein Glied, so hat man $\frac{11}{10}$, welches zu viel um $\frac{1}{10}$. Nimmt man zwei Glieder, so hat man $\frac{99}{100}$, welches zu wenig um $\frac{1}{100}$. Nimmt man drei Glieder, so hat man $\frac{1001}{1000}$, ist zu viel um $\frac{1}{1000}$ ꝛc.

304. Wenn der Divisor aus mehreren Theilen besteht, kann die Division in derselben Art bis ins Unendliche fortgesetzt werden.

Wenn z. B. der Bruch $\frac{1}{1-a+a^2}$ gegeben wäre, so wird die unendliche Reihe, die demselben gleich ist, also gefunden:

$$
\begin{array}{l}
1-a+a^2)\ 1\ (1+a-a^3-a^4+a^6+a^7 \text{ ꝛc.} \\
\qquad\quad \underline{1-a+a^2} \\
\text{Erster Rest } +a-a^2 \\
\qquad\qquad \underline{+a-a^2+a^3} \\
\quad \text{Zweiter Rest } -a^3 \\
\qquad\qquad\qquad \underline{-a^3+a^4-a^5} \\
\qquad \text{Dritter Rest } -a^4+a^5 \\
\qquad\qquad\qquad\quad \underline{-a^4+a^5-a^6} \\
\qquad\qquad \text{Vierter Rest } +a^6 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \underline{+a^6-a^7+a^8} \\
\qquad\qquad\quad \text{Fünfter Rest } +a^7-a^8 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \underline{+a^7-a^8+a^9} \\
\qquad\qquad\qquad\quad \text{Sechster Rest } -a^9 \text{ ꝛc.}
\end{array}
$$

Daher haben wir folgende Gleichung: $\frac{1}{1-a+a^2} = 1 + a - a^3 - a^4 + a^6 + a^7 - a^9 - a^{10}$ ꝛc. ohne Ende. Nimmt man hier $a = 1$, so bekommt man diese Reihe $1 = 1 + 1 - 1 - 1 + 1 + 1 - 1 - 1 + 1 + 1$ ꝛc., welche Reihe die schon oben (299) gefundene $1 - 1 + 1 - 1 + 1$ ꝛc. verdoppelt in sich enthält; da nun die obige Reihe $\frac{1}{2}$ gleich war, so ist es kein Wunder, daß diese $\frac{2}{2}$, nämlich 1, ausmacht.

Setzt man $a = \frac{1}{2}$, so bekommt man diese Gleichung: $\frac{1}{\frac{3}{4}} = \frac{4}{3} = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{8} - \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \frac{1}{128} - \frac{1}{512}$ ꝛc.

Setzt man $a = \frac{1}{3}$, so bekommt man diese Gleichung: $\frac{1}{\frac{7}{9}}$ oder $\frac{9}{7} = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{27} - \frac{1}{81} + \frac{1}{729}$ ꝛc. Nimmt man hier vier Glieder, so bekommt man $\frac{104}{81}$, welches um $\frac{1}{567}$ kleiner ist als $\frac{9}{7}$.

Man setze ferner $a = \frac{2}{3}$, so bekommt man diese Gleichung: $\frac{1}{\frac{7}{9}} = \frac{9}{7} = 1 + \frac{2}{3} - \frac{8}{27} - \frac{16}{81} + \frac{64}{729}$ ꝛc., welche Reihe der vorigen gleich sein muß; man subtrahire also die obere von dieser, so bekommt man: $0 = \frac{1}{3} - \frac{7}{27} - \frac{15}{81} + \frac{63}{729}$ ꝛc., welche vier Glieder zusammen $-\frac{2}{81}$ betragen.

305. In solcher Art kann man alle Brüche in unendliche Reihen auflösen, ein Verfahren, das oft sehr nützlich ist. An und für sich ist es höchst merkwürdig, daß eine unendliche Reihe, obwohl dieselbe niemals aufhört, dennoch einen bestimmten Werth hat. Es sind auch die wichtigsten Entdeckungen aus dieser Thatsache hergeleitet worden, die daher mit der größten Aufmerksamkeit in Erwägung gezogen zu werden verdient.

Kapitel 6.

Von den Quadraten der zusammengesetzten Größen.

306. Wenn das Quadrat einer zusammengesetzten Größe gefunden werden soll, so braucht man dieselbe nur mit sich selbst zu multipliciren, und das Product wird das Quadrat davon sein.

Also wird das Quadrat von $a + b$ gefunden, wie folgt:

$$\begin{array}{lll} a & + b & \\ a & + b & \\ \hline a^2 & + ab & \\ & + ab & + b^2 \\ \hline a^2 & + 2ab & + b^2. \end{array}$$

307. Wenn daher die Wurzel aus zwei Theilen besteht, die zusammen addirt sind, als $a + b$, so besteht das Quadrat 1) aus den Quadraten eines jeden Theils, nämlich a^2 und b^2, 2) kommt aber noch hinzu das doppelte Product der beiden Theile, nämlich $2ab$, und die ganze Summe $a^2 + 2ab + b^2$ ist das Quadrat von $a + b$.

Es sei z. B. $a = 10$ und $b = 3$, so daß das Quadrat von 13 gefunden werden soll; dies wird demnach sein $= 100 + 60 + 9 = 169$.

308. Mit Hülfe dieser Formel lassen sich nun leicht die Quadrate von ziemlich großen Zahlen finden, wenn dieselben in zwei Theile zergliedert werden.

Also um das Quadrat von 57 zu finden, theile man diese Zahl in $50 + 7$; daher das Quadrat sein wird:

$$2500 + 700 + 49 = 3249.$$

309. Hieraus sieht man, daß das Quadrat von $a + 1$ sein wird $a^2 + 2a + 1$; da nun von a das Quadrat a^2 ist, so wird das Quadrat von $a + 1$ gefunden, wenn man zu jenem $2a + 1$ addirt, wobei zu merken, daß $2a + 1$ die Summe der beiden Wurzeln a und $a + 1$ ist. Da also von 10 das Quadrat 100 ist, so wird das Quadrat von 11 $= 100 + 21$ sein, und da von 57 das Quadrat 3249 ist, so wird das Quadrat von $58 = 3249 + 115 = 3364$ sein. Und ferner das Quadrat von $59 = 3364 + 117 = 3481$. Endlich das Quadrat von $60 = 3481 + 119 = 3600$ 2c.

310. Das Quadrat einer zusammengesetzten Größe, als $a + b$, wird durch $(a + b)^2$ bezeichnet; daher haben wir $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, woraus folgende Gleichungen abgeleitet worden:

$(a + 1)^2 = a^2 + 2a + 1$; $(a + 2)^2 = a^2 + 4a + 4$; $(a + 3)^2 = a^2 + 6a + 9$; $(a + 4)^2 = a^2 + 8a + 16$ 2c.

311. Wenn die Wurzel $a - b$ ist, so wird ihr Quadrat $a^2 - 2ab + b^2$ sein, welches daher aus den Quadraten beider Theile besteht, von denen aber das doppelte Product abgezogen werden muß.

Es sei z. B. $a = 10$ und $b = 1$, so wird das Quadrat von $9 = 100 - 20 + 1 = 81$ sein.

312. Da wir nun diese Gleichung $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ haben, so wird $(a - 1)^2 = a^2 - 2a + 1$ sein. Das Quadrat von $a - 1$ wird also gefunden, wenn man von a^2 subtrahirt $2a - 1$, welches die Summe der beiden Wurzeln a und $a - 1$ ist.

Es sei z. B. $a = 50$, so ist $a^2 = 2500$ und $a - 1 = 49$, daher $49^2 = 2500 - 99 = 2401$.

313. Dies läßt sich auch durch Brüche erläutern, denn wenn man als Wurzel $\frac{3}{5} + \frac{2}{5}$ (welches 1 ausmacht) nimmt, so wird das Quadrat $\frac{9}{25} + \frac{4}{25} + \frac{12}{25} = \frac{25}{25}$ sein, das ist 1.

Ferner das Quadrat von $\frac{1}{2} - \frac{1}{3}$ (welches $\frac{1}{6}$ ist) wird $\frac{1}{4} - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} = \frac{1}{36}$ sein.

314. Wenn die Wurzel aus mehreren Gliedern besteht, so läßt sich das Quadrat auf gleiche Art bestimmen. Also von $a + b + c$ wird das Quadrat wie folgt gefunden:

$$\begin{array}{llllll} a & + b & + c & & & \\ a & + b & + c & & & \\ \hline a^2 & + ab & + ac & & + bc & \\ & + ab & + ac & + b^2 & + bc & + c^2 \\ \hline a^2 & + 2ab & + 2ac & + b^2 & + 2bc & + c^2, \end{array}$$

woraus man sieht, daß dasselbe erstlich aus dem Quadrat eines jeden Theils der Wurzel und außerdem aus dem doppelten Product von je zwei Theilen mit einander besteht.

315. Um dies mit einem Beispiel zu erläutern, wollen wir die Zahl 256 in die drei Theile $200 + 50 + 6$ theilen; daher das Quadrat davon aus folgenden Theilen zusammengesetzt sein wird:

$$\begin{array}{r} 40000 \\ 2500 \\ 36 \\ 20000 \\ 2400 \\ 600 \\ \hline 65536 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 256 \\ 256 \\ \hline 1536 \\ 1280 \\ 512 \\ \hline 65536 \end{array}$$

65536 und dies ist dem $256 \cdot 256$ offenbar gleich.

316. Wenn einige Glieder in der Wurzel negativ sind, so wird das Quadrat nach derselben Regel gefunden, wenn man nur bei den doppelten Producten Acht giebt, welches Zeichen jedem zukommt.

Also von $a - b - c$ wird das Quadrat $a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2ac + 2bc$ sein.

Wenn also die Zahl 256 dargestellt wird als $300 - 40 - 4$, so bekommt man:

Positive Theile	Negative Theile
$+ 90000$	$- 24000$
1600	2400
320	$- 26400$
16	
$+ 91936$	
$- 26400$	
65536 Quadrat von 256, wie vorher.	

Kapitel 7.

Von der Ausziehung der Quadratwurzel aus zusammengesetzten Größen.

317. Um hievon eine sichere Regel zu geben, müssen wir das Quadrat der Wurzel $a + b$, welches $a^2 + 2ab + b^2$, genau in Erwägung ziehen, und suchen, wie man wiederum aus dem gegebenen Quadrat die Wurzel herausbringen kann. Hierüber sind folgende Betrachtungen anzustellen.

318. Erstlich da das Quadrat $a^2 + 2ab + b^2$ aus mehreren Gliedern besteht, so ist gewiß, daß auch die Wurzel aus mehr als einem Gliede bestehen muß; und wenn das Quadrat so geschrieben wird, daß die Potenzen von einem Buchstaben, z. B. a, immer abnehmen, so ist klar, daß das erste Glied das Quadrat des ersten Gliedes der Wurzel sein wird. Da nun in unserm Fall das erste Glied des Quadrats a^2 ist, so ist offenbar, daß das erste Glied der Wurzel a sein muß.

319. Hat man nun das erste Glied der Wurzel, nämlich a gefunden, so betrachte man das Uebrige im Quadrat, welches $2ab + b^2$ ist, um zu sehen, wie man daraus den andern Theil der Wurzel, welcher b ist, finden könne. Hiebei bemerken wir, daß jenes Uebrige oder jener Rest $2ab + b^2$ durch das Product $(2a + b)\,b$ dargestellt werden kann. Da nun dieser Rest zwei Factoren hat $2a + b$ und b, so wird der letztere b, das ist der zweite Theil der Wurzel gefunden, wenn man den Rest $2ab + b^2$ durch $2a + b$ dividirt.

320. Um also den zweiten Theil der Wurzel zu finden, muß man den Rest durch $2a + b$ dividiren, da dann der Quotient der zweite Theil der Wurzel sein wird. Bei dieser Division aber ist zu merken, daß $2a$ das Doppelte ist von dem schon gefundenen ersten Theil der Wurzel a. Das andere Glied b aber ist zwar noch unbekannt, und muß seine Stelle noch offen gelassen werden; doch kann man gleichwohl die Division vornehmen, indem dabei nur auf das erste Glied $2a$ gesehen wird. Sobald man aber den Quotienten gefunden, welcher hier b ist, so muß man denselben auch an die offene Stelle setzen und die Division vollenden.

321. Die Rechnung also, durch welche aus obigem Quadrat $a^2 + 2ab + b^2$ die Wurzel gefunden wird, kann also dargestellt werden:

$$\begin{array}{r|l} & a^2 + 2ab + b^2\ (a + b \\ & a^2 \\ \hline 2a + b & +2ab + b^2 \\ & +2ab + b^2 \\ \hline & 0 \end{array}$$

322. Auf solche Art kann auch die Quadratwurzel aus andern zusammengesetzten Formeln, wenn dieselben nur Quadrate sind, gefunden werden, wie aus folgenden Exempeln zu ersehen, als:

$$\begin{array}{r|l} & a^2 + 6ab + 9b^2\ (a + 3b \\ & a^2 \\ \hline 2a + 3b & +6ab + 9b^2 \\ & +6ab + 9b^2 \\ \hline & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} & 4a^2 - 4ab + b^2\ (2a - b \\ & 4a^2 \\ \hline 4a - b & -4ab + b^2 \\ & -4ab + b^2 \\ \hline & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} & 9p^2 + 24pq + 16q^2)\ 3p + 4q \\ & 9p^2 \\ \hline 6p + 4q & +24pq + 16q^2 \\ & +24pq + 16q^2 \\ \hline & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} & 25x^2 - 60x + 36)\ 5x - 6 \\ & 25x^2 \\ \hline 10x - 6 & -60x + 36 \\ & -60x + 36 \\ \hline & 0 \end{array}$$

323. Wenn bei der Division noch ein Rest übrig bleibt, so ist es ein Zeichen, daß die Wurzel aus mehr als zwei Gliedern besteht. Alsdann werden die zwei schon gefundenen Glieder zusammen als der erste Theil betrachtet, und aus dem Rest auf gleiche Weise wie vorher das folgende Glied der Wurzel gefunden, wie aus folgenden Exempeln zu ersehen ist.

$$\begin{array}{r|l} & a^2 + 2ab - 2ac - 2bc + b^2 + c^2\ (a + b - c \\ & a^2 \\ \hline 2a + b & +2ab - 2ac - 2bc + b^2 + c^2 \\ & +2ab + b^2 \\ \hline 2a + 2b - c & -2ac - 2bc + c^2 \\ & -2ac - 2bc + c^2 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} & a^4 + 2a^3 + 3a^2 + 2a + 1\ (a^2 + a + 1 \\ & a^4 \\ \hline 2a^2 + a & +2a^3 + 3a^2 \\ & +2a^3 + a^2 \\ \hline 2a^2 + 2a + 1 & +2a^2 + 2a + 1 \\ & +2a^2 + 2a + 1 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} & a^4 - 4a^3b + 8ab^3 + 4b^4\ (a^2 - 2ab - 2b^2 \\ & a^4 \\ \hline 2a^2 - 2ab & -4a^3b + 8ab^3 \\ & -4a^3b + 4a^2b^2 \\ \hline 2a^2 - 4ab - 2b^2 & -4a^2b^2 + 8ab^3 + 4b^4 \\ & -4a^2b^2 + 8ab^3 + 4b^4 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} & a^6 - 6a^5b + 15a^4b^2 - 20a^3b^3 + 15a^2b^4 - 6ab^5 + b^6\ (a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3) \\ & a^6 \\ \hline 2a^3 - 3a^2b & -6a^5b + 15a^4b^2 \\ & -6a^5b + 9a^4b^2 \\ \hline 2a^3 - 6a^2b + 3ab^2 & +6a^4b^2 - 20a^3b^3 + 15a^2b^4 \\ & +6a^4b^2 - 18a^3b^3 + 9a^2b^4 \\ \hline 2a^3 - 6a^2b + 6ab^2 - b^3 & -2a^3b^3 + 6a^2b^4 - 6ab^5 + b^6 \\ & -2a^3b^3 + 6a^2b^4 - 6ab^5 + b^6 \\ \hline & 0 \end{array}$$

324. Aus dieser Regel folgt nun leicht diejenige, welche in den Rechenbüchern für die Ausziehung der Quadratwurzel gegeben wird, als:

$$\begin{array}{r|l} & \sqrt{5|29} = 23, \\ & 4 \\ \hline 43 & 129 \\ & 129 \\ \hline & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} & \sqrt{17|64} = 42, \\ & 16 \\ \hline 82 & 164 \\ & 164 \\ \hline & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} & \sqrt{23|04} = 48, \\ & 16 \\ \hline 88 & 704 \\ & 704 \\ \hline & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} & \sqrt{40|96} = 64, \\ & 36 \\ \hline 124 & 496 \\ & 496 \\ \hline & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} & \sqrt{96|04} = 98, \\ & 81 \\ \hline 188 & 1504 \\ & 1504 \\ \hline & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} & \sqrt{1|56|25} = 125, \\ & 1 \\ \hline 22 & 56 \\ & 44 \\ \hline 245 & 1225 \\ & 1225 \\ \hline & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} & \sqrt{99|80|01} = 999, \\ & 81 \\ \hline 189 & 1880 \\ & 1701 \\ \hline 1989 & 17901 \\ & 17901 \\ \hline & 0 \end{array}$$

325. Wenn aber bei der Operation zuletzt etwas übrig bleibt, so ist dies ein Zeichen, daß die vorgelegte Zahl kein Quadrat ist und also die Wurzel davon nicht angegeben werden kann. In solchen Fällen bedient man sich des oben gebrauchten Wurzelzeichens, welches man vor die Formel schreibt; die Formel selbst aber wird in Klammern eingeschlossen. Also wird die Quadratwurzel von $a^2 + b^2$ auf diese Weise angedeutet $\sqrt{}(a^2 + b^2)$; und $\sqrt{}(1 - x^2)$ bedeutet die Quadratwurzel aus $1 - x^2$. Statt dieses Wurzelzeichens kann man auch den gebrochenen Exponenten $\frac{1}{2}$ gebrauchen. Also wird auch durch $(a^2 + b^2)^{\frac{1}{2}}$ die Quadratwurzel aus $a^2 + b^2$ bezeichnet.

Kapitel 8.

Von der Rechnung mit Irrationalzahlen.

326. Wenn zwei oder mehr Irrationalformeln addirt werden sollen, so geschieht dies, wie früher gelehrt worden, indem man alle Glieder mit ihren Zeichen zusammenschreibt. Nur ist zu bemerken, daß der Abkürzung halber anstatt $\sqrt{a}+\sqrt{a}$ geschrieben wird $2\sqrt{a}$, und daß $\sqrt{a}-\sqrt{a}$ sich hebt oder Nichts giebt. Also die Formeln $3+\sqrt{2}$ und $1+\sqrt{2}$ addirt, giebt $4+2\sqrt{2}$ oder $4+\sqrt{8}$; ferner $5+\sqrt{3}$ und $4-\sqrt{3}$ addirt, giebt 9; ferner $2\sqrt{3}+3\sqrt{2}$ und $\sqrt{3}-\sqrt{2}$ addirt, macht $3\sqrt{3}+2\sqrt{2}$.

327. Eben so wenig Schwierigkeit hat die Subtraction, indem nur die Größen der Formel, welche subtrahirt werden soll, mit umgekehrten Zeichen addirt werden müssen, wie aus folgendem Exempel zu ersehen:

$$\begin{array}{r}
4-\sqrt{2}+2\sqrt{3}-3\sqrt{5}+4\sqrt{6} \\
1+2\sqrt{2}-2\sqrt{3}-5\sqrt{5}+6\sqrt{6} \\
\hline
3-3\sqrt{2}+4\sqrt{3}+2\sqrt{5}-2\sqrt{6}
\end{array}$$

328. Bei der Multiplication ist nur zu merken, daß $\sqrt{a}$ mit $\sqrt{a}$ multiplicirt a giebt. Wenn aber ungleiche Zahlen hinter dem $\sqrt{\ }$Zeichen stehen, so giebt $\sqrt{a}$ mit $\sqrt{b}$ multiplicirt $\sqrt{ab}$, woraus folgende Exempel berechnet werden können:

$$\begin{array}{l}
1+\sqrt{2} \\
1+\sqrt{2} \\
\hline
1+\sqrt{2} \\
\quad+\sqrt{2}+2 \\
\hline
1+2\sqrt{2}+2=3+2\sqrt{2}
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{l}
4+2\sqrt{2} \\
2-\sqrt{2} \\
\hline
8+4\sqrt{2} \\
\quad-4\sqrt{2}-4 \\
\hline
8-4=4.
\end{array}$$

329. Eben dies gilt auch von den unmöglichen Größen; wobei nur zu merken, daß $\sqrt{-a}$ mit $\sqrt{-a}$ multiplicirt $-a$ giebt.

Wenn man den Cubus von $-1+\sqrt{-3}$ suchen soll, so geschieht dies, indem man erstlich das Quadrat nimmt

und dasselbe nochmals mit der Zahl $-1+\sqrt{-3}$ multiplicirt wie folgt:

$$\begin{array}{l}
-1+\sqrt{-3} \\
-1+\sqrt{-3} \\
\hline
+1-\sqrt{-3} \\
\quad-\sqrt{-3}-3 \\
\hline
+1-2\sqrt{-3}-3=-2-2\sqrt{-3} \\
\qquad\qquad\qquad\;\; -1+\sqrt{-3} \\
\hline
\qquad\qquad\qquad\;\; +2+2\sqrt{-3} \\
\qquad\qquad\qquad\;\; -2\sqrt{-3}+6 \\
\hline
\text{also } (-1+\sqrt{-3})^3 = 2+6=8.
\end{array}$$

330. Bei der Division hat man nur nöthig schlechtweg einen Bruch zu setzen und alsdann kann man denselben in eine andere Form verwandeln, so daß der Nenner rational wird. Denn wenn der Nenner $a+\sqrt{b}$ ist und man oben und unten mit $a-\sqrt{b}$ multiplicirt, so wird der neue Nenner a^2-b sein und hat also kein Wurzelzeichen mehr. Man dividire z. B. $3+2\sqrt{2}$ durch $1+\sqrt{2}$, so hat man $\frac{3+2\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}$. Jetzt multiplicire man oben und unten mit $1-\sqrt{2}$, so bekommt man

$$\begin{array}{ll}
\text{für den Zähler} & 3+2\sqrt{2} \\
 & 1-\sqrt{2} \\
\hline
 & 3+2\sqrt{2} \\
 & \quad-3\sqrt{2}-4 \\
\hline
 & 3-\sqrt{2}-4=-\sqrt{2}-1;
\end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
\text{für den Nenner} & 1+\sqrt{2} \\
 & 1-\sqrt{2} \\
\hline
 & 1+\sqrt{2} \\
 & \quad-\sqrt{2}-2 \\
\hline
 & 1-2=-1
\end{array}$$

Also ist unser neuer Bruch $\frac{-\sqrt{2}-1}{-1}$. Man multiplicire ferner oben und unten mit -1, so bekommt man für den Zähler $+\sqrt{2}+1$ und für den Nenner $+1$.

Es ist in der That $+\sqrt{2}+1$ eben so viel als $\frac{3+2\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}$; denn $\sqrt{2}+1$ mit dem Divisor $1+\sqrt{2}$ multiplicirt,

$$\begin{array}{ll}
 & 1+\sqrt{2} \\
 & 1+\sqrt{2} \\
\hline
 & 1+\sqrt{2} \\
 & \quad+\sqrt{2}+2 \\
\hline
\text{giebt} & 1+2\sqrt{2}+2=3+2\sqrt{2}.
\end{array}$$

Ferner $8-5\sqrt{2}$ durch $3-2\sqrt{2}$ dividirt, giebt $\frac{8-5\sqrt{2}}{3-2\sqrt{2}}$. Man multiplicire oben und unten mit $3+2\sqrt{2}$ so bekommt man

$$\begin{array}{ll}
\text{für den Zähler} & 8-5\sqrt{2} \\
 & 3+2\sqrt{2} \\
\hline
 & 24-15\sqrt{2} \\
 & \quad+16\sqrt{2}-20 \\
\hline
 & 24+\sqrt{2}-20=4+\sqrt{2}
\end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
\text{und für den Nenner} & 3-2\sqrt{2} \\
 & 3+2\sqrt{2} \\
\hline
 & 9-6\sqrt{2} \\
 & \quad+6\sqrt{2}-4.2 \\
\hline
 & 9-8=+1.
\end{array}$$

Also ist der Quotient $4+\sqrt{2}$, wie die folgende Probe erweist:

$$\begin{array}{l}
4+\sqrt{2} \\
3-2\sqrt{2} \\
\hline
12+3\sqrt{2} \\
\quad-8\sqrt{2}-4 \\
\hline
12-5\sqrt{2}-4=8-5\sqrt{2}.
\end{array}$$

331. Auf solche Weise können dergleichen Brüche immer in andere verwandelt werden, deren Nenner rational ist. Also der Bruch $\frac{1}{5+2\sqrt{6}}$, wenn man oben und unten mit $5-2\sqrt{6}$ multiplicirt, wird in diesen verwandelt: $\frac{5-2\sqrt{6}}{1}=5-2\sqrt{6}$.

Ferner der Bruch $\frac{2}{-1+\sqrt{-3}}$ wird in diesen $\frac{2+2\sqrt{-3}}{-4}=\frac{1+\sqrt{-3}}{-2}$; ferner $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{5}}{\sqrt{6}-\sqrt{5}}$ in $\frac{11+2\sqrt{30}}{1}=11+2\sqrt{30}$ verwandelt.

332. Wenn in dem Nenner auch mehr Glieder vorkommen, so wird in derselben Art nach und nach die Irrationalität aus dem Nenner weggebracht.

Also bei diesem Bruch $\frac{1}{\sqrt{10}-\sqrt{2}-\sqrt{3}}$ multiplicirt man erstlich oben und unten mit $\sqrt{10}+\sqrt{2}+\sqrt{3}$, so hat man $\frac{+\sqrt{10}+\sqrt{2}+\sqrt{3}}{5-2\sqrt{6}}$; multiplicirt man ferner oben und unten mit $5+2\sqrt{6}$, so hat man $5\sqrt{10}+11\sqrt{2}+9\sqrt{3}+2\sqrt{60}$.

Kapitel 9.

Von den Cuben und von der Ausziehung der Cubikwurzel.

333. Um den Cubus der Wurzel $a+b$ zu finden, muß man ihr Quadrat, welches $a^2+2ab+b^2$ ist, nochmals mit $a+b$ multipliciren, da dann der Cubus sein wird:

$$\begin{array}{l}
a^2+2ab+b^2 \\
a+b \\
\hline
a^3+2a^2b+ab^2 \\
\quad+a^2b+2ab^2+b^3 \\
\hline
a^3+3a^2b+3ab^2+b^3.
\end{array}$$

Derselbe besteht also aus den Cuben beider Theile der Wurzel, ferner noch aus $3a^2b+3ab^2$, welches so viel ist als $(3ab).(a+b)$; und dies ist das dreifache Product der beiden Theile mit der Summe derselben multiplicirt.

334. Wenn also die Wurzel aus zwei Theilen besteht, so läßt sich der Cubus nach dieser Regel leicht finden. Da z. B. die Zahl $5=3+2$, so ist der Cubus davon $=27+8+18.5$, also $=125$.

Es sei ferner die Wurzel $7 + 3 = 10$, so wird der Cubus sein $343 + 27 + 63 \,.\, 10 = 1000$.

Um den Cubus von 36 zu finden, setze man die Wurzel $36 = 30 + 6$ und der Cubus wird sein:

$$27000 + 216 + 540 \,.\, 36 = 46656.$$

335. Wenn aber umgekehrt der Cubus gegeben ist, nämlich $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$, und man soll davon die Wurzel finden, so ist folgendes zu bemerken.

Erstlich wenn der Cubus nach der Potenzhöhe eines Buchstaben geordnet ist, erkennt man aus dem ersten Glied a^3 sogleich das erste Glied der Wurzel a, dessen Cubus jenem gleich ist, und wenn man denselben wegnimmt, so behält man diesen Rest: $3a^2b + 3ab^2 + b^3$, aus welchem das zweite Glied der Wurzel gefunden werden muß.

336. Da wir nun schon wissen, daß das zweite Glied $+ b$ ist, so kommt es hier nur darauf an, wie dasselbe aus dem obigen Rest gefunden werden kann. Es läßt sich aber derselbe Rest durch zwei Factoren ausdrücken $(3a^2 + 3ab + b^2) . (b)$; wenn man also den Rest durch $3a^2 + 3ab + b^2$ dividirt, so erhält man das verlangte zweite Glied der Wurzel nämlich $+ b$.

337. Weil aber das zweite Glied noch nicht bekannt ist, so ist auch der Theiler noch unbekannt. Allein es genügt, daß wir den ersten Theil dieses Theilers haben, welcher $3a^2$ ist oder das dreifache Quadrat des ersten schon gefundenen Theils der Wurzel, und daraus läßt sich schon der andere Theil b finden, woraus alsdann der Divisor vervollständigt werden muß, ehe man die Division vollendet. Man muß daher hierauf zu $3a^2$ noch hinzufügen $3ab$, das ist das dreifache Product des ersten Theils mit dem andern, und hierauf b^2, das ist das Quadrat des andern Theils der Wurzel.

