APPENDIX
DE
CONSTRVCTIONE TELESCOPIORVM CATOPTRICO-DIOPTRICORVM.

APPENDIX

DE

TELESCOPIIS CATOPTRICO DIOPTRICIS.

CAPVT I.

DE

IMAGINIBVS PER SPECVLA SPHAERICA FORMATIS EARVMQVE DIFFVSIONE.

Problema I.

§. 1.

Si a puncto lucido in axe ſpeculi conſtituto radii axi proximi in ſpeculum incidant, inuenire locum imaginis.

Solutio.

Tab. I. Fig. 1. Sit P A P speculum sphaericum probe politum centro O radio $OA = f$ descriptum, cuius axis sit recta A O E, in cuius puncto E constitutum sit punctum lucidum et ponatur eius distantia $EA = a$, vnde radii in totam speculi superficiem incidant, e quibus autem eos tantum hic consideramus, qui axi sint proximi seu qui in puncta a medio puncto speculi A proxima incidant, talis igitur radius incidens sit E A et ad punctum a ex centro O ducatur radius $Oa = f$ qui cum in speculum sit normalis, erit $E\,a\,O$ angulus incidentiae, cui ab altera parte rectae $O\,a$ capiatur angulus aequalis $O\,a\,F$, eritque recta $a\,F$ radius reflexus cum axe occurrens in puncto F, in quo puncto adeo omnes radii axi proximi e puncto E emissi concurrent, siquidem etiam radius E A secundum ipsum axem emissus in punctum F reflectitur, ita, vt punctum F sit imago puncti lucidi E per reflexionem formata, et cum a radiis axi proximis formetur, in hoc puncto erit imago principalis, vti eam in tractatu de lentibus vocauimus. Ad locum igitur istius puncti F inueniendum consideretur triangulum $E\,a\,F$, cuius angulus $E\,a\,F$ bisectus est recta $O\,a$, vnde notum theorema Geometricum praebet hanc proportionem $E\,a : E\,O = F\,a : F\,O$ deinde quia in triangulo $E\,a\,O$ anguli ad E et ad a sunt infinite parui in triangulo autem $O\,a\,F$ anguli ad O et a; erit $E\,a = E\,O + f$; et $F\,a = f - O\,F$ vnde

vnde illa proportio abit in hanc

$$EO+f : EO = f-OF : OF$$

et componendo

$$2EO+f : EO = f : OF$$

Cum iam ſit $EO = EA - AO = a-f$ fiet

$$2a-f : a-f = f : OF$$

$$\text{hincque } OF = \frac{(a-f)f}{2a-f}$$

ſicque locus puncti F innoteſcit, cuius diſtantia a puncto A erit $AF = f - FO = \frac{af}{2a-f}$. *q. e. i.*

Coroll. 1.

§. 2. Ex data ergo diſtantia puncti lucidi E a ſpeculo $EA = a$, inuenimus diſtantiam imaginis principalis ſuper axe AF, quam cum in lentibus littera α deſignauerimus, etiam hic eadem littera vtamur, ita, vt ſit $\alpha = \frac{af}{2a-f}$.

Coroll. 2.

§. 3. Speculum hic tanquam concauum ſpectauimus, cuius radius eſſet $AO = f$. vnde valores poſitiui huius litterae f ſpecula concaua; valores vero negatiui ſpecula conuexa denotabunt. Tum vero etiam diſtantia α, quatenus valorem habet poſitiuum, diſtantiam imaginis ante ſpeculum indicabit; ſin autem prodeat negatiua, id indicio erit imaginem poſt ſpecu-

ſpeculum cadere eamque fore fictam, cum praeſens ſit realis. Hinc autem intelligitur, imaginem fore realem, ſi fuerit $a > \frac{1}{2}f$, ſiquidem ſit $f > 0$; ſin autem ſit $f < 0$ ſeu ſpeculum conuexum; tum imago ſemper poſt ſpeculum cadet, eritque ficta, non realis.

Coroll. 3.

§. 4. Si puncti lucidi diſtantia $AE = a$ fuerit infinita; tum diſtantia imaginis principalis a ſpeculo erit $AF = \frac{1}{2}f$ ita, vt haec diſtantia $AF = \frac{1}{2}f$ pro diſtantia focali ſpeculi ſit habenda hinc ſi ſpeculi diſtantiam focalem ponamus $= p$, erit radius ſpeculi $f = 2p$. Tum vero in genere diſtantiae a et α ita a ſe inuicem pendebunt, vt ſit $\alpha = \frac{ap}{a-p}$ hincque $p = \frac{\alpha a}{\alpha + a}$ et $\frac{1}{p} = \frac{1}{a} + \frac{1}{\alpha}$ prorſus vti in lentibus vſu venire ſupra vidimus.

Scholion.

§. 5. Hic notatu inprimis dignum occurrit, quod tres iſtae diſtantiae a, α et p eodem prorſus modo a ſe inuicem pendent, vti in lentibus; ex quo euidens eſt ratione calculi ſpecula perinde tractari poſſe ac lentes, quae calculi conuenientia adhuc in ſequentibus magis illuſtrabitur. Hic tantum notaſſe iuuabit, lentibus conuexis reſpondere ſpecula concaua; vti enim lentibus conuexis diſtantias focales poſitiuas tribuimus, quippe quarum foci ſunt reales, ita etiam ſpecula concaua realem habent focum ibique aeque vi vrendi pollent

pollent atque lentes conuexae in suis focis; discrimen tamen in eo situm est, quod in speculis concauis focus ante ea cadat, cum in lentibus conuexis post eas formetur atque simili modo specula conuexa ad lentes concauas referentur dum in vtrisque focus tantum fictus datur, in quo scilicet radii non reuera congregentur. Quando ergo de speculis sermo erit, distantia focalis positiua semper speculum concauum; distantia vero focalis negatiua speculum conuexum indicabit, ac si distantia focalis euadat infinita, speculum erit planum, simili modo, quo lens distantiam focalem habens infinitam est plano plana. Praeterea vero etiam obseruasse iuuabit, si vti in Dioptrica fecimus, statuamus $\alpha = A a$ et $\mathfrak{A} = \frac{A}{A+1}$, tum etiam fore $p = \mathfrak{A} a$.

Problema 2.

§. 6. Si non amplius lucidum punctum E, sed obiectum E ε axi speculi perpendiculariter insistat, eius imaginem, quae in puncto F situ inuerso repraesentabitur, definire.

Solutio.

Ponatur iterum distantia huius obiecti a speculo E A $= a$, sitque eius magnitudo E $\varepsilon = \zeta$, quippe qua denominatione supra de lentibus sumus vsi, ita, vt ζ semper sit quantitas valde parua respectu distantiae E A $= a$, seu angulus E A ε quasi infinite paruus. Deinde sit vt ante radius speculi O A $= f$, eius distantia Tab. I. Fig. 2.

stantia

ftantia focalis $= p$, ita, vt fit $f = 2p$, et diftantia imaginis principalis a fpeculo $AF = \alpha$ ita, vt fit $\alpha = \frac{ap}{a-p}$. His pofitis facile intelligitur, imaginem quaefitam in punctum F incidere atque ad contrariam partem axis fore directam; ducta enim recta εA referet radium incidentem, cui conuenit radius reflexus $A\zeta$, qui ergo per imaginis extremitatem tranfire debebit; vnde fi in puncto F normaliter ad axem ducatur recta $F\zeta$, ad radium reflexum $A\zeta$ terminata, haec recta $F\zeta$ imaginem principalem obiecti exhibebit, cuius ergo magnitudo ex fimilitudine triangulorum $AE\varepsilon$ et $AF\zeta$ ita definietur, vt fit

$$F\zeta = \frac{AF.E\varepsilon}{AE} = \frac{\alpha.\zeta}{a}$$

quod idem etiam hoc modo oftendi poteft. Ex puncto ε per centrum fpeculi O ducatur etiam radius incidens $\varepsilon O\alpha$, qui cum fit normalis, eius reflexus in ipfum cadet tranfibitque etiam per punctum ζ vnde fimilitudo $\triangle$lorum $OE\varepsilon$ et $OF\zeta$ dabit $F\zeta = \frac{OF.E\varepsilon}{OE}$. Eft vero $OF = f - \alpha$, et $OE = a - f$ ex quo fit $F\zeta = \frac{(f-\alpha)\zeta}{a-f}$. Cum ex fuperiori problemate fit

$$\alpha = \frac{af}{2a-f} \text{ hincque } f = \frac{2a\alpha}{a+\alpha} \text{ erit}$$

$$f - \alpha = \frac{(a-\alpha)\alpha}{a+\alpha} \text{ et } a - f = \frac{(a-\alpha)a}{a+\alpha};$$

hincque fubftitutis his valoribus, fiet $F\zeta = \frac{\alpha\zeta}{a}$, prorfus, vt ante quo ipfo confirmatur rectam $F\zeta$ axi recte normalem effe ductam.

Coroll.

Coroll. 1.

§. 7. Hic ergo etiam magnitudo imaginis principalis eodem plane modo ex obiecti magnitudine determinatur, quo in Dioptrica id fieri supra ostendimus vnde si vt ibi fecimus statuamus $\alpha = A\, a$, habebimus etiam hic $F\,\zeta = A\,\zeta$.

Coroll. 2.

§. 8. Quia nostra figura telescopium concauum refert, eius analogia cum lentibus conuexis etiam hic manifesto cernitur, quemadmodum enim lentes conuexae imagines inuersas post se repraesentant, ita specula concaua imagines itidem inuersas ante se referunt; iam enim obseruauimus, quae post lentes contingunt, cum iis comparari debere, quae ante specula contingunt.

Problema 3.

§. 9. Si a puncto lucido E in axe speculi sito radii incidant in extremitatem speculi P, eorum cum axe concursum in puncto ζ inuestigare, indeque spatium diffusionis determinare. Tab. I. Fig. 3.

Solutio.

Sit iterum distantia $E A = a$, radius speculi $O A = O P = f = 2\,p$, denotante p distantiam speculi focalem. Iam tantum sit speculum, vt sit angulus $A O P = \omega$ et cum perpendiculum $P X$ denotet semidiametrum aperturae fpeculi, fit haec linea $PX = x$ eritque $x = f.$ fin. ω. Demiffo iam ex puncto lucido E in radium PO productum perpendiculo ER ob $EO = a - f$ et angulum $EOR = \omega$ erit

$$ER = (a - f) \text{ fin. } \omega \text{ et } OR = (a - f) \text{ cof. } \omega.$$

$$\text{hincque } PR = f + (a - f) \text{ cof. } \omega;$$

vnde inuenitur

$$EP = \sqrt{(PR^2 + ER^2)}$$

$$= \sqrt{(a^2 - 2af + 2f^2 + 2f(a-f) \text{ cof. } \omega)}$$

quae breuitatis gratia fit $= v$. atque hinc erit anguli incidentiae EPO, ideoque etiam anguli reflexionis

$$OPf \text{ finus } = \frac{ER}{EP}. = \frac{(a-f) \text{ fin. } \omega}{v}$$

$$\text{et cofinus } = \frac{f + (a-f) \text{ cof. } \omega}{v}.$$

Cum iam in $\triangle$lo OPf detur angulus OPf vna cum angulo $POf = \omega$ et latere $OP = f$; fi vocetur angulus $AfP = \psi$ ob $\psi = \omega + OPf$ erit

$$\text{fin. } \psi = \frac{f \text{ fin. } \omega + 2(a-f) \text{ fin. } \omega \text{. cof. } \omega}{v}$$

atque hinc ex natura trianguli erit

$$\text{fin. } \psi : OP = \text{fin. } OPf : Of.$$

ex qua analogia colligitur

$$Of = \frac{f(a-f)}{f + 2(a-f) \text{ cof. } \omega}$$

hinc-

hincque interuallum

$$Af = \frac{f^2 + f(a-f)(2\,\text{cof.}\,\omega - 1)}{f + 2(a-f)\,\text{cof.}\,\omega}$$

haecque eſt ſolutio generalis noſtri problematis.

Cum autem in praxi angulus A O P nunquam tantus aſſumatur, vt non liceat poteſtates anguli ω quadratica altiores negligere, expreſſio inuenta commode ad formam ſimpliciorem ſequenti modo reducetur. Cum ſit

$$\text{cof.}\,\omega = \sqrt{(1 - \text{fin.}\,\omega^2)} = 1 - \tfrac{1}{2}\,\text{fin.}\,\omega^2.$$

ob $\text{fin.}\,\omega = \frac{x}{f}$ erit $\text{cof.}\,\omega = 1 - \frac{x^2}{2f^2}$.

hincque ille denominator

$$f + 2(a-f)\,\text{cof.}\,\omega \text{ fiet } = 2a - f - \frac{(a-f)x^2}{f^2},$$

ex quo pariter proxime erit

$$\frac{1}{f + 2(a-f)\,\text{cof.}\,\omega} = \frac{1}{2a - f - \frac{(a-f)x^2}{f^2}}$$

$$= \frac{1}{2a-f} + \frac{(a-f)x^2}{f^2(2a-f)^2}.$$

Vnde interuallum modo inuentum fit

$$Of = \frac{f(a-f)}{2a-f} + \frac{(a-f)^2 x^2}{f(2a-f)^2}$$

atque hinc interuallum quod potiſſimum quaerimus,

$$Af = \frac{af}{2a-f} - \frac{(a-f)^2 x^2}{f(2a-f)^2}.$$

Quare cum ante locum imaginis principalis F ita inveniſſemus, vt eſſet

$$AF = \frac{af}{2a-f}$$

 nunc

nunc innotescit, spatium diffusionis

$$Ff = \frac{(a-f)^2 . x^2}{f(2a-f)^2}.$$

Praeterea cum etiam plurimum intersit angulum ψ nosse, quo radii reflexi Pf ad axem inclinantur, ex formula supra inuenta colligemus itidem proxime $\psi = \frac{(2a-f)x}{af}$. Quoniam enim potestates ipsius x quadrato maiores negligimus, numerator ibi inuentus fit $\frac{(2a-f)x}{f}$ et in denominatore, vbi iam ipsum quadratum x^2 negligere licet, fit simpliciter $= a$.

Coroll. I.

§. 10. Quo haec ad formulas pro lentibus datas accommodemus, vbi tantum binas distantias a et α in computum induximus, ob

$$\alpha = \frac{af}{2a-f} \text{ habebimus } f = \frac{2a\alpha}{a+\alpha};$$

vnde fit

$$a - f = \frac{(a-\alpha)a}{a+\alpha} \text{ et } 2a - f = \frac{2a^2}{a+\alpha}$$

atque hinc spatium diffusionis erit

$$Ff = \frac{(a+\alpha)(a-\alpha)^2 . x^2}{8a^3 . \alpha.}$$

quod ergo perinde ac in lentibus vsu venit quadrato semidiametri aperturae x^2 est proportionale; quin etiam ipsum hoc spatium Ff in eundem sensum cadit, ac in lentibus.

Coroll. 2.

§. 11. Simili modo poterimus etiam angulum obliquitatis ψ per ſolas diſtantias a et α itemque x exprimere, prodibit enim $\psi = \frac{x}{\alpha}$. Hunc autem angulum ſupra in calculo circa lentes inſtituto ſollicite definiuimus.

Scholion.

§. 12. Cum quaeſtio eſſet de lentibus earumque apertura maxima, quam capere poſſent, ſumſimus x aequale parti quartae radii curuaturae; quodſi ergo hic idem inſtitutum ſequamur, et ſumamus $x = \frac{1}{4}f$ hinc reperietur angulus $\omega = 14^\circ\ 30'$. ita, vt totus arcus P A P infra 30° capi debeat. Quando autem hoc ſpeculum locum lentis obiectiuae ſuſtinet, eius apertura longe aliam determinationem poſtulat, quam ſcilicet ex menſura confuſionis definiri oportet, vnde huius ſpeculi apertura ad multo pauciores gradus reducetur, vti in ſequentibus docebitur. Nunc autem etiam opus eſt, vt oſtendamus, quemadmodum radii a noſtro ſpeculo reflexi et imaginem diffuſam formantes porro ab alio ſpeculo denuo reflectantur et qualem imaginis diffuſionem tum ſint producturi. Hunc in finem bina ſequentia lemmata perpendi conueniet.

Lemma I.

§ 13. Si diſtantia obiecti a ſpeculo E A $= a$. particula minima $d a$ vlterius a ſpeculo remoueatur; tum

tum imago principalis, cuius distantia a speculo erat $AF = \alpha$ ad speculum propius accedet particula $d\alpha$, ita, vt sit $d\alpha = \frac{-\alpha^2 . d a}{a^2}$.

Demonstratio.

Cum enim sit $\frac{1}{a} + \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{p} = \frac{2}{f}$ atque radius f idem maneat, vtcunque distantiae a et α inter se varientur; differentiatio dabit

$$\frac{d a}{a^2} + \frac{d\alpha}{\alpha^2} = 0 \text{ vnde } d\alpha = -\frac{\alpha^2 d a}{a^2}.$$

Lemma 2.

§. 14. Si radii in speculum incidentes ad axem sint inclinati angulo $= \phi$, inuenire angulum ψ, sub quo radii reflexi ad axem speculi erunt inclinati.

Solutio.

Tab. I. Fig. 3. Sit igitur angulus $AEP = \phi$, quo radii incidentes EP ad axem speculi inclinantur eritque proxime $\phi = \frac{x}{a}$; ideoque $x = a\phi$. Tum vero vidimus, angulum, quo radii reflexi ad eundem axem inclinantur, fore $\psi = \frac{x}{\alpha}$; quocirca erit $\psi = \frac{a\phi}{\alpha}$ seu erit $\phi : \psi = \alpha : a$. seu reciproce vt distantiae a speculo.

Problema 3.

§. 15. Si radii postquam a primo speculo reflexi imaginem diffusam formauerunt in aliud speculum super eodem axe constitutum incidant, determinare

nare tam imaginem principalem, quam eius diffusionem, quam radii a secundo speculo reflexi exhibebunt.

Solutio.

Cum $F\zeta$ sit imago principalis a primo speculo formata, quam inuenimus $F\zeta = \frac{\alpha\xi}{a}$, sit eius distantia a secundo speculo $FB = b$ atque ipsum hoc speculum ita sit comparatum, vt ab eius reflexione imago principalis formetur $G\eta$ sitque distantia $BG = \beta$ atque vti iam vidimus reperietur $G\eta = \frac{\beta}{b}. F\zeta = \frac{\alpha\beta}{ab}\zeta$ quae imago iterum erit erecta atque a radiis axi proximis formata. Nunc etiam consideremus in spatio diffusionis dato extremitatem f, vnde radii emissi cum axe faciant angulum $= \psi = \frac{x}{\alpha}$; verum antequam huius obliquitatis rationem habeamus, fingamus punctum f etiam radios axi proximos emittere et cum id a speculo B longius sit remotum, quam F, eius radii concurrent in puncto huic speculo propiore γ, ad quod inueniendum referet hic $db = Ff$ et $d\beta = -G\gamma$; vnde colligitur $G\gamma = \frac{\beta^2}{b^2}. Ff$. Quare si in f obiectum verum esset constitutum, eius imago principalis caderet in γ, quatenus autem ex f nulli alii radii emittuntur, nisi qui cum axe faciant angulum $= \psi$, ii denuo reflexi incident in axem in puncto g ipsi speculo B adhuc propiore, quam γ, ita, vt hic casus similis sit praecedenti problemati, quo punctum f respondet puncto E; punctum γ puncto F et

Tab. II. Fig. 4.

F et punctum g puncto f, hoc ſolo diſcrimine, vt quod ibi erat a et α hic ſit b et β licebit enim vtique hic pro diſtantia Bf ſumere $BF = b$. et pro diſtantia $B\gamma$ ſumere β; hinc ergo per formulam ſupra inuentam ſi loco x hic ſcribatur y, fiet

$$\gamma g = \frac{(b+\beta)(b-\beta)^2 . y^2}{8 b^3 \beta}.$$

Quid autem nunc ſit y, ex angulo ψ facillime definitur. Ducto enim radio fQ ſub angulo $BfQ = \psi = \frac{x}{\alpha}$ erit y ſemidiameter aperturae huius ſpeculi QBQ ideoque $y = Bf . \psi = \frac{bx}{\alpha}$; quo valore ſubſtituto prodit

$$\gamma g = \frac{(b+\beta)(b-\beta)^2 . x^2}{8 \alpha^2 b \beta}.$$

Quocirca totum ſpatium diffuſionis iam erit

$$Gg = \frac{\beta^2}{b^2} . Ff + \gamma g; \text{ ſeu}$$

$$Gg = \frac{\beta^2}{b^2} . \frac{(a+\alpha)(a-\alpha)^2 . x^2}{8 . a^3 . \alpha} + \frac{(b+\beta)(b-\beta)^2 x^2}{8 \alpha^2 b \beta}$$

Nunc autem poſt ſecundam reflexionem angulus, ſub quo radii extremi ad axem erunt inclinati, colligitur ex Lemmate $z = \frac{b\psi}{\beta} = \frac{b}{\alpha\beta} . x$.

Scholion I.

§. 16. Cum igitur ſpeculum, ad quod referuntur binae diſtantiae a et α et cuius ſemidiameter aperturae eſt $= x$, gignat ſpatium diffuſionis

$$Ff = \frac{(a+\alpha)(\alpha-\alpha)^2 . x^2}{8 a^3 . \alpha}$$

com-

comparemus hoc spatium cum eo, quod lens sub similibus circumstantiis producit, atque in primo libro vidimus; pro tali lente esse spatium diffusionis §. 49.

$$Ff = \frac{n(4n-1)\alpha^2 x^2}{8(n-1)^2(n+2)}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{\alpha}\right)\left(\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{\alpha}\right)^2+\frac{4(n-1)^2}{(4n-1)a\alpha}\right)$$

quod quidem iam est minimum, quod a lente ad has distantias a et α relata cum apertura, cuius semidiameter est x, generari potest. Quo autem facilius hanc comparationem instituere valeamus, ponamus vtrinque distantiam obiecti a esse infinitam atque e speculo nascetur spatium diffusionis $Ff = \frac{x^2}{8\alpha}$ quod autem a lente nascitur, erit

$$Ff = \frac{n(4n-1)x^2}{8(n-1)^2(n+2)\alpha} \text{ vbi } n:1$$

denotat rationem refractionis et sumto $n = 1,55$, hoc spatium inuentum est $Ff = 0,938191.\frac{x^2}{\alpha}$

Vnde patet, a speculo multo minorem diffusionem oriri, quam a lente, quandoquidem illa erit ad hanc, vt $\frac{1}{8}$: 0,938191; hoc est propemodum vt 1: 7,505528 seu vt 1: $7\frac{1}{2}$ quae ergo proportio cum proprie in speculis vel lentibus obiectiuis locum habeat, hinc praecipua caussa innotescit, cur specula loco lentium obiectiuarum substituta multo breuiora telescopia suppeditauerint, quandoquidem ob minorem confusionem distantiam focalem minorem accipere licet; ad quod accedit, quod in his telescopiis catoptricis radii in speculum obiectiuum incidentes primo ad alterum speculum reflectantur, vnde denuo per eandem viam revertuntur antequam per lentes oculares transeunt, ita, vt distantia amborum speculorum bis sit computanda, sicque longitudo instrumenti denuo fere ad semissem reducatur. Hoc ergo commodum specula praestarent, etiam sine vllo respectu ad eorum qualitatem habito, qua radii diuersorum colorum a reflexione non disperguntur, vti fit in refractione. Verum tamen hic etiam insigne speculorum incommodum non est reticendum, in eo consistens, quod speculum etiam maxime politum semper multo pauciores radios reflectat, quam per lentem eiusdem magnitudinis transmittuntur. Atque haec caussa est, quod telescopia catoptrica plerumque multo minorem claritatis gradum largiantur.

Scholion 2.

§. 17. Quemadmodum hoc postremum problema resoluimus, atque etiam diffusionem imaginis a secundo speculo natam definiuimus, ita eadem inuestigatio ad plura specula accommodari posset, nisi ipsa rei natura speculorum vsum ad binarium restringeret. Quamobrem coacti sumus radios a secundo speculo reflexos ad lentes vitreas dirigere, per quas demum ad oculum propagentur atque ob hanc ipsam rationem ipsum speculum obiectiuum circa medium perforatum esse debet, vt radiis a secundo speculo reflexis transitus per hoc foramen concedatur, vbi simul a lentibus excipiantur. Quare cum hactenus speculum

lum obiectiuum tanquam integrum ſimus contemplati, nunc ſupereſt, vt etiam foraminis, quo illud eſt pertuſum, in calculo rationem habeamus, vbi ſimul erit disquirendum, quomodo ſpeculum ſecundum reſpectu huius foraminis comparatum eſſe debeat, ne ſcilicet nimiam radiorum copiam intercipiat ac tamen ſufficiat omnibus radiis a primo ſpeculo reflexis excipiendis; haecque ergo momenta in ſequenti problemate accuratius perpendemus.

Problema 4.

§ 18. Si in teleſcopio loco lentis obiectiuae adhibeatur ſpeculum concauum $P\pi A\pi P$ in medio pertuſum foramine $\pi A \pi$, cuius centrum ſit in axe AB in quo ad diſtantiam quaſi infinitam obiectum ſeu punctum lucidum concipiatur, ex quo radii axi paralleli in iſtud ſpeculum $P\pi\pi P$ incidant indeque reflexi ad ſpeculum minus ſuper eodem axe normaliter poſitum QBQ dirigantur, vnde porro ad lentem vitream prope foramen $\pi\pi$ itidem ſuper eodem axe normaliter ſitam reflectantur; determinare imagines, per duplicem reflexionem formatas earumque diffuſionem. Tab. III. Fig. 5.

Solutio.

Sit ſemidiameter totius ſpeculi obiectiui $AP = x$ et ſemidiameter foraminis $A\pi = y$, radius vero curvaturae ſpeculi $= f$; ideoque diſtantia focalis $p = \frac{1}{2}f$ tum vero ſpeculi minoris QBQ ſit diſtantia focalis

 $= q$

$= q$ et distantia horum speculorum $AB = k$. His positis cum obiectum in axe AB ad distantiam infinitam remotum concipiatur radii inde axi paralleli ad speculum obiectiuum PP peruenient, qui ergo vt totam eius superficiem reflectentem $P\pi$ quaquauersus adimpleant, speculum QBQ maius esse non debet, quam foramen $\pi\pi$ neque etiam id minus esse conueniet, quia alioquin radii ab obiecto directe in foramen lentemque ibi sitam ingrederentur et repraesentationem inquinarent, ex quo intelligitur, semidiametrum aperturae huius speculi minoris esse debere $BQ = y$ vel saltem eo non multo maiorem. Quoniam igitur hic distantia obiecti, quae supra posita est $= a$, nostro casu est infinita, si radii axi proximi in speculum incidere possent, iis formaretur imago principalis in F ita, vt esset distantia $AF = \alpha = p$. Quia autem radii axi proximi excluduntur, nulla imago principalis formabitur. Prima ergo imago a radiis circa oram foraminis reflexis formabitur in Φ, ita, vt sit interuallum $F\Phi = \frac{y^2}{8\alpha}$, quia hic est y, quod supra erat x et distantia obiecti $a = \infty$. Imago autem extrema a radiis circa oram speculi Pp reflexis formetur in puncto f eritque interuallum $Ff = \frac{x^2}{8\alpha}$; quare cum ipsa imago principalis hic desit, totum spatium diffusionis hic tantum erit $\Phi f = \frac{x^2 - y^2}{8\alpha}$. Interim tamen haec puncta F, Φ, f inter se tam erunt propinqua, vt in calculo pro eodem haberi

queant.

queant. Cum ergo omnