

Vollständige Anleitung

zur

Algebra

VON

Leonhard Euler

Neue Ausgabe

Verlag von Philipp Reclam jun. Leipzig

Gift of Don F. Waugh '15

Math.

NMDB

E 88 v

OCT 30 1942

472808

Gift

Verlag von Philipp Reclam jun. Leipzig

Made in Germany

Biographische Einleitung.

Der große Mathematiker Leonhard Euler, in Basel am 15. April 1707 geboren, war der Sohn des Predigers Paul Euler, der später nach Nien überstelte. Seine Mutter, geb. Margarethe Brucker, gehörte einer Familie an, in der Gelehrsamkeit heimisch war. Leonhard verlebte die frühesten Jugendjahre in dem ländlichen Nien, und verdankte seine geistige Ausbildung dem sorgfältigen Unterrichte, den ihm der Vater persönlich erteilte. Da letzterer, ein Kenner der Mathematik, Schüler des berühmten Mathematikers Johann Bernoulli war, so besand sich diese Wissenschaft unter den von ihm bevorzugten Lehrgegenständen. Diese Lehre sollte auf den fruchtbarsten Boden fallen! Nachdem Leonhard die nötigen allgemeinen Vorkenntnisse erworben, wurde er vom Vater nach der Universität Basel geschickt, um dort Theologie zu studieren. Er beschäftigte sich zwar in Basel nicht bloß mit dem Studium seines Berufsfaches, sondern auch sehr eifrig und erfolgreich mit dem der Mathematik unter Leitung des ehrenwürdigen Johann Bernoulli. Im Jahre 1728 erhielt er die Magisterwürde, bei welcher Gelegenheit er in lateinischer Rede einen Vergleich zwischen der Newton'schen und Cartesischen Philosophie anstellte. Dem 19-jährigen Jünglinge wurde 1727 von der Pariser Akademie der Wissenschaften das Accessit des Preises, den sie auf die beste Abhandlung über die Vermehrung der Schiffe

1*

gesetzt hatte, zuerkannt. Leonhard besfreundete sich in Basel mit Hermann und Daniel Bernoulli, den Söhnen des Johann Bernoulli, welche ebenfalls zu den ausgezeichnetsten Mathematikern gehörten. Als beide von der Kaiserin Katharina I. bei der Stiftung der Akademie nach Petersburg berufen worden waren, erging auf ihre Veranlassung auch bald derselbe Ruf an Leonhard Euler, dem dieser Folge gab, nachdem sein anfangs widerstrebender Vater ihm das Studium der Theologie aufzugeben gestattet hatte. — In Petersburg wurde er 1730 zum Adjuncten der mathematischen Klasse der Akademie ernannt und erhielt 1733 die Professur der Physik.

Während seines Aufenthaltes in der Hauptstadt des russischen Reiches veröffentlichte er zahlreiche Werke und Abhandlungen, Zengen seiner ungewöhnlichen Begabung und seines unermüdbaren Fleißes. Ihr Inhalt stellt ihn in die Reihe der ersten Mathematiker aller Zeiten. Leider mußte er die Ueberanstrengung, der er sich unterzog, bitterlich büßen. Denn in Folge derselben ergriff ihn im Jahre 1735 ein hitziges Fieber, das ihn an den Rand des Grabes brachte. Er genas, aber mit dem Verlust des rechten Auges, das ihm ein Absceß raubte, der sich während der Krankheit gebildet hatte.

Der Verlust eines so kostbaren Organs veranlaßte ihn jedoch nach seiner Wiederherstellung keinesweges, sich zu schonen. Arbeit war ihm so zum Bedürfniß geworden, daß er, von ihr in Anspruch genommen, oft selbst Nahrung zu sich zu nehmen und zu schlafen unterließ. Das erste seiner größeren Werke, seine klassische Mechanik (mechanica, sive motus scientia analytice exposita) erschien kaum ein Jahr nach jenem unglücklichen Vorfall. Er be-

reicherte die akademischen Commentarien mit Abhandlungen, deren jede das Gepräge seines außerordentlichen Geistes trägt. Die Theorie der krummen Linien erhielt durch ihn die erheblichsten Verbesserungen, ebenso die Integralrechnung, die Lehre von den Eigenschaften der Potenzen, der unendlichen Reihen, der Bewegung der himmlischen Körper, und der Anziehung der sphäroidisch-elliptischen Körper. Seine bewundernswürdige Begabung in der Analytik bewährte er durch Auflösung des berühmten isoperimetrischen Problems. Freilich nahm aber auch der so überaus fleißige Mann an keiner der Berfreuungen Antheil, in deren Wirbel die einem großen Ruf folgenden Verbindungen einen allgemein bewunderten Gelehrten so leicht hineinziehen können, und die man gewiß seiner Jugend, seinem heiteren Sinn, seiner Geselligkeit liebenden Natur verziehen haben würde. Seine Erholungsstunden widmete er der Tonkunst, vertiefte sich jedoch gleichzeitig in Untersuchungen über die Ursachen der Harmonie. Von der Pariser Akademie der Wissenschaften erhielt er zehnmal Preise, so auch 1740 für seine Abhandlung über die Ursachen der Ebbe und Fluth. Zwischen dem jüngeren Bernoulli's und ihm herrschte stets der freundschaftlichste Verkehr und der lebhafteste wissenschaftliche Wettstreit. Johann Bernoulli, der Vater, schätzte aber seinen ehemaligen Schüler so hoch, daß er ihm seine eignen Arbeiten zur Beurtheilung vorlegte und in den schwierigsten Untersuchungen seinen Rath einholte.

Im Jahre 1741 wurde Euler vom preussischen Gesandten von Mardefeld der Vorschlag gemacht, in die Dienste des Königs von Preußen zu treten. Die alte königliche von Leibniz gestiftete Gesellschaft hatte um diese Zeit neue

Kräfte durch die besondere Aufmerksamkeit erhalten, die ihr Friedrich der Große seit seiner Thronbesteigung schenkte. Der große König hatte den Seiner würdigen Entschluß gefaßt, das alte Institut umzuwandeln und eine Akademie der Wissenschaften zu begründen; und aus diesem Grunde berief er Euler nach Berlin, der der Einladung des Königs entsprach und im Junius 1741 mit seiner Familie Petersburg verließ. In Berlin eingetroffen erhielt er sofort ein schmeichelhaftes Zeichen der Achtung des Königs, der aus dem Lager bei Steichenbach mitten unter seinen kriegerischen Beschäftigungen eine Zuschrift an ihn richtete. Euler fand leider die königliche Gesellschaft der Wissenschaften in den letzten Zügen. Der Krieg hatte die gütlichen Absichten des Monarchen durchkreuzt oder mindestens verzögert. Indessen bildete sich eine neue gelehrte Gesellschaft, die zum Theil aus den Mitgliedern der alten Societät, zum Theil aber aus andern Gelehrten bestand. Unter diesen befand sich nun auch Euler, der den letzten Theil der Berlinischen Miscellaneen durch fünf Abhandlungen bereicherte, die zu den besten dieser Sammlung gehören. Ihnen folgte mit unbegreiflicher Schnelligkeit eine Reihe der wichtigsten Untersuchungen, die in den Memoiren zerstreut sind, welche die Akademie seit ihrer Stiftung jährlich herausgegeben hat.

Im Jahre 1744 wurde die Akademie wieder hergestellt und Euler zum Director der mathematischen Klasse ernannt. Im selben Jahre erschien seine allgemeine Theorie der Bewegung der Kometen und Planeten; dem ausdrücklichen Wunsche des Königs entsprechend übersezte er aus dem Englischen ein militärisches Werk von Robbins unter dem Titel: „Neue Grundsätze der Artillerie“ und begleitete es

mit Erläuterungen, die eine vollständige Theorie der Bewegung geworfener Körper enthalten. Diese neue Theorie erregte das größte Aufsehen. — Während seines 25jährigen Aufenthaltes in Berlin veröffentlichte er einige seiner bedeutendsten Werke, wie die Institutiones calculi differentialis (1755), und die Einleitung in die Analysis des Unendlichen (1748). Friedrich der Große, der viele Theile der Mathematik als einen Kern des menschlichen Verstandes bezeichnete, schätzte Euler besonders deswegen hoch, weil dieser die Lehren der Mathematik für praktische Zwecke wie für die Schiffbaukunst und Artillerie verwandte.

Obwohl Euler in Berlin sich recht wohl befand, beschloß er doch im Jahre 1766 wiederum nach Petersburg überzusiedeln, weil ihm an der dortigen Akademie eine Stellung angeboten wurde, welche mit einer bei weitem erheblicheren Einnahme verbunden war, als ihm Friedrich II. gewähren konnte. Wenn man bedenkt, daß Euler eine sehr große Familie hatte, wird man ihn wegen dieser Handlungsweise nicht des Undanks zeihen. Der König ertheilte ihm nach vielen Schwierigkeiten den erbetenen Abschied für sich und seine beiden ältesten Söhne; dem jüngsten aber, der Lieutenant bei der Artillerie war, ward die Erlaubniß, seinen Vater nach Petersburg zu begleiten, nicht gewährt.

Euler verließ Berlin im Junius 1766. Die Prinzen des königlichen Hauses, besonders der regierende Markgraf von Brandenburg-Schwedt, saßen ihn ungern scheiden und bezogen ihm ihr Bedauern über seinen Verlust. Euler hatte beiden Töchtern des Markgrafen Unterricht ertheilt, und eine derselben ist es, der er später die rühmlichst bekannten „Briefe über verschiedene Gegenstände der Physik und der Philosophie“ geschrieben

hat. Am 17. Juli in Petersburg eingetroffen — er verweilte 10 Tage in Warschau am Hofe des Königs von Polen — wurde er sofort der Kaiserin vorgestellt und zur Tafel gezogen.

Kaum war er in seinem Hause, zu dessen Ankauf ihm die Kaiserin 8000 Rubel geschenkt hatte, eingerichtet, als er von einer heftigen Krankheit befallen wurde, von der er sich nur mit dem gänzlichen Verlust des Augensichtes erholtte. Ein Staat, der sich auf seinem linken Auge gebildet hatte, veranlaßte ihn auch dieses letzten durch übertriebene Anstrengung zerstörten Sehorgans!

Euler blind! Welch ein schreckliches Schicksal für einen Mann, dem Gewohnheit die Arbeit zum Bedürfnis gemacht hatte. Mit männlichem Muthe fand er sich in sein namenloses Unglück. Sein ausgezeichnetes Gedächtniß und seine durch das gänzliche Aufhören aller zerstreuenden äußeren Eindrücke gesteigerte Einbildungskraft ersetzten bald einen Verlust, der die gelehrte Laufbahn des großen Mannes zu schließten drohte.

Das Erste, was er unternahm, war die Anfertigung der vorliegenden Anleitung zur Algebra.

Er that dies wohl, um für sich selbst festzustellen, ob der Verlust des Augensichtes ihm die Fähigkeit ließ, den mathematischen Stoff ungeführt zu beherrschen. Er dictirte das Buch einem Diener, den er aus Berlin mitgenommen, in die Feder. Dieser, ursprünglich ein Schneidergeselle, der nur geringe Kenntniß der Rechenkunst besaß, gelangte in Folge des Euler'schen Vortrags, den er niederschrieb, zum vollständigen Verständniß der Algebra. Das wegen der traurigen Umstände, unter denen es entstanden, merkwürdige Buch zeichnet sich durch außerordentliche Klarheit und

Deutlichkeit der Darstellung aus. Auch in diesem nur für Anfänger bestimmten Lehrbuch zeigt sich der ersunderliche Geist des Verfassers durch Auffindung neuer Methoden. Es erschien in russischer, dann vielfach veranlaßt in französischer Uebersetzung. Demnachst ist es in alle lebenden Sprachen übersezt worden.