338. Es sei z. B. dieser Cubus gegeben:

$$\begin{array}{r|l}
 & a^3 + 12a^2 + 48a + 64\ (a + 4 \\
 & a^3 \\ \hline
3a^2 + 12a + 16 & + 12a^2 + 48a + 64 \\
 & + 12a^2 + 48a + 64 \\ \hline
 & \qquad 0
\end{array}$$

Es sei ferner gegeben dieser Cubus:

$$\begin{array}{r|l}
 & a^6 - 6a^5 + 15a^4 - 20a^3 + 15a^2 - 6a + 1\ (a^2 - 2a + 1 \\
 & a^6 \\ \hline
3a^4 - 6a^3 + 4a^2 & - 6a^5 + 15a^4 - 20a^3 \\
 & - 6a^5 + 12a^4 - 8a^3 \\ \hline
3a^4 - 12a^3 + 12a^2 + 3a^2 - 6a + 1 & 3a^4 - 12a^3 + 15a^2 - 6a + 1 \\
 & 3a^4 - 12a^3 + 15a^2 - 6a + 1 \\ \hline
 & \qquad 0
\end{array}$$

339. Hierauf gründet sich auch das gebräuchliche Verfahren der Ausziehung der Cubikwurzel aus Zahlen. Mit der Zahl 2197 wird z. B. die Rechnung wie folgt gemacht:

$$\begin{array}{r|l}
 & 2197\ (\overset{a}{10} + \overset{b}{3} = 13 \\
 & a^3 = 1000 \\ \hline
3a^2 = 300 & 1197 = 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \\
3ab = \ \ 90 & \\
b^2 = \ \ \ \ 9 & \\ \hline
3a^2 + 3ab + b^2 = 399 & 1197 = (3a^2 + 3ab + b^2)\, b \\ \cline{2-2}
 & 0
\end{array}$$

Es sei ferner gegeben der Cubus 34965783, woraus die Cubikwurzel gefunden werden soll:

$$\begin{array}{r|l}
 & 34965783\ (300 + 20 + 7 = 327 \\
 & 27000000 \\
270000 & 7965783 \\
18000 & \\
400 & \\ \hline
288400 & 5768000 \\ \hline
307200 & 2197783 \\
6720 & \\
49 & \\ \hline
313969 & 2197783 \\ \cline{2-2}
 & 0
\end{array}$$

Kapitel 10.

Von den höhern Potenzen zusammengesetzter Größen.

340. Nach den Quadraten und Cuben folgen die höhern Potenzen, welche durch Exponenten wie schon vorher erwähnt worden, angezeigt zu werden pflegen; nur muß man die Wurzel, wenn sie zusammengesetzt ist, in Klammern einschließen. Also $(a + b)^5$ bedeutet die fünfte Potenz von $a + b$, und $(a - b)^6$ bedeutet die sechste Potenz von $a - b$. Wie aber diese Potenzen entwickelt werden können, soll in diesem Kapitel gezeigt werden.

341. Es sei demnach $a + b$ die Wurzel, oder die erste Potenz, so werden die höheren Potenzen durch die Multiplication in folgender Art gefunden.

$$\begin{array}{ll}
(a + b)^1 = & a + b \\
 & a + b \\ \hline
 & a^2 + ab \\
 & \quad + ab + b^2 \\ \hline
(a + b)^2 = & a^2 + 2ab + b^2 \\
 & a + b \\ \hline
 & a^3 + 2a^2b + ab^2 \\
 & \quad + a^2b + 2ab^2 + b^3 \\ \hline
(a + b)^3 = & a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \\
 & a + b \\ \hline
 & a^4 + 3a^3b + 3a^2b^2 + ab^3 \\
 & \quad + a^3b + 3a^2b^2 + 3ab^3 + b^4 \\ \hline
(a + b)^4 = & a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4 \\
 & a + b \\ \hline
 & a^5 + 4a^4b + 6a^3b^2 + 4a^2b^3 + ab^4 \\
 & \quad + a^4b + 4a^3b^2 + 6a^2b^3 + 4ab^4 + b^5 \\ \hline
(a + b)^5 = & a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5 \\
 & a + b \\ \hline
 & a^6 + 5a^5b + 10a^4b^2 + 10a^3b^3 + 5a^2b^4 + ab^5 \\
 & \quad + a^5b + 5a^4b^2 + 10a^3b^3 + 10a^2b^4 + 5ab^5 + b^6 \\ \hline
(a + b)^6 = & a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6
\end{array}$$

u. s. w.

342. Eben so werden auch die Potenzen von der Wurzel $a - b$ gefunden, welche von den vorigen nur darin unter-

schieden sind, daß das 2., 4., 6. rc., kurz jedes gerade Glied das Zeichen minus bekommt, wie aus folgendem zu ersehen.

$$\begin{array}{ll}
(a - b)^1 = & a - b \\
 & a - b \\ \hline
 & a^2 - ab \\
 & \quad - ab + b^2 \\ \hline
(a - b)^2 = & a^2 - 2ab + b^2 \\
 & a - b \\ \hline
 & a^3 - 2a^2b + ab^2 \\
 & \quad - a^2b + 2ab^2 - b^3 \\ \hline
(a - b)^3 = & a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 \\
 & a - b \\ \hline
 & a^4 - 3a^3b + 3a^2b^2 - ab^3 \\
 & \quad - a^3b + 3a^2b^2 - 3ab^3 + b^4 \\ \hline
(a - b)^4 = & a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4 \\
 & a - b \\ \hline
 & a^5 - 4a^4b + 6a^3b^2 - 4a^2b^3 + ab^4 \\
 & \quad - a^4b + 4a^3b^2 - 6a^2b^3 + 4ab^4 - b^5 \\ \hline
(a - b)^5 = & a^5 - 5a^4b + 10a^3b^2 - 10a^2b^3 + 5ab^4 - b^5 \\
 & a - b \\ \hline
 & a^6 - 5a^5b + 10a^4b^2 - 10a^3b^3 + 5a^2b^4 - ab^5 \\
 & \quad - a^5b + 5a^4b^2 - 10a^3b^3 + 10a^2b^4 - 5ab^5 + b^6 \\ \hline
(a - b)^6 = & a^6 - 6a^5b + 15a^4b^2 - 20a^3b^3 + 15a^2b^4 - 6ab^5 + b^6
\end{array}$$

u. s. w.

Hier bekommen nämlich alle ungeraden Potenzen von b das Zeichen $-$, die geraden aber behalten das Zeichen $+$, wovon der Grund offenbar ist; denn, da in der Wurzel $- b$ steht, so gehen die Potenzen davon in folgender Art fort: $- b, + b^2, - b^3, + b^4, - b^5, + b^6$ u. s. w., wo die geraden Potenzen alle das Zeichen $+$, die ungeraden aber alle das Zeichen $-$ haben.

343. Hier stellt sich aber die wichtige Frage ein, wie man ohne diese Rechnung in derselben Weise fortzusetzen, alle Potenzen sowohl von $a + b$ als von $a - b$ finden könne? Man muß vor allen Dingen bemerken, daß, wenn man die Potenzen von $a + b$ anzugeben im Stande ist, daraus

von selbst die Potenzen von a — b sich ergeben, wenn man die Zeichen der geraden Glieder, nämlich des 2., 4., 6., 8. u. s. w. umkehrt. Es kommt demnach hier darauf an, eine Regel festzustellen, nach welcher jede Potenz von a + b, so hoch dieselbe auch sein mag, gefunden werden kann, ohne daß man nöthig hat, die Rechnung für alle vorhergehenden zu vollziehen.

344. Wenn man bei den oben gefundenen Potenzen die Zahlen, die jedem Gliede vorgesetzt sind, wegläßt, welche Zahlen die **Coefficienten** genannt werden, so bemerkt man in den Gliedern eine auffallende Regelmäßigkeit. Denn zuerst erscheint gerade die Potenz von a, welche verlangt wird; in den folgenden Gliedern aber werden die Potenzen von a immer um eins niedriger, die Potenzen von b hingegen steigen immer um eins, so daß die Summe der Exponenten von a und b in allen Gliedern gleich viel beträgt. Den Schluß bildet b in die verlangte Potenz erhoben. Wenn man also die zehnte Potenz von a + b verlangt, so werden die Glieder ohne Coefficienten also fortgehen:

$$a^{10},\ a^9b^1,\ a^8b^2,\ a^7b^3,\ a^6b^4,\ a^5b^5,\ a^4b^6,\ a^3b^7,\ a^2b^8,\ a^1b^9,\ b^{10}.$$

345. Es muß also nur noch gezeigt werden, wie man die dazu gehörigen Coefficienten findet, oder mit welchen Zahlen jedes Glied multiplicirt werden soll. Was nun das erste Glied anbetrifft, so ist sein Coefficient immer 1, und bei dem zweiten Gliede ist der Coefficient stets der Exponent der Potenz selbst. Allein für die folgenden läßt sich nicht so leicht eine Ordnung bemerken. Indessen wenn diese Coefficienten nach und nach weiter fortgesetzt werden, wird man bald das Gesetz wahrnehmen, nach dem man leicht so weit gehen kann, als man will, wie aus folgender Tabelle zu ersehen.

Potenz	I.	Coefficienten 1, 1.
=	II.	1, 2 1.
=	III.	1, 3, 3, 1.
=	IV.	1, 4, 6, 4, 1.
=	V.	1, 5, 10, 10, 5, 1
=	VI.	1, 6, 15, 20, 15, 6, 1.
=	VII.	1, 7, 21, 35, 35, 21, 7, 1.
=	VIII.	1, 8, 28, 56, 70, 56, 28, 8, 1.
=	IX.	1, 9, 36, 84, 126, 126, 84, 36, 9, 1.
=	X.	1, 10, 45, 120, 210, 252, 210, 120, 45, 10, 1.

u. s. w.

Also wird von a + b die zehnte Potenz sein:

$$a^{10} + 10a^9b + 45a^8b^2 + 120a^7b^3 + 210a^6b^4 + 252a^5b^5 + 210a^4b^6 + 120a^3b^7 + 45a^2b^8 + 10ab^9 + b^{10}.$$

346. In Bezug auf diese Coefficienten ist zu bemerken, daß die Summe derselben für jede Potenz die gleiche Potenz von 2 ergeben muß. Denn man setze a = 1, und b = 1, so wird jedes Glied außer dem Coefficienten = 1, so daß nur die Coefficienten addirt zu werden brauchen. Daher denn die zehnte Potenz sein wird $(1 + 1)^{10} = 2^{10} = 1024$.

Eben so verhält es sich auch mit allen übrigen. Also ist für die

I. $1 + 1 = 2 = 2^1$
II. $1 + 2 + 1 = 4 = 2^2$
III. $1 + 3 + 3 + 1 = 8 = 2^3$
IV. $1 + 4 + 6 + 4 + 1 = 16 = 2^4$
V. $1 + 5 + 10 + 10 + 5 + 1 = 32 = 2^5$
VI. $1 + 6 + 15 + 20 + 15 + 6 + 1 = 64 = 2^6$
VII. $1 + 7 + 21 + 35 + 35 + 21 + 7 + 1 = 128 = 2^7$
u. s. w.

347. Ferner ist bemerkenswerth, daß die Coefficienten vom Anfang bis zur Mitte steigen, hierauf aber in derselben Ordnung wieder abnehmen. Bei den geraden Potenzen steht der größte genau in der Mitte, bei den ungeraden aber sind zwei mittlere, welche die größten und einander gleich sind.

Die Ordnung der Coefficienten selbst aber verdient noch genauer in Erwägung gezogen zu werden, damit man dieselben für jede Potenz finden könne, ohne die vorhergehenden erst zu suchen, wozu hier die Regel gegeben werden soll; der Beweis aber davon wird in den folgenden Kapiteln erbracht werden.

348. Um nun die Coefficienten für eine gegebene Potenz wie z. B. die siebente zu finden, schreibe man folgende Brüche der Reihe nach hinter einander:

$$\tfrac{7}{1},\ \tfrac{6}{2},\ \tfrac{5}{3},\ \tfrac{4}{4},\ \tfrac{3}{5},\ \tfrac{2}{6},\ \tfrac{1}{7}.$$

Man sieht hier, daß die Zähler von dem Exponenten der verlangten Potenz anfangen und immer um eines vermindert werden, die Nenner aber nach der Ordnung der Zahlen 1, 2, 3, 4 u. s. w. fortschreiten. Da nun der erste Coefficient immer eins ist, so giebt der erste Bruch den zweiten Coefficienten; die zwei ersten Brüche mit einander multiplicirt, den dritten; die drei ersten mit einander multiplicirt, den vierten, u. s. w.

Also ist der erste Coefficient = 1, der zweite $= \frac{7}{1} = 7$, der dritte $= \frac{7}{1} \cdot \frac{6}{2} = 21$, der vierte $= \frac{7}{1} \cdot \frac{6}{2} \cdot \frac{5}{3} = 35$, der fünfte $= \frac{7}{1} \cdot \frac{6}{2} \cdot \frac{5}{3} \cdot \frac{4}{4} = 35$, der sechste $\frac{7}{1} \cdot \frac{6}{2} \cdot \frac{5}{3} \cdot \frac{4}{4} \cdot \frac{3}{5} = 21$, der siebente $= 21 \cdot \frac{2}{6} = 7$, der achte $= 7 \cdot \frac{1}{7} = 1$.

349. Also für die zweite Potenz hat man diese Brüche $\frac{2}{1} \cdot \frac{1}{2}$, daher der erste Coefficient = 1, der zweite $\frac{2}{1} = 2$, der dritte $2 \cdot \frac{1}{2} = 1$.

Für die dritte Potenz hat man diese Brüche $\frac{3}{1}; \frac{2}{2}; \frac{1}{3}$; daher der erste Coefficient = 1, der zweite $\frac{3}{1} = 3$, der dritte $3 \cdot \frac{2}{2} = 3$, der vierte $\frac{3}{1} \cdot \frac{2}{2} \cdot \frac{1}{3} = 1$.

Für die vierte Potenz hat man diese Brüche $\frac{4}{1}; \frac{3}{2}; \frac{2}{3}; \frac{1}{4}$; daher der erste Coefficient = 1, der zweite $\frac{4}{1} = 4$, der dritte $\frac{4}{1} \cdot \frac{3}{2} = 6$, der vierte $\frac{4}{1} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{3} = 4$, der fünfte $\frac{4}{1} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4} = 1$.

350. Diese Regel schafft uns also den Vortheil, daß man nicht nöthig hat, die vorhergehenden Coefficienten zu

wissen, sondern sogleich für jede Potenz die ihr angehörenden Coefficienten finden kann.

Also für die zehnte Potenz schreibt man diese Brüche $\frac{10}{1}, \frac{9}{2}, \frac{8}{3}, \frac{7}{4}, \frac{6}{5}, \frac{5}{6}, \frac{4}{7}, \frac{3}{8}, \frac{2}{9}, \frac{1}{10}$. Daher bekommt man

den 1. Coefficienten = 1, den 2. $= \frac{10}{1} = 10$,
den 3. $= 10 \cdot \frac{9}{2} = 45$, den 4. $= 45 \cdot \frac{8}{3} = 120$,
den 5. $= 120 \cdot \frac{7}{4} = 210$, den 6. $= 210 \cdot \frac{6}{5} = 252$,
den 7. $= 252 \cdot \frac{5}{6} = 210$, den 8. $= 210 \cdot \frac{4}{7} = 120$,
den 9. $= 120 \cdot \frac{3}{8} = 45$, den 10. $= 45 \cdot \frac{2}{9} = 10$,
den 11. $= 10 \cdot \frac{1}{10} = 1$.

351. Man kann auch diese Brüche so schlechtweg hinschreiben, ohne den Werth derselben zu berechnen, und in solcher Art wird es leicht sein, jede Potenz von a + b, so hoch dieselbe auch sein mag, hinzuschreiben.

Also wird die 100. Potenz sein $(a + b)^{100} = a^{100} + \frac{100}{1} a^{99}b + \frac{100 \cdot 99}{1 \cdot 2} a^{98}b^2 + \frac{100 \cdot 99 \cdot 98}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^{97}b^3 + \frac{100 \cdot 99 \cdot 98 \cdot 97}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} a^{96}b^4$ u. s. w., woraus die Ordnung der folgenden Glieder leicht zu ersehen ist.

Kapitel 11.

Von der Versetzung der Buchstaben, auf welcher der Beweis der vorigen Regel beruht.

352. Wenn man auf den Ursprung der obigen Coefficienten zurückgeht, so wird man finden, daß jedes Glied so oft vorkommt, als sich die Buchstaben, aus denen es besteht, versetzen lassen. So z. B. kommt bei der zweiten Potenz das Glied ab zweimal vor, indem man schreiben kann ab und ba; hingegen kommt daselbst a^2 nur einmal vor, weil die Ordnung der Buchstaben keine Veränderung leidet. Bei der dritten Potenz kann das Glied a^2b oder aab auf dreierlei Weise geschrieben werden, als aab, aba, baa, und deswegen ist der Coefficient auch 3. Eben so bei der vierten Potenz kann das Glied a^3b, oder aaab in vier Arten versetzt werden, als aaab, aaba, abaa,

baaa, deswegen ist auch sein Coefficient 4; und das Glied aabb hat 6 zum Coefficienten, weil sechs Versetzungen stattfinden, nämlich aabb, abba, baba, abab, bbaa, baab. Und so verhält es sich auch mit allen übrigen.

353. In der That wenn man erwägt, daß z. B. die vierte Potenz jeder Wurzel, wenn dieselbe auch aus mehr als zwei Gliedern besteht, als $(a + b + c + d)^4$ gefunden wird, wenn diese vier Factoren mit einander multiplicirt werden: I. $a + b + c + d$, II. $a + b + c + d$, III. $a + b + c + d$, und IV. $a + b + c + d$, so muß jeder Buchstabe des ersten mit jedem des andern, und ferner mit jedem des dritten, und endlich noch mit jedem des vierten multiplicirt werden, daher jedes Glied aus 4 Buchstaben bestehen und so oft mal vorkommen wird, als sich die Buchstaben desselben unter einander versetzen lassen, woraus sodann sein Coefficient bestimmt wird.

354. Hier kommt es also darauf an zu wissen, wie viel Mal eine gewisse Anzahl Buchstaben unter sich versetzt werden kann, wobei besonders darauf zu sehen, ob dieselben Buchstaben unter sich gleich oder ungleich sind. Denn wenn alle gleich sind, so findet keine Veränderung statt, weswegen auch die einfachen Potenzen a^2, a^3, a^4 u. s. w. alle 1 zum Coefficienten haben.

355. Wir wollen erstlich alle Buchstaben ungleich annehmen, und bei zweien, nämlich ab anfangen, wo offenbar zwei Versetzungen stattfinden: ab und ba.

Hat man drei Buchstaben abc, so ist zu merken, daß jeder die erste Stelle einnehmen und dann die zwei übrigen zweimal versetzt werden können. Wenn also a zuerst steht, so hat man zwei Versetzungen abc, acb; steht b zuerst, so hat man wieder zwei, bac, bca, und eben so viel wenn c zuerst steht, cab, cba. Daher wird im Ganzen die Anzahl der Versetzungen $3 . 2 = 6$ sein.

Hat man vier Buchstaben abcd, so kann jeder die erste

Stelle einnehmen, und in jedem Fall geben die drei übrigen sechs Versetzungen. Daher im Ganzen die Anzahl der Versetzungen $4 . 6 = 24 = 4 . 3 . 2 . 1$ sein wird.

Hat man fünf Buchstaben abcde, so kann jeder die erste Stelle einnehmen und für jede lassen sich die vier übrigen 24 Mal versetzen. Daher die Anzahl aller Versetzungen $5 . 24 = 120 = 5 . 4 . 3 . 2 . 1$ sein wird.

356. So groß demnach auch immer die Anzahl der Buchstaben sein mag, wenn dieselben nur alle ungleich unter sich sind, so läßt sich die Anzahl aller Versetzungen ganz leicht bestimmen, wie aus folgender Tabelle zu ersehen:

Anzahl d. Buchst.	I.	Anzahl d. Versetzungen 1=1
	II.	2.1=2
	III.	3.2.1=6
	IV.	4.3.2.1=24
	V.	5.4.3.2.1=120
	VI.	6.5.4.3.2.1=720
	VII.	7.6.5.4.3.2.1=5040
	VIII.	8.7.6.5.4.3.2.1=40320
	IX.	9.8.7.6.5.4.3.2.1=362880
	X.	10.9.8.7.6.5.4.3.2.1=3628800.

357. Es ist aber wohl zu merken, daß diese Zahlen nur alsdann Geltung haben, wenn alle Buchstaben unter sich ungleich sind. Denn wenn zwei oder mehr einander gleich sind, wird die Anzahl der Versetzungen weit geringer. Und wenn gar alle einander gleich sind, hat man nur eine einzige Aufstellung. Wir wollen also sehen, wie nach der Anzahl der gleichen Buchstaben die obigen Zahlen vermindert werden müssen.

358. Sind zwei Buchstaben einander gleich, so werden die zwei Versetzungen nur als eine gerechnet. Daher die obige Zahl auf die Hälfte gebracht oder durch 2 dividirt werden muß. Sind drei Buchstaben einander gleich, so werden 6 Versetzungen nur als eine gerechnet; daher die obigen Zahlen durch $6 = 3 . 2 . 1$ getheilt werden müssen.

Eben so wenn vier Buchstaben einander gleich sind, müssen die obigen Zahlen durch 24, das ist durch $4 . 3 . 2 . 1$ getheilt werden u. s. w.

Hieraus kann man nun leicht bestimmen, wie viel Mal die Buchstaben aaabbc versetzt werden können. Die Anzahl derselben ist sechs, welche, wenn sie ungleich wären $6 . 5 . 4 . 3 . 2 . 1$ Versetzungen zulassen würden. Weil aber hier a dreimal vorkommt, muß diese Zahl durch $3 . 2 . 1$, und weil b zweimal vorkommt noch ferner durch $2 . 1$ getheilt werden, daher die Anzahl der Versetzungen $= \frac{6.5.4.3.2.1}{3.2.1.2.1} = 5 . 4 . 3 = 60$ sein wird.

359. Hieraus können wir nun die Coefficienten jedes Gliedes für jede Potenz bestimmen, wie wir z. B. für die siebente Potenz $(a + b)^7$ zeigen wollen. Das erste Glied ist a^7, welches nur einmal vorkommt, und da in allen übrigen sieben Buchstaben vorkommen, so wäre die Anzahl aller Versetzungen $7 . 6 . 5 . 4 . 3 . 2 . 1$, wenn sie alle ungleich wären. Da aber im zweiten Glied a^6b, sechs gleiche Buchstaben vorhanden sind, so muß jene Zahl durch $6 . 5 . 4 . 3 . 2 . 1$ getheilt werden, woher der Coefficient sein wird $= \frac{7.6.5.4.3.2.1}{6.5.4.3.2.1} = \frac{7}{1} = 7$.

Im dritten Gliede a^5b^2 kommt a fünfmal und b zweimal vor, daher die obige Zahl erstlich durch $5 . 4 . 3 . 2 . 1$ und noch durch $2 . 1$ getheilt werden muß, woher der Coefficient sein wird $= \frac{7.6.5.4.3.2.1}{5.4.3.2.1.1.2} = \frac{7.6}{1.2}$.

Im vierten Glied a^4b^3 steht a viermal und b dreimal; daher die obige Zahl erstlich durch $4 . 3 . 2 . 1$ und dann noch durch $1 . 2 . 3$ getheilt werden muß, so daß der Coefficient sein wird $= \frac{7.6.5.4.3.2.1}{4.3.2.1.1.2.3} = \frac{7.6.5}{1.2.3}$.

Eben so wird für das fünfte Glied a^3b^4 der Coefficient $= \frac{7.6.5.4}{1.2.3.4}$ u. s. w., wodurch die oben gegebene Regel erwiesen ist.

360. Diese Betrachtung führt uns aber noch weiter und lehrt, wie man auch von solchen Wurzeln, die aus mehr als zwei Theilen bestehen, alle Potenzen finden kann. Wir wollen dies nur bei der dritten Potenz von $a + b + c$ erläutern, worin alle möglichen Zusammensetzungen von drei Buchstaben als Gliedern vorkommen müssen, und jedes die Anzahl aller seiner Versetzungen zum Coefficienten haben wird; also wird diese dritte Potenz oder $(a + b + c)^3$ sein:

$$a^3 + 3a^2b + 3a^2c + 3ab^2 + 6abc + 3ac^2 + b^3 + 3b^2c + 3bc^2 + c^3.$$

Nehmen wir an, es sei $a = 1$, $b = 1$, $c = 1$, so wird der Cubus von $1 + 1 + 1$, also von 3 sein:

$$1 + 3 + 3 + 3 + 6 + 3 + 1 + 3 + 3 + 1 = 27.$$

Setzt man $a = 1$, $b - 1$ und $c = -1$, so wird der Cubus von $1 + 1 - 1$, also von 1 sein:

$$1 + 3 - 3 + 3 - 6 + 3 + 1 - 3 + 3 - 1 = 1.$$

Kapitel 12.

Von der Entwickelung der Irrationalpotenzen durch unendliche Reihen.

361. Da wir gezeigt haben, wie von der Wurzel $a + b$ jede Potenz gefunden wird, der Exponent mag so groß sein als er will, sind wir im Stande, auf allgemeine Art die Potenz von $a + b$ auszudrücken, wenn der Exponent auch unbestimmt, und durch einen Buchstaben n bezeichnet ist.

Also werden wir nach der oben gegebenen Regel finden:

$$(a + b)^n = a^n + \frac{n}{1} a^{n-1} b + \frac{n}{1} . \frac{n-1}{2} a^{n-2} b^2 + \frac{n}{1} . \frac{n-1}{2} . \frac{n-2}{3} a^{n-3} b^3 + \frac{n}{1} . \frac{n-1}{2} . \frac{n-2}{3} . \frac{n-3}{4} a^{n-4} b^4 \text{ etc.}$$

Dies ist der sogenannte binomische Lehrsatz.

362. Will man die gleiche Potenz von der Wurzel $a - b$ nehmen, so braucht man nur die Zeichen des zwei-

ten, vierten, sechsten u. s. w. Gliedes zu verändern, woher man haben wird:

$(a-b)^n = a^n - \frac{n}{1} a^{n-1}b + \frac{n}{1} \cdot \frac{n-1}{2} a^{n-2}b^2 - \frac{n}{1} \cdot \frac{n-1}{2} \cdot \frac{n-2}{3} a^{n-3}b^3 + \frac{n}{1} \cdot \frac{n-1}{2} \cdot \frac{n-2}{3} \cdot \frac{n-3}{4} a^{n-4}b^4$ u. s. w.

363. Diese Formeln drücken auch alle Arten von Wurzeln aus. Denn da wir gezeigt haben, wie die Wurzeln in gebrochene Exponenten verwandelt werden können, und daß $\sqrt[2]{a} = a^{\frac{1}{2}}$; $\sqrt[3]{a} = a^{\frac{1}{3}}$ und $\sqrt[4]{a} = a^{\frac{1}{4}}$ u. s. w., so wird auch sein:

$\sqrt[2]{(a+b)} = (a+b)^{\frac{1}{2}}$; $\sqrt[3]{(a+b)} = (a+b)^{\frac{1}{3}}$ und $\sqrt[4]{(a+b)} = (a+b)^{\frac{1}{4}}$ u. s. w.

Daher haben wir, um die Quadratwurzel von $a + b$ zu finden, nur nöthig, in der obigen allgemeinen Formel (361) für den Exponenten n den Bruch $\frac{1}{2}$ zu setzen, und wir werden erstlich für die Coefficienten bekommen: $\frac{n}{1} = \frac{1}{2}$; $\frac{n-1}{2} = -\frac{1}{4}$; $\frac{n-2}{3} = -\frac{3}{6}$; $\frac{n-3}{4} = -\frac{5}{8}$; $\frac{n-4}{5} = -\frac{7}{10}$; $\frac{n-5}{6} = -\frac{9}{12}$. Demnach ist $a^n = a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$ und $a^{n-1} = \frac{1}{\sqrt{a}}$; $a^{n-2} = \frac{1}{a\sqrt{a}}$; $a^{n-3} = \frac{1}{a^2\sqrt{a}}$ ꝛc.

Oder man kann diese Potenzen von a auch so ausdrücken: $a^n = \sqrt{a}$; $a^{n-1} = \frac{\sqrt{a}}{a}$; $a^{n-2} = \frac{a^n}{a^2} = \frac{\sqrt{a}}{a^2}$; $a^{n-3} = \frac{a^n}{a^3} = \frac{\sqrt{a}}{a^3}$; $a^{n-4} = \frac{a^n}{a^4} = \frac{\sqrt{a}}{a^4}$ ꝛc.

364. Dies vorausgesetzt, wird die Quadratwurzel aus $a + b$ in folgender Art ausgedrückt werden:

$\sqrt{(a+b)} = \sqrt{a} + \frac{1}{2}b \frac{\sqrt{a}}{a} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4}b^2 \frac{\sqrt{a}}{a^2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{6}b^3 \frac{\sqrt{a}}{a^3} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{5}{8}b^4 \frac{\sqrt{a}}{a^4}$ ꝛc.

365. Wenn nun a eine Quadratzahl ist, so kann $\sqrt{a}$ angegeben, und also die Quadratwurzel aus $a + b$, ohne Wurzelzeichen durch eine unendliche Reihe ausgedrückt werden.

Also wenn $a = c^2$, so ist $\sqrt{a} = c$, und man wird haben $\sqrt{(c^2+b)} = c + \frac{1}{2} \cdot \frac{b}{c} - \frac{1}{8} \cdot \frac{b^2}{c^3} + \frac{1}{16} \cdot \frac{b^3}{c^5} - \frac{5}{128} \cdot \frac{b^4}{c^7}$ u. s. w.

Hiedurch kann man aus jeder Zahl die Quadratwurzel ausziehen, weil sich jede Zahl in zwei Theile zerlegen läßt, deren einer ein Quadrat ist, welcher durch c^2 angedeutet wird. Will man z. B. die Quadratwurzel von 6 haben, so setzt man $6 = 4 + 2$, und da wird $c^2 = 4$, also $c = 2$ und $b = 2$, daher bekommt man $\sqrt{6} = 2 + \frac{1}{2} - \frac{1}{16} + \frac{1}{64} - \frac{5}{1024}$ ꝛc. Nimmt man hievon nur die zwei ersten Glieder, so bekommt man $2\frac{1}{2} = \frac{5}{2}$, wovon das Quadrat $\frac{25}{4}$ nur um $\frac{1}{4}$ größer ist als 6. Nimmt man drei Glieder, so hat man $2\frac{7}{16} = \frac{39}{16}$, wovon das Quadrat $\frac{1521}{256}$ nur um $\frac{15}{256}$ zu klein ist.

366. Da in diesem Exempel $\frac{5}{2}$ der Wahrheit schon sehr nahe kommt, kann man setzen $6 = \frac{25}{4} - \frac{1}{4}$.

Also wird $c^2 = \frac{25}{4}$, $c = \frac{5}{2}$, $b = -\frac{1}{4}$, woraus wir nur die zwei ersten Glieder berechnen wollen, da dann $\sqrt{6} = \frac{5}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{-\frac{1}{4}}{\frac{5}{2}} = \frac{5}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\frac{1}{4}}{\frac{5}{2}} = \frac{5}{2} - \frac{1}{20} = \frac{49}{20}$ herauskommt, wovon das Quadrat $\frac{2401}{400}$ nur um $\frac{1}{400}$ größer ist als 6.

Setzen wir nun $6 = \frac{2401}{400} - \frac{1}{400}$, so wird $c = \frac{49}{20}$ und $b = -\frac{1}{400}$. Woraus wiederum nur die zwei ersten Glieder genommen, ergeben $\sqrt{6} = \frac{49}{20} + \frac{1}{2} \cdot \frac{-\frac{1}{400}}{\frac{49}{20}} = \frac{49}{20} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\frac{1}{400}}{\frac{49}{20}} = \frac{49}{20} - \frac{1}{1960} = \frac{4801}{1960}$, wovon das Quadrat $= \frac{23049601}{3841600}$. Nun aber ist $6 = \frac{23049600}{3841600}$, also ist der Fehler nur $\frac{1}{3841600}$.

367. Eben so kann man auch die Cubikwurzel aus $a + b$ durch eine unendliche Reihe ausdrücken. Denn da

$\sqrt[3]{(a+b)} = (a+b)^{\frac{1}{3}}$, so wird man in unserer allgemeinen Formel $n = \frac{1}{3}$, und daher für die Coefficienten $\frac{n}{1} = \frac{1}{3}$, $\frac{n-1}{2} = -\frac{1}{3}$, $\frac{n-2}{3} = -\frac{5}{9}$, $\frac{n-3}{4} = -\frac{2}{3}$, $\frac{n-4}{5} = -\frac{11}{15}$ ꝛc. haben.

Für die Potenzen von a aber ist $a^n = \sqrt[3]{a}$, $a^{n-1} = \frac{\sqrt[3]{a}}{a}$, $a^{n-2} = \frac{\sqrt[3]{a}}{a^2}$, $a^{n-3} = \frac{\sqrt[3]{a}}{a^3}$ ꝛc. Daher erhalten wir

$\sqrt[3]{(a+b)} = \sqrt[3]{a} + \frac{1}{3} \cdot b\frac{\sqrt[3]{a}}{a} - \frac{1}{9} \cdot b^2\frac{\sqrt[3]{a}}{a^2} + \frac{5}{81}b^3 \cdot \frac{\sqrt[3]{a}}{a^3} - \frac{10}{243} \cdot b^4\frac{\sqrt[3]{a}}{a^4}$ ꝛc.

368. Wenn also a ein Cubus nämlich $a = c^3$, so wird $\sqrt[3]{a} = c$, und also fallen die Wurzelzeichen weg. Daher haben wir:

$\sqrt[3]{(c^3+b)} = c + \frac{1}{3} \cdot \frac{b}{c^2} - \frac{1}{9} \cdot \frac{b^2}{c^5} + \frac{5}{81} \cdot \frac{b^3}{c^8} - \frac{10}{243} \cdot \frac{b^4}{c^{11}}$ u. s. w.

369. Mit Hülfe dieser Formel kann man nun die Cubikwurzel jeder Zahl durch Annäherung finden, weil sich jede Zahl in zwei Theile zerlegen läßt, wie $c^3 + b$, von denen der erste ein Cubus ist.

Also wenn man die Cubikwurzel von 2 verlangt, setze man $2 = 1 + 1$, und es wird $c = 1$ und $b = 1$, folglich $\sqrt[3]{2} = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{9} + \frac{5}{81}$ ꝛc., wovon die zwei ersten Glieder geben $1\frac{1}{3} = \frac{4}{3}$, dessen Cubus $\frac{64}{27}$ um $\frac{10}{27}$ zu groß ist. Man setze demnach $2 = \frac{64}{27} - \frac{10}{27}$, so wird $c = \frac{4}{3}$ und $b = -\frac{10}{27}$, und daher $\sqrt[3]{2} = \frac{4}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{-\frac{10}{27}}{\frac{16}{9}}$. Diese zwei Glieder geben $\frac{4}{3} - \frac{5}{72} = \frac{91}{72}$, wovon der Cubus ist $\frac{753571}{373248}$. Nun aber ist $2 = \frac{746496}{373248}$, also ist der Fehler $\frac{7075}{373248}$. Und in solcher Art kann man, wenn man will, immer näher kommen, wenn man mehr Glieder nehmen will.

Kapitel 13.

Von der Entwicklung der negativen Potenzen.

370. Es ist oben gezeigt worden, daß $\frac{1}{a}$ durch a^{-1} ausgedrückt werden kann; daher wird auch $\frac{1}{a+b}$ durch $(a+b)^{-1}$ ausgedrückt, so daß der Bruch $\frac{1}{a+b}$ als eine Potenz von $a + b$, deren Exponent -1 ist, angesehen werden kann; woher sich die oben gefundene Reihe für $(a+b)^n$ auch auf diesen Fall erstreckt.

371. Da nun $\frac{1}{a+b}$ so viel ist als $(a+b)^{-1}$, setze man in der oben gefundenen Formel $n = -1$. Dann wird man erstlich für die Coefficienten haben: $\frac{n}{1} = -1$, $\frac{n-1}{2} = -1$, $\frac{n-2}{3} = -1$, $\frac{n-3}{4} = -1$, $\frac{n-4}{5} = -1$ ꝛc. Für die Potenzen von a hat man dann $a^n = a^{-1} = \frac{1}{a}$, $a^{n-1} = \frac{1}{a^2}$, $a^{n-2} = \frac{1}{a^3}$, $a^{n-3} = \frac{1}{a^4}$ u. s. w. Daher erhalten wir

$(a+b)^{-1} = \frac{1}{a+b} = \frac{1}{a} - \frac{b}{a^2} + \frac{b^2}{a^3} - \frac{b^3}{a^4} + \frac{b^4}{a^5} - \frac{b^5}{a^6}$ ꝛc.,

welches dieselbe Reihe ist, die schon oben durch Division gefunden worden ist.

372. Da ferner $\frac{1}{(a+b)^2}$ so viel ist als $(a+b)^{-2}$, so kann auch diese Formel in eine unendliche Reihe aufgelöst werden.

Man setze nämlich $n = -2$, so hat man erstlich für die Coefficienten $\frac{n}{1} = -\frac{2}{1}$, $\frac{n-1}{2} = -\frac{3}{2}$, $\frac{n-2}{3} = -\frac{4}{3}$, $\frac{n-3}{4} = -\frac{5}{4}$ ꝛc. Und für die Potenzen von a hat man: $a^n = \frac{1}{a^2}$, $a^{n-1} = \frac{1}{a^3}$, $a^{n-2} = \frac{1}{a^4}$, $a^{n-3} = \frac{1}{a^5}$ ꝛc., daher erhalten wir $(a+b)^{-2} = \frac{1}{(a+b)^2} = \frac{1}{a^2} - \frac{2}{1}\cdot\frac{b}{a^3} + \frac{2}{1}\cdot\frac{3}{2}\frac{b^2}{a^4} - \frac{2}{1}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\frac{b^3}{a^5} + \frac{2}{1}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{5}{4}\frac{b^4}{a^6}$ ꝛc. Nun aber ist $\frac{2}{1} = 2$, $\frac{2}{1}\cdot\frac{3}{2} = 3$, $\frac{2}{1}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3} = 4$, $\frac{2}{1}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{5}{4} = 5$ ꝛc. Also werden wir haben:

$$\frac{1}{(a+b)^2} = \frac{1}{a^2} - 2\frac{b}{a^3} + 3\frac{b^2}{a^4} - 4\frac{b^3}{a^5} + 5\frac{b^4}{a^6} - 6\frac{b^5}{a^7} + 7\frac{b^6}{a^8} \text{ ꝛc.}$$

373. Setzen wir weiter $n = -3$, so bekommen wir eine Reihe für $(a+b)^{-3}$, das ist für $\frac{1}{(a+b)^3}$. Die Coefficienten werden also sein:

$\frac{n}{1} = -\frac{3}{1}$, $\frac{n-1}{2} = -\frac{4}{2}$, $\frac{n-2}{3} = -\frac{5}{3}$, $\frac{n-3}{4} = -\frac{6}{4}$ ꝛc.

