Zweiter Abschnitt.

Von den verschiedenen Rechnungsarten mit zusammengesetzten Größen.

Dritter Abschnitt.

Von den Verhältnissen und Proportionen.

Zweiter Theil.

Erster Abschnitt.

Von den algebraischen Gleichungen und ihrer Auflösung.

Zweiter Abschnitt.

Von der unbestimmten Analytik.

Erster Theil.

Erster Abschnitt.

Von den verschiedenen Rechnungsarten mit einfachen Größen.

Kapitel 1.

Von den mathematischen Wissenschaften überhaupt.

1. Zuvörderst wird alles dasjenige eine Größe genannt, was einer Vermehrung oder einer Verminderung fähig ist, oder wozu sich noch etwas hinzusetzen oder wovon sich etwas hinwegnehmen läßt.

Demnach ist eine Summe Geldes eine Größe, weil sich hinzusetzen oder hinwegnehmen läßt.

Eben so ist auch ein Gewicht eine Größe u. dgl. m.

2. Es giebt sehr viele verschiedene Arten von Größen, welche sich nicht wohl aufzählen lassen; und daher entstehen die verschiedenen Theile der Mathematik, deren jeder mit einer besonderen Art von Größen beschäftigt ist. Die Mathematik ist überhaupt nichts anders, als eine Wissenschaft der Größen, welche Mittel ausfindig macht, wie man letztere ausmessen kann.

3. Es läßt sich aber eine Größe nicht anders bestimmen oder ausmessen, als daß man eine andere Größe derselben Art als bekannt annimmt, und das Verhältniß angiebt, in dem diese zu jener steht.

Also wenn die Größe einer Summe Geldes bestimmt werden soll, so wird ein gewisses Stück Geld, wie z. B.

ein Gulden, ein Rubel, ein Thaler, oder ein Dukaten ꝛc. als bekannt angenommen, und angegeben, wie viel solcher Stücke in jener Summe Geldes enthalten sind.

Eben so, wenn die Größe eines Gewichts bestimmt werden soll, wird ein gewisses Gewicht, wie z. B. ein Pfund, ein Centner, oder ein Loth ꝛc. als bekannt angenommen, und angegeben, wie viel derselben in dem vorigen Gewichte enthalten sind.

Soll aber eine Länge oder eine Weite ausgemessen werden, so pflegt man sich dazu einer gewissen bekannten Länge, welche ein Fuß genannt wird, zu bedienen.

4. Bei Bestimmungen, oder Ausmessungen der Größen von allen Arten kommt es also darauf an, daß erstlich eine gewisse bekannte Größe von gleicher Art festgesetzt werde, welche das Maß, oder die Einheit genannt wird, und lediglich von unserer Willkür abhängt; alsdann, daß man bestimme, in welchem Verhältniß die gegebene Größe zu diesem Maße stehe, welches stets durch Zahlen angegeben wird, so daß eine Zahl nichts anders ist, als das Verhältniß, in dem eine Größe zu einer andern steht, welche als Einheit angenommen wird.

5. Hieraus geht hervor, daß sich alle Größen durch Zahlen ausdrücken lassen, und also der Grund aller mathematischen Wissenschaften darin gesetzt werden muß, daß man die Lehre von den Zahlen, und alle Rechnungsarten, die dabei vorkommen können, genau in Erwägung ziehe, und vollständig behandele.

Dieser Grundtheil der Mathematik wird die Analytik oder Algebra genannt.

6. In der Analytik werden also Zahlen allein betrachtet, durch welche die Größen angegeben werden, ohne daß man sich um die besondere Art der Größen bekümmert, was in den übrigen Theilen der Mathematik geschieht.

7. Von den Zahlen besonders handelt die Arithmetik oder Rechenkunst; allein dieselbe erstreckt sich nur auf gewisse Rechnungsarten, welche im gewöhnlichen Leben häufig vorkommen; hingegen begreift die Analytik auf allgemeine Art alles dasjenige in sich, was bei den Zahlen und der Berechnung derselben vorfallen mag.

Kapitel 2.

Erklärung der Zeichen + plus und — minus.

8. Wenn zu einer Zahl eine andere hinzugesetzt oder addirt werden soll, so wird dies durch das Zeichen + angedeutet, welches der Zahl vorgesetzt und plus ausgesprochen wird.

Also wird durch $5 + 3$ angedeutet, daß zu der Zahl 5 noch 3 addirt werden sollen, da man dann weiß, daß 8 heraus kommt. Eben so z. B. $12 + 7$ ist 19; $25 + 16$ ist 41 und $25 + 41$ ist 66 ꝛc.

9. Durch dieses Zeichen + plus pflegen auch mehrere Zahlen verbunden zu werden, wie z. B. $7 + 5 + 9$, wodurch angegeben wird, daß zu der Zahl 7 noch 5, und außerdem noch 9 addirt werden sollen, was 21 ausmacht. Hieraus ersieht man, was nachstehende Formel bedeutet:

$$8 + 5 + 13 + 11 + 1 + 3 + 10,$$

nämlich die Summe aller dieser Zahlen, welche 51 beträgt.

10. Da dies an und für sich klar ist, so bemerke man noch, daß auf allgemeine Art die Zahlen durch Buchstaben, wie a, b, c, d ꝛc. angedeutet werden. Wenn man also schreibt $a + b$, so bedeutet dies die Summe der beiden Zahlen, welche durch a und b ausgedrückt werden, dieselben mögen nun so groß oder klein sein, als sie wollen. Eben so bedeutet $f + m + b + x$ die Summe der Zahlen, welche durch diese Buchstaben ausgedrückt werden.

In jedem Fall also, wenn man nur weiß, was für Zahlen durch Buchstaben angedeutet werden, findet man

durch die Rechenkunst die Summe oder den Werth derartiger Formeln.

11. Wenn hingegen von einer Zahl eine andere abgezogen oder subtrahirt werden soll, so wird dies durch das Zeichen — angedeutet, das man minus (weniger) ausspricht und vor die Zahl stellt, welche abgezogen wird.

Also bedeutet $8 - 5$,

daß von der Zahl 8 die Zahl 5 abgezogen werden soll, da dann, wie bekannt ist, 3 übrig bleibt. Eben so ist $12 - 7$ so viel als 5, und $20 - 14$ so viel als 6, ꝛc.

12. Es kommt auch vor, daß von einer Zahl mehrere Zahlen zugleich subtrahirt werden sollen; wie z. B.:

$$50 - 1 - 3 - 5 - 7 - 9.$$

Dieses ist so zu verstehen: nimmt man zuerst 1 von 50 weg, bleiben 49; davon 3 weggenommen, bleiben 46; davon 5, bleiben 41; davon 7 weg, bleiben 34; davon die letzten 9 weggenommen, bleiben 25; welches der Werth der gegebenen Formel ist. Aber da die Zahlen 1, 3, 5, 7, 9 insgesammt weggenommen werden sollen, so ist es eben so viel, als wenn man ihre Summe, nämlich 25, auf einmal von 50 abzieht, da dann, wie vorher, 25 übrig bleiben.

13. Eben so läßt sich auch leicht der Werth solcher Formeln bestimmen, in welchen beide Zeichen + plus und — minus vorkommen; wie z. B.:

$12 - 3 - 5 + 2 - 1$ ist so viel als 5,

oder man darf nur die Summe der Zahlen, die + vor sich haben, besonders nehmen, als:

$12 + 2$ machen 14, und davon die Summe aller Zahlen, die — vor sich haben, welche sind 3, 5, 1, das ist 9 abziehen, da dann, wie vorher, 5 gefunden wird.

14. Hieraus ergiebt sich, daß es nicht auf die Reihenfolge der hingesetzten Zahlen ankommt, sondern daß man

dieselben nach Belieben versetzen kann, wenn nur jede das ihr vorstehende Zeichen behält; also, anstatt der obigen Formel kann man setzen:

$$12 + 2 - 5 - 3 - 1;\ \text{oder}\ 2 - 1 - 3 - 5 + 12;$$
$$\text{oder}\ 2 + 12 - 3 - 1 - 5.$$

Hiebei ist aber zu bemerken, daß in obiger Formel vor der Zahl 12 das Zeichen + als vorgesetzt verstanden werden muß.*)

15. Wenn nun, um die Sache allgemein zu machen, anstatt der wirklichen Zahlen Buchstaben gebraucht werden, so begreift man auch leicht die Bedeutung, wie z. B.:

$a - b - c + d - e$ deutet an, daß die durch die Buchstaben a und d ausgedrückten Zahlen addirt und davon die übrigen b, c, e, welche das Zeichen — haben, sämmtlich abgezogen werden müssen.

16. Hier kommt es also in der Hauptsache darauf an, was für ein Zeichen jede Zahl vor sich stehen hat; daher pflegt man in der Algebra die Zahlen mit ihren vorstehenden Zeichen als einzelne Größen zu betrachten, und diejenigen, welche das Zeichen + vor sich haben, bejahende oder positive Größen; diejenigen aber, welche das Zeichen — vor sich haben, verneinende oder negative Größen zu nennen.

17. Dies läßt sich gut durch die Art erläutern, wie das Vermögen einer Person angegeben zu werden pflegt; da dasjenige, was sie wirklich besitzt, durch positive Zahlen mit dem Zeichen + plus, dasjenige aber, was sie schuldig ist, durch negative Zahlen mit dem Zeichen — minus ausgedrückt wird. Also wenn jemand 100 Thaler hat, dabei aber 50 schuldig ist, so wird sein Vermögen betragen:

$100 - 50$, oder was dasselbe ist,

$+100 - 50$, also 50 Thaler.

*) Man pflegt nämlich bei der ersten Zahl das +-Zeichen fortzulassen.

18. Da nun die negativen Zahlen als Schulden betrachtet werden können, in so fern die positiven Zahlen den wirklichen Besitz angeben, so kann man sagen, daß die negativen Zahlen weniger sind als Nichts; also wenn Jemand Nichts im Vermögen hat, und noch dazu 50 Thl. schuldig ist, so hat er wirklich 50 Thl. weniger als Nichts; denn, wenn man ihm 50 Thl. schenken würde, um seine Schulden zu bezahlen, so würde er alsdann erst Nichts haben, während er doch jetzt mehr hat als vorher.

19. Wie nun die positiven Zahlen unstreitig größer als Nichts, so sind die negativen Zahlen kleiner als Nichts. Die positiven Zahlen aber entstehen, wenn man erstlich zu 0 oder Nichts, immerfort eins hinzusetzt, da dann die Reihe der sogenannten natürlichen Zahlen entsteht, nämlich:

$0, +1, +2, +3, +4, +5, +6, +7, +8, +9, +10,$

und so fort ins Unendliche.

Wird aber diese Reihe rückwärts fortgesetzt, und immer eins mehr weggenommen, so entsteht folgende Reihe der negativen Zahlen:

$0, -1, -2, -3, -4, -5, -6, -7, -8, -9, -10,$

und so fort ohne Ende.

20. Alle diese Zahlen, so wohl positive als negative, führen den bekannten Namen der ganzen Zahlen, welche also entweder größer oder kleiner sind als Nichts. Man nennt dieselben ganze Zahlen, um sie von den gebrochenen, und noch vielerlei andern Zahlen, deren später erwähnt werden wird, zu unterscheiden. Denn da z. B. 50 um ein Ganzes größer ist als 49, so begreift man leicht, daß zwischen 49 und 50 noch unendlich viel Mittelzahlen liegen müssen, welche alle größer als 49, und doch alle kleiner als 50 sind. Man darf sich zu diesem Behufe nur zwei Linien vorstellen, deren eine 50 Fuß, die andre aber 49 Fuß lang ist, und man wird leicht begreifen, daß man unendlich

viel andre Linien ziehen kann, welche alle länger als 49, und doch kürzer als 50 Fuß sind.

21. Dieser Begriff von den verneinenden oder negativen Größen ist um so sorgfältiger zu beachten, als derselbe in der ganzen Algebra von der größten Wichtigkeit ist. Hier wird es genügen, voraus zu bemerken, daß alle diese Formeln z. B.:

$+1-1,\ +2-2,\ +3-3,\ +4-4,$ u. s. f.

so viel bedeuten als 0, oder Nichts; ferner, daß z. B.: $+2-5$ so viel ist als -3, weil, wenn Jemand 2 Thl. hat, und 5 Thl. schuldig ist, er nicht nur Nichts hat, sondern noch 3 Thl. schuldig bleibt. Eben so ist:

$7 - 12$ so viel als -5,
$25 - 40$ so viel als -15.

22. Eben dies ist auch zu beobachten, wenn auf allgemeine Art anstatt der Zahlen Buchstaben gebraucht werden, da dann immer $+a-a$ so viel ist als 0 oder Nichts. Demnach wenn man wissen will, was z. B. $+a-b$ bedeute, sind zwei Fälle zu erwägen:

Der erste ist, wenn a größer als b; dann subtrahirt man b von a, und der Rest, positiv genommen, ist der gesuchte Werth.

Der zweite ist, wenn a kleiner als b; dann subtrahirt man a von b, und der Rest, negativ genommen, oder das Zeichen — minus vorgesetzt, zeigt den gesuchten Werth an.

Kapitel 3.

Von der Multiplication einfacher Größen.

23. Wenn zwei oder mehr gleiche Zahlen addirt werden, so läßt sich die Summe auf kürzere Art ausdrücken. So ist

$a + a$ so viel als $2 . a$, und
$a + a + a$ = = = $3 . a$, ferner
$a + a + a + a$ = = = $4 . a$, u. s. w.

Hieraus entspringt der Begriff der Multiplication, da nämlich

$2 . a$ so viel ist als 2 mal a, und
$3 . a$ = = = = 3 mal a, ferner
$4 . a$ = = = = 4 mal a, u. s. f.

24. Wenn also eine durch einen Buchstaben ausgedrückte Zahl mit einer beliebigen Zahl multiplicirt werden soll, so wird die Zahl blos vor den Buchstaben geschrieben; also

a mit 20 multiplicirt giebt 20 a, und
b mit 30 multiplicirt giebt 30 b, ꝛc.

Demnach ist ein c, einmal genommen, oder 1c, so viel als c.

25. Derartige Werthe*) können auch noch weiter leicht mit andern Zahlen multiplicirt werden, wie z. B.:

2 mal 3 a macht 6 a
3 mal 4 b macht 12 b
5 mal 7 x macht 35 x,

welche dann noch ferner mit Zahlen nach Belieben multiplicirt werden können.

26. Wenn die Zahl, mit welcher multiplicirt werden soll, auch durch einen Buchstaben ausgedrückt wird, so wird derselbe dem andern Buchstaben unmittelbar vorgesetzt; also wenn b mit a multiplicirt werden soll, so heißt das Product ab und pq ist das Product, welches entsteht, wenn man die Zahl q mit p multiplicirt. Will man pq noch ferner mit a multipliciren, so kommt apq heraus.

27. Dabei ist wohl zu merken, daß es auch hier nicht auf die Ordnung der an einander gesetzten Buchstaben ankommt, indem ab eben so viel ist als ba; oder b und a mit einander multiplicirt, macht eben so viel als a mit b multiplicirt. Um dieses zu begreifen, braucht man nur für a und b bekannte Zahlen, wie 3 und 4 zu nehmen. Es ist klar, daß 3 mal 4 eben so viel, als 4 mal 3 beträgt.

*) Euler schreibt hier bereits Producte, während dieser Begriff erst in 30 erklärt wird.

28. Wenn anstatt der Buchstaben, welche unmittelbar an einander geschrieben sind, wirkliche Zahlen gesetzt werden sollen, so sieht man leicht, daß dieselben alsdann nicht unmittelbar hinter einander geschrieben werden können. Denn wenn man statt 3 mal 4 schreiben wollte 34, so würde dies nicht zwölf, sondern vierunddreißig heißen. Wenn daher eine Multiplication mit bloßen Zahlen angedeutet werden soll, so pflegt man einen Punkt oder ein liegendes Kreuz × zwischen dieselben zu setzen: also $3 . 4$ bedeutet 3 mal 4, das ist 12; ebenso ist $1 . 2$ so viel als 2, und $1 . 2 . 3$ ist 6; ferner $1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 56$ ist 1344, und $1 . 2 . 3 . 4 . 5 . 6 . 7 . 8 . 9 . 10$ ist 3628800 u. s. f.

29. Hieraus ergiebt sich nun auch, was die Formel $5 . 7 . 8 . abcd$ bedeute; nämlich 5 wird erstlich mit 7 multiplicirt, der Betrag ferner mit 8, dieser Betrag alsdann mit a, und dieser wieder mit b, sodann mit c, und endlich mit d multiplicirt; wobei zu merken, daß anstatt $5 . 7 . 8$, der Werth davon, nämlich die Zahl 5 mal 7, also 35, und 8 mal 35, also 280 geschrieben werden kann.

30. Ferner ist zu merken, daß Beträge, die aus der Multiplication mehrerer Zahlen entstehen, *Producte* genannt werden. Zahlen oder Buchstaben aber, welche einzeln sind, pflegt man *Factoren* zu nennen.

31. Bis hieher haben wir nur positive Zahlen betrachtet, und da unterliegt es gar keinem Zweifel, daß die entstehenden Producte positiv sein müssen: nämlich $+a$ mit $+b$ multiplicirt giebt unstreitig $+ab$. Was aber herauskommt, wenn $+a$ mit $-b$ oder $-a$ mit $-b$ multiplicirt wird, erfordert eine besondere Erörterung.

32. Wir wollen erstlich $-a$ mit 3 oder $+3$ multipliciren; weil nun $-a$ als eine Schuld angesehen werden kann, so ist offenbar, daß, wenn diese Schuld 3 mal genommen wird, dieselbe auch 3 mal größer werden muß; folglich wird das gesuchte Product $-3a$ sein. Eben so

wenn — a mit b, das ist + b, multiplicirt werden soll, so wird herauskommen — ba, oder, was dasselbe ist, — ab. Hieraus ziehen wir den Schluß, daß, wenn eine positive Größe mit einer negativen multiplicirt werden soll, das Product negativ wird; daher die Regel: + mit + giebt + oder *plus*; hingegen + mit —, oder — mit + multiplicirt, giebt — oder *minus*.

33. Nun ist also noch der Fall zu bestimmen übrig, wenn — mit — multiplicirt wird, z. B. — a mit — b. Hiebei ist zuerst klar, daß das Product in Bezug auf die Buchstaben heißen wird ab. Ob aber das Zeichen + oder — davor zu setzen sei, ist noch ungewiß; so viel aber ist gewiß, daß es entweder das eine oder andere sein muß. Nun aber, sage ich, kann es nicht das Zeichen — sein. Denn — a mit + b multiplicirt giebt — ab, und also — a mit — b multiplicirt kann nicht eben das geben, was — a mit + b giebt; sondern es muß das Gegentheil herauskommen, welches nämlich heißt + ab. Daher die Regel: — mit — multiplicirt giebt +, eben so wohl als + mit +.

34. Diese Regeln pflegen kurz so ausgedrückt zu werden: *Zwei gleiche Zeichen mit einander multiplicirt geben +, zwei ungleiche Zeichen aber geben —.* Wenn also z. B. diese Zahlen + a, — b, — c, + d mit einander multiplicirt werden sollen, so giebt erstlich + a mit — b multiplicirt — ab, dieses mit — c giebt + abc, und dieses endlich mit + d giebt + abcd.

35. Da nun die Sache in Hinsicht der Zeichen keine Schwierigkeit hat, so bleibt noch übrig zu zeigen, wie zwei Zahlen, die schon selbst Producte sind, mit einander multiplicirt werden sollen. Wenn die Zahl ab mit der Zahl cd multiplicirt werden soll, so ist das Product abcd, und entsteht also, wenn man erstlich ab mit c, und das, was man durch die Multiplication gefunden, ferner mit d multiplicirt. Oder also, wenn man z. B. die Zahl 36 mit 12 multipliciren

soll, so hat man nur nöthig, weil 12 soviel ist wie 3 mal 4, 36 erstlich mit 3 zu multipliciren und das Gefundene, nämlich 108, ferner mit 4 zu multipliciren, da man dann 432 erhält, was so viel ist als 12 mal 36.

36. Wollte man aber 5ab mit 3cd multipliciren, so könnte man auch wohl dafür 3cd5ab setzen. Da es aber hier eben nicht auf die Ordnung der mit einander multiplicirten Zahlen ankommt, so pflegt man die bloßen Ziffern zuerst zu stellen, und schreibt für das Product 5 . 3abcd, oder 15abcd, weil 5 mal 3 so viel ist als 15.

Eben so, wenn 12pqr mit 7xy multiplicirt werden sollte, erhält man 12 . 7pqrxy, oder 84pqrxy.

Kapitel 4.

Von der Natur der ganzen Zahlen in Bezug auf ihre Factoren.

37. Wir haben bemerkt, daß ein Product aus zwei oder mehreren mit einander multiplicirten Zahlen besteht. Diese Zahlen werden die *Factoren* desselben genannt.

Also sind die Factoren des Products abcd die Zahlen a, b, c, d.

38. Zieht man nun alle ganzen Zahlen in Betracht, in sofern dieselben durch die Multiplication zweier oder mehrerer Zahlen entstehen können, so wird man bald finden, daß einige gar nicht durch die Multiplication entstehen und also keine Factoren haben, andere aber aus zwei und auch mehreren Zahlen mit einander multiplicirt entstehen können, folglich zwei oder mehrere Factoren haben. So ist z. B.

4 so viel als 2 . 2, ferner 6 so viel als 2 . 3,
und 8 so viel als 2 . 2 . 2, ferner 27 so viel als 3 . 3 . 3,
und 10 so viel als 2 . 5, u. s. w.

39. Hingegen lassen sich die folgenden Zahlen

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17 ꝛc.

nicht derartig in Factoren zerlegen, es wäre denn, daß man auch 1 zur Hülfe nehmen, und z. B. 2 durch 1 . 2

darstellen wollte. Allein da mit 1 multiplicirt die Zahl nicht verändert wird, so wird 1 auch nicht zu den Factoren gezählt.

Alle diese Zahlen nun, welche nicht durch Factoren dargestellt werden können, wie:

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17 ꝛc.,

werden *einfache* oder *Primzahlen* genannt; die übrigen Zahlen aber, welche sich durch Factoren darstellen lassen, wie:

4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18 ꝛc.,

heißen *zusammengesetzte* Zahlen.

40. Die einfachen oder Primzahlen verdienen also besonders wohl in Erwägung gezogen zu werden, weil dieselben aus keiner Multiplication zweier oder mehrerer Zahlen mit einander entstehen können. Dabei ist dies besonders merkwürdig, daß, wenn dieselben der Reihenfolge nach geschrieben werden, wie 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47 u. s. f., darin keine gewisse Ordnung wahrgenommen wird, sondern dieselben bald um mehr, bald um weniger fortspringen.

Und es hat auch bisher kein Gesetz, nach welchem dieselben fortgingen, ausfindig gemacht werden können.

41. Die zusammengesetzten Zahlen aber, welche sich durch Factoren darstellen lassen, entspringen alle aus den obigen Primzahlen, so daß alle Factoren davon Primzahlen sind. Denn wenn je ein Factor keine Primzahl, sondern schon zusammengesetzt wäre, so würde man denselben wieder durch zwei oder mehrere Factoren, die Primzahlen wären, darstellen können. Also wenn die Zahl 30 durch 5 . 6 dargestellt wird, so ist 6 keine Primzahl, sondern 2 . 3, und daher kann 30 durch 5 . 2 . 3, oder durch 2 . 3 . 5 dargestellt werden, wovon alle Factoren Primzahlen sind.

42. Betrachtet man nun alle zusammengesetzten Zahlen, wie solche durch Primzahlen dargestellt werden können, so findet sich darin ein großer Unterschied, daß einige nur zwei

derartige Factoren haben, andere drei oder mehr. Also ist, wie wir schon gesehen,

4 so viel als 2 . 2, 6 so viel als 2 . 3,
8 „ „ „ 2 . 2 . 2, 9 „ „ „ 3 . 3,
10 „ „ „ 2 . 5, 12 „ „ „ 2 . 3 . 2,
14 „ „ „ 2 . 7, 15 „ „ „ 3 . 5,
16 „ „ „ 2 . 2 . 2 . 2, u. s. f.

43. Hieraus läßt sich erkennen, wie man für jede Zahl ihre einfachen Factoren finden kann.

Also wenn die Zahl 360 vorgelegt wäre, so hat man für dieselbe erstlich 2 . 180.

Nun aber ist

180 so viel als 2 . 90,
und 90 „ „ „ 2 . 45,
und 45 „ „ „ 3 . 15,
und endlich 15 „ „ „ 3 . 5,

Folglich wird die Zahl 360 durch folgende einfache Factoren dargestellt:

2 . 2 . 2 . 3 . 3 . 5,

welche Zahlen sämmtlich mit einander multiplicirt die Zahl 360 ergeben.

44. Wir sehen also hieraus, daß sich die Primzahlen durch keine anderen Zahlen theilen lassen, hingegen die zusammengesetzten Zahlen am füglichsten in ihre einfachen Factoren aufgelöst werden, indem man alle einfachen Zahlen sucht, durch welche sich dieselben theilen lassen. Allein hierbei wird die Division gebraucht, deren Regeln in dem folgenden Kapitel erklärt werden sollen.

Kapitel 5.

Von der Division mit einfachen Größen.

45. Wenn eine Zahl in zwei, drei oder mehrere gleiche Theile getheilt werden soll, so geschieht es mittels der *Division*, welche die Größe eines solchen Theils bestimmen lehrt. Also wenn die Zahl 12 in drei gleiche Theile getheilt wer-

den soll, so findet man durch die Division, daß ein solcher Theil 4 ist.

Man bedient sich aber bei diesem Verfahren gewisser Namen. Die Zahl, die getheilt werden soll, heißt der **Dividendus** oder die zu theilende Zahl; die Zahl der gleichen Theile, welche man sucht, wird der **Divisor** oder **Theiler** genannt; die Größe eines solchen Theils aber, welcher durch die Division gefunden wird, pflegt der **Quotus** oder **Quotient** genannt zu werden; also ist in dem angeführten Beispiel

12 der Dividendus, oder die zu theilende Zahl,
3 der Divisor, oder Theiler, und
4 der Quotus, oder Quotient.

46. Wenn man also eine Zahl durch 2 theilt oder in zwei gleiche Theile zerlegt, so muß ein solcher Theil, das ist der Quotient, zweimal genommen, gerade die gegebene Zahl ausmachen; eben so, wenn eine Zahl durch 3 getheilt werden soll, muß der Quotient, dreimal genommen, dieselbe Zahl ausmachen; ja es muß überhaupt immer der Dividendus herauskommen, wenn man den Quotienten und den Divisor mit einander multiplicirt.

47. Daher wird auch die Division so beschrieben, daß man für den Quotienten eine Zahl sucht, welche mit dem Divisor multiplicirt, gerade die zu theilende Zahl hervorbringt. Also wenn z. B. 35 durch 5 getheilt werden soll, sucht man eine Zahl, welche mit 5 multiplicirt 35 ergiebt. Diese Zahl ist demnach 7, weil 5 mal 7 das Product 35 giebt. Man pflegt sich dabei dieser Ausdrucksweise zu bedienen: 5 in 35 geht 7 mal auf; denn 5 mal 7 ist 35.

48. Man stellt sich demnach den Dividendus als ein Product vor, von welchem der eine Factor dem Divisor gleich ist, während der andere Factor den Quotienten anzeigt.

Wenn ich also 63 durch 7 dividiren soll, so suche ich ein Product, dessen einer Factor 7, und der andere also beschaffen ist, daß, wenn derselbe mit dieser 7 multiplicirt

wird, genau 63 herauskommen. Ein solches ist nun $7 . 9$, und deswegen ist 9 der Quotient, welcher entspringt, wenn man 63 durch 7 dividirt.

49. Wenn daher auf allgemeine Art die Zahl ab durch a getheilt werden soll, so ist der Quotient offenbar b, weil a mit b multiplicirt den Dividendus ab ausmacht. Hieraus ist klar, daß, wenn man ab durch b dividiren soll, der Quotient a sein wird.

Also muß überhaupt in allen Divisionsexempeln, wenn man den Dividendus durch den Quotienten dividirt, der Divisor herauskommen; z. B. da 24 durch 4 dividirt 6 giebt, so giebt auch umgekehrt 24 durch 6 dividirt 4.

50. Da nun Alles darauf ankommt, daß man den Dividendus durch zwei Factoren darstellt, deren einer dem Divisor gleich ist, weil alsdann der andere den Quotienten angiebt, so wird man die folgenden Beispiele leicht verstehen. Erstlich der Dividendus abc, durch a dividirt, giebt bc, weil a mit bc multiplicirt abc ausmacht; eben so, wenn abc durch b dividirt wird, kommt ac heraus; und abc durch ac dividirt giebt b. Endlich $12mn$ durch $3m$ dividirt giebt $4n$, weil $3m$ mit $4n$ multiplicirt $12mn$ ausmacht; wenn aber eben diese Zahl $12mn$ durch 12 dividirt werden sollte, so würde mn herauskommen.

51. Weil jede Zahl a durch $1a$, oder ein a ausgedrückt werden kann, so ist hieraus offenbar, daß, wenn man a oder $1a$ durch 1 theilen soll, alsdann eben dieselbe Zahl a für den Quotienten herauskommt. Hingegen wenn eben dieselbe Zahl a oder $1a$ durch a getheilt werden soll, so wird der Quotient 1 sein.

52. Es geschieht aber nicht immer, daß man den Dividendus als ein Product von zwei Factoren darstellen kann, deren einer dem Divisor gleich ist, und in solchen Fällen läßt sich die Division nicht auf diese Art bewerkstelligen. Denn wenn ich z. B. 24 durch 7 dividiren soll, so ist die

Zahl 7 kein Factor von 24, weil $7 . 3$ erst 21 und also zu wenig, hingegen $7 . 4$ schon 28 und also zu viel ausmacht; doch sieht man hieraus, daß der Quotient größer sein muß als 3, und doch kleiner als 4. Daher, um denselben genau zu bestimmen, eine andere Art von Zahlen, die **Brüche** genannt werden, zu Hilfe genommen werden muß, wovon in einem der folgenden Kapitel gehandelt werden soll.

53. Ehe man aber zu den Brüchen fortschreitet, begnügt man sich, für den Quotienten die nächst kleinere ganze Zahl anzunehmen, dabei aber den Rest zu bestimmen, welcher übrig bleibt; also sagt man 7 in 24 geht 3 mal, der Rest aber ist 3, weil 3 mal 7 nur 21 macht, eine Zahl, die um 3 zu klein ist. Eben so sind folgende Exempel zu verstehen, wie:

$$\begin{array}{c|c|c} 6 & 34 & 5 \\ & 30 & \\ \hline & 4 & \end{array}$$

nämlich der Divisor ist 6,
der Dividendus 34,
der Quotient 5,
und der Rest ist 4,

$$\begin{array}{c|c|c} 9 & 41 & 4 \\ & 36 & \\ \hline & 5 & \end{array}$$

und hier ist der Divisor 9,
der Dividendus 41,
der Quotient 4,
der Rest 5.

In solchen Exempeln, in denen ein Rest übrig bleibt, ist folgende Regel zu merken:

54. **Wenn man den Theiler mit dem Quotienten multiplicirt und zum Product noch den Rest addirt, muß der Dividendus herauskommen**; und auf diese Art pflegt man die Division zu probiren, um zu sehn, ob man richtig gerechnet habe oder nicht.

Also in dem ersteren der zwei letzten Exempel multiplicirt man $6 . 5$ ist 30, dazu den Rest 4 addirt, giebt gerade den Dividendus 34.

Ebenfalls in dem letzten Exempel, wenn man den

Theiler 9 mit dem Quotienten 4 multiplicirt und zum Product 36 noch den Rest 5 addirt, erhält man den Dividendus 41.

55. Schließlich ist hier auch noch nöthig, in Hinsicht der Zeichen **plus** $+$ und **minus** $-$ anzumerken, daß, wenn $+ab$ durch $+a$ dividirt wird, der Quotient $+b$ sein wird, was an und für sich klar ist.

Wenn aber $+ab$ durch $-a$ dividirt werden soll, so wird der Quotient $-b$ sein, weil $-a$ mit $-b$ multiplicirt $+ab$ ausmacht.

Wenn ferner der Dividendus $-ab$ durch den Theiler $+a$ dividirt werden soll, so wird der Quotient $-b$ sein, weil $+a$ mit $-b$ multiplicirt $-ab$, das ist den Dividendus giebt.

Soll endlich der Dividendus $-ab$ durch den Divisor $-a$ getheilt werden, so wird der Quotient $+b$ sein, weil $-a$ mit $+b$ multiplicirt $-ab$ ausmacht.

56. Es haben also in der Division für die Zeichen $+$ und $-$ dieselben Regeln Geltung, welche wir oben bei der Multiplication angeführt haben, nämlich:

$+$ durch $+$ giebt $+$
$+$ durch $-$ giebt $-$
$-$ durch $+$ giebt $-$
$-$ durch $-$ giebt $+$ oder kürzer:

gleiche Zeichen geben plus, ungleiche minus.

57. Wenn also $+18pq$ durch $-3p$ dividirt werden soll, so wird der Quotient $-6q$ sein. Ferner $-30xy$ durch $+6y$ dividirt, giebt $-5x$. Ferner $-54abc$ durch $-9b$ dividirt giebt $+6ac$: weil $-9b$ mit $+6ac$ multiplicirt $-6 . 9abc$ oder $-54abc$ giebt. Das mag für die Division mit einfachen Größen genug sein. Daher wollen wir zur Erklärung der Brüche übergehn, jedoch vorher noch etwas über der Natur der Zahlen in Bezug auf ihre Theiler bemerken.

Kapitel 6.

Von den Eigenschaften der ganzen Zahlen in Bezug auf ihre Theiler.

58. Da wir gesehen haben, daß sich einige Zahlen durch gewisse Divisoren theilen lassen, andere aber nicht, so ist zur Erkenntniß der Zahlen nöthig, diesen Unterschied wohl zu merken, und diejenigen Zahlen, die sich durch irgend einen Divisor theilen lassen, von denjenigen, die sich durch ihn nicht theilen lassen, wohl zu unterscheiden, und zugleich auch den Rest, welcher bei der Division der letzteren übrig bleibt, wohl anzumerken; zu welchem Zwecke wir die Divisoren

2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 u. s. f.

betrachten wollen.

59. Es sei erstlich der Divisor 2. Die Zahlen also, welche sich durch ihn theilen lassen, sind folgende:

2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20 u. s. w.,

welche dann so fort immer um 2 steigen. Diese Zahlen werden sämmtlich gerade Zahlen genannt.

Hingegen die übrigen Zahlen

1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19 u. s. f.,

welche, durch 2 getheilt, stets 1 übrig lassen, werden ungerade Zahlen genannt, und sind also immer um eins größer oder kleiner als die geraden Zahlen. Die geraden Zahlen können nun alle in die allgemeine Formel 2a einbegriffen werden, weil, wenn man für a nach und nach alle Zahlen annimmt, wie

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 u. s. f.,

daraus alle geraden Zahlen entspringen. Hingegen sind alle ungeraden Zahlen in der Formel $2a + 1$ enthalten, weil $2a + 1$ um 1 größer ist, als die gerade Zahl 2a.

60. Zweitens. Es sei der Divisor 3, so sind alle Zahlen, welche sich durch ihn theilen lassen, folgende:

3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24 u. s. w.,

welche durch die Formel 3a dargestellt werden können.

Denn 3a durch 3 dividirt giebt a als Quotienten ohne Rest; die übrigen Zahlen aber, wenn man sie durch 3 theilen will, lassen entweder 1 oder 2 als Rest übrig, und sind also von zweierlei Art. Die, welche 1 übrig lassen, sind folgende:

1, 4, 7, 10, 13, 16, 19 u. s. w.

und sind in der Formel $3a + 1$ enthalten. Die von der andern Art, welche 2 übrig lassen, sind folgende:

2, 5, 8, 11, 14, 17, 20 u. s. w.,

welche in der Formel $3a + 2$ enthalten sind; demnach sind alle Zahlen in den Formeln 3a, $3a + 1$, $3a + 2$ gegeben.

61. Wenn ferner der Divisor 4 ist, so sind alle Zahlen, die sich durch ihn theilen lassen, folgende:

4, 8, 12, 16, 20, 24 u. s. w.,

welche immer um 4 steigen, und in der Formel 4a enthalten sind. Die übrigen Zahlen aber, welche sich durch 4 nicht theilen lassen, lassen entweder 1 als Rest, und sind um 1 größer als jene, nämlich:

1, 5, 9, 13, 17, 21, 25 u. s. w.,

welche folglich in der Formel $4a + 1$ enthalten sind; oder sie lassen 2 als Rest, wie:

2, 6, 10, 14, 18, 22, 26 u. s. w.

und sind in der Formel $4a + 2$ enthalten.

Oder endlich bleibt 3 als Rest übrig, solche Zahlen sind folgende:

3, 7, 11, 15, 19, 23, 27 u. s. w.

und sind in der Formel $4a + 3$ enthalten, so daß alle Zahlen durch eine von diesen vier Formeln:

$4a$, $4a + 1$, $4a + 2$, $4a + 3$

sich ausdrücken lassen.

62. Eben so verhält sich die Sache mit dem Divisor 5, da alle Zahlen, welche sich durch ihn theilen lassen, in der Formel 5a enthalten sind; diejenigen aber, welche sich durch ihn nicht theilen lassen, sind entweder:

$5a + 1$, $5a + 2$, $5a + 3$ oder $5a + 4$,

und so kann man weiter zu allen größern Divisoren fortschreiten.

63. Hiebei kommt nun zu statten, was oben von der Auflösung der Zahlen in ihre einfachen Factoren dargelegt worden, weil jede Zahl, unter deren Factoren sich entweder

2, oder 3, oder 4, oder 5, oder 7,

oder eine andere Zahl befindet, sich auch durch dieselbe theilen läßt. Da z. B. 60 so viel ist, wie $2 . 2 . 3 . 5$, so ist klar, daß sich 60 durch 2, durch 3, und auch durch 5 theilen läßt.

64. Da demnach überhaupt die Formel abcd sich nicht nur durch a und b und c und d, sondern auch durch folgende: ab, ac, ad, bc, bd, cd, ferner durch abc, abd, acd, bcd, und endlich auch durch abcd, das ist durch sich selbst, theilen läßt, so läßt sich gleichfalls 60, das ist $2 . 2 . 3 . 5$, außer den einfachen Zahlen, auch durch die theilen, die aus zwei einfachen zusammengesetzt sind, nämlich durch 4, 6, 10, 15, ferner auch durch die, welche aus dreien bestehen, wie 12, 20, 30, und endlich auch durch 60, d. h. durch sich selbst.

65. Wenn man also eine beliebige Zahl in ihre einfachen Factoren zerlegt hat, so ist es sehr leicht, alle diejenigen Zahlen anzugeben, durch welche sich dieselbe theilen läßt. Denn man braucht nur erstlich jeden von den einfachen Factoren für sich selbst zu nehmen, alsdann je zwei, je drei, je vier, und so fort mit einander zu multiplicieren, bis man auf die gegebene Zahl selbst kommt.

66. Vor allen Dingen ist hier zu merken, daß sich jede Zahl durch 1, so wie auch durch sich selbst theilen läßt; demnach hat jede Zahl wenigstens zwei Theiler oder Divisoren, nämlich 1, und sich selbst; die Zahlen aber, welche außer diesen beiden Theilern keine anderen haben, sind eben diejenigen, welche oben einfache oder Primzahlen genannt worden sind.

Alle zusammengesetzten Zahlen aber haben, außer 1 und sich selbst, noch andere Divisoren, wie aus folgender Tafel zu ersehen ist.

Tafel.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	1 2	1 3	1 2 4	1 5	1 2 3 6	1 7	1 2 4 8	1 3 9	1 2 5 10	1 11	1 2 3 4 6 12	1 13	1 2 7 14	1 3 5 15	1 2 4 8 16	1 17	1 2 3 6 9 18	1 19	1 2 4 5 10 20
1	2	2	3	2	4	2	4	3	4	2	6	2	4	4	5	2	6	2	6
p.	p.	p.		p.		p.				p.		p.				p.		p.	

Unter jeder Zahl sind hier ihre Theiler angegeben; darunter die Anzahl letzterer; p. bezeichnet die Primzahlen.

67. Endlich ist noch zu bemerken, daß 0 als eine Zahl angesehen werden kann, welche sich durch alle möglichen Zahlen theilen läßt; weil, wenn man 0 durch eine beliebige Zahl a theilt, der Quotient immer 0 ist, denn 0 mal a oder 0a ist 0, indem wie wohl zu beachten, jede Zahl, mit 0 multiplicirt, Nichts giebt.

Kapitel 7.

Von den Brüchen überhaupt.

68. Wenn sich eine Zahl, wie z. B. 7, durch eine andere, wie 3, nicht theilen läßt, so ist dies nur so zu verstehen, daß sich der Quotient durch eine ganze Zahl nicht ausdrücken läßt, keineswegs aber, daß es an sich unmöglich sei, sich einen Begriff von dem Quotienten zu machen.

Man darf sich nur eine Linie, die 7 Fuß lang ist, vorstellen, so wird wohl Niemand bezweifeln, daß es möglich ist, diese Linie in drei gleiche Theile zu zerlegen und sich einen Begriff von der Größe eines solchen Theils zu machen.

69. Da man sich nun einen deutlichen Begriff von dem Quotienten, der in solchen Fällen herauskommt, machen kann, obgleich derselbe keine ganze Zahl ist, so werden wir hiedurch zu einer besonderen Art von Zahlen geleitet, welche **Brüche** oder **gebrochene Zahlen** genannt werden.

Also haben wir in obigem Beispiel, in dem 7 durch 3 dividirt werden soll, einen deutlichen Begriff von dem hier entstehenden Quotienten, und man pflegt denselben $\frac{7}{3}$ zu schreiben, indem man den Dividendus oben, den Divisor darunter setzt und beide durch einen Strich trennt.

70. Wenn also auf allgemeine Art die Zahl a durch die Zahl b getheilt werden soll, so wird der Quotient durch $\frac{a}{b}$ angedeutet, welcher Ausdruck ein Bruch genannt wird; daher man sich keinen bessern Begriff von einem solchen Bruch $\frac{a}{b}$ machen kann, als daß man sagt, es werde dadurch der Quotient angegeben, welcher entsteht, wenn man die obere Zahl durch die untere dividirt. Hiebei ist noch zu merken, daß bei allen Brüchen die untere Zahl der **Nenner**, die obere aber der **Zähler** genannt zu werden pflegt.

71. In dem vorher angeführten Bruch $\frac{7}{3}$, welcher sieben Drittel ausgesprochen wird, ist 7 der Zähler, und 3 der Nenner. Eben so heißt dieser Bruch

$\frac{2}{3}$ zwei Drittel, $\frac{3}{4}$ drei Viertel,
$\frac{3}{8}$ drei Achtel, $\frac{12}{100}$ zwölf Hundertel.

Der Bruch $\frac{1}{2}$ wird ein Halbes anstatt ein Zweitel genannt; denn eigentlich ist $\frac{1}{2}$ der Quotient, welcher herauskommt wenn man 1 in zwei gleiche Theile theilt, da dann, wie bekannt, ein solcher Theil ein Halbes heißt.

72. Um die Natur der Brüche recht kennen zu lernen,

wollen wir erstlich den Fall betrachten, in dem die obere Zahl der unteren, oder der Zähler dem Nenner gleich ist, also $\frac{a}{a}$. Weil nun dadurch der Quotient angedeutet wird, der herauskommt, wenn man a durch a dividirt, so ist klar, daß dieser Quotient gerade 1, folglich der Bruch $\frac{a}{a}$ so viel wie 1, oder ein Ganzes ist. Daher sind folgende Brüche

$\frac{2}{2}, \frac{3}{3}, \frac{4}{4}, \frac{5}{5}, \frac{6}{6}, \frac{7}{7}, \frac{8}{8}$ u. s. f.

alle einander gleich, und jeder derselben ist so viel als Eins, oder ein Ganzes.

73. Da nun jeder Bruch, dessen Zähler dem Nenner gleich ist, Eins beträgt, so sind alle Brüche, deren Zähler kleiner sind als ihre Nenner, weniger als Eins. Denn wenn ich eine kleinere Zahl durch eine größere dividiren soll, so kommt weniger als 1 heraus. Wenn z. B. eine Linie von zwei Fuß in drei gleiche Theile getheilt werden soll, so wird ein Theil unstreitig kleiner sein als ein Fuß, daher offenbar, daß $\frac{2}{3}$ weniger als 1, und dies eben deswegen, weil der Zähler 2 kleiner ist als der Nenner 3.

74. Wenn hingegen der Zähler größer ist, als der Nenner, so ist der Werth des Bruchs größer als Eins. Also ist $\frac{3}{2}$ mehr als 1, weil $\frac{3}{2}$ so viel ist als $\frac{2}{2}$ und noch $\frac{1}{2}$. Nun aber ist $\frac{2}{2}$ so viel als 1, folglich ist $\frac{3}{2}$ so viel als $1\frac{1}{2}$, nämlich ein Ganzes und noch ein Halbes. Eben so ist

$\frac{4}{3}$ so viel als $1\frac{1}{3}$; ferner $\frac{5}{3}$ so viel als $1\frac{2}{3}$;
weiter $\frac{7}{3}$ so viel als $2\frac{1}{3}$.

Und überhaupt darf man in diesen Fällen nur die obere Zahl durch die untere dividiren, und zum Quotienten noch einen Bruch hinzusetzen, dessen Zähler der Rest, der Nenner aber der Divisor ist. Also für den Bruch $\frac{43}{12}$ dividirt man 43 durch 12 und bekommt 3 als Quotienten und 7 als Rest, daher ist $\frac{43}{12}$ so viel als $3\frac{7}{12}$.

75. Hieraus sieht man, wie Brüche, deren Zähler größer sind als ihre Nenner, in zwei Glieder aufgelöst werden

können, von denen das erste eine ganze Zahl ausmacht, das andere aber einen Bruch, dessen Zähler kleiner ist, als sein Nenner. Aus diesem Grunde werden solche Brüche, deren Zähler größer ist als der Nenner, **unächte Brüche** genannt, weil sie Eins, oder mehrere Ganze in sich begreifen. Hingegen sind die **ächten Brüche** solche, deren Zähler kleiner sind als die Nenner, und deren Werth folglich weniger ist als Eins, oder weniger als ein Ganzes.

76. Man pflegt sich die Natur der Brüche noch auf eine andere Art vorzustellen, durch welche die Sache noch mehr erläutert wird. Wenn man z. B. den Bruch $\frac{3}{4}$ betrachtet, so ist klar, daß derselbe 3 mal größer ist als $\frac{1}{4}$. Nun aber besteht die Bedeutung des Bruches $\frac{1}{4}$ darin, daß, wenn man 1 in 4 gleiche Theile theilt, ein solcher Theil den Werth desselben angiebt; wenn man daher solcher Theile drei zusammennimmt, so erhält man den Werth des Bruchs $\frac{3}{4}$.

Eben so kann man jeden andern Bruch betrachten, z. B. $\frac{7}{12}$; wenn man 1 in 12 gleiche Theile theilt, so machen 7 solcher Theile den Werth des vorgelegten Bruchs aus.

77. Aus dieser Vorstellung sind auch die oben erwähnten Namen des Zählers und Nenners entstanden. Denn weil in dem vorigen Bruch $\frac{7}{12}$ die untere Zahl 12 angiebt, daß 1 in 12 gleiche Theile getheilt werden soll, und also diese Theile benennt, so wird dieselbe füglich der Nenner genannt.

Da aber die obere Zahl, nämlich 7, angiebt, daß für den Werth des Bruchs 7 dergleichen Theile zusammen genommen werden sollen, und also dieselben **zählt**, so wird die obere Zahl der **Zähler** genannt.

78. Betrachten wir nun die Brüche, deren Zähler 1 ist, als solche, die den Grund der übrigen enthalten, weil man leicht begreift, was $\frac{3}{4}$ sind, wenn man weiß, was $\frac{1}{4}$ ist. Derartige Brüche sind folgende:

$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{1}{8}, \frac{1}{9}, \frac{1}{10}, \frac{1}{11}, \frac{1}{12}, \frac{1}{13}$ u. s. w.

Hiebei ist zu beachten, daß diese Brüche immer kleiner werden; denn in je mehr Theile ein Ganzes getheilt wird, desto kleiner werden auch die Theile; also ist $\frac{1}{100}$ kleiner als $\frac{1}{10}$, und $\frac{1}{1000}$ kleiner als $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{10000}$ kleiner als $\frac{1}{1000}$, und $\frac{1}{100000}$ kleiner als $\frac{1}{10000}$.

79. Hieraus sieht man nun, daß je mehr bei solchen Brüchen der Nenner vergrößert wird, der Werth derselben um so viel kleiner werden muß. Hiebei entsteht nun die Frage, ob der Nenner nicht so groß angenommen werden könne, daß der Bruch gänzlich verschwinde und zu Nichts werde? Dies aber wird mit Recht verneint. Denn in so viel gleiche Theile man auch immer Eins, z. B. die Länge eines Fußes, theilen mag, so behalten die Theile doch noch immer eine gewisse Größe, und sind folglich nicht Nichts.

80. Es ist zwar wahr, daß, wenn man die Länge eines Fußes in mehr als 1000 gleiche Theile theilt, die Theile fast nicht mehr in die Augen fallen. Sobald man sie aber durch ein gutes Vergrößerungsglas betrachtet, so erscheinen dieselben so groß, daß sie leicht von neuem in 100 und noch mehrere Theilchen getheilt werden können.

Hier ist aber die Rede keineswegs von dem, was wirklich verrichtet werden kann, und was noch in die Augen fällt, sondern vielmehr von dem, was an sich möglich ist. Und da ist allerdings gewiß, daß, so groß auch immer der Nenner angenommen werden mag, der Bruch dennoch nicht gänzlich verschwindet, oder in Nichts, oder 0 verwandelt wird.

81. Weil man nun, so sehr auch der Nenner vermehrt würde, niemals gänzlich zu Nichts kommt, sondern diese Brüche noch immer einige Größe behalten, und also die obengesetzte Reihe der Brüche immer weiter ohne Ende fortgesetzt werden kann, so pflegt man zu sagen, daß der Nenner unendlich groß sein müßte, wenn endlich der Bruch

zu 0 oder Nichts werden sollte. Denn das Wort **unendlich** will hier eben so viel sagen, als daß man mit dem genannten Bruche niemals zu Ende kommt.

82. Um nun diesen Begriff, welcher allerdings fest gegründet ist, darzustellen, bedient man sich des Zeichens ∞, welches eine unendlich große Zahl andeutet; und daher kann man sagen, daß der Bruch $\frac{1}{\infty}$ ein wirkliches Nichts sei, eben deswegen, weil ein solcher Bruch niemals Nichts werden kann, so lange der Nenner noch nicht ins Unendliche vermehrt worden ist.

83. Dieser Begriff des Unendlichen ist um so sorgfältiger zu erfassen, weil derselbe aus den ersten Gründen unserer Erkenntniß hergeleitet worden ist, und in dem Folgenden von der größten Bedeutung sein wird. Es lassen sich schon hier daraus wichtige Schlüsse ziehen, welche unsere Aufmerksamkeit fesseln. Der Bruch $\frac{1}{\infty}$ zeigt den Quotienten an, wenn man den Dividendus 1 durch den Divisor ∞ dividirt. Nun wissen wir schon, daß, wenn man den Dividendus 1 durch den Quotienten, welcher $\frac{1}{\infty}$ oder 0 ist, wie wir gesehen haben, dividirt, alsdann der Divisor, nämlich ∞, herauskommt; daher erhalten wir einen neuen Begriff von dem Unendlichen, nämlich daß dasselbe herauskommt, wenn man 1 durch 0 dividirt. Folglich kann man mit Grund sagen, daß 1 durch 0 dividirt eine unendlich große Zahl oder ∞ sei.

84. Hier ist es nöthig, noch einen gewöhnlichen Irrthum aus dem Wege zu räumen, der in der Behauptung besteht, ein unendlich Großes könne weiter nicht vermehrt werden. Diese Behauptung aber kann gegenüber obigen richtigen Gründen nicht bestehen.

Denn da $\frac{1}{0}$ eine unendlich große Zahl bedeutet, und $\frac{2}{0}$ unstreitig zweimal so groß ist, so ist klar, daß auch eine unendlich große Zahl noch 2 mal größer werden kann.

Kapitel 8.

Von den Eigenschaften der Brüche.

85. Wie wir oben (72) gesehen haben, daß jeder dieser Brüche,

$$\tfrac{2}{2},\ \tfrac{3}{3},\ \tfrac{4}{4},\ \tfrac{5}{5},\ \tfrac{6}{6},\ \tfrac{7}{7},\ \tfrac{8}{8} \text{ u. s. w.,}$$

ein Ganzes ausmacht und folglich alle unter einander gleich sind, so sind auch folgende Brüche,

$$\tfrac{2}{1},\ \tfrac{4}{2},\ \tfrac{6}{3},\ \tfrac{8}{4},\ \tfrac{10}{5},\ \tfrac{12}{6} \text{ u. s. w.,}$$

einander gleich, weil jeder derselben zwei Ganze ausmacht; denn es giebt der Zähler eines jeden, durch seinen Nenner dividirt, 2. Eben so sind alle diese Brüche,

$$\tfrac{3}{1},\ \tfrac{6}{2},\ \tfrac{9}{3},\ \tfrac{12}{4},\ \tfrac{15}{5},\ \tfrac{18}{6} \text{ u. s. w.,}$$

einander gleich, weil der Werth eines jeden 3 beträgt.

86. In gleicher Weise läßt sich auch der Werth jedes Bruchs in unendlich vielerlei Arten darstellen. Denn wenn man sowohl den Zähler als auch den Nenner eines Bruchs mit derselben Zahl, die nach Belieben genommen werden kann, multiplicirt, so behält der Bruch immer denselben Werth. Also sind alle diese Brüche,

$$\tfrac{1}{2},\ \tfrac{2}{4},\ \tfrac{3}{6},\ \tfrac{5}{10},\ \tfrac{6}{12},\ \tfrac{7}{14},\ \tfrac{8}{16},\ \tfrac{9}{18},\ \tfrac{10}{20} \text{ u. s. w.,}$$

einander gleich, und jeder so viel als $\frac{1}{2}$. Eben so sind auch alle diese Brüche,

$$\tfrac{1}{3},\ \tfrac{2}{6},\ \tfrac{3}{9},\ \tfrac{4}{12},\ \tfrac{5}{15},\ \tfrac{6}{18},\ \tfrac{7}{21},\ \tfrac{8}{24},\ \tfrac{9}{27},\ \tfrac{10}{30} \text{ u. s. w.,}$$

einander gleich, und jeder ist so viel als $\frac{1}{3}$.

Ferner sind auch diese,

$$\tfrac{2}{3},\ \tfrac{4}{6},\ \tfrac{6}{9},\ \tfrac{8}{12},\ \tfrac{10}{15},\ \tfrac{12}{18},\ \tfrac{14}{21},\ \tfrac{16}{24} \text{ u. s. w.,}$$

einander gleich; weswegen der allgemeine Bruch $\frac{a}{b}$ auf folgende Arten dargestellt werden kann:

$$\frac{a}{b},\ \frac{2a}{2b},\ \frac{3a}{3b},\ \frac{4a}{4b},\ \frac{5a}{5b},\ \frac{6a}{6b} \text{ u. s. w.,}$$

von denen jeder so groß ist wie der erste $\frac{a}{b}$.

87. Um dies zu beweisen, darf man nur für den Werth des Bruchs $\frac{a}{b}$ einen besondern Buchstaben, etwa c, schreiben,

dergestalt, daß c der Quotient sei, wenn man a durch b dividirt. Nun ist aber gezeigt worden (46), daß, wenn man den Quotienten c mit dem Divisor b multiplicirt, der Dividendus herauskommen muß.

Da nun c mit b multiplicirt a giebt, so wird c mit 2b multiplicirt 2a, und c mit 3b multiplicirt 3a, also überhaupt c mit mb multiplicirt ma geben.

Macht man hieraus wieder ein Divisionsexempel und dividirt das Product ma durch den einen Factor mb, so muß der Quotient dem andern Factor c gleich sein. Nun aber giebt ma durch mb dividirt den Bruch $\frac{ma}{mb}$, dessen Werth folglich c ist. Weil aber c dem Werth des Bruchs $\frac{a}{b}$ gleich ist, so ist offenbar, daß auch der Bruch $\frac{ma}{mb}$ dem Bruch $\frac{a}{b}$ gleich ist, man mag statt m eine Zahl annehmen, welche man wolle.

88. Weil nun jeder Bruch durch unendlich viele Formen von gleichem Werthe dargestellt werden kann, so ist unstreitig derjenige am leichtesten zu begreifen, welcher aus den kleinsten Zahlen besteht; da z. B. statt $\frac{2}{3}$ jeder von den folgenden Brüchen, $\frac{4}{6}$, $\frac{6}{9}$, $\frac{8}{12}$, $\frac{10}{15}$, $\frac{12}{18}$ u. s. w., nach Willkühr gesetzt werden könnte, so wird wohl Niemand zweifeln, daß die Form $\frac{2}{3}$ die leicht faßlichste sei. Hiebei kommt es nun in Frage, wie man einen Bruch, der nicht in seinen kleinsten Zahlen ausgedrückt ist, z. B. $\frac{8}{12}$, in seine kleinste Form, nämlich $\frac{2}{3}$, bringen kann.

89. Diese Frage wird leicht zu beantworten sein, wenn man bedenkt, daß jeder Bruch seinen Werth behält, wenn Zähler und Nenner mit derselben Zahl multiplicirt wird. Denn daraus folgt, daß, wenn man auch den Zähler und Nenner eines Bruchs durch dieselbe Zahl dividirt, der Bruch immer denselben Werth behält. Dieses wird noch leichter aus der allgemeinen Form $\frac{na}{nb}$ ersichtlich.

Denn wenn man so wohl den Zähler na als auch den Nenner nb durch die Zahl n dividirt, so kommt der Bruch $\frac{a}{b}$ heraus, welcher jenem gleich ist, wie schon früher (87) gezeigt worden ist.

90. Um nun einen gegebenen Bruch in seine kleinste Form zu bringen, muß man solche Zahlen finden, durch welche sich so wohl der Zähler, als auch der Nenner theilen läßt. Eine solche Zahl nun wird der **gemeinschaftliche Theiler** genannt, und so lange man für den Zähler und Nenner einen gemeinschaftlichen Theiler angeben kann, so lange läßt sich der Bruch in eine kleinere Form bringen; wenn aber kein gemeinschaftlicher Theiler, außer 1, weiter auffindbar ist, so ist der Bruch schon in seine kleinste Form gebracht.

91. Um dies zu erläutern, wollen wir den Bruch $\frac{48}{120}$ betrachten. Hier sieht man sogleich, daß sich Zähler und Nenner durch 2 theilen lassen, woraus der Bruch $\frac{24}{60}$ entsteht. Diese beiden lassen sich nun noch einmal durch 2 theilen, und giebt die Theilung den Bruch $\frac{12}{30}$, wo 2 abermals ein gemeinschaftlicher Theiler ist und $\frac{6}{15}$ herauskommen. Hier ist aber klar, daß sich der Zähler und Nenner noch durch 3 theilen lassen, woraus der Bruch $\frac{2}{5}$ hervorgeht, welcher dem zuerst gegebenen gleich ist, und sich in der kleinsten Form befindet, weil die Zahlen 2 und 5 weiter keinen gemeinschaftlichen Theiler haben außer 1.

92. Diese Eigenschaft der Brüche, daß, wenn man Zähler und Nenner mit derselben Zahl entweder multiplicirt oder dividirt, der Werth des Bruchs unverändert bleibt, ist von der größten Wichtigkeit. Die ganze Lehre von den Brüchen beruht darauf. Es lassen sich z. B. zwei Brüche nicht gut addiren, oder von einander subtrahiren, ehe man nicht dieselben in andere Formen gebracht, deren Nenner einander gleich sind; wovon im folgenden Kapitel gehandelt werden soll.

93. Hier wollen wir nur noch bemerken, daß alle ganzen Zahlen in Form eines Bruchs dargestellt werden können. So ist z. B. 6 so viel als $\frac{6}{1}$, weil 6 durch 1 dividirt auch 6 giebt. Und daher entstehen noch diese Formen

$$\frac{12}{2},\ \frac{18}{3},\ \frac{24}{4},\ \frac{36}{6} \text{ u. s. w.,}$$

welche alle denselben Werth, nämlich 6, haben.

Kapitel 9.

Von der Addition und Subtraction der Brüche.

94. Wenn die Brüche gleiche Nenner haben, so ist es leicht, sie zu addiren und zu subtrahiren, indem $\frac{2}{7}+\frac{3}{7}$ so viel ist als $\frac{5}{7}$, und $\frac{4}{7}-\frac{2}{7}$ so viel als $\frac{2}{7}$ ist. In diesem Fall verrichtet man die Addition oder Subtraction bloß an den Zählern, und schreibt den gemeinschaftlichen Nenner darunter. Also macht

$\frac{7}{100}+\frac{9}{100}-\frac{12}{100}-\frac{15}{100}+\frac{20}{100}$ so viel als $\frac{9}{100}$;
$\frac{24}{50}-\frac{7}{50}-\frac{12}{50}+\frac{31}{50}$ ist so viel als $\frac{36}{50}$ oder $\frac{18}{25}$;
$\frac{16}{20}-\frac{3}{20}-\frac{11}{20}+\frac{14}{20}$ ist so viel als $\frac{16}{20}$ oder $\frac{4}{5}$;

eben so auch $\frac{1}{3}+\frac{2}{3}$ macht $\frac{3}{3}$ oder 1, das ist ein Ganzes, und $\frac{2}{4}-\frac{3}{4}+\frac{1}{4}$ macht $\frac{0}{4}$, das ist Nichts oder 0.

95. Wenn aber die Brüche nicht gleiche Nenner haben, so ist es stets möglich, dieselben in andere von gleichem Werthe zu verwandeln, deren Nenner gleich sind. Also wenn die Brüche $\frac{1}{2}$ und $\frac{1}{3}$ gegeben sind und addirt werden sollen, so ist zu erwägen, daß $\frac{1}{2}$ so viel ist als $\frac{3}{6}$, und $\frac{1}{3}$ so viel als $\frac{2}{6}$. Wir haben also anstatt der vorigen die Brüche $\frac{3}{6}+\frac{2}{6}$, welche $\frac{5}{6}$ geben. Ferner für $\frac{1}{2}-\frac{1}{3}$ liegt es ebenso, nur daß das Zeichen minus dazwischen steht, also $\frac{3}{6}-\frac{2}{6}$ giebt $\frac{1}{6}$. Es seien ferner die Brüche $\frac{3}{4}+\frac{5}{8}$ gegeben. Weil $\frac{3}{4}$ so viel ist als $\frac{6}{8}$, so setzen wir an derselben Stelle $\frac{6}{8}$, und $\frac{5}{8}+\frac{6}{8}$ giebt $\frac{11}{8}$ oder $1\frac{3}{8}$. Wenn man fragt, wie viel $\frac{1}{3}$ und $\frac{1}{4}$ zusammen betragen, schreibe man statt derselben nur $\frac{4}{12}$ und $\frac{3}{12}$; dann kommt $\frac{7}{12}$ heraus.

96. Wenn mehr als zwei Brüche gegeben sind, wie: $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{5}{6}$, welche unter gleiche Nenner gebracht werden

sollen, so kommt es darauf an, eine Zahl zu finden, welche sich durch alle diese Nenner theilen läßt. Eine solche ist nun 60, welche der **gemeinschaftliche Nenner** heißt. Also werden wir haben anstatt $\frac{1}{2}$ diesen $\frac{30}{60}$, anstatt $\frac{2}{3}$ diesen $\frac{40}{60}$, anstatt $\frac{3}{4}$ diesen $\frac{45}{60}$, anstatt $\frac{4}{5}$ diesen $\frac{48}{60}$, anstatt $\frac{5}{6}$ diesen $\frac{50}{60}$. Sollen nun diese Brüche, $\frac{30}{60}$, $\frac{40}{60}$, $\frac{45}{60}$, $\frac{48}{60}$, $\frac{50}{60}$, addirt werden, so betragen dieselben zusammen $\frac{213}{60}$, oder 3 Ganze und $\frac{33}{60}$, oder $3\frac{11}{20}$.

97. Das Verfahren besteht also darin, daß man zwei Brüche von ungleichen Nennern in andere verwandelt, deren Nenner einander gleich sind. Um dieses auf allgemeine Art auszuführen, seien die gegebenen Brüche $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$. Nun multiplicire man den ersten Bruch oben und unten mit d, so bekommt man $\frac{ad}{bd}$, welcher Bruch so groß ist wie $\frac{a}{b}$; den andern Bruch multiplicire man wie den ersten oben und unten mit b, so bekommt man anstatt desselben $\frac{bc}{bd}$, und nunmehr sind also die Nenner gleich; die Summe aber derselben ist $\frac{ad+bc}{bd}$ und ihre Differenz $\frac{ad-bc}{bd}$. Wenn also die Brüche, $\frac{5}{8}$ und $\frac{7}{9}$, vorgelegt sind, so bekommt man anstatt derselben $\frac{45}{72}$ und $\frac{56}{72}$, deren Summe $\frac{101}{72}$, die Differenz aber $\frac{11}{72}$ beträgt.

98. Hier pflegt auch die Frage vorzukommen, welcher von zwei gegebenen Brüchen größer oder kleiner sei als der andere. Z. B., welcher von den Brüchen $\frac{2}{3}$ und $\frac{5}{7}$ ist der größere? Zur Entscheidung braucht man nur die beiden Brüche unter gleiche Nenner zu bringen, und da bekommt man für den ersteren $\frac{14}{21}$ und für den andern $\frac{15}{21}$, woraus hervorgeht, daß $\frac{5}{7}$ größer ist als $\frac{2}{3}$, und zwar um $\frac{1}{21}$. Wenn ferner diese beiden Brüche gegeben sind, $\frac{3}{5}$ und $\frac{5}{8}$, so bekommt man statt ihrer die Brüche $\frac{24}{40}$ und $\frac{25}{40}$, woraus erhellt, daß $\frac{5}{8}$ mehr ist als $\frac{3}{5}$, aber nur um $\frac{1}{40}$.

99. Wenn ein Bruch von einer ganzen Zahl abgezogen werden soll, wie $\frac{2}{3}$ von 1, so darf man nur $\frac{3}{3}$ anstatt 1 schreiben, da man dann sogleich sieht, daß $\frac{1}{3}$ übrig bleibt. Eben so $\frac{5}{12}$ von 1 abgezogen giebt $\frac{7}{12}$. Soll man aber $\frac{3}{4}$ von 2 abziehen, so schreibe man für 2 nur 1 und $\frac{4}{4}$, da denn 1 und $\frac{1}{4}$ übrig bleibt. Uebrigens ist es üblich, einen Bruch, der zu einer ganzen Zahl addirt werden soll, dicht hinter diese zu schreiben, also $\frac{2}{3}$ zu 6 addirt, giebt $6\frac{2}{3}$.

100. Bisweilen geschieht es auch, daß zwei oder mehrere Brüche zusammen addirt mehr als ein Ganzes ausmachen, welches sodann bemerkt werden muß, z. B. $\frac{2}{3}+\frac{3}{4}$ oder $\frac{8}{12}+\frac{9}{12}$ giebt $\frac{17}{12}$, welches so viel ist als $1\frac{5}{12}$. Eben so, wenn mehrere ganze Zahlen und Brüche addirt werden sollen, addirt man erst die Brüche, und wenn ihre Summe ein oder mehr Ganze enthält, so werden diese alsdann zu den ganzen Zahlen addirt; wären z. B. $3\frac{1}{2}$ und $2\frac{2}{3}$ zu addiren, so machen erstlich die Brüche $\frac{3}{6}$ und $\frac{4}{6}$ zusammen $\frac{7}{6}$, oder $1\frac{1}{6}$, welches mit den Ganzen 6 und $\frac{1}{6}$ ausmacht.

Kapitel 10.

Von der Multiplication und Division.

101. Wenn ein Bruch mit einer ganzen Zahl multiplicirt werden soll, so multiplicirt man damit nur den Zähler, und läßt den Nenner unverändert; also

2 mal $\frac{1}{2}$ macht $\frac{2}{2}$, oder ein Ganzes;
2 mal $\frac{1}{3}$ macht $\frac{2}{3}$; ferner 3 mal $\frac{1}{6}$ macht $\frac{3}{6}$, oder $\frac{1}{2}$;
4 mal $\frac{5}{12}$ macht $\frac{20}{12}$, oder 1 und $\frac{8}{12}$, oder $1\frac{2}{3}$.

Hieraus folgt die Regel, daß **ein Bruch mit einer ganzen Zahl multiplicirt wird, wenn man entweder den Zähler damit multiplicirt oder auch den Nenner durch die ganze Zahl dividirt.** Das letztere Verfahren, wenn es angeht, kürzt die Rechnung ab. Soll z. B. $\frac{8}{9}$ mit 3 multiplicirt werden, so kommt, wenn der Zähler mit der ganzen Zahl multiplicirt wird, $\frac{24}{9}$ heraus, welches so viel ist als $\frac{8}{3}$; lasse ich aber den Zähler

unverändert und dividire den Nenner 9 durch 3, so bekomme ich auch $\frac{8}{3}$, das ist 2 und $\frac{2}{3}$. Ebenso giebt $\frac{13}{24}$ mit 6 multiplicirt $\frac{13}{4}$ oder $3\frac{1}{4}$.

102. Ueberhaupt also, wenn ein Bruch $\frac{a}{b}$ mit c multiplicirt werden soll, so bekommt man $\frac{ac}{b}$. Hiebei ist zu merken, daß, wenn die ganze Zahl gerade dem Nenner gleich ist, alsdann das Product dem Zähler gleich wird, also:

$\frac{1}{2}$ zweimal genommen giebt 1,
$\frac{2}{3}$ mit 3 multiplicirt giebt 2,
$\frac{3}{4}$ mit 4 multiplicirt giebt 3,

und allgemein, wenn der Bruch $\frac{a}{b}$ mit der Zahl b multiplicirt wird, so ist das Product a, wovon der Grund schon oben (46) gezeigt worden; denn da $\frac{a}{b}$ den Quotienten ausdrückt, wenn der Dividendus a durch den Divisor b dividirt wird, und zugleich bewiesen ist, daß der Quotient mit dem Divisor multiplicirt den Dividendus geben muß, so ist klar, daß $\frac{a}{b}$ mit b multiplicirt die Zahl a giebt.

103. Da wir nun gezeigt haben, wie man einen Bruch mit einer ganzen Zahl multiplicirt, so wollen wir nun darlegen, wie man einen Bruch durch eine ganze Zahl dividirt, ehe wir die Multiplication eines Bruchs mit einem Bruche lehren. Es ist klar, daß, wenn ich den Bruch $\frac{2}{3}$ durch 2 dividiren soll, $\frac{1}{3}$ herauskommt, ebenso wie in dem Fall, da $\frac{6}{7}$ durch 3 getheilt werden sollen, $\frac{2}{7}$ herauskommen. Hieraus erhellt, **daß man nur den Zähler durch die ganze Zahl theilen muß, während der Nenner unverändert bleibt.** Also:

$\frac{12}{25}$ durch 2 dividirt giebt $\frac{6}{25}$ und
$\frac{12}{25}$ durch 3 dividirt giebt $\frac{4}{25}$ und
$\frac{12}{25}$ durch 4 dividirt giebt $\frac{3}{25}$ u. s. w.

104. Die Sache hat also keine Schwierigkeit, im Fall sich nur der Zähler durch die angegebene Zahl theilen läßt.

Wenn aber dieses nicht angeht, so ist zu bemerken, daß man den Bruch in unendlich viele andere Formen verwandeln kann, unter welchen sich gewiß solche finden müssen, deren Zähler sich durch die gegebene Zahl theilen lassen. Also wenn $\frac{3}{4}$ durch 2 getheilt werden soll, verwandelt man diesen Bruch in $\frac{6}{8}$, so giebt es, wenn er durch 2 dividirt wird, $\frac{3}{8}$.

Auf allgemeine Art, wenn der Bruch $\frac{a}{b}$ durch c dividirt werden soll, verwandelt man denselben in diesen, $\frac{ac}{bc}$, dessen Zähler ac durch c dividirt a giebt, also ist der gesuchte Quotient $\frac{a}{bc}$.

105. Hieraus ersehen wir, daß, wenn ein Bruch, wie $\frac{a}{b}$, durch eine ganze Zahl c dividirt werden soll, man nur nöthig hat, den Nenner b mit dieser ganzen Zahl zu multipliciren und den Zähler unverändert zu lassen. Also, $\frac{5}{8}$ durch 3 dividirt giebt $\frac{5}{24}$, und $\frac{9}{7}$ durch 5 dividirt giebt $\frac{9}{35}$. Wenn sich aber der Zähler selbst durch eine ganze Zahl theilen läßt, so wird die Rechnung leichter. Also $\frac{9}{16}$ durch 3 getheilt giebt $\frac{3}{16}$. Nach jener Art aber $\frac{9}{48}$. Doch ist dieser Bruch so viel als jener $\frac{3}{16}$. Denn 3 mal 3 ist 9, und 3 mal 16 ist 48.

106. Nun sind wir im Stande zu zeigen, wie ein Bruch $\frac{a}{b}$ mit einem andern Bruch $\frac{c}{d}$ multiplicirt werden muß. Man darf nur bedenken, daß $\frac{c}{d}$ so viel ist als c getheilt durch d, und also braucht man nur den Bruch $\frac{a}{b}$ erstlich mit c zu multipliciren, da denn $\frac{ac}{b}$ herauskommt; hierauf durch d zu dividiren, worauf sich denn $\frac{ac}{bd}$ ergiebt; und hieraus entspringt die Regel, daß, um zwei Brüche mit einander zu multipliciren, man nur nöthig

hat, erstlich die Zähler, und alsdann auch die Nenner besonders mit einander zu multipliciren.

Also: $\frac{1}{2}$ mit $\frac{2}{3}$ multiplicirt giebt $\frac{2}{6}$ oder $\frac{1}{3}$; ferner
$\frac{2}{3}$ mit $\frac{4}{5}$ multiplicirt giebt $\frac{8}{15}$; und
$\frac{3}{4}$ mit $\frac{5}{12}$ multiplicirt giebt $\frac{15}{48}$ oder $\frac{5}{16}$ u. s. w.

107. Nun bleibt noch übrig zu zeigen, wie ein Bruch durch einen andern Bruch dividirt werden muß; wobei erstlich zu merken, daß, wenn die Brüche gleiche Nenner haben, die Division nur an den Zählern verrichtet wird: weil z. B. $\frac{3}{12}$ in $\frac{9}{12}$ eben so viel mal enthalten ist, als 3 in 9, das ist 3 mal. Daher, wenn $\frac{8}{12}$ durch $\frac{9}{12}$ dividirt werden soll, darf man nur 8 durch 9 dividiren, das giebt $\frac{8}{9}$. Ferner $\frac{6}{20}$ in $\frac{18}{20}$ geht 3 mal; $\frac{7}{100}$ in $\frac{49}{100}$ geht 7 mal; $\frac{6}{25}$ durch $\frac{7}{25}$ giebt $\frac{6}{7}$; eben so $\frac{3}{7}$ durch $\frac{4}{7}$ giebt $\frac{3}{4}$.

108. Wenn aber die Brüche nicht gleiche Nenner haben, so weiß man, wie dieselben auf gleiche Nenner zu bringen sind, z. B. man soll den Bruch $\frac{a}{b}$ durch $\frac{c}{d}$ dividiren, so bringe man erstlich diese Brüche auf gleiche Nenner, und da bekommt man den Bruch $\frac{ad}{bd}$ durch $\frac{bc}{bd}$ zu dividiren, wo dann eben so viel herauskommen muß, als wenn man den ersten Zähler ad durch den letzteren bc dividirt. Folglich wird der gesuchte Quotient $\frac{ad}{bc}$ sein.

Hieraus entspringt diese Regel: Man muß den Zähler des Dividendus mit dem Nenner des Divisors, und den Nenner des Dividendus mit dem Zähler des Divisors multipliciren, so wird jenes Product den Zähler, und dieses den Nenner als Quotienten geben.

109. Wenn also $\frac{5}{8}$ durch $\frac{2}{3}$ dividirt werden soll, so bekommt man nach dieser Regel $\frac{15}{16}$ als Quotienten. Wenn ferner $\frac{3}{4}$ durch $\frac{1}{2}$ dividirt werden soll, so bekommt man $\frac{6}{4}$ oder $\frac{3}{2}$, das ist 1 und $\frac{1}{2}$. Ferner wenn durch $\frac{5}{6}$ der Bruch $\frac{25}{48}$ dividirt werden soll, so bekommt man $\frac{150}{240}$ oder $\frac{5}{8}$.

110. Diese Regel für die Division wird bequemer auf folgende Art vorgetragen: Man kehrt den Bruch, durch welchen dividirt werden soll, um, indem man seinen Nenner oben, und seinen Zähler unten schreibt, und multiplicirt den Bruch, welcher dividirt werden soll, mit diesem umgekehrten Bruch. Alsdann erhält man den gesuchten Quotienten. Also $\frac{3}{4}$ durch $\frac{1}{2}$ dividirt, ist eben so viel als $\frac{3}{4}$ mit $\frac{2}{1}$ multiplicirt, woraus kommt $\frac{6}{4}$ oder $1\frac{1}{2}$. Eben so $\frac{5}{8}$ durch $\frac{2}{3}$ dividirt ist eben so viel als $\frac{5}{8}$ mit $\frac{3}{2}$ multiplicirt, woraus $\frac{15}{16}$ hervorgeht; ferner $\frac{25}{48}$ durch $\frac{5}{6}$ dividirt, giebt eben so viel als $\frac{25}{48}$ mit $\frac{6}{5}$ multiplicirt, also $\frac{150}{240}$ oder $\frac{5}{8}$.

Man sieht daher überhaupt, daß durch den Bruch $\frac{1}{2}$ dividiren eben so viel ist, als mit $\frac{2}{1}$, das ist 2, multipliciren; und durch $\frac{1}{3}$ dividiren ist eben so viel als mit $\frac{3}{1}$, das ist mit 3, multipliciren.

111. Wenn daher die Zahl 100 durch $\frac{1}{2}$ dividirt werden soll, so giebt es 200; und 1000 durch $\frac{1}{3}$ dividirt, giebt 3000. Wenn ferner 1 durch $\frac{1}{1000}$ dividirt werden soll, so kommt 1000 heraus; und 1 durch $\frac{1}{100000}$ dividirt, giebt 100000; woraus man begreifen kann, daß eine Division, die durch 0 geschieht, unendlich viel geben muß, weil, wenn man 1 durch diesen kleinen Bruch $\frac{1}{1000000000}$ dividirt, die große Zahl 1000000000 herauskommt.

112. Wenn ein Bruch durch sich selbst dividirt werden soll, so versteht es sich von selbst, daß der Quotient 1 ist, weil jede Zahl durch sich selbst dividirt 1 giebt; eben dieses erweiset auch unsere Regel. Wenn z. B. $\frac{3}{4}$ durch $\frac{3}{4}$ dividirt werden soll, so multiplicirt man $\frac{3}{4}$ mit $\frac{4}{3}$, da dann $\frac{12}{12}$, das ist 1, herauskommt. Und wenn $\frac{a}{b}$ durch $\frac{a}{b}$ dividirt werden soll, so multiplicirt man $\frac{a}{b}$ mit $\frac{b}{a}$, da dann $\frac{ab}{ab}$, das ist 1, herauskommt.

113. Es erübrigt noch, einen Ausdruck zu erklären,

welcher häufig gebraucht wird. Fragt man z. B., was die Hälfte von $\frac{3}{4}$ sei, so will das nur sagen, daß man $\frac{3}{4}$ mit $\frac{1}{2}$ multipliciren soll. Eben so, wenn man fragt, was $\frac{2}{3}$ von $\frac{5}{8}$ sei, so muß man $\frac{5}{8}$ mit $\frac{2}{3}$ multipliciren, da dann $\frac{10}{24}$ herauskommt, und $\frac{3}{4}$ von $\frac{9}{16}$ ist eben so viel als $\frac{9}{16}$ mit $\frac{3}{4}$ multiplicirt was $\frac{27}{64}$ beträgt.

114. Endlich ist hier wegen der Zeichen + und — eben das zu bemerken, was früher bei den ganzen Zahlen gesagt worden ist. Also: $+\frac{1}{2}$ mit $-\frac{1}{3}$ multiplicirt giebt $-\frac{1}{6}$; und $-\frac{2}{3}$ mit $-\frac{4}{5}$ multiplicirt giebt $+\frac{8}{15}$. Ferner $-\frac{5}{8}$ durch $+\frac{2}{3}$ dividirt giebt $-\frac{15}{16}$; und $-\frac{3}{4}$ durch $-\frac{3}{4}$, giebt $+\frac{12}{12}$ oder + 1.

Kapitel 11.

Von den Quadratzahlen.

115. Wenn eine Zahl mit sich selbst multiplicirt wird, so wird das Product ein Quadrat genannt, so wie aus diesem Grunde die Zahl, aus der es entstanden, seine Quadratwurzel heißt.

Also wenn man z. B. 12 mit 12 multiplicirt, so ist das Product 144 eine Quadratzahl, deren Wurzel die Zahl 12 ist.

Der Grund dieser Benennung ist der Geometrie entnommen, wo der Inhalt eines Quadrats gefunden wird, wenn man die Seite desselben mit sich selbst multiplicirt.

116. Daher werden alle Quadratzahlen durch die Multiplication gefunden, wenn man nämlich die Wurzel mit sich selbst multiplicirt.

Also weil 1 mit 1 multiplicirt 1 giebt, so ist 1 das Quadrat von 1.

Ferner ist 4 das Quadrat von der Zahl 2; und 2 ist hingegen die Quadratwurzel von 4.

Eben so ist 9 das Quadrat von 3, und 3 die Quadratwurzel von 9. Wir wollen demnach die Quadrate der natürlichen Zahlen betrachten, und folgende Tafel hinsetzen, in welcher die Zahlen oder Wurzeln in der oberen, die Quadrate aber in der unteren Reihe vorgeführt werden.

Zahlen	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
Quadrate	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100	121	144	169	196	225	256	289

117. Bei diesen der Ordnung nach fortschreitenden Quadratzahlen bemerken wir die auffallende Eigenthümlichkeit, daß, wenn man jede von der folgenden subtrahirt, die Reste in folgender Reihenfolge fortgehen:

3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21 ꝛc.,

welche immer um zwei steigen, und alle ungeraden Zahlen der Ordnung nach vorstellen.

118. Auf gleiche Weise werden die Quadrate von Brüchen gefunden, wenn man nämlich einen Bruch mit sich selbst multiplicirt. Also ist

von $\frac{1}{2}$ das Quadrat $\frac{1}{4}$,
von $\frac{2}{3}$ „ „ $\frac{4}{9}$,
von $\frac{1}{4}$ „ „ $\frac{1}{16}$,
von $\frac{3}{4}$ „ „ $\frac{9}{16}$ u. s. w.

Man darf nämlich nur das Quadrat des Zählers durch das Quadrat des Nenners dividiren, so bekommt man das Quadrat des Bruchs. Also ist $\frac{25}{64}$ das Quadrat des Bruchs $\frac{5}{8}$ und umgekehrt ist $\frac{5}{8}$ die Wurzel von $\frac{25}{64}$.

119. Wenn man das Quadrat einer vermischten Zahl, welche aus einer ganzen Zahl und einem Bruch besteht, finden will, so darf man nur dieselbe in einen unächten Bruch verwandeln, und das Quadrat davon nehmen. Also um das Quadrat von $2\frac{1}{2}$ zu finden, so ist erstlich $2\frac{1}{2}$ so viel als $\frac{5}{2}$, und folglich das Quadrat $\frac{25}{4}$, welches $6\frac{1}{4}$ beträgt. Also ist $6\frac{1}{4}$ das Quadrat von $2\frac{1}{2}$. Eben so, um das Quadrat von $3\frac{1}{4}$ zu finden, bemerke man, daß $3\frac{1}{4}$ so viel ist als $\frac{13}{4}$, wovon das Quadrat $\frac{169}{16}$ ist, welches

10 und $\frac{9}{16}$ ausmacht. Wir wollen z. B. die Quadrate, welche von 3 bis 4 um ein Viertel steigen, betrachten, als:

Zahlen	3	$3\frac{1}{4}$	$3\frac{1}{2}$	$3\frac{3}{4}$	4
Quadrate	9	$10\frac{9}{16}$	$12\frac{1}{4}$	$14\frac{1}{16}$	16

Hieraus kann man den Schluß ziehen, daß, wenn die Wurzel einen Bruch enthält, das Quadrat derselben auch immer einen Bruch enthalten wird. Also wenn die Wurzel $1\frac{5}{12}$ ist, so wird als Quadrat derselben $\frac{289}{144}$ gefunden, welches $2\frac{1}{144}$, und also um sehr wenig größer als 2 ist.

120. Auf allgemeine Art, wenn die Wurzel a ist, so ist das Quadrat aa; ferner von der Wurzel 2a ist das Quadrat 4aa. Hieraus ersieht man, daß, wenn die Wurzel 2mal so groß genommen wird, das Quadrat 4mal größer wird. Ferner ist von der Wurzel 3a das Quadrat 9aa u. s. w. Heißt aber die Wurzel ab, so ist ihr Quadrat aabb, und wenn abc die Wurzel ist, so ist ihr Quadrat aabbcc.

121. Wenn daher die Wurzel aus zwei oder mehreren Factoren besteht, so muß man die Quadrate derselben mit einander multipliciren, und umgekehrt, wenn das Quadrat aus zwei oder mehreren Factoren besteht, deren jeder ein Quadrat ist, so braucht man nur die Wurzeln derselben mit einander zu multipliciren. Also da 2304 so viel ist als 4 . 16 . 36, so ist die Quadratwurzel davon 2 . 4 . 6, das ist 48, und in der That ist 48 die Quadratwurzel von 2304, weil 48 . 48 eben so viel ausmacht als 2304.

122. Nun wollen wir auch betrachten, welche Bewandtniß es mit den Zeichen plus und minus bei den Quadraten hat. Es erhellt sogleich, daß, wenn die Wurzel das Zeichen + hat, oder eine Positivzahl ist, wie wir bisher angenommen haben, das Quadrat derselben auch eine Positivzahl sein muß, weil + mit + multiplicirt + giebt. Also wird das

Quadrat von + a sein + aa. Wenn aber die Wurzel eine Negativzahl ist, als — a, so wird ihr Quadrat + aa sein, gerade so als wenn die Wurzel + a wäre; folglich ist + aa eben so wohl das Quadrat von + a als auch von — a; es können daher von jedem Quadrat zwei Quadratwurzeln angegeben werden, deren eine positiv, die andere negativ ist. Also ist die Quadratwurzel von 25 so wohl + 5 als auch — 5, weil + 5 mit + 5 multiplicirt, und auch — 5 mit — 5 multiplicirt, + 25 giebt.

Kapitel 12.

Von den Quadratwurzeln und den daraus entstehenden Irrationalzahlen.

123. Aus dem Vorhergehenden erhellt, daß die Quadratwurzel aus einer gegebenen Zahl nichts anderes ist, als eine Zahl, deren Quadrat der gegebenen Zahl gleich ist. Also die Quadratwurzel von 4 ist 2, von 9 ist sie 3, von 16 ist sie 4 u. s. w., wobei zu merken ist, daß diese Wurzeln so wohl mit dem Zeichen plus als auch minus gesetzt werden können. Also von der Zahl 25 ist die Quadratwurzel so wohl + 5 als auch — 5, weil — 5 mit — 5 multiplicirt eben so wohl + 25 ausmacht, als auch + 5 mit + 5 multiplicirt.

124. Wenn daher die gegebene Zahl ein Quadrat ist und man die Quadratzahlen so weit im Gedächtniß hat, so ist es leicht, die Quadratwurzel zu finden; also, wenn die gegebene Zahl 196 wäre, so weiß man, daß die Quadratwurzel davon 14 ist. Mit den Brüchen ist es ebenfalls nicht schwerer, und ist aus dem Obigen klar, daß von dem Bruch $\frac{25}{49}$ die Quadratwurzel $\frac{5}{7}$ ist, weil man nur so wohl von dem Zähler, als auch von dem Nenner die Quadratwurzeln nehmen darf. Ist die gegebene Zahl eine vermischte, wie $12\frac{1}{4}$, so verwandle man dieselbe in einen unächten Bruch, nämlich $\frac{49}{4}$, wovon die Quadratwurzel offenbar $\frac{7}{2}$ ist, oder $3\frac{1}{2}$, welches also die Quadratwurzel von $12\frac{1}{4}$ ist.

125. Wenn aber die gegebene Zahl kein Quadrat ist,

wie z. B. 12, so ist es auch nicht möglich, die Quadratwurzel davon, das ist eine solche Zahl, welche mit sich selbst multiplicirt gerade 12 ausmacht, zu finden oder anzugeben. Indessen wissen wir doch, daß die Quadratwurzel von 12 größer als 3, weil 3 . 3 nur 9 macht, doch aber kleiner als 4, weil 4 . 4 schon 16 macht; wir wissen sogar auch, daß dieselbe kleiner sein muß als $3\frac{1}{2}$, weil das Quadrat von $3\frac{1}{2}$ mehr ist als 12, denn $3\frac{1}{2}$ ist $\frac{7}{2}$ und dessen Quadrat $\frac{49}{4}$ oder $12\frac{1}{4}$. Wir können sogar diese Wurzel noch näher bestimmen durch $3\frac{7}{15}$, denn das Quadrat von $3\frac{7}{15}$ oder $\frac{52}{15}$ macht $\frac{2704}{225}$; folglich ist $3\frac{7}{15}$ noch um etwas zu groß, denn $\frac{2704}{225}$ ist um $\frac{4}{225}$ größer als 12.

126. Weil nun $3\frac{1}{2}$ und auch $3\frac{7}{15}$ um etwas größer ist als die Quadratwurzel von 12, so möchte man denken, daß, wenn man anstatt des Bruchs $\frac{7}{15}$ einen etwas kleinern zu 3 addirte, das Quadrat davon genau 12 werden könnte.

Laßt uns also $3\frac{3}{7}$ nehmen, weil $\frac{3}{7}$ um ein Geringes kleiner ist als $\frac{7}{15}$. Nun ist $3\frac{3}{7}$ so viel als $\frac{24}{7}$, wovon das Quadrat $\frac{576}{49}$, und also kleiner ist als 12. Denn 12 beträgt $\frac{588}{49}$, ist also noch um $\frac{12}{49}$ größer. Hieraus sehen wir also, daß $3\frac{3}{7}$ zu klein, $3\frac{7}{15}$ aber zu groß ist. Man könnte also $3\frac{5}{11}$ annehmen, weil $\frac{5}{11}$ größer ist als $\frac{3}{7}$, und doch kleiner als $\frac{7}{15}$. Da nun $3\frac{5}{11}$ in einen Bruch gebracht $\frac{38}{11}$ sind, so ist das Quadrat davon $\frac{1444}{121}$. Aber 12 auf diesen Nenner gebracht giebt $\frac{1452}{121}$, woraus erhellt, daß $3\frac{5}{11}$ noch zu klein ist und zwar nur um $\frac{8}{121}$. Wollte man nun setzen, die Wurzel wäre $3\frac{6}{13}$, weil $\frac{6}{13}$ etwas größer ist als $\frac{5}{11}$, so wäre das Quadrat davon $\frac{2025}{169}$; aber 12 auf diesen Nenner gebracht, bringt $\frac{2028}{169}$. Also ist $3\frac{6}{13}$ noch zu klein, doch nur um $\frac{3}{169}$, während $3\frac{7}{15}$ zu groß ist.

127. Es läßt sich auch leicht begreifen, daß, was wir auch immer für einen Bruch zu 3 hinzusetzen mögen, das Quadrat davon immer einen Bruch in sich fassen muß, und also niemals genau 12 betragen kann. Also, obwohl

wir wissen, daß die Quadratwurzel von 12 größer ist als $3\frac{6}{13}$, aber kleiner als $3\frac{7}{13}$, so müssen wir doch bekennen, daß es nicht möglich sei, zwischen diesen zwei Brüchen einen solchen ausfindig zu machen, welcher, zu 3 addirt, die Quadratwurzel von 12 genau ausdrückte. Dennoch kann man nicht sagen, daß die Quadratwurzel von 12 an und für sich selbst unbestimmt wäre, sondern es folgt aus dem Angeführten nur so viel, daß dieselbe durch Brüche nicht ausgedrückt werden kann, obwohl sie nothwendig eine bestimmte Größe hat.

128. Hierdurch werden wir auf eine neue Art von Zahlen geleitet, welche sich keineswegs durch Brüche ausdrücken lassen, und dennoch eine bestimmte Größe haben, wie wir von der Quadratwurzel aus der Zahl 12 gesehen haben. Diese neue Art von Zahlen werden nun Irrationalzahlen genannt, und solche entstehen, so oft man die Quadratwurzel aus einer Zahl suchen soll, welche kein Quadrat ist. Also weil 2 kein Quadrat ist, so ist auch die Quadratwurzel 2, oder diejenige Zahl, welche mit sich selbst multiplicirt, genau 2 hervorbringt, eine Irrationalzahl. Bisweilen pflegen auch solche Zahlen surdische genannt zu werden.

129. Obwohl sich nun solche Irrationalzahlen durch keinen Bruch darstellen lassen, so haben wir doch einen deutlichen Begriff von der Größe derselben. Denn mag z. B. auch die Quadratwurzel aus 12 noch so verborgen scheinen, so wissen wir doch, daß dieselbe eine Zahl ist, welche, mit sich selbst multiplicirt, gerade 12 hervorbringt. Und diese Eigenschaft reicht aus, um uns einen deutlichen Begriff von dieser Zahl zu geben, besonders da wir immer näher zu dem Werth derselben gelangen können.

130. Weil wir nun einen hinlänglichen Begriff von dergleichen Irrationalzahlen haben, so bedient man sich eines gewissen Zeichens, um die Quadratwurzel von solchen

Zahlen, welche keine Quadrate sind, anzudeuten. Dieses Zeichen hat nun die Gestalt $\sqrt{\ }$, und wird mit dem Wort Quadratwurzel ausgesprochen. Also $\sqrt{12}$ bedeutet diejenige Zahl, welche mit sich selbst multiplicirt 12 giebt, oder die Quadratwurzel aus 12. Eben so bedeutet $\sqrt{2}$ die Quadratwurzel aus 2; $\sqrt{3}$ die Quadratwurzel aus 3; ferner $\sqrt{\frac{2}{3}}$ die Quadratwurzel aus $\frac{2}{3}$, und überhaupt $\sqrt{a}$ bedeutet die Quadratwurzel aus der Zahl a. So oft man also von einer Zahl, welche kein Quadrat ist, die Quadratwurzel angeben will, bedient man sich dieses Zeichens $\sqrt{\ }$, welches vor jene Zahl geschrieben wird.

131. Die eben gegebene Erklärung der Irrationalzahlen führt uns sogleich auf einen Weg, die gewöhnlichen Rechnungen mit denselben anzustellen. Weil nämlich die Quadratwurzel aus 2 mit sich selbst multiplicirt 2 geben muß, so wissen wir, daß, wenn $\sqrt{2}$ mit $\sqrt{2}$ multiplicirt wird, nothwendig 2 herauskommt; eben so $\sqrt{3}$ mit $\sqrt{3}$ multiplicirt giebt 3; und $\sqrt{5}$ mit $\sqrt{5}$ giebt 5; ferner $\sqrt{\frac{2}{3}}$ mit $\sqrt{\frac{2}{3}}$ giebt $\frac{2}{3}$; und überhaupt $\sqrt{a}$ mit $\sqrt{a}$ multiplicirt giebt a.

132. Wenn aber $\sqrt{a}$ mit $\sqrt{b}$ multiplicirt werden soll, so ist das Product $\sqrt{ab}$, weil wir oben gezeigt haben (121), daß, wenn ein Quadrat Factoren hat, die Wurzel davon auch aus den Wurzeln der Factoren entsteht. Daher findet man die Quadratwurzel aus dem Product ab, das ist $\sqrt{ab}$, wenn man die Quadratwurzel von a, das ist $\sqrt{a}$, mit der Quadratwurzel von b, das ist $\sqrt{b}$, multiplicirt. Hieraus geht hervor, daß, wenn b dem a gleich wäre, alsdann $\sqrt{a}$ mit $\sqrt{b}$ multiplicirt $\sqrt{aa}$ gäbe. Nun aber ist $\sqrt{aa}$ offenbar a, weil aa das Quadrat von a ist.

133. Eben so, wenn $\sqrt{a}$ durch $\sqrt{b}$ dividirt werden soll, bekommt man $\sqrt{\frac{a}{b}}$, wobei es sich zutragen kann, daß im Quotienten die Irrationalität verschwindet. Also wenn $\sqrt{18}$ durch $\sqrt{8}$ dividirt werden soll, so bekommt

man $\sqrt{\frac{18}{8}}$. Es ist aber $\frac{18}{8}$ so viel als $\frac{9}{4}$, und die Quadratwurzel von $\frac{9}{4}$ ist $\frac{3}{2}$.

134. Wenn die Zahl, vor welche das Wurzelzeichen $\sqrt{\ }$ gesetzt wird, selbst ein Quadrat ist, so läßt sich die Wurzel davon auf die gewöhnliche Art ausdrücken. Also ist $\sqrt{4}$ so viel als 2; $\sqrt{9}$ so viel als 3; $\sqrt{36}$ ist 6; und $\sqrt{12\frac{1}{4}}$ ist $\sqrt{\frac{49}{4}}$, das ist $\frac{7}{2}$ oder $3\frac{1}{2}$. In diesen Fällen ist demnach die Irrationalität nur scheinbar und fällt von selbst weg.

135. Es ist auch leicht, solche Irrationalzahlen mit gewöhnlichen Zahlen zu multipliciren. Also ist 2 mal $\sqrt{5}$ so viel als $2\sqrt{5}$; und $\sqrt{2}$ mit 3 multiplicirt giebt $3\sqrt{2}$; weil aber 3 so viel ist als $\sqrt{9}$, so giebt auch $\sqrt{9}$ mit $\sqrt{2}$ multiplicirt folgende Form, nämlich $\sqrt{18}$, so daß $\sqrt{18}$ eben so viel ist als $3\sqrt{2}$. Eben so ist $2\sqrt{a}$ so viel als $\sqrt{4a}$, und $3\sqrt{a}$ so viel als $\sqrt{9a}$. Und auf allgemeine Art ist $b\sqrt{a}$ so viel als die Quadratwurzel aus bba oder $\sqrt{abb}$; woraus man sieht, daß, wenn die Zahl, die hinter dem Zeichen steht, ein Quadrat in sich enthält, die Wurzel davon vor das Zeichen gesetzt werden kann; also $b\sqrt{a}$ anstatt $\sqrt{bba}$. Demnach werden folgende Reductionen klar sein:

$\sqrt{8}$, oder $\sqrt{2 \cdot 4}$ ist so viel als $2\sqrt{2}$,
$\sqrt{12}$, " $\sqrt{3 \cdot 4}$ " " " " $2\sqrt{3}$,
$\sqrt{18}$, " $\sqrt{2 \cdot 9}$ " " " " $3\sqrt{2}$,
$\sqrt{24}$, " $\sqrt{6 \cdot 4}$ " " " " $2\sqrt{6}$,
$\sqrt{32}$, " $\sqrt{2 \cdot 16}$ " " " " $4\sqrt{2}$,
$\sqrt{75}$, " $\sqrt{3 \cdot 25}$ " " " " $5\sqrt{3}$ u. s. w.

136. Mit der Division hat es dieselbe Bewandtniß: $\sqrt{a}$ durch $\sqrt{b}$ dividirt giebt $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$, das ist $\sqrt{\frac{a}{b}}$.

In derselben Weise ist $\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}}$ so viel als $\sqrt{\frac{8}{2}}$, oder $\sqrt{4}$, oder 2.

$\frac{\sqrt{18}}{\sqrt{2}}$ ist $\sqrt{\frac{18}{2}}$, oder $\sqrt{9}$, oder 3,
$\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{3}}$ ist $\sqrt{\frac{12}{3}}$, oder $\sqrt{4}$, oder 2,

$\frac{2}{\sqrt{2}}$ ist $\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{2}}$, oder $\sqrt{\frac{4}{2}}$, oder $\sqrt{2}$,
$\frac{3}{\sqrt{3}}$ ist $\frac{\sqrt{9}}{\sqrt{3}}$, oder $\sqrt{\frac{9}{3}}$, oder $\sqrt{3}$,
$\frac{12}{\sqrt{6}}$ ist $\frac{\sqrt{144}}{\sqrt{6}}$, oder $\sqrt{\frac{144}{6}}$, oder $\sqrt{24}$, oder $\sqrt{6 \cdot 4}$, das ist $2\sqrt{6}$.

137. Bei der Addition und Subtraction ist nichts Besonderes zu bemerken, weil die Zahlen nur mit plus oder minus verbunden werden. Also $\sqrt{2}$ zu $\sqrt{3}$ addirt, giebt $\sqrt{2} + \sqrt{3}$; und $\sqrt{3}$ von $\sqrt{5}$ abgezogen, giebt $\sqrt{5} - \sqrt{3}$.

138. Endlich ist noch zu bemerken, daß, zum Unterschied von diesen sogenannten Irrationalzahlen, die gewöhnlichen Zahlen, so wohl Ganze als Brüche, Rationalzahlen genannt zu werden pflegen.

Wenn also von Rationalzahlen die Rede ist, so werden darunter stets nur ganze Zahlen oder auch Brüche verstanden.

Kapitel 13.

Von den aus derselben Quelle entstehenden unmöglichen oder imaginären Zahlen.

139. Wir haben schon oben (122) gesehen, daß die Quadrate so wohl der positiven als auch der negativen Zahlen immer positiv sind, oder mit dem Zeichen plus erscheinen, indem $-a$ mit $-a$ multiplicirt eben so wohl $+aa$ giebt, als wenn man $+a$ mit $+a$ multiplicirt. Und deswegen haben wir in dem vorigen Kapitel alle Zahlen, aus denen die Quadratwurzeln gezogen werden sollen, als positiv bezeichnet.

140. Wenn daher verlangt wird, daß aus einer Negativzahl die Quadratwurzel gezogen werden soll, so muß man sich allerdings in einer gewissen Verlegenheit befinden, weil sich keine Zahl angeben läßt, deren Quadrat eine negative Zahl wäre. Denn wenn man z. B. die Quadratwurzel von

der Zahl -4 verlangt, so will man eine Zahl haben, welche mit sich selbst multiplicirt -4 giebt. Diese gesuchte Zahl ist aber weder $+2$ noch -2, indem so wohl $+2$ als auch -2, mit sich selbst multiplicirt, in beiden Fällen $+4$ giebt, und nicht -4.

141. Hieraus erkennt man also, daß die Quadratwurzel einer Negativzahl weder eine Positiv- noch eine Negativzahl sein kann, weil auch von allen Negativzahlen die Quadrate positiv werden, oder das Zeichen $+$ bekommen; folglich muß die verlangte Wurzel zu einer ganz besondern Art von Zahlen gehören, indem dieselbe weder zu den Positiv- noch Negativzahlen gerechnet werden kann.

142. Da nun oben (19) schon angemerkt worden, daß die Positivzahlen alle größer sind als Nichts oder 0, die Negativzahlen hingegen alle kleiner sind als Nichts oder 0, so daß Alles, was größer ist als Nichts, durch Positivzahlen, Alles aber, was kleiner ist als Nichts, durch Negativzahlen ausgedrückt wird; so sehen wir, daß die Quadratwurzeln aus Negativzahlen weder größer als Nichts, noch kleiner als Nichts sind. Nichts sind sie aber doch auch nicht, weil 0 mit 0 multiplicirt 0 und also keine Negativzahl giebt.

143. Weil nun alle möglichen Zahlen, die man sich nur immer vorstellen mag, entweder größer oder kleiner als 0, oder etwa 0 selbst sind, so ist klar, daß die Quadratwurzeln von Negativzahlen nicht einmal zu den möglichen Zahlen gerechnet werden können. Folglich müssen wir sagen, daß dies unmögliche Zahlen sind. Und dieser Umstand leitet uns auf den Begriff von solchen Zahlen, welche ihrer Natur nach unmöglich sind, und gewöhnlich *imaginäre oder eingebildete Zahlen* genannt werden, weil sie blos in der Einbildung vorhanden sind.

144. Daher bedeuten alle diese Ausdrücke $\sqrt{-1}$, $\sqrt{-2}$, $\sqrt{-3}$, $\sqrt{-4}$ etc. solche unmögliche oder ima-

ginäre Zahlen, weil dadurch Quadratwurzeln von Negativzahlen angegeben werden.

Von diesen behauptet man also mit vollem Recht, daß sie weder größer noch kleiner sind als Nichts; und auch nicht einmal Nichts selbst, weswegen sie für unmöglich gehalten werden müssen.

145. Dennoch stellen sie sich unserm Verstande vor, und finden in unserer Einbildung Platz; daher sie auch blos eingebildete Zahlen genannt werden. Obwohl aber diese Zahlen, wie z. B. $\sqrt{-4}$, ihrer Natur nach ganz und gar unmöglich sind, so haben wir davon doch einen hinlänglichen Begriff, indem wir wissen, daß dadurch eine Zahl angedeutet wird, welche mit sich selbst multiplicirt als Product -4 hervorbringt; und dieser Begriff ist ausreichend, um diese Zahlen dem Verfahren der Rechnung zu unterwerfen.

146. Dasjenige nun, was wir zu allererst von dergleichen unmöglichen Zahlen, wie z. B. von $\sqrt{-3}$, wissen, besteht darin, daß das Quadrat davon, oder das Product, welches herauskommt, wenn $\sqrt{-3}$ mit $\sqrt{-3}$ multiplicirt wird, -3 giebt; eben so ist $\sqrt{-1}$ mit $\sqrt{-1}$ multiplicirt -1. Und überhaupt wenn man $\sqrt{-a}$ mit $\sqrt{-a}$ multiplicirt, oder das Quadrat von $\sqrt{-a}$ nimmt, so giebt es $-a$.

147. Da $-a$ so viel ist als $+a$ mit -1 multiplicirt, und die Quadratwurzel aus einem Product gefunden wird, wenn man die Quadratwurzel aus den Factoren mit einander multiplicirt (121), so ist Wurzel aus a mit -1 multiplicirt oder $\sqrt{-a}$ so viel als $\sqrt{a}$ mit $\sqrt{-1}$ multiplicirt. Nun aber ist $\sqrt{a}$ eine mögliche Zahl, folglich läßt sich das Unmögliche, welches darin vorkommt, stets auf $\sqrt{-1}$ ausscheiden. Aus diesem Grunde ist also $\sqrt{-4}$ so viel als $\sqrt{4}$ mit $\sqrt{-1}$ multiplicirt; $\sqrt{4}$ aber ist 2, also ist $\sqrt{-4}$ so viel als $2\sqrt{-1}$, und $\sqrt{-9}$

so viel als $\sqrt{9}\,.\,\sqrt{-1}$, das ist $3\sqrt{-1}$, und $\sqrt{-16}$ so viel als $4\sqrt{-1}$.

148. Da ferner $\sqrt{a}$ mit $\sqrt{b}$ multiplicirt $\sqrt{ab}$ giebt, so wird $\sqrt{-2}$ mit $\sqrt{-3}$ multiplicirt $\sqrt{6}$ geben. Eben so wird $\sqrt{-1}$ mit $\sqrt{-4}$ multiplicirt $\sqrt{4}$, das ist 2, geben. Hieraus sieht man, daß *zwei unmögliche Zahlen mit einander multiplicirt eine mögliche oder wirkliche Zahl hervorbringen.*

Wenn aber $\sqrt{-3}$ mit $\sqrt{+5}$ multiplicirt wird, so bekommt man $\sqrt{-15}$. Oder eine mögliche Zahl mit einer unmöglichen multiplicirt, giebt stets etwas Unmögliches.

149. Eben so verhält sich die Sache auch mit der Division. Da dann $\sqrt{a}$ durch $\sqrt{b}$ dividirt $\sqrt{\frac{a}{b}}$ giebt, so wird $\sqrt{-4}$ durch $\sqrt{-1}$ dividirt $\sqrt{+4}$ oder 2 geben, und $\sqrt{+3}$ durch $\sqrt{-3}$ dividirt wird geben $\sqrt{-1}$. Ferner 1 durch $\sqrt{-1}$ dividirt giebt $\sqrt{\frac{+1}{-1}}$, das ist $\sqrt{-1}$, weil 1 so viel ist als $\sqrt{+1}$.

150. Da nun aber nach der Anmerkung (122) die Quadratwurzel jeder Zahl immer einen doppelten Werth hat, nämlich so wohl negativ als auch positiv genommen werden kann, indem z. B. $\sqrt{4}$ so wohl $+2$ als auch -2 ist, und überhaupt für die Quadratwurzel aus a so wohl $+\sqrt{a}$ als auch $-\sqrt{a}$ geschrieben werden kann, so gilt dies auch bei den unmöglichen Zahlen; und die Quadratwurzel aus $-a$ ist so wohl $+\sqrt{-a}$, als auch $-\sqrt{-a}$, wobei man die Zeichen $+$ und $-$, welche vor das Zeichen $\sqrt{}$ gesetzt werden, von dem Zeichen, das hinter dem $\sqrt{}$ Zeichen steht, wohl unterscheiden muß.

151. Endlich muß noch das Bedenken gehoben werden, daß die Lehre von den unmöglichen Zahlen als nutzlose Grille angesehen werden könne. Allein dies Bedenken ist unbegründet; diese Lehre ist in der That von der größten Wichtigkeit, indem oft Aufgaben vorkommen, von welchen

man nicht sofort wissen kann, ob sie Mögliches oder Unmögliches verlangen. Wenn nun die Auflösung derselben zu solchen unmöglichen Zahlen führt, so hat man ein sicheres Zeichen, daß die Aufgabe Unmögliches verlangt. Um dies mit einem Exempel zu erläutern, wollen wir folgende Aufgabe betrachten: Man soll die Zahl 12 in zwei Theile theilen, deren Product 40 ausmacht. Wenn man nun diese Aufgabe nach den Regeln, die später erörtert werden, auflöst, so findet man für die zwei gesuchten Theile $6+\sqrt{-4}$, und $6-\sqrt{-4}$, welche folglich unmöglich sind. Hieraus eben erkennt man, daß diese Aufgabe unmöglich gelöst werden kann. Wollte man aber die Zahl 12 in zwei solche Theile theilen, deren Product 35 wäre, so ist offenbar, daß diese Theile 7 und 5 sein würden.

Kapitel 14.

Von den Cubikzahlen.

152. Wenn eine Zahl dreimal mit sich selbst, oder ihr Quadrat nochmals mit derselben Zahl multiplicirt wird, so wird das Product ein *Cubus* oder eine *Cubikzahl* genannt. Also ist von der Zahl a der *Cubus* aaa, welcher entsteht, wenn die Zahl a mit sich selbst, nämlich mit a, und dies Quadrat aa nochmals mit der Zahl a multiplicirt wird.

Also sind die Cuben der natürlichen Zahlen folgende:

Zahlen	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Cubus	1	8	27	64	125	216	343	512	729	1000

153. Wenn wir bei diesen Cubikzahlen ihre Differenzen, wie bei den Quadratzahlen geschehen, in Betracht ziehen, indem wir jede von der folgenden subtrahiren, so bekommen wir folgende Zahlenreihe, in der wir keine Regelmäßigkeit bemerken:

7, 19, 37, 61, 91, 127, 169, 217, 271;

wenn wir aber von letzteren die Differenzen nehmen, so erhalten wir eine Reihenfolge von Zahlen, welche offenbar immer um 6 steigen, nämlich:

12, 18, 24, 30, 36, 42, 48, 54.

154. In dieser Art wird man auch leicht die Cuben von Brüchen finden können; also ist von $\frac{1}{2}$ der Cubus $\frac{1}{8}$, von $\frac{1}{3}$ ist er $\frac{1}{27}$, von $\frac{2}{3}$ ist er $\frac{8}{27}$. Man braucht nämlich nur die Cuben des Zählers und Nenners zu nehmen. Also für den Bruch $\frac{3}{4}$ wird der Cubus $\frac{27}{64}$ sein.

155. Wenn von einer vermischten Zahl der Cubus gefunden werden soll, so muß dieselbe erstlich in einen Bruch verwandelt werden, da dann die Rechnung leicht vollzogen wird. Also von der Zahl $1\frac{1}{2}$ wird es leicht sein, den Cubus zu finden. Denn da $1\frac{1}{2}$, in einen Bruch verwandelt, $\frac{3}{2}$ ist, so wird der Cubus von $\frac{3}{2}$ sein $\frac{27}{8}$, das ist 3 und $\frac{3}{8}$. Eben so von der Zahl $1\frac{1}{4}$ oder $\frac{5}{4}$, ist der Cubus $\frac{125}{64}$, das ist 1 und $\frac{61}{64}$. Ferner von der Zahl $3\frac{1}{4}$ oder $\frac{13}{4}$ ist der Cubus $\frac{2197}{64}$, welches $34\frac{21}{64}$ giebt.

156. Da von der Zahl a der Cubus aaa ist, so wird von der Zahl ab der Cubus aaabbb sein; woraus man sieht, daß, wenn die Zahl zwei oder mehrere Factoren hat, der Cubus davon gefunden wird, wenn man die Cuben aller Factoren mit einander multiplicirt. Also z. B. weil 12 so viel als 3 . 4, so multiplicirt man den Cubus von 3, welcher 27 ist, mit dem Cubus von 4, welcher 64 ist, so bekommt man 1728, und dies ist der Cubus von 12. Hieraus ist ferner klar, daß der Cubus von 2a ist 8aaa, und also 8 mal größer, als der Cubus von a; eben so ist von 3a der Cubus 27aaa, und also 27 mal größer, als der Cubus von a.

157. Ziehen wir nun auch die Zeichen + und — in Betracht, so ist klar, daß von einer Positivzahl + a der Cubus + aaa, und folglich auch positiv sein muß. Wenn aber von einer Negativzahl, also — a, der Cubus genommen

werden soll, so nehme man erstlich das Quadrat, welches + aa ist, und da dieses nochmals mit — a multiplicirt werden soll, so wird der gesuchte Cubus — aaa und folglich auch negativ sein. Daher hat es mit den Cuben eine ganz andere Bewandtniß, als mit den Quadraten, welche stets positiv sind. Also ist von — 1 der Cubus — 1, von — 2 der Cubus — 8, von — 3 ist er — 27, u. s. w.

Kapitel 15.

Von den Cubikwurzeln und den hiedurch entstehenden Irrationalzahlen.

158. Da gezeigt worden ist, wie von einer gegebenen Zahl der Cubus gefunden wird, so kann auch umgekehrt aus einer gegebenen Zahl diejenige Zahl gefunden werden, welche dreimal mit sich selbst multiplicirt dieselbe Zahl hervorbringt; und diese wird in Bezug auf jene ihre **Cubikwurzel** genannt. Also ist die Cubikwurzel einer gegebenen Zahl eine Zahl, deren Cubus der gegebenen Zahl gleich ist.

159. Wenn also die gegebene Zahl eine wirkliche Cubikzahl ist, wie wir solche im vorigen Kapitel gefunden, so ist es leicht die Cubikwurzel davon zu finden. Also ist von 1 die Cubikwurzel 1, von 8 ist sie 2, und von 27 ist sie 3, von 64 ist sie 4 u. s. w.

Eben so ist auch von — 27 die Cubikwurzel — 3, von — 125 ist sie — 5. Wenn die Zahl gebrochen ist, wie z. B. $\frac{8}{27}$, so ist die Cubikwurzel $\frac{2}{3}$, und von $\frac{64}{343}$ ist sie $\frac{4}{7}$. Ferner, wenn es eine vermischte Zahl ist, wie $2\frac{10}{27}$, welche in **einen Bruch** verwandelt $\frac{64}{27}$ beträgt, so ist die Cubikwurzel davon $\frac{4}{3}$, das ist $1\frac{1}{3}$.

160. Wenn aber die gegebene Zahl kein wirklicher Cubus ist, so läßt sich auch die Cubikwurzel davon weder durch ganze noch gebrochene Zahlen ausdrücken; also da 43 keine Cubikzahl ist, so kann unmöglich weder in ganzen noch gebrochenen Zahlen eine Zahl angegeben werden,

deren Cubus genau 43 beträgt. Jedenfalls aber wissen wir sicher, daß die Cubikwurzel davon größer als 3, weil der Cubus davon nur 27 ergiebt, und doch kleiner als 4 sein muß, weil der Cubus davon schon 64 ist. Daraus folgt, daß die verlangte Cubikwurzel zwischen den Zahlen 3 und 4 liegen muß.

161. Wollte man nun zu der Zahl 3, weil die Cubikwurzel aus 43 größer ist als 3, noch einen Bruch hinzufügen, so könnte man der Wahrheit näher kommen; da aber doch der Cubus davon immer einen Bruch enthalten würde, so könnte derselbe niemals genau 43 werden. Man nehme z. B. an, die gesuchte Cubikwurzel wäre $3\frac{1}{2}$ oder $\frac{7}{2}$, so würde der Cubus davon $\frac{343}{8}$ oder $42\frac{7}{8}$, folglich nur um $\frac{1}{8}$ kleiner als 43 sein.

162. Demnach ist also klar, daß sich die Cubikwurzel aus 43 auf keinerlei Weise durch ganze Zahlen und Brüche ausdrücken läßt. Da man aber gleichwohl einen deutlichen Begriff von der Größe derselben hat, so bedient man sich, um dieselbe anzugeben, des Zeichens $\sqrt[3]{\ }$, das vor die gegebene Zahl gesetzt und mit dem Worte **Cubikwurzel** ausgesprochen wird, um sie von der Quadratwurzel zu unterscheiden. Also bedeutet $\sqrt[3]{43}$ die Cubikwurzel von 43, das ist eine Zahl, deren Cubus 43 ist, oder welche dreimal mit sich selbst multiplicirt 43 hervorbringt.

163. Hieraus geht hervor, daß dergleichen Ausdrücke keineswegs zu den rationalen gehören, sondern eine besondere Art von Irrationalgrößen darstellen. Sie haben auch mit den Quadratwurzeln keine Gemeinschaft; denn es ist nicht möglich, eine solche Cubikwurzel durch eine Quadratwurzel, wie etwa $\sqrt{12}$ auszudrücken. Denn da von $\sqrt{12}$ das Quadrat 12 ist, so ist der Cubus davon $12\sqrt{12}$ und also noch irrational, folglich kann derselbe nicht 43 sein.

164. Ist aber die gegebene Zahl ein wirklicher Cubus, so werden die Ausdrücke rational; also ist $\sqrt[3]{1}$ so viel als 1, $\sqrt[3]{8}$ so viel als 2, und $\sqrt[3]{27}$ so viel als 3, und überhaupt $\sqrt[3]{aaa}$ so viel als a.

165. Soll man eine Cubikwurzel wie $\sqrt[3]{a}$ mit einer andern multipliciren, wie mit $\sqrt[3]{b}$, so ist das Product $\sqrt[3]{ab}$; denn wir wissen, daß die Cubikwurzel aus einem Product ab gefunden wird, wenn man die Cubikwurzeln der Factoren mit einander multiplicirt. Und eben so, wenn $\sqrt[3]{a}$ durch $\sqrt[3]{b}$ dividirt werden soll, ist der Quotient $\sqrt[3]{\frac{a}{b}}$.

166. Daher begreift man, daß $2\sqrt[3]{a}$ so viel ist als $\sqrt[3]{8a}$, weil 2 so viel ist als $\sqrt[3]{8}$. Eben so ist $3\sqrt[3]{a}$ so viel als $\sqrt[3]{27a}$, und $b\sqrt[3]{a}$ so viel als $\sqrt[3]{abbb}$. Daher auch umgekehrt, wenn die Zahl hinter dem Zeichen einen Factor hat, der ein Cubus ist, die Cubikwurzel daraus vor das Zeichen gesetzt werden kann; also ist $\sqrt[3]{64a}$ so viel als $4\sqrt[3]{a}$, und $\sqrt[3]{125a}$ so viel als $5\sqrt[3]{a}$. Hieraus folgt, daß $\sqrt[3]{16}$ so viel ist als $2\sqrt[3]{2}$, weil 16 gleich 8 . 2 ist.

167. Wenn die gegebene Zahl negativ ist, so tritt für die Cubikwurzel jene Schwierigkeit nicht ein, die bei den Quadratwurzeln sich herausstellte; weil nämlich die Cuben von Negativzahlen auch negativ werden, so sind auch wiederum die Cubikwurzeln aus Negativzahlen negativ. Also ist $\sqrt[3]{-8}$ so viel als — 2, und $\sqrt[3]{-27}$ ist — 3. Ferner $\sqrt[3]{-12}$ ist so viel als $-\sqrt[3]{12}$ und $\sqrt[3]{-a}$ so viel als $-\sqrt[3]{a}$. Woraus man sieht, daß das Zeichen —, das hinter dem Cubikwurzelzeichen steht, auch vor dasselbe geschrieben werden kann. Also werden wir hier nicht zu unmöglichen oder eingebildeten Zahlen geführt, wie bei den Quadratwurzeln der Negativzahlen geschehen.

Kapitel 16.

Von den Potenzen oder Dignitäten überhaupt.

168. Wenn eine Zahl mehrfach mit sich selbst multiplicirt wird, so wird das Product eine **Potenz**, bisweilen auch eine **Dignität** genannt. In deutscher Sprache könnte dieses Wort durch Macht übersetzt werden. Da nun ein Quadrat entsteht, wenn eine Zahl zweimal mit sich selbst multiplicirt wird, und ein Cubus, wenn die Zahl dreimal mit sich selbst multiplicirt wird, so sind so wohl die Quadrate als auch die Cuben unter dem Namen der Potenzen oder Dignitäten einbegriffen.

169. Diese Potenzen werden nach der Anzahl der Male in der die Zahl mit sich selbst multiplicirt wird, von einander unterschieden. Also wenn eine Zahl zweimal mit sich selbst multiplicirt wird, so heißt das Product ihre zweite Potenz; welche also so viel wie ihr Quadrat ist; wird eine Zahl dreimal mit sich selbst multiplicirt, so heißt das Product ihre dritte Potenz, welche also einerlei Bedeutung mit dem Cubus hat; wird ferner eine Zahl viermal mit sich selbst multiplicirt, so wird das Product ihre vierte Potenz genannt, welche gewöhnlich mit dem Namen des Biquadrats bezeichnet wird. Hieraus ersieht man leicht, was die fünfte, sechste, siebente Potenz einer Zahl bedeutet, welche höhere Potenzen übrigens keine besonderen Namen zu führen pflegen.

170. Um dies besser zu erläutern, bemerken wir erstlich, daß von der Zahl 1 alle Potenzen immer 1 bleiben, weil, so oft man auch 1 mit sich selbst multiplicirt, das Product immer 1 bleibt. Wir wollen daher die Potenzen der Zahl 2, so wie auch die Potenzen der Zahl 3 nach der Ordnung angeben. Sie gehen folgendermaßen fort:

Potenzen	der Zahl 2,	der Zahl 3.
I.	2	3
II.	4	9
III.	8	27
IV.	16	81
V.	32	243
VI.	64	729
VII.	128	2187
VIII.	256	6561
IX.	512	19683
X.	1024	59049
XI.	2048	177147
XII.	4096	531441
XIII.	8192	1594323
XIV.	16384	4782969
XV.	32768	14348907
XVI.	65536	43046721
XVII.	131072	129140163
XVIII.	262144	387420489

Besondere Beachtung verdienen die Potenzen der Zahl 10, nämlich:

I. II. III. IV. V. VI.
10, 100, 1000, 10000, 100000, 1000000,

weil auf diesen Potenzen unsere ganze Rechenkunst beruht. Uebrigens ist zu bemerken, daß die darüber gesetzten römischen Zahlen andeuten, die wievielte Potenz von 10 jede dieser Zahlen ist.

171. Wollen wir die Sache auf allgemeine Art betrachten, so würden sich die Potenzen der Zahl a in folgender Art darstellen lassen:

I. II. III. IV. V. VI.
a, aa, aaa, aaaa, aaaaa, aaaaaa, ꝛc.

Diese Schreibart hat aber die Unbequemlichkeit, daß man, wenn sehr hohe Potenzen bezeichnet werden sollen, denselben Buchstaben sehr häufig hinschreiben müßte, und

es dem Leser noch viel beschwerlicher fallen würde, die Menge dieser Buchstaben zu zählen, um zu wissen, die wievielte Potenz dadurch angegeben wird. Also z. B. würde sich die hundertste Potenz auf diese Art sehr unbequem schreiben lassen, und noch viel weniger erkennbar sein.

172. Dieser Unbequemlichkeit abzuhelfen, hat man eine weit kürzere Art, die Potenzen auszudrücken, eingeführt, welche wegen ihres außerordentlichen Nutzens sehr sorgfältig erklärt zu werden verdient. Man pflegt nämlich über die Zahl, von der z. B. die hundertste Potenz angegeben werden soll, etwas seitwärts zur Rechten die Zahl 100 zu schreiben: also a^{100}, welches ausgesprochen wird: a zur hundertsten Potenz erhoben. Die dabei oben geschriebene Zahl, wie in unserm Fall 100, pflegt der **Exponent** genannt zu werden, welcher Name wohl zu beachten ist.

173. In dieser Weise deutet also a^2, oder a erhoben zu 2, die zweite Potenz von a an, und pflegt dafür auch bisweilen aa geschrieben zu werden, weil beide Arten gleich leicht zu schreiben und zu verstehen sind. Hingegen wird gewöhnlich statt des Cubus oder der dritten Potenz aaa, in dieser neuen Weise a^3 geschrieben, weil dadurch mehr Platz erspart wird. Eben so drückt a^4 die vierte Potenz, a^5 die fünfte, und a^6 die sechste Potenz von a aus.

174. In gleicher Weise werden alle Potenzen der Zahl a, wie folgt, dargestellt:

$a, a^2, a^3, a^4, a^5, a^6, a^7, a^8, a^9, a^{10}, a^{11}$ ꝛc.,

woraus man sieht, daß für das erste Glied a, füglich a^1 geschrieben werden könnte, um die Ordnung desto deutlicher in die Augen fallen zu machen. Daher ist a^1 nichts anders als a, weil die Einheit anzeigt, daß der Buchstabe a nur einmal geschrieben werden soll. Eine solche Reihe von Potenzen pflegt auch eine geometrische Reihe

genannt zu werden, weil immer jedes Glied eben so viel Mal größer ist, als das vorhergehende.

175. Wie in dieser Reihe der Potenzen jedes Glied gefunden wird, wenn man das vorhergehende mit a multiplicirt, wodurch der Exponent um eins größer wird, so wird auch aus jedem Gliede das vorhergehende gefunden, wenn man jenes durch a dividirt, wodurch der Exponent um eins vermindert wird. Hieraus ersehen wir, daß das dem ersten Gliede a^1 vorhergehende Glied $\frac{a}{a}$ sein muß, das ist 1. In Bezug auf den Exponenten wird aber dasselbe a^0 sein, woraus als sehr bemerkenswerthe Eigenheit sich ergiebt, daß a^0 stets 1 sein muß, die Zahl a mag auch noch so groß oder so klein sein; ja sogar auch wenn a Nichts ist, also daß 0^0 sicher 1 ausmacht.

176. Wir können diese Reihe von Potenzen noch weiter rückwärts fortsetzen, und sogar auf doppelte Weise: einmal, indem wir immer das Glied durch a theilen; ferner aber auch, indem wir den Exponenten um eins vermindern oder eins davon subtrahiren. Und es ist klar, daß in beiden Arten die Glieder einander vollkommen gleich sind. Wir wollen also die obige Reihe auf diese doppelte Art rückwärts darstellen, welche auch rückwärts von rechts nach links gelesen werden muß:

Erste	$\frac{1}{aaaaaa}$	$\frac{1}{aaaaa}$	$\frac{1}{aaaa}$	$\frac{1}{aaa}$	$\frac{1}{aa}$	$\frac{1}{a}$	1	a
Art	$\frac{1}{a^6}$	$\frac{1}{a^5}$	$\frac{1}{a^4}$	$\frac{1}{a^3}$	$\frac{1}{a^2}$	$\frac{1}{a^1}$		
Zweite Art	a^{-6}	a^{-5}	a^{-4}	a^{-3}	a^{-2}	a^{-1}	a^0	a^1

177. Hieraus gelangen wir also zur Kenntniß solcher Potenzen, deren Exponenten negative Zahlen sind; und

wir sind im Stande, den Werth derselben genau anzugeben. Wir wollen daher dasjenige, was wir gefunden, wie folgt, vor Augen führen:

Erstlich a^0 ist so viel als 1,

a^{-1} = = = = $\frac{1}{a}$,

a^{-2} = = = = $\frac{1}{aa}$ oder $\frac{1}{a^2}$,

a^{-3} = = = = $\frac{1}{a^3}$,

a^{-4} = = = = $\frac{1}{a^4}$ u. s. w.

178. Hieraus ist auch klar, wie die Potenzen eines Products wie ab gefunden werden müssen. Dieselben sind nämlich: ab oder a^1b^1, a^2b^2, a^3b^3, a^4b^4, a^5b^5, a^6b^6 ꝛc. Eben so werden auch die Potenzen von Brüchen gefunden; so sind die Potenzen des Bruchs $\frac{a}{b}$ folgende:

$\frac{a^1}{b^1}$, $\frac{a^2}{b^2}$, $\frac{a^3}{b^3}$, $\frac{a^4}{b^4}$, $\frac{a^5}{b^5}$, $\frac{a^6}{b^6}$, $\frac{a^7}{b^7}$ ꝛc.

179. Endlich müssen hier auch noch die Potenzen der Negativzahlen betrachtet werden. Es sei demnach gegeben die Negativzahl $-a$, so werden ihre Potenzen der Ordnung nach also auf einander folgen:

$-a, +aa, -a^3, +a^4, -a^5, +a^6, -a^7$ ꝛc.

woraus erhellt, daß nur diejenigen Potenzen, deren Exponenten ungerade Zahlen sind, negativ werden; hingegen sind diejenigen Potenzen, deren Exponenten gerade sind, alle positiv. Also hat die dritte, fünfte, siebente, neunte Potenz der negativen Zahlen stets das Zeichen —.

Die zweite, vierte, sechste, achte Potenz hingegen hat stets das Zeichen +.

Kapitel 17.

Von den Rechnungsarten mit Potenzen.

In Bezug auf Addition und Subtraction ist hier Nichts zu bemerken, indem verschiedene Potenzen nur mit dem Zeichen + und — verbunden werden.

180. Also ist $a^3 + a^2$ die Summe der dritten und zweiten Potenz der Zahl a; und $a^5 - a^4$ ist der Rest, wenn von der fünften Potenz die vierte abgezogen wird, und beides kann nicht kürzer ausgedrückt werden. Wenn aber gleiche Potenzen vorkommen, so ist klar, daß für $a^3 + a^3$ kürzer $2a^3$ ꝛc. geschrieben werden kann.

181. Bei der Multiplication der Potenzen aber ist Verschiedenes zu bemerken. Erstlich, wenn eine Potenz von a mit der Zahl a selbst multiplicirt wird, kommt die folgende Potenz heraus, deren Exponent um 1 größer ist. Also a^2 mit a multiplicirt giebt a^3, und a^3 mit a multiplicirt giebt a^4 ꝛc. Eben so braucht man bei denjenigen Potenzen, deren Exponenten negativ sind, wenn dieselben mit a multiplicirt werden sollen, nur zu dem Exponenten 1 zu addiren; also a^{-1} mit a multiplicirt giebt a^0, das ist 1. Dies geht auch daraus hervor, daß a^{-1} so viel als $\frac{1}{a}$ ist (176), welches mit a multiplicirt $\frac{a}{a}$ giebt, das ist 1. Eben so a^{-2}, wenn mit a multiplicirt, giebt a^{-1}, das ist $\frac{1}{a}$, und a^{-10} mit a multiplicirt giebt a^{-9} u. s. w.

182. Wenn aber eine Potenz mit aa, oder mit der zweiten Potenz multiplicirt werden soll, so wird der Exponent um 2 größer; also a^2 mit a^2 multiplicirt giebt a^4, und a^3 mit a^2 multiplicirt giebt a^5; ferner a^4 mit a^2 multiplicirt giebt a^6, und überhaupt a^n mit a^2 multiplicirt giebt a^{n+2}. Eben so mit den Negativexponenten; also a^{-1} mit a^2 multiplicirt giebt a^1, das ist a, welches auch daraus sich ergiebt, daß a^{-1} so viel wie $\frac{1}{a}$ ist; dieses mit aa multiplicirt giebt $\frac{aa}{a}$, das ist a. Eben so giebt a^{-2} mit a^2 multiplicirt a^0, das ist 1, ferner a^{-3} mit a^2 multiplicirt giebt a^{-1}.

183. Eben so ist klar, daß, wenn eine Potenz mit der dritten Potenz von a, oder mit a^3 multiplicirt werden soll, der Exponent derselben um 3 vermehrt werden muß; oder a^n mit a^3 multiplicirt giebt a^{n+3}. Und überhaupt, wenn zwei Potenzen von a mit einander multiplicirt werden sollen, so ist das Product wieder eine Potenz von a, deren Exponent die Summe jener Exponenten ist. Also a^4 mit a^5 multiplicirt giebt a^9, und a^{12} mit a^7 multiplicirt giebt a^{19} u. s. w.

184. Aus diesem Grunde können die hohen Potenzen von bestimmten Zahlen ziemlich leicht gefunden werden; wenn man z. B. die 24ste Potenz von 2 haben wollte, so würde man dieselbe finden, wenn man die 12te Potenz mit der 12ten Potenz multiplicirt, weil 2^{24} so viel ist, als 2^{12} mit 2^{12} multiplicirt. Nun aber ist 2^{12}, wie wir oben gesehen haben, 4096; daher multiplicirt man 4096 mit 4096, und dann wird das Product 16777216 die verlangte Potenz, nämlich 2^{24}, angeben.

185. Bei der Division ist Folgendes zu merken. Erstlich, wenn eine Potenz von a durch a dividirt werden soll, wird ihr Exponent um 1 kleiner, oder man muß 1 davon subtrahiren. Also a^5 durch a dividirt giebt a^4, und a^0, das ist 1, durch a dividirt, giebt a^{-1} oder $\frac{1}{a}$. Ferner a^{-3} durch a dividirt giebt a^{-4}.

186. Wenn ferner eine Potenz von a durch a^2 dividirt werden soll, so muß man von dem Exponenten derselben 2 abziehen, und soll man dieselbe durch a^3 dividiren, so muß man von ihrem Exponenten 3 abziehen. Und also überhaupt was für eine Potenz auch immer von a durch eine andere dividirt werden soll, immer muß man von dem Exponenten der ersteren den Exponenten der anderen subtrahiren. Also a^{15} durch a^7 dividirt giebt a^8, und a^6 durch a^7 dividirt giebt a^{-1}. Ferner auch a^{-3} durch a^4 dividirt giebt a^{-7}.

187. Hieraus ist leicht zu begreifen, wie Potenzen von Potenzen gefunden werden müssen, indem dies durch die Multiplication geschieht. Also wenn man die zweite Potenz oder das Quadrat von a^3 verlangt, so ist dasselbe a^6, und die dritte Potenz oder der Cubus von a^4 wird a^{12} sein; woraus erhellt, daß man, um das Quadrat einer Potenz zu finden, den Exponenten derselben verdoppeln muß. Also von a^n ist das Quadrat a^{2n}, und der Cubus oder die dritte Potenz von a^n wird a^{3n} sein. Eben so wird auch die siebente Potenz von a^n gefunden a^{7n}, u. s. w.

188. Das Quadrat von a^2 ist a^4, das ist die vierte Potenz von a, welche daher das Quadrat des Quadrats ist. Hieraus erhellt, warum man die vierte Potenz ein Biquadrat oder auch ein Quadratoquadrat nennt.

Weil ferner von a^3 das Quadrat a^6 ist, so pflegt auch die sechste Potenz ein Quadratocubus genannt zu werden.

Endlich auch weil der Cubus von a^3 ist a^9, also die neunte Potenz von a, so pflegt dieselbe auch ein Cubocubus genannt zu werden. Weitere Namen sind heut zu Tage nicht üblich.

Kapitel 18.

Von den Wurzeln in Bezug auf alle Potenzen.

189. Weil die Quadratwurzel einer gegebenen Zahl eine Zahl ist, deren Quadrat derselben gleich ist, und die Cubikwurzel eine solche, deren Cubus ihr gleich ist, so können auch von jeder gegebenen Zahl solche Wurzeln angegeben werden, deren vierte oder fünfte, oder beliebige andere Potenz derselben gegebenen Zahl gleich ist. Um diese verschiedenen Arten von Wurzeln von einander zu unterscheiden, wollen wir die Quadratwurzel die zweite Wurzel, die Cubikwurzel die dritte Wurzel nennen, so daß z. B. diejenige Wurzel, deren vierte Potenz einer gegebenen Zahl gleich ist, ihre vierte Wurzel, und diejenige,

deren fünfte Potenz derselben Zahl gleich ist, ihre fünfte Wurzel u. s. w. heißen wird.

190. Wie die zweite oder Quadratwurzel durch das Zeichen $\sqrt{\ }$, und die dritte oder Cubikwurzel durch das Zeichen $\sqrt[3]{\ }$ angedeutet wird, so pflegt man in gleicher Weise die vierte Wurzel durch das Zeichen $\sqrt[4]{\ }$, die fünfte Wurzel durch dieses Zeichen $\sqrt[5]{\ }$ u. s. w. anzuzeigen; woraus dann klar ist, daß nach dieser Schreibart das Zeichen der Quadratwurzel durch $\sqrt[2]{\ }$ ausgedrückt werden müßte. Weil aber die Quadratwurzeln am häufigsten vorkommen, so wird der Kürze halber die Zahl 2 aus dem Wurzelzeichen weggelassen. Wenn daher in dem Wurzelzeichen keine Ziffer befindlich ist, so muß stets darunter die Quadratwurzel verstanden werden.

191. Um dies vor Augen zu führen, wollen wir die verschiedenen Wurzeln der Zahl a hieher setzen, und ihre Bedeutung angeben.

$\sqrt{a}$ ist die zweite Wurzel von a,
$\sqrt[3]{a}$ „ „ dritte „ „ a,
$\sqrt[4]{a}$ „ „ vierte „ „ a,
$\sqrt[5]{a}$ „ „ fünfte „ „ a,
$\sqrt[6]{a}$ „ „ sechste „ „ a u. s. w.

Also, daß wiederum die

zweite Potenz von $\sqrt{a}$ dem a gleich ist,
dritte „ „ $\sqrt[3]{a}$ „ a „ „
vierte „ „ $\sqrt[4]{a}$ „ a „ „
fünfte „ „ $\sqrt[5]{a}$ „ a „ „
sechste „ „ $\sqrt[6]{a}$ „ a „ „ u. s. w.

192. Die Zahl a mag nun groß oder klein sein, so begreift man daher, welche Bedeutung alle Wurzeln dieser verschiedenen Grade haben.

Hiebei ist zu bemerken, daß, wenn für die Zahl a die Zahl 1 genommen wird, alle diese Wurzeln immer 1 bleiben, weil alle Potenzen von 1 immer 1 sind.

Wenn aber die Zahl a größer ist als 1, so sind auch alle Wurzeln größer als 1.

Ist aber die Zahl kleiner als 1, so sind auch alle ihre Wurzeln kleiner als 1.

193. Wenn die Zahl a positiv ist, so begreift man aus dem, was oben von den Quadrat- und Cubikwurzeln angeführt worden, daß auch alle übrige Wurzeln wirklich angegeben werden können, und folglich wirkliche und mögliche Zahlen sind.

Ist aber die Zahl a negativ, so werden ihre zweiten, vierten, sechsten, und überhaupt alle geraden Wurzeln unmögliche Zahlen, weil alle geraden Potenzen so wohl von Positiv- als Negativzahlen immer das Zeichen + bekommen.

Dagegen aber werden die dritten, fünften, siebenten, und überhaupt alle ungeraden Wurzeln negativ, weil die ungeraden Potenzen von Negativzahlen auch negativ sind.

194. Wir erhalten daher eine unendliche Menge neuer Arten von Irrational- oder surdischen Zahlen, weil, so oft die Zahl a keine solche wirkliche Potenz ist, als die Wurzel angiebt, so oft es auch nicht möglich ist, diese Wurzel durch ganze Zahlen oder Brüche auszudrücken. Folglich gehört dieselbe in dasjenige Geschlecht von Zahlen, welche Irrationalzahlen genannt werden.

Kapitel 19.

Von der Bezeichnung der Irrationalzahlen durch gebrochene Exponenten.

195. Wir haben im Kapitel 17 von den Rechnungsarten mit Potenzen (187) gezeigt, daß das Quadrat jeder Potenz gefunden wird, wenn man ihren Exponenten verdoppelt, und daß überhaupt das Quadrat oder die zweite Potenz von a^n ist a^{2n}. Daher ist wiederum von der Potenz

a^{2n} die Quadratwurzel a^n, und wird folglich gefunden, wenn man den Exponenten derselben halbirt oder durch 2 dividirt.

196. Also ist von a^2 die Quadratwurzel a^1, von a^4 ist die Quadratwurzel a^2, und von a^6 ist die Quadratwurzel a^3, u. s. w. Weil nun dies eine allgemeine Wahrheit ist, so sieht man, daß, wenn die Quadratwurzel von a^3 gefunden werden soll, dieselbe $a^{\frac{3}{2}}$ sein wird. Eben so wird von a^5 die Quadratwurzel sein $a^{\frac{5}{2}}$. Folglich von der Zahl a selbst oder von a^1 wird die Quadratwurzel $a^{\frac{1}{2}}$. Hieraus geht hervor, daß $a^{\frac{1}{2}}$ eben so viel ist als $\sqrt{a}$, welche neue Manier, die Quadratwurzel anzudeuten, wohl zu bemerken ist.

197. Wir haben ferner gezeigt, daß, um den Cubus einer Potenz, wie a^n, zu finden, man ihren Exponenten mit 3 multipliciren muß, und also der Cubus davon a^{3n} sein wird.

Wenn also rückwärts von der Potenz a^{3n} die dritte oder die Cubikwurzel gefunden werden soll, so ist dieselbe a^n, und man hat nur nöthig, den Exponenten jener durch 3 zu dividiren. Also von a^3 ist die Cubikwurzel a^1 oder a, von a^6 ist dieselbe a^2, von a^9 ist dieselbe a^3 u. s. w.

198. Dies muß nun auch wahr sein, wenn sich der Exponent nicht durch 3 theilen läßt, und daher wird von a^2 die Cubikwurzel $a^{\frac{2}{3}}$ sein. Und von a^4 ist dieselbe $a^{\frac{4}{3}}$ oder $a^{1\frac{1}{3}}$. Folglich wird auch von der Zahl a selbst, das ist von a^1, die Cubik- oder dritte Wurzel $a^{\frac{1}{3}}$ sein. Woraus erhellt, daß $a^{\frac{1}{3}}$ eben so viel als $\sqrt[3]{a}$ ist.

199. Eben so verhält es sich auch mit den höheren Wurzeln; und die vierte Wurzel von a wird $a^{\frac{1}{4}}$ sein, welches folglich eben so viel als $\sqrt[4]{a}$. In gleicher Weise wird die fünfte Wurzel von a auch $a^{\frac{1}{5}}$ sein, welches eben so viel ist als $\sqrt[5]{a}$. Und so steht es auch mit allen Wurzeln höherer Grade.

200. Man könnte nun also die schon längst eingeführten Wurzelzeichen gänzlich entbehren, und anstatt derselben die hier erklärten gebrochenen Exponenten gebrauchen; allein da man einmal an jene Zeichen gewöhnt ist, und dieselben in allen Schriften vorkommen, so ist es nicht rathsam, dieselben gänzlich abzuschaffen. Doch wird heut zu Tage diese neue Art auch häufig gebraucht, weil sie gerade die Natur der Sache deutlich in sich faßt. Denn daß $a^{\frac{1}{2}}$ wirklich die Quadratwurzel von a sei, sieht man gleich, wenn man nur das Quadrat davon nimmt, welches geschieht, indem man $a^{\frac{1}{2}}$ mit $a^{\frac{1}{2}}$ multiplicirt, da dann offenbar a^1, das ist a herauskommt.

201. Hieraus ersieht man auch, wie alle übrigen gebrochenen Exponenten verstanden werden müssen; z. B., wenn man $a^{\frac{4}{3}}$ hat, so muß von der Zahl a erstlich ihre vierte Potenz a^4 genommen, und alsdann die Cubik- oder dritte Wurzel gezogen werden, so daß $a^{\frac{4}{3}}$ eben so viel ist, als nach der gewöhnlichen Art $\sqrt[3]{a^4}$. Eben so wird der Werth $a^{\frac{3}{4}}$ gefunden, wenn man erstlich den Cubus oder die dritte Potenz von a sucht, welche a^3 ist, und dann aus derselben die vierte Wurzel zieht, so daß $a^{\frac{3}{4}}$ eben so viel ist als $\sqrt[4]{a^3}$. Eben so ist $a^{\frac{4}{5}}$ gerade so viel als $\sqrt[5]{a^4}$ u. s. w.

202. Wenn der Bruch, der den Exponenten vorstellt, größer ist als 1, so läßt sich der Werth auch in folgender Art bestimmen. Es sei gegeben $a^{\frac{5}{2}}$, so ist dieses so viel als $a^{2\frac{1}{2}}$, welches herauskommt, wenn man a^2 mit $a^{\frac{1}{2}}$ multiplicirt. Da nun $a^{\frac{1}{2}}$ so viel ist als $\sqrt{a}$, so ist $a^{\frac{5}{2}}$ so viel als $a^2\sqrt{a}$. Eben so ist $a^{\frac{10}{3}}$, das ist $a^{3\frac{1}{3}}$, eben so viel als $a^3\sqrt[3]{a}$; und $a^{\frac{15}{4}}$, das ist $a^{3\frac{3}{4}}$, ist eben so viel als $a^3\sqrt[4]{a^3}$. Diese Beispiele erweisen den großen Nutzen der gebrochenen Exponenten.

203. Dieser Nutzen erstreckt sich auch auf die Brüche.

Wenn z. B. $\frac{1}{\sqrt{a}}$ gegeben ist, so ist dieses so viel als $\frac{1}{a^{\frac{1}{2}}}$. Wir haben aber früher gesehen, daß der Bruch $\frac{1}{a^n}$ durch a^{-n} ausgedrückt werden kann, folglich kann $\frac{1}{\sqrt{a}}$ durch $a^{-\frac{1}{2}}$ ausgedrückt werden. Eben so wird $\frac{1}{\sqrt[3]{a}}$ auch $a^{-\frac{1}{3}}$ sein. Ferner wird $\frac{a^2}{\sqrt[4]{a^3}}$ in $\frac{a^2}{a^{\frac{3}{4}}}$ verwandelt, woraus entspringt a^2 multiplicirt mit $a^{-\frac{3}{4}}$, welches ferner verwandelt wird in $a^{\frac{5}{4}}$ das ist $a^{1\frac{1}{4}}$, und das ist ferner $a\sqrt[4]{a}$. Dergleichen Reductionen werden durch Uebung erheblich erleichtert.

204. Endlich ist noch zu beachten, daß jede Wurzel in vielerlei Arten dargestellt werden kann. Denn da $\sqrt{a}$ so viel ist als $a^{\frac{1}{2}}$ und $\frac{1}{2}$ in alle diese Brüche $\frac{2}{4}$, $\frac{3}{6}$, $\frac{4}{8}$, $\frac{5}{10}$, $\frac{6}{12}$ rc. verwandelt werden kann, so ist klar, daß $\sqrt{a}$ so viel ist als $\sqrt[4]{a^2}$, ferner als $\sqrt[6]{a^3}$, wie auch als $\sqrt[8]{a^4}$ u. s. w. Eben so ist $\sqrt[3]{a}$ so viel als $a^{\frac{1}{3}}$; $a^{\frac{1}{3}}$ aber so viel als $\sqrt[6]{a^2}$, oder $\sqrt[9]{a^3}$, oder $\sqrt[12]{a^4}$. Hieraus ersieht man leicht, daß die Zahl a selbst, oder a^1, durch folgende Wurzelzeichen $\sqrt[2]{a^2}$, oder $\sqrt[3]{a^3}$, oder $\sqrt[4]{a^4}$, oder $\sqrt[5]{a^5}$ u. s. w. ausgedrückt werden kann.

205. Dies kommt bei der Multiplication und Division wohl zu statten. Also z. B. wenn $\sqrt[2]{a}$ mit $\sqrt[3]{a}$ multiplicirt werden soll, schreibt man $\sqrt[6]{a^3}$ statt $\sqrt[2]{a}$, und $\sqrt[6]{a^2}$ statt $\sqrt[3]{a}$. Nunmehr hat man gleiche Wurzelzeichen, und erhält daher das Product $\sqrt[6]{a^5}$; was auch daraus erhellt, weil $a^{\frac{1}{2}}$ mit $a^{\frac{1}{3}}$ multiplicirt $a^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}$ giebt. Nun aber ist $\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$ so viel als $\frac{5}{6}$, und also das Product $a^{\frac{5}{6}}$ oder $\sqrt[6]{a^5}$. Sollte $\sqrt[2]{a}$ oder $a^{\frac{1}{2}}$ durch $\sqrt[3]{a}$ oder $a^{\frac{1}{3}}$

dividirt werden, so bekommt man $a^{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}}$, das ist $a^{\frac{3}{6}-\frac{2}{6}}$, also $a^{\frac{1}{6}}$, folglich $\sqrt[6]{a}$.

Kapitel 20.

Von den verschiedenen Rechnungsarten und ihrer Verbindung.

206. Wir haben bisher als verschiedene Rechnungsarten die Addition, Subtraction, Multiplication und Division, die Erhebung in Potenzen, und endlich die Ausziehung der Wurzeln kennen gelernt.

Daher wird es jedenfalls zu besserer Erläuterung dienen, wenn wir den Ursprung dieser Rechnungsarten und ihre Verbindung unter einander deutlich erklären, damit man erkennen möge, ob noch andere dergleichen Arten möglich sind oder nicht.

Zu diesem Behufe wenden wir ein neues Zeichen an, welches anstatt der bisher so häufig vorgekommenen Wendung, ist so viel als, gesetzt werden kann. Dieses Zeichen ist = und wird ausgesprochen ist gleich. Also wenn geschrieben wird $a = b$, so ist die Bedeutung, daß a eben so viel sei als b, oder daß a dem b gleich sei; also ist z. B. $3 . 5 = 15$.

207. Die erste Rechnungsart, welche sich unserm Verstande darstellt, ist unstreitig die Addition, durch welche zwei Zahlen zusammengezählt, oder die Summe derselben gefunden werden soll. Es seien demnach a und b die zwei gegebenen Zahlen und ihre Summe werde durch den Buchstaben c angedeutet, so hat man $a + b = c$. Wenn also die beiden Zahlen a und b bekannt sind, lehrt die Addition, wie man daraus die Zahl c findet.

208. Man behalte diese Vergleichung $a + b = c$, kehre aber jetzt die Frage um, und frage, wenn die Zahlen a und c bekannt sind, wie man die Zahl b findet.

Man fragt also, welche Zahl man zu der Zahl a addiren muß, damit die Zahl c herauskommt. Es sei z. B.

$a = 3$ und $c = 8$, so daß $3 + b = 8$ sein muß, so ist klar, daß b gefunden wird, wenn man 3 von 8 subtrahirt. Ueberhaupt also um b zu finden, muß man a von c subtrahiren und da wird $b = c - a$. Denn wenn a dazu addirt wird, so bekommt man $c - a + a$, das ist c.

Hierin besteht also der Ursprung der Subtraction.

209. Die Subtraction entsteht also, wenn die bei der Addition gestellte Frage umgekehrt wird. Und da es sich zutragen kann, daß die Zahl, welche abgezogen werden soll, größer ist als diejenige, von der man sie abziehen muß, wie wenn z. B. 9 von 5 abgezogen werden soll, so erhalten wir daher den Begriff von einer neuen Art Zahlen, welche negativ genannt werden, weil $5 - 9 = -4$.

210. Wenn viele Zahlen, welche addirt werden sollen, einander gleich sind, wird ihre Summe durch die Multiplication gefunden, und heißt alsdann das Product. Also bedeutet ab das Product, welches entsteht, wenn die Zahl a mit der Zahl b multiplicirt wird. Wenn wir nun dieses Product mit dem Buchstaben c andeuten, so haben wir $ab = c$, und die Multiplication lehrt, wenn die Zahlen a und b bekannt sind, wie man daraus die Zahl c finden kann.

211. Laßt uns nun folgende Frage aufwerfen: Wenn die Zahlen c und a bekannt sind, wie kann man daraus die Zahl b finden? Es sei z. B. $a = 3$ und $c = 15$, so daß $3b = 15$, und es werde gefragt, mit welcher Zahl man 3 multipliciren müsse, damit 15 herauskomme. Dies geschieht nun durch die Division, und wird daher überhaupt die Zahl b gefunden, wenn man c durch a dividirt; woraus folglich die Gleichung $b = \frac{c}{a}$ hervorgeht.

212. Weil es nun oft vorkommt, daß sich die Zahl c nicht wirklich durch die Zahl a theilen läßt, und gleichwohl der Buchstabe b einen bestimmten Werth haben muß, so werden wir zu einer neuen Art von Zahlen geführt, welche

Brüche genannt werden. Also wenn wir annehmen $a = 4$, und $c = 3$, so daß $4b = 3$, so sieht man wohl, daß b keine ganze Zahl sein kann, sondern ein Bruch ist, nämlich $b = \frac{3}{4}$.

213. Wie nun die Multiplication aus der Addition entstanden, wenn viele Zahlen, die addirt werden sollen, einander gleich sind, so wollen wir jetzt auch bei der Multiplication annehmen, daß viele gleiche Zahlen mit einander multiplicirt werden sollen, und dadurch gelangen wir zu den Potenzen, welche auf allgemeine Art durch die Form a^b dargestellt werden, wodurch angegeben wird, daß die Zahl a so oft mit sich selbst multiplicirt werden muß, als die Zahl b angiebt. Hier wird, wie oben angeführt, a die Wurzel, b der Exponent und a^b die Potenz genannt.

214. Wenn wir nun diese Potenz selbst durch den Buchstaben c andeuten, so haben wir $a^b = c$, eine Gleichung, in der also drei Buchstaben a, b, c vorkommen. Unter dieser Voraussetzung wird in der Lehre von den Potenzen gezeigt, wie man, wenn die Wurzel a nebst dem Exponenten b bekannt ist, daraus die Potenz selbst, das ist den Buchstaben c bestimmen kann. Es sei z. B. $a = 5$, und $b = 3$, also daß $c = 5^3$; woraus man sieht, daß von 5 die dritte Potenz genommen werden muß, welche 125 ist; also wird $c = 125$.

Hier wird also gelehrt, wie man aus der Wurzel a und dem Exponenten b die Potenz c finden soll.

215. Wir wollen nun auch hier sehen, wie die Frage umgekehrt oder verändert werden kann, so daß aus zwei von den drei Zahlen a, b, c die dritte gefunden werden soll. Dies kann auf zweierlei Art geschehen, indem nebst dem c entweder a oder b als bekannt angenommen wird. Wobei zu merken, daß in den obigen Fällen bei der Addition und Multiplication nur eine Veränderung stattfindet, weil im ersten Fall, wo $a + b = c$, es sich gleich bleibt, ob

man nebst dem c noch a oder b für bekannt annimmt, indem es gleich viel ist, ob ich schreibe $a + b$ oder $b + a$; und eben so verhält es sich auch mit der Gleichung $ab = c$, oder $ba = c$, wo die Buchstaben a und b ebenfalls vertauscht werden können. Allein dies findet bei den Potenzen nicht statt, indem für a^b keineswegs b^a gesetzt werden kann, was aus einem Beispiel leicht zu ersehen ist. Wenn $a = 5$ und $b = 3$ gesetzt wird, so wird $a^b = 5^3 = 125$. Hingegen wird $b^a = 3^5 = 243$, welches sehr erheblich von 125 verschieden ist.

216. Daraus folgt, daß hier wirklich noch zwei Fragen gestellt werden können, wovon die erste ist: Wenn nebst der Potenz c noch der Exponent b gegeben wird, wie man daraus die Wurzel a finden soll. Die zweite Frage aber ist: Wenn nebst der Potenz c noch die Wurzel a als bekannt angenommen wird, wie man daraus den Exponenten b finden soll.

217. Vorher ist nur die erste von diesen zwei Fragen erörtert worden, und zwar in der Lehre von der Ausziehung der Wurzeln (Kapitel 18). Denn wenn man z. B. $b = 2$ setzt und $a^2 = c$, so muß a eine Zahl sein, deren Quadrat dem c gleich ist, und da wird $a = \sqrt{c}$. Eben so, wenn $b = 3$, so hat man $a^3 = c$, da muß also der Cubus von a der gegebenen Zahl c gleich sein, und da erhält man $a = \sqrt[3]{c}$. Hieraus läßt sich auf allgemeine Art ersehen, wie man aus den beiden Buchstaben c und b den Buchstaben a finden kann. Es wird nämlich $a = \sqrt[b]{c}$ sein.

218. So oft es sich nun ereignet, daß die gegebene Zahl c nicht wirklich eine solche Potenz ist, deren Wurzel verlangt wird, so ist schon oben (128) bemerkt worden, daß die verlangte Wurzel a weder in ganzen Zahlen noch in Brüchen ausgedrückt werden kann. Da nun dieselbe

gleichwohl ihren bestimmten Werth haben muß, so sind wir dadurch zu einer neuen Art von Zahlen gelangt, welche Irrational- oder surdische Zahlen genannt werden; von welchen es nach der Mannigfaltigkeit der Wurzeln sogar unendlich vielerlei Arten giebt. Auch hat uns diese Betrachtung noch auf eine ganz besondere Art von Zahlen geleitet, welche unmöglich sind und imaginäre oder eingebildete Zahlen genannt werden.

219. Man sieht also, daß uns noch eine Frage zu betrachten übrig bleibt, nämlich wenn außer der Potenz c noch die Wurzel a als bekannt angenommen wird, wie man daraus den Exponenten finden soll? Diese Frage wird uns zu der wichtigen Lehre von den Logarithmen führen, deren Nutzen in der ganzen Mathematik so groß ist, daß fast keine weitläufige Rechnung ohne ihre Hülfe zu Stande gebracht werden kann. Wir werden also diese Lehre in dem folgenden Kapitel erklären, und hiebei wieder zu ganz neuen Arten von Zahlen, welche nicht einmal zu den obigen irrationalen gerechnet werden können, gelangen.

Kapitel 21.

Von den Logarithmen.

220. Wir betrachten also die Gleichung $a^b = c$, und bemerken zuvörderst, daß in der Lehre von den Logarithmen für die Wurzel a eine gewisse Zahl nach Belieben festgestellt wird, so daß diese immer denselben Werth behält. Wenn nun der Exponent b so angenommen wird, daß die Potenz a^b einer gegebenen Zahl c gleich wird, so wird der Exponent b der Logarithmus dieser Zahl c genannt, und um Logarithmen anzuzeigen, pflegt man sich der Abkürzung log. zu bedienen, welche der Zahl c vorgesetzt wird; und also schreibt man $b = \log. c$, wodurch angedeutet wird, daß b gleich ist dem Logarithmus der Zahl c, oder der Logarithmus von c ist b.

221. Nachdem also die Wurzel a einmal festgestellt worden, ist der Logarithmus jeder Zahl c nichts anders, als der Exponent derjenigen Potenz von a, welche der Zahl c gleich ist. Da nun $c = a^b$, so ist b der Logarithmus der Potenz a^b. Setzt man nun $b = 1$, so ist 1 der Logarithmus von a^1, das ist $\log. a = 1$; setzt man $b = 2$, so ist 2 der Logarithmus von a^2, das ist $\log. a^2 = 2$. Eben so wird man haben: $\log. a^3 = 3$, $\log. a^4 = 4$, $\log. a^5 = 5$, u. s. w.

222. Setzt man $b = 0$, so wird 0 der Logarithmus von a^0 sein; nun aber ist $a^0 = 1$, und also ist $\log. 1 = 0$, die Wurzel a mag angenommen werden, wie man will.

Setzt man ferner $b = -1$, so wird -1 der Logarithmus von a^{-1}. Es ist aber $a^{-1} = \frac{1}{a}$; also hat man $\log. \frac{1}{a} = -1$. Eben so bekommt man $\log. \frac{1}{a^2} = -2$, $\log. \frac{1}{a^3} = -3$, $\log. \frac{1}{a^4} = -4$, u. s. w.

223. Hieraus erhellt, wie die Logarithmen von allen Potenzen der Wurzel a, und auch sogar von Brüchen, deren Zähler $= 1$, der Nenner aber eine Potenz von a ist, angegeben werden können; in welchen Fällen die Logarithmen ganze Zahlen sind. Nimmt man aber für b Brüche an, so werden dieselben Logarithmen von Irrationalzahlen; wenn nämlich $b = \frac{1}{2}$, so ist $\frac{1}{2}$ der Logarithmus von $a^{\frac{1}{2}}$ oder von $\sqrt{a}$. Daher bekommt man $\log. \sqrt{a} = \frac{1}{2}$; eben so $\log. \sqrt[3]{a} = \frac{1}{3}$ und $\log. \sqrt[4]{a} = \frac{1}{4}$, u. s. w.

224. Wenn aber der Logarithmus von einer andern Zahl c gefunden werden soll, so sieht man leicht, daß derselbe weder eine ganze Zahl, noch ein Bruch sein kann. Inzwischen muß es doch immer einen solchen Exponenten geben, nämlich b, so daß die Potenz a^b der gegebenen Zahl c gleich wird, und alsdann hat man $b = \log. c$. Folglich hat man auf allgemeine Art $a^{\log. c} = c$.

225. Wir wollen nun eine andere Zahl d betrachten, deren Logarithmus ebenfalls durch log. d angedeutet wird, also daß $a^{\log. d} = d$. Man multiplicire nun diese Formel mit der vorhergehenden $a^{\log. c} = c$, so bekommt man $a^{\log. c + \log. d} = cd$; nun aber ist der Exponent stets der Logarithmus der Potenz; folglich ist $\log. c + \log. d = \log. cd$. Dividirt man aber die erstere Formel durch die letztere, so bekommt man $a^{\log. c - \log. d} = \frac{c}{d}$. Folglich wird $\log. c - \log. d = \log. \frac{c}{d}$.

226. Hiedurch werden wir zu den zwei Haupteigenschaften der Logarithmen geführt, wovon die erste in der Gleichung $\log. c + \log. d = \log. cd$ besteht, und woraus wir lernen, daß der Logarithmus eines Products cd gefunden wird, wenn man die Logarithmen der Factoren addirt. Die zweite Eigenschaft ist in der Gleichung $\log. c - \log. d = \log. \frac{c}{d}$ enthalten und zeigt an, daß der Logarithmus eines Bruchs gefunden wird, wenn man von dem Logarithmus des Zählers den Logarithmus des Nenners subtrahirt.

227. Und eben hierin besteht der große Nutzen, den die Logarithmen in der Rechenkunst leisten. Denn, wenn zwei Zahlen mit einander multiplicirt oder dividirt werden sollen, hat man nur nöthig, die Logarithmen derselben zu addiren oder zu subtrahiren. Es ist aber offenbar, daß es ungleich viel leichter ist, Zahlen zu addiren oder zu subtrahiren, als zu multipliciren oder zu dividiren, besonders wenn die Zahlen sehr groß sind.

228. Noch größer aber ist der Nutzen bei den Potenzen und der Ausziehung der Wurzeln. Denn wenn $d = c$, so hat man aus der ersteren Eigenschaft $\log. c + \log. c = \log. cc$, also ist $\log. c^2 = 2 \log. c$; eben so bekommt man $\log. c^3 = 3 \log. c$ und $\log. c^4 = 4 \log. c$, und allgemein $\log. c^n = n \log. c$.

Nimmt man nun für n gebrochene Zahlen an, so bekommt man log. $c^{\frac{1}{2}}$, das ist log. $\sqrt{c} = \frac{1}{2}$ log. c; ferner auch für Negativzahlen log. c^{-1}, das ist log. $\frac{1}{c} = -$log. c, und log. c^{-2}, das ist log. $\frac{1}{c^2} = -2$ log. c u. s. w.

229. Wenn man also Tabellen hat, worin für alle Zahlen die Logarithmen berechnet sind, kann man mit Hülfe derselben die schwierigsten Rechnungen, in denen große Multiplicationen und Divisionen, ebenso auch Erhebungen zu Potenzen und Ausziehungen der Wurzeln vorkommen, mit leichter Mühe ausführen, weil man in diesen Tafeln sowohl für jede Zahl ihre Logarithmen, als auch für jeden Logarithmus die Zahl selbst finden kann. Also wenn man aus einer Zahl c die Quadratwurzel finden soll, so sucht man erstlich den Logarithmus der Zahl c, welcher ist log. c, hierauf nimmt man davon die Hälfte, welche ist $\frac{1}{2}$ log. c, und diese ist der Logarithmus der gesuchten Quadratwurzel; also die Zahl, die diesem Logarithmus zukommt, und in der Tafel gefunden wird, ist die Quadratwurzel selbst.

230. Wir haben oben gesehen, daß die Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6 2c. und folglich alle Positivzahlen Logarithmen sind von der Wurzel a und ihren positiven Potenzen, das ist, von Zahlen, die größer sind als Eins.

Dagegen die Negativzahlen, als -1, -2 2c., sind Logarithmen von den Brüchen $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{aa}$ 2c., welche kleiner als Eins, gleichwohl aber noch größer als 0 sind.

Hieraus folgt, daß, wenn der Logarithmus positiv ist, die Zahl immer größer ist als Eins; wenn aber der Logarithmus negativ ist, so ist die Zahl immer kleiner als Eins, doch aber größer als 0. Folglich können für Negativzahlen keine Logarithmen angegeben werden, oder die Logarithmen von Negativzahlen sind unmöglich und gehören zu dem Geschlecht der imaginären oder eingebildeten Zahlen.

231. Um dieses besser zu erläutern, wird es dienlich sein, für die Wurzel a eine bestimmte Zahl anzunehmen, und zwar diejenige, nach welcher die üblichen logarithmischen Tabellen berechnet sind. Es wird aber darin die Zahl 10 für die Wurzel a angenommen, weil nach derselben schon die ganze Rechenkunst eingerichtet ist. Man sieht aber leicht, daß dafür jede andre Zahl, die nur größer ist als Eins, angenommen werden könnte; denn wenn man $a = 1$ setzen wollte, so würden alle Potenzen davon, als $a^b = 1$, immer Eins bleiben, und niemals einer andern gegebenen Zahl c gleich werden können.

Kapitel 22.

Von den üblichen logarithmischen Tabellen.

232. In diesen Tabellen wird, wie vorher erwähnt, zu Grunde gelegt, daß die Wurzel $a = 10$ sei; also ist der Logarithmus von jeder Zahl c derjenige Exponent, welcher angiebt, in welche Potenz die Zahl 10 erhoben werden muß, um der Zahl c gleich zu sein. Oder wenn der Logarithmus der Zahl c durch log. c bezeichnet wird, so hat man immer $10^{\log. c} = c$.

233. Wir haben schon bemerkt, daß von der Zahl 1 der Logarithmus immer 0 ist, weil $10^0 = 1$; also ist

log. $1 = 0$, log. $10 = 1$, log. $100 = 2$, log. $1000 = 3$, log. $10000 = 4$, log. $100000 = 5$, log. $1000000 = 6$;
ferner log. $\frac{1}{10} = -1$, log. $\frac{1}{100} = -2$, log $\frac{1}{1000} = -3$, log. $\frac{1}{10000} = -4$, log. $\frac{1}{100000} = -5$, log. $\frac{1}{1000000} = -6$.

234. Während nun die Logarithmen von diesen Hauptzahlen sich leicht ergeben, ist es viel schwerer, die Logarithmen aller übrigen Zahlen zu finden, welche gleichwohl in den Tabellen angegeben werden müssen. Hier ist jedoch noch nicht der Ort, eine hinlängliche Anweisung zu geben, wie dieselben gefunden werden können; daher wollen wir nur überhaupt bemerken, was dabei zu beobachten ist.

235. Da nun log. $1 = 0$, und log. $10 = 1$, so ist leicht zu erkennen, daß von allen Zahlen zwischen 1 und 10 die Logarithmen zwischen 0 und 1 liegen, oder größer als 0, und doch kleiner als 1 sein müssen.

Wenn wir z. B. die Zahl 2 betrachten, so ist gewiß, daß ihr Logarithmus, den wir durch den Buchstaben x bezeichnen wollen, also log. $2 = x$ größer ist als 0, und doch kleiner als 1. Es muß aber eine Zahl sein, die so beschaffen ist, daß 10^x gerade der Zahl 2 gleich werde.

Man kann auch leicht sehen, daß x viel kleiner sein muß als $\frac{1}{2}$, oder daß $10^{\frac{1}{2}}$ größer als 2 sein muß, denn wenn man beiderseits die Quadrate nimmt, so wird das Quadrat von $10^{\frac{1}{2}} = 10^1$; das Quadrat von 2 aber wird 4, also viel kleiner. Eben so ist auch $\frac{1}{3}$ für x noch zu groß, oder $10^{\frac{1}{3}}$ ist größer als 2. Denn der Cubus von $10^{\frac{1}{3}} = 10$, der Cubus von 2 aber ist nur 8. Hingegen ist $\frac{1}{4}$ für x angenommen zu klein; denn $10^{\frac{1}{4}}$ ist kleiner als 2, weil die vierte Potenz von jenem 10 ist, von diesem aber 16. Hieraus sieht man also, daß x oder log. 2 kleiner ist als $\frac{1}{3}$, und doch größer als $\frac{1}{4}$; man kann auch für jeden andern Bruch, der zwischen $\frac{1}{3}$ und $\frac{1}{4}$ ist, befinden, ob derselbe zu groß oder zu klein sei. Also ist $\frac{2}{7}$ kleiner als $\frac{1}{3}$, und größer als $\frac{1}{4}$; wollte man nun $\frac{2}{7}$ für x nehmen, so müßte $10^{\frac{2}{7}} = 2$ sein; wenn aber dies richtig wäre, so müßten auch die siebenten Potenzen einander gleich sein. Es ist aber von $10^{\frac{2}{7}}$ die siebente Potenz $= 10^2 = 100$, welche der siebenten Potenz von 2 gleich sein müßte; da nun die siebente Potenz von $2 = 128$ und also größer als jene, so ist auch $10^{\frac{2}{7}}$ kleiner als 2, und also $\frac{2}{7}$ kleiner als log. 2, oder log. 2 ist größer als $\frac{2}{7}$, und doch kleiner als $\frac{1}{3}$.

Ein Bruch, der kleiner als $\frac{1}{3}$, aber größer als $\frac{2}{7}$, ist $\frac{3}{10}$; sollte nun $10^{\frac{3}{10}} = 2$ sein, so müßten auch die zehnten Potenzen einander gleich sein; es ist aber von $10^{\frac{3}{10}}$ die zehnte

Potenz $= 10^3 = 1000$, von 2 aber ist die zehnte Potenz $= 1024$; woraus wir schließen, daß $\frac{3}{10}$ noch zu klein ist, oder daß log. 2 größer als $\frac{3}{10}$ und doch kleiner als $\frac{1}{3}$ ist.

236. Diese Betrachtung zeigt uns, daß log. 2 seine bestimmte Größe hat, weil wir wissen, daß derselbe gewiß größer ist als $\frac{3}{10}$, und doch kleiner als $\frac{1}{3}$. Weiter können wir hier noch nicht gehen, und da wir den wahren Werth noch nicht wissen, so wollen wir für denselben den Buchstaben x gebrauchen, also daß log. $2 = x$, und zeigen, wenn derselbe gefunden wäre, wie man daraus von unzählig viel andern Zahlen die Logarithmen finden könne; wozu die oben gegebene Gleichung dient, log. cd $=$ log. c $+$ log. d, oder daß der Logarithmus von einem Product gefunden wird, wenn man die Logarithmen der Factoren addirt (225).

237. Da nun log. $2 = x$, und log. $10 = 1$, so bekommen wir log. $20 = x + 1$, und log. $200 = x + 2$, ferner log. $2000 = x + 3$, weiter log. $20000 = x + 4$ und log. $200000 = x + 5$, u. s. w.

238. Da ferner log. $c^2 = 2$log. c und log. $c^3 = 3$log. c, log. $c^4 = 4$ log. c 2c., so erhalten wir daher log. $4 = 2x$, log. $8 = 3x$, log. $16 = 4x$, log. $32 = 5x$, log. $64 = 6x$ 2c.

Hieraus finden wir ferner log. $40 = 2x + 1$, log. $400 = 2x + 2$, log. $4000 = 2x + 3$, log. $40000 = 2x + 4$ 2c.
log. $80 = 3x + 1$, log. $800 = 3x + 2$, log. $8000 = 3x + 3$, log. $80000 = 3x + 4$ 2c.
log. $160 = 4x + 1$, log. $1600 = 4x + 2$, log. $16000 = 4x + 3$, log. $160000 = 4x + 4$ 2c.

239. Da ferner gefunden worden log. $\frac{c}{d} =$ log. c $-$ log. d, so setze man $c = 10$, und $d = 2$, und weil log. $10 = 1$ und log. $2 = x$, so bekommen wir log. $\frac{10}{2}$, das ist log. $5 = 1 - x$, daher erhalten wir

log. $50 = 2 - x$, log. $500 = 3 - x$, log. $5000 = 4 - x$ 2c.,
ferner
log. $25 = 2 - 2x$, log. $125 = 3 - 3x$, log. $625 = 4 - 4x$ 2c.

In dieser Weise gelangen wir weiter zu Folgendem:

$\log.250 = 3 - 2x$, $\log.2500 = 4 - 2x$, $\log.25000 = 5 - 2x$ ꝛc.

ferner $\log.1250 = 4 - 3x$, $\log.12500 = 5 - 3x$, $\log.125000 = 6 - 3x$ ꝛc.

ferner $\log.6250 = 5 - 4x$, $\log.62500 = 6 - 4x$, $\log.625000 = 7 - 4x$ u. s. w.

240. Hätte man auch den Logarithmus von 3 gefunden, so könnte man daher noch von unendlich vielen andern Zahlen die Logarithmen bestimmen. Wir wollen den Buchstaben y für log. 3 setzen, und daher würden wir haben:

$\log. 30 = y + 1$, $\log. 300 = y + 2$, $\log. 3000 = y + 3$ ꝛc.

$\log. 9 = 2y$, $\log. 27 = 3y$, $\log. 81 = 4y$, $\log. 243 = 5y$ ꝛc.

Daher kann man noch weiter finden:

$\log. 6 = x + y$, $\log. 12 = 2x + y$, $\log. 18 = x + 2y$,

ebenso auch $\log. 15 = \log. 3 + \log. 5 = y + 1 - x$.

241. Wir haben früher (41) gesehen, daß alle Zahlen aus den sogenannten Primzahlen durch die Multiplication hervorgebracht werden. Also wenn nun die Logarithmen der Primzahlen bekannt wären, so könnte man daraus die Logarithmen aller andern Zahlen blos durch die Addition finden; als z. B. von der Zahl 210, welche aus folgenden Factoren besteht, $2 . 3 . 5 . 7$, wird der Logarithmus $= \log. 2 + \log. 3 + \log. 5 + \log. 7$ sein; ebenso da $360 = 2 . 2 . 2 . 3 . 3 . 5 = 2^3 . 3^2 . 5$, so wird $\log. 360 = 3 \log. 2 + 2 \log. 3 + \log. 5$, woraus erhellt, wie man aus den Logarithmen der Primzahlen die Logarithmen von allen andern Zahlen bestimmen kann. Also bei Anfertigung der logarithmischen Tabellen hat man nur dafür zu sorgen, daß die Logarithmen von allen Primzahlen gefunden werden.

Kapitel 23.

Von der Art, die Logarithmen darzustellen.

242. Wir haben gesehen, daß der Logarithmus von 2 größer ist als $\frac{3}{10}$ und kleiner als $\frac{1}{3}$, oder daß der Exponent von 10 zwischen diesen beiden Brüchen liegen muß, wenn die

Potenz der Zahl 2 gleich werden soll. Man mag aber einen Bruch annehmen, was für einen man wolle, immer wird die Potenz eine Irrationalzahl, und entweder größer oder kleiner als 2 sein, daher sich der Logarithmus von 2 durch keinen solchen Bruch ausdrücken läßt. Man muß sich deswegen begnügen, den Werth desselben durch Annäherungen so genau zu bestimmen, daß der Fehler unmerklich werde. Hiezu bedient man sich der sogenannten Decimalbrüche, deren Natur und Beschaffenheit deutlicher erklärt zu werden verdient.

243. Man weiß, daß in der gewöhnlichen Art, alle Zahlen mit den zehn Ziffern

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9

zu schreiben, dieselben nur auf der ersten Stelle zur rechten Hand ihren natürlichen Werth haben, und daß auf der zweiten Stelle ihr Werth 10mal größer wird, auf der dritten aber 100mal, auf der vierten 1000mal, und so fort auf jeder folgenden Stelle 10mal größer als auf der vorhergehenden.

Also in der Zahl 1765 steht auf der ersten Stelle zur Rechten die Ziffer 5, die auch wirklich 5 bedeutet, auf der zweiten Stelle steht 6, welche aber nicht 6, sondern 10 . 6 oder 60 anzeigt; die Ziffer 7 auf der dritten Stelle bedeutet 100 . 7 oder 700, und endlich die 1 auf der vierten Stelle bedeutet 1000, und so wird auch diese Zahl ausgesprochen:

Ein Tausend, Sieben Hundert, Sechszig, und Fünf.

244. Wie nun von der Rechten zur Linken die Bedeutung der Ziffern immer 10mal größer und folglich von der Linken zur Rechten immer 10mal kleiner wird, so kann man nach diesem Gesetz noch weiter gehen und gegen die rechte Hand fortrücken, da dann die Bedeutung der Ziffern immer fort 10mal kleiner wird. Hier muß man aber die Stelle wohl bemerken, wo die Ziffern ihren natürlichen Werth haben. Dieses geschieht durch ein Komma, das

hinter diese Stelle gesetzt wird. Wenn man daher die Zahl 36,54892 geschrieben findet, so ist dieselbe so zu verstehen: erstlich hat die Ziffer 6 ihre natürliche Bedeutung, und die Ziffer 3 auf der zweiten Stelle von der Linken 30. Aber nach dem Komma bedeutet die Ziffer 5 nur $\frac{5}{10}$, die folgende 4 sind $\frac{4}{100}$, die Ziffer 8 bedeutet $\frac{8}{1000}$, die Ziffer 9 $\frac{9}{10000}$ und die Ziffer 2 $\frac{2}{100000}$; woraus man sieht, daß, je weiter diese Ziffern nach der rechten Hand fortgesetzt werden, ihre Werthe immer kleiner und endlich so klein werden, daß sie für Nichts zu achten sind.

245. Diese Art, die Zahlen auszudrücken, heißt nun ein Decimalbruch, und auf diese Art werden auch die Logarithmen in den Tabellen dargestellt. Daselbst wird z. B. der Logarithmus von 2 so ausgedrückt: 0,3010300; wobei folglich zu merken, daß, da vor dem Komma 0 steht, dieser Logarithmus auch kein Ganzes beträgt, und daß sein Werth $\frac{3}{10} + \frac{0}{100} + \frac{1}{1000} + \frac{0}{10000} + \frac{3}{100000} + \frac{0}{1000000} + \frac{0}{10000000}$ sei. Man hätte also wohl die zwei hintersten Nullen weglassen können, allein dieselben dienen, um zu zeigen, daß von diesen Theilchen wirklich keine vorhanden sind. Man stellt damit nicht in Abrede, daß nicht weiter noch kleinere Theilchen folgen würden. Diese läßt man aber wegen ihrer Kleinheit unbeachtet.

246. Den Logarithmus von 3 findet man also ausgedrückt: 0,4771213, woraus man sieht, daß derselbe kein Ganzes beträgt, sondern daß er aus diesen Brüchen besteht: $\frac{4}{10} + \frac{7}{100} + \frac{7}{1000} + \frac{1}{10000} + \frac{2}{100000} + \frac{1}{1000000} + \frac{3}{10000000}$. Man muß aber nicht glauben, daß dieser Logarithmus in solcher Art ganz genau ausgedrückt sei. Doch aber weiß man so viel, daß der Fehler gewiß kleiner ist als $\frac{1}{10000000}$, welcher auch wirklich so klein ist, daß man ihn in den meisten Rechnungen unbeachtet lassen kann.

247. Nach dieser Art heißt der Logarithmus von 1 also 0,0000000, weil derselbe wirklich 0 ist; von 10 aber

heißt der Logarithmus 1,0000000, woraus man erkennt, daß derselbe gerade 1 ist. Von 100 aber ist der Logarithmus 2,0000000 oder gerade 2, woraus zu sehen, daß von den Zahlen zwischen 10 und 100, oder welche mit zwei Ziffern geschrieben werden, die Logarithmen zwischen 1 und 2 enthalten sein müssen, und folglich durch 1 und einen Decimalbruch ausgedrückt werden. Also ist $\log. 50 = 1{,}6989700$, derselbe ist also 1 und noch außerdem $\frac{6}{10} + \frac{9}{100} + \frac{8}{1000} + \frac{9}{10000} + \frac{7}{100000}$. Von den Zahlen aber über Hundert bis Tausend enthalten die Logarithmen 2 nebst einem hinzugefügten Decimalbruch; so $\log. 800 = 2{,}9030900$. Von 1000 bis 10000 sind die Logarithmen größer als 3. Von 10000 bis 100000 größer als 4 u. s. w.

248. Von den Zahlen unter 10 aber, welche nur mit einer Ziffer geschrieben werden, ist der Logarithmus noch kein Ganzes, und deswegen steht vor dem Komma eine 0. Bei jedem Logarithmus sind also zwei Theile zu beachten. Der erste, den man **Kennziffer** oder **Charakteristik** nennt, steht vor dem Komma und zeigt die Ganzen an, wenn solche vorhanden; der andere Theil aber, den man **Mantisse** nennt, zeigt die Decimalbrüche an, die zu dem Ganzen noch gesetzt werden müssen. Also ist es leicht, den ersten oder ganzen Theil des Logarithmus jeder Zahl anzugeben, weil derselbe 0 ist für alle Zahlen, die nur aus einer Ziffer bestehen. Für die Zahlen, die aus 2 Ziffern bestehen, ist derselbe 1. Derselbe ist ferner 2 für diejenigen, die aus 3 Ziffern bestehen, und so fort ist derselbe immer um Eins kleiner als die Anzahl der Ziffern. Wenn man also den Logarithmus von 1766 verlangt, so weiß man schon, daß der erstere oder ganze Theil davon 3 sein muß.

249. Umgekehrt also, sobald man den ersten Theil eines Logarithmus ansieht, weiß man, aus wie viel Ziffern die Zahl selbst bestehen wird, welche zu diesem Logarithmus gehört, weil die Anzahl der Ziffern immer

um Eins größer ist als der ganze Theil des Logarithmus. Wenn man also für eine unbekannte Zahl diesen Logarithmus gefunden hätte 6,4771213, so wüßte man sogleich, daß diese Zahl aus 7 Ziffern besteht, und also größer sein muß als 1000000. Diese Zahl ist auch wirklich 3000000; denn $\log. 3000000 = \log. 3 + \log. 1000000$. Nun aber ist $\log. 3 = 0{,}4771213$ und $\log. 1000000 = 6$, welche zwei Logarithmen zusammen addirt 6,4771213 geben.

250. Bei jedem Logarithmus kommt also die Hauptsache auf den nach dem Komma folgenden Decimalbruch an, welcher, wenn er einmal bekannt ist, für viele Zahlen dienen kann. Um dieses zu zeigen, wollen wir den Logarithmus der Zahl 365 betrachten, dessen erster Theil unstreitig 2 ist; für den andern Theil aber, nämlich den Decimalbruch, wollen wir, der Kürze halber, den Buchstaben x schreiben, also daß $\log. 365 = 2 + x$; hieraus erhalten wir, wenn wir immerfort mit 10 multipliciren, $\log. 3650 = 3 + x$; $\log. 36500 = 4 + x$; $\log. 365000 = 5 + x$. Wir können auch zurück gehen und immer durch 10 dividiren, so bekommen wir $\log. 36{,}5 = 1 + x$; $\log. 3{,}65 = 0 + x$; $\log. 0{,}365 = -1 + x$; $\log. 0{,}0365 = -2 + x$; $\log. 0{,}00365 = -3 + x$ u. s. w.

251. Für alle diese Zahlen nun, welche aus den Ziffern 365 entstehen, sie mögen 0 hinter oder vor sich haben, bleibt derselbe Decimalbruch in ihren Logarithmen und der Unterschied befindet sich nur in der ganzen Zahl vor dem Komma, welche, wie wir gesehen, auch negativ werden kann, wenn nämlich die Zahl kleiner als 1 wird. Weil nun die gewöhnlichen Rechner nicht wohl mit den Negativzahlen umgehen können, so wird in diesen Fällen die ganze Zahl der Logarithmen um 10 vermehrt, und anstatt 0 vor dem Komma, pflegt man schon 10 zu schreiben, da man dann 9 bekommt anstatt -1; anstatt -2 bekommt man 8; anstatt -3 bekommt man 7 u. s. w. Hier muß aber nicht

außer Acht gelassen werden, daß die ganzen Zahlen vor dem Komma um 10 zu groß angenommen worden, damit man nicht schließe, die Zahl bestehe aus 10, oder 9, oder 8 Ziffern, sondern daß die Zahl erst nach dem Komma entweder auf der ersten Stelle, wenn 9 vorhanden, oder auf der zweiten Stelle, wenn 8 vorhanden, oder gar erst auf der dritten, wenn 7 vom Anfang des Logarithmus steht, zu schreiben angefangen werden muß. Auf solche Art findet man die Logarithmen der Sinus in den Tabellen dargestellt.

252. In den gewöhnlichen Tabellen bestehen die Decimalbrüche für die Logarithmen in sieben Ziffern (oder Figuren), wovon also die letzte $\frac{1}{10000000}$ Theile andeutet, und man kann sicher sein, daß dieselben um kein einziges solches Theilchen von der Wahrheit abweichen, und daß daher der Fehler fast Nichts zu bedeuten hat. Wollte man aber noch genauer rechnen, so müßten die Logarithmen auf noch mehr als sieben Ziffern dargestellt werden, wie es in den großen Vlacquischen Tabellen geschieht, wo die Logarithmen auf zehn Ziffern berechnet sind.

253. Weil der erste Theil eines Logarithmus keine Schwierigkeit hat, so wird derselbe in den Tabellen nicht gesetzt, sondern man findet daselbst nur die sieben Ziffern des Decimalbruchs, welche den zweiten Theil ausmachen. In den englischen Tabellen findet man dieselben für alle Zahlen bis 100000 ausgedrückt, und wenn größere Zahlen noch vorkommen, sind kleine Täfelchen beigefügt, woraus man ersehen kann, wie viel wegen der folgenden Ziffern noch zu den Logarithmen addirt werden muß.

254. Hieraus ist also leicht zu verstehen, wie man aus einem gefundenen Logarithmus wiederum die ihm zukommende Zahl aus den Tabellen entnehmen muß. Um die Sache noch mehr zu erläutern, wollen wir z. B. die Zahlen 343 und 2401 mit einander multipliciren. Da nun

die Logarithmen davon addirt werden müssen, so kommt die Rechnung so zu stehen:

$$\begin{array}{r l}
\log. 343 = 2{,}5352941 & \multirow{2}{*}{\text{addirt}} \\
\log. 2401 = 3{,}3803922 & \\
\hline
5{,}9156863 & \multirow{2}{*}{\text{subtrahirt}} \\
6847 & \\
\hline
16. &
\end{array}$$

Die gesuchte Zahl ist daher 823543. Denn die Summe ist der Logarithmus des gesuchten Products, und aus dessen erstem Theil 5 erkennen wir, daß das Product aus 6 Ziffern besteht, welche aus dem Decimalbruche mittels der Tabelle gefunden worden 823543, und dieses ist wirklich das gesuchte Product.

255. Da bei Ausziehung der Wurzeln die Logarithmen einen besonders wichtigen Dienst leisten, so wollen wir auch dies an einem Beispiel erläutern. Es soll aus der Zahl 10 die Quadratwurzel gefunden werden. Da hat man also nur nöthig, den Logarithmus von 10, welcher 1,0000000 ist, durch 2 zu dividiren, so wird der Quotient 0,5000000 der Logarithmus der gesuchten Wurzel sein. Daher die Wurzel selbst aus den Tabellen gefunden wird 3,16228, wovon auch wirklich das Quadrat nur um $\frac{1}{100000}$ Theilchen größer ist als 10.

Zweiter Abschnitt.

Von den verschiedenen Rechnungsarten mit zusammengesetzten Größen.

Kapitel 1.

Von der Addition zusammengesetzter Größen.

256. Wenn zwei oder mehr Formeln, welche aus vielen Gliedern bestehen, addirt werden sollen, so pflegt die Addition zuweilen nur durch gewisse Zeichen angedeutet zu

werden, indem man jede Formel in Klammern einschließt und dieselben mit dem Zeichen + verbindet. Also wenn die Formeln $a + b + c$ und $d + e + f$ addirt werden sollen, so wird die Summe so angegeben:

$$(a + b + c) + (d + e + f).$$

257. Auf diese Art wird die Addition nur angedeutet, nicht aber vollzogen. Es ist aber leicht einzusehen, daß man, um dieselbe zu vollziehen, nur die Klammern wegzulassen braucht; denn da die Zahl $d + e + f$ zur ersten addirt werden soll, so geschieht es, wenn man erstens $+ d$, hierauf $+ e$ und endlich $+ f$ hinzufügt, da dann die Summe sein wird:

$$a + b + c + d + e + f.$$

Eben dies würde auch zu beobachten sein, wenn einige Glieder das Zeichen $-$ hätten, welche dann gleichfalls mit ihren Zeichen hinzugefügt werden müßten.

258. Um dies deutlicher zu machen, wollen wir ein Exempel in bloßen Zahlen betrachten, und zu der Formel $12 - 8$ noch diese $15 - 6$ addiren.

Man addire also erstlich 15, so hat man $12 - 8 + 15$; man hat aber zu viel addirt, weil man nur $15 - 6$ addiren sollte, und es ist klar, daß man 6 zu viel addirt hat; man nehme also die 6 wieder weg, oder schreibe sie mit ihrem Zeichen dazu, so hat man die wahre Summe:

$$12 - 8 + 15 - 6.$$

Hieraus erhellt, daß die Summe gefunden wird, wenn man alle Glieder, jedes mit seinem Zeichen, an einander reiht.

259. Wenn demnach zu der Formel $a - b + c$ noch diese $d - e - f$ addirt werden soll, so wird die Summe wie folgt ausgedrückt:

$$a - b + c + d - e - f.$$

Wobei wohl zu bemerken, daß es hier gar nicht auf die Reihenfolge der Glieder ankommt, sondern dieselben nach