In dieser neuen Ausgabe ist der Euler'sche Text unverändert erhalten geblieben, nur der veraltete sprachliche Ausdruck ist modernisirt worden. Der Inhalt des Buches gewährt jedem Laien Gelegenheit, sich schnell und leicht die Kenntniß der Elemente der Algebra anzueignen, welche für die verschiedensten Lebensbeziehungen gewiß von Wichtigkeit ist. — In der Blindheit verfaßte Euler hierauf noch einige seiner hervorragenden Werke, so die in der französischen Marineschule früher eingeführte „Theorie complete de la construction et de la manoeuvre des vaisseaux“, eine vollständige Theorie des Baues der Schiffe und der Schifffahrtskunst, ferner seine Dioptrik, eine Wissenschaft, die ihre Ausbildung wesentlich ihm verdankt, die institutiones calculi integralis und die opuscula analytica. Er versprach, der Petersburger Akademie soviel Abhandlungen zu liefern, daß sie für 20 Jahre nach seinem Tode anzureichen sollten; und er hat Wort gehalten. In siebenjährigem Zeitraum dictirte er sechzig Abhandlungen, und unter diesen ist keine, die nicht eine neue Entdeckung enthielt oder eine scharfsinnige Idee, deren Entwicklung auf neue Entdeckungen leiten konnte. Man findet darin die glücklichsten Integrationen, zahlreiche Kunstgriffe der schwierigsten Analyse, die tiefstinnigsten Untersuchungen über die Natur und Eigenschaften der Zahlen. Jeder Zweig der mathematischen Erkenntniß hat ihm Fortschritte zu verdanken.

Er starb in St. Petersburg 76 Jahre alt am 7. September 1782. Sein Lebensschluß war ruhig und heiter. Er erfreute sich im Ganzen guter Gesundheit und lebte glücklich im Schooße seiner Familie. Im Jahre 1733 heirathete er Katharina Gsell, die Tochter eines Malers in St. Gallen und nach dem Tode dieser Gattin 1776 die Halbschwester derselben, Salome Albigeel Gsell. Er hatte 13 Kinder aus der ersten Ehe, unter denen sein Sohn Johann Albert Euler, russischer Staatsrath, ein vorzüglicher Mathematiker ihm bei der Vollendung seiner letzten Arbeiten erhebliche Dienste leistete.

Euler war ein Mann von faustmächtigem, lebenskräftigem Charakter. Er besaß natürliche Munterkeit, faustischen Witz und die Kunst, in naiver, drohlicher Art an der Unterhaltung sich zu betheiligen. Aufrichtigkeit und unbestechliche Rechtlichkeit zeichneten ihn in allen Lebensverhältnissen aus. Er war gerecht gegen fremdes Verdienst, sogar gegen das seiner Gegner. Jede neue Entdeckung machte ihm Freude, als habe er sie selbst gemacht. Ihm lag mehr an der Erweiterung des Reiches der Wahrheit als am Befall der Welt!

Die Religion war ihm heilig und ehrwürdig. Er erfüllte alle Pflichten des Christenthums ohne Bigotterie und Gepränge, war menschenfreundlich und duldsam in hohem Grade — jedoch nicht gegenüber den Religionsfeinden. Bereits 1747 trat er für die göttliche Offenbarung öffentlich in die Schranken. Gleich vielen großen Mathematikern wie Newton und Pascal war er ein entschiedener Feind des Atheismus.

Inhalt des ganzen Werks.

Erster Theil.

Erster Abschnitt.

Von den verschiedenen Rechnungsarten mit einfachen Größen.		
Kapitel		Seite
1.	Von den mathematischen Wissenschaften überhaupt	15
2.	Erklärung der Zeichen + plus und — minus	17
3.	Von der Multiplication einfacher Größen	21
4.	Von der Natur der ganzen Zahlen in Bezug auf ihre Factoren	26
5.	Von der Division mit einfachen Größen	27
6.	Von den Eigenschaften der ganzen Zahlen in Bezug auf ihre Theiler	32
7.	Von den Brüchen überhaupt	35
8.	Von den Eigenschaften der Brüche	41
9.	Von der Addition und Subtraction der Brüche	44
10.	Von der Multiplication und Division	46
11.	Von den Quadratzahlen	51
12.	Von den Quadratwurzeln und den daraus entstehenden Irrationalzahlen	54
13.	Von den aus derselben Quelle entstehenden unmöglichen oder imaginären Zahlen	59
14.	Von den Cubzahlen	63
15.	Von den Cubikwurzeln und den hierdurch entstehenden Irrationalzahlen	65
16.	Von den Potenzen oder Dignitäten überhaupt	68
17.	Von den Rechnungsarten mit Potenzen	72
18.	Von den Wurzeln in Bezug auf alle Potenzen	75
19.	Von der Bezeichnung der Irrationalzahlen durch gebrochene Exponenten	77
20.	Von den verschiedenen Rechnungsarten und ihrer Anwendung	81
21.	Von den Logarithmen	85
22.	Von den üblichen logarithmischen Tabellen	89
23.	Von der Art, die Logarithmen darzustellen	92

Zweiter Abschnitt.

Von den verschiedenen Rechnungsarten mit zusammengesetzten Größen.

Table with 2 columns: Kapitel, Seite. Lists 15 chapters on various algebraic operations like addition, subtraction, multiplication, division, and roots.

Dritter Abschnitt.

Von den Verhältnissen und Proportionen.

Table with 2 columns: Kapitel, Seite. Lists 12 chapters on arithmetic and geometric ratios and proportions.

Zweiter Theil.

Erster Abschnitt.

Von den algebraischen Gleichungen und ihrer Auflösung.

Table with 2 columns: Kapitel, Seite. Lists 15 chapters on solving algebraic equations of various degrees.

Zweiter Abschnitt.

Von den unbestimmten Analytiken.

Table with 2 columns: Kapitel, Seite. Lists 5 chapters on indeterminate analysis and Diophantine equations.

Table with 2 columns: Kapitel, Seite. Lists 15 chapters on solving quadratic and cubic equations and Diophantine problems.

Erster Theil.

Erster Abschnitt.

Von den verschiedenen Rechnungsarten mit einfachen Größen.

Kapitel 1.

Von den mathematischen Wissenschaften überhaupt.

1. Zuvörderst wird alles dasjenige eine Größe genannt, was einer Vermehrung oder einer Verminderung fähig ist, oder wozu sich noch etwas hinzusetzen oder wovon sich etwas hinwegnehmen läßt.

Demnach ist eine Summe Geldes eine Größe, weil sich hinzusetzen oder hinwegnehmen läßt.

Eben so ist auch ein Gewicht eine Größe u. dgl. m.

2. Es giebt sehr viele verschiedene Arten von Größen, welche sich nicht wohl aufzählen lassen; und daher entstehen die verschiedenen Theile der Mathematik, deren jeder mit einer besondern Art von Größen beschäftigt ist. Die Mathematik ist überhaupt nichts anders, als eine Wissenschaft der Größen, welche Mittel ausfindig macht, wie man letztere ausmessen kann.

3. Es läßt sich aber eine Größe nicht anders bestimmen oder ausmessen, als daß man eine andere Größe derselben Art als bekannt annimmt, und das Verhältniß angiebt, in dem diese zu jener steht.

Also wenn die Größe einer Summe Geldes bestimmt werden soll, so wird ein gewisses Stück Geld, wie z. B.