Die Potenzen von a werden sein: $a^n = \frac{1}{a^3}$, $a^{n-1} = \frac{1}{a^4}$, $a^{n-2} = \frac{1}{a^5}$ ꝛc. Hieraus erhalten wir:

$$\frac{1}{(a+b)^3} = \frac{1}{a^3} - \frac{3}{1}\cdot\frac{b}{a^4} + \frac{3}{1}\cdot\frac{4}{2}\cdot\frac{b^2}{a^5} - \frac{3}{1}\cdot\frac{4}{2}\cdot\frac{5}{3}\frac{b^3}{a^6} + \frac{3}{1}\cdot\frac{4}{2}\cdot\frac{5}{3}\cdot\frac{6}{4}\frac{b^4}{a^7} \text{ ꝛc.}$$

$$= \frac{1}{a^3} - 3\frac{b}{a^4} + 6\frac{b^2}{a^5} - 10\frac{b^3}{a^6} + 15\frac{b^4}{a^7} - 21\frac{b^5}{a^8} + 28\frac{b^6}{a^9} - 36\frac{b^7}{a^{10}} + 45\frac{b^8}{a^{11}}$$

u. s. w. Setzen wir ferner $n = -4$, so haben wir für die Coefficienten $\frac{n}{1} = -\frac{4}{1}$, $\frac{n-1}{2} = -\frac{5}{2}$, $\frac{n-2}{3} = -\frac{6}{3}$, $\frac{n-3}{4} = -\frac{7}{4}$ ꝛc.; für die Potenzen von a aber

$a^n = \frac{1}{a^4}$, $a^{n-1} = \frac{1}{a^5}$, $a^{n-2} = \frac{1}{a^6}$, $a^{n-3} = \frac{1}{a^7}$, $a^{n-4} = \frac{1}{a^8}$

u. s. w. Woraus gefunden wird:

$$\frac{1}{(a+b)^4} = \frac{1}{a^4} - \frac{4}{1}\frac{b}{a^5} + \frac{4}{1}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{b^2}{a^6} - \frac{4}{1}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{6}{3}\frac{b^3}{a^7} + \frac{4}{1}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{6}{3}\cdot\frac{7}{4}\frac{b^4}{a^8} \text{ ꝛc.}$$

$$= \frac{1}{a^4} - 4\frac{b}{a^5} + 10\frac{b^2}{a^6} - 20\frac{b^3}{a^7} + 35\frac{b^4}{a^8} - 56\frac{b^5}{a^9} \text{ ꝛc.}$$

374. Hieraus können wir nun sicher schließen, daß man für jede negative Potenz auf allgemeine Art haben wird:

$$\frac{1}{(a+b)^m} = \frac{1}{a^m} - \frac{m}{1}\cdot\frac{b}{a^{m+1}} + \frac{m}{1}\cdot\frac{m+1}{2}\frac{b^2}{a^{m+2}} - \frac{m}{1}\cdot\frac{m+1}{2}\cdot\frac{m+2}{3}\frac{b^3}{a^{m+3}} \text{ ꝛc.}$$

Mittels dieser Formel kann man alle derartige Brüche in unendliche Reihen verwandeln, selbst wenn man für m Brüche setzt, um irrationale Formeln auszudrücken.

375. Zur weiteren Erläuterung wollen wir noch folgendes anführen.

Da wir gefunden haben, daß

$$\frac{1}{a+b} = \frac{1}{a} - \frac{b}{a^2} + \frac{b^2}{a^3} - \frac{b^3}{a^4} + \frac{b^4}{a^5} - \frac{b^5}{a^6} \text{ ꝛc.}$$

so wollen wir diese Reihe mit $a + b$ multipliciren, weil alsdann die Zahl 1 herauskommen muß, und dies bestätigt die Multiplication:

$$\begin{array}{l}
\frac{1}{a} - \frac{b}{a^2} + \frac{b^2}{a^3} - \frac{b^3}{a^4} + \frac{b^4}{a^5} - \frac{b^5}{a^6} \text{ ꝛc.} \\
a + b \\
\hline
1 - \frac{b}{a} + \frac{b^2}{a^2} - \frac{b^3}{a^3} + \frac{b^4}{a^4} - \frac{b^5}{a^5} \text{ ꝛc.} \\
\quad + \frac{b}{a} - \frac{b^2}{a^2} + \frac{b^3}{a^3} - \frac{b^4}{a^4} + \frac{b^5}{a^5} \text{ ꝛc.} \\
\hline
\end{array}$$

Product 1, wie nothwendig folgen muß.

376. Wir haben ferner gefunden:

$$\frac{1}{(a+b)^2} = \frac{1}{a^2} - \frac{2b}{a^3} + \frac{3b^2}{a^4} - \frac{4b^3}{a^5} + \frac{5b^4}{a^6} - \frac{6b^5}{a^7} \text{ ꝛc.}$$

Wenn man diese Reihe mit $(a+b)^2$ multiplicirt, muß ebenfalls 1 herauskommen. Es ist aber $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ und die Multiplication wird folgendes Ergebniß haben:

$$\begin{array}{l}
\frac{1}{a^2} - \frac{2b}{a^3} + \frac{3b^2}{a^4} - \frac{4b^3}{a^5} + \frac{5b^4}{a^6} - \frac{6b^5}{a^7} \text{ ꝛc.} \\
a^2 + 2ab + b^2 \\
\hline
\end{array}$$

$$\begin{array}{l}
1 - \frac{2b}{a} + \frac{3b^2}{a^2} - \frac{4b^3}{a^3} + \frac{5b^4}{a^4} - \frac{6b^5}{a^5} \text{ ꝛc.} \\
\quad + \frac{2b}{a} - \frac{4b^2}{a^2} + \frac{6b^3}{a^3} - \frac{8b^4}{a^4} + \frac{10b^5}{a^5} \text{ ꝛc.} \\
\quad + \frac{b^2}{a^2} - \frac{2b^3}{a^3} + \frac{3b^4}{a^4} - \frac{4b^5}{a^5} \text{ ꝛc.} \\
\hline
\end{array}$$

Product 1, wie die Natur der Sache erfordert.

377. Wenn man aber die für $\frac{1}{(a+b)^2}$ gefundene Reihe nur mit $a + b$ multiplicirt, muß $\frac{1}{a+b}$ herauskommen, oder die für diesen Bruch oben gefundene Reihe $\frac{1}{a} - \frac{b}{a^2} + \frac{b^2}{a^3} - \frac{b^3}{a^4} + \frac{b^4}{a^5} - \frac{b^5}{a^6}$ ꝛc., was auch die folgende Multiplication bestätigen wird.

$$\begin{array}{l}
\frac{1}{a^2} - \frac{2b}{a^3} + \frac{3b^2}{a^4} - \frac{4b^3}{a^5} + \frac{5b^4}{a^6} \text{ ꝛc.} \\
a + b \\
\hline
\frac{1}{a} - \frac{2b}{a^2} + \frac{3b^2}{a^3} - \frac{4b^3}{a^4} + \frac{5b^4}{a^5} \text{ ꝛc.} \\
\quad + \frac{b}{a^2} - \frac{2b^2}{a^3} + \frac{3b^3}{a^4} - \frac{4b^4}{a^5} \text{ ꝛc.} \\
\hline
\frac{1}{a} - \frac{b}{a^2} + \frac{b^2}{a^3} - \frac{b^3}{a^4} + \frac{b^4}{a^5} \text{ ꝛc.}
\end{array}$$

Dritter Abschnitt.

Von den Verhältnissen und Proportionen.

Kapitel 1.

Vom arithmetischen Verhältniß oder dem Unterschied zwischen zwei Zahlen.

378. Entweder sind zwei Größen einander gleich, oder sie sind es nicht. In letzterem Falle ist eine größer als die andere, und wenn man nach ihrer Ungleichheit fragt, kann dies

auf zweierlei Weise geschehen. Man kann fragen, um wie viel die eine größer sei als die andere. Man kann aber auch fragen, wie viel mal die eine größer sei als die andere. In beiden Fällen wird die Beziehung der Größen zu einander ein Verhältniß genannt, und das erste pflegt ein arithmetisches, das letztere aber ein geometrisches Verhältniß genannt zu werden. Diese Benennungen haben aber mit der Sache selbst keine Gemeinschaft, sondern sind willkürlich eingeführt worden.

379. Es versteht sich hier von selbst, daß die Größen von einerlei Art sein müssen, weil sonst Nichts über ihre Gleichheit oder Ungleichheit bestimmt werden kann. Denn es würde ungereimt sein, wenn Jemand z. B. fragen wollte, ob 2 Pfund und 3 Ellen einander gleich wären oder nicht? Daher ist hier überall von Größen derselben Art die Rede, und da sich dieselben immer durch Zahlen angeben lassen, wird, wie schon anfänglich gesagt worden, hier nur von Zahlen gehandelt.

380. Wenn also in Bezug auf zwei Zahlen gefragt wird, um wie viel die eine größer sei, als die andere, wird durch die Antwort ihr arithmetisches Verhältniß bestimmt. Da nun dies geschieht, wenn man den Unterschied zwischen den beiden Zahlen angiebt, so ist ein arithmetisches Verhältniß nichts anderes als der Unterschied zwischen zwei Zahlen. Das letztere Wort (Unterschied) wird aber hier häufig gebraucht, so daß das Wort Verhältniß nur allein für die sogenannten geometrischen Verhältnisse beibehalten wird.

381. Der Unterschied zwischen zwei Zahlen wird aber gefunden, wenn man die kleinere von der größern subtrahirt, und dadurch erhält man die Antwort auf die Frage, um wie viel die eine größer sei als die andere. Wenn also die beiden Zahlen einander gleich sind, so ist der Unterschied Nichts oder Null; und wenn man fragt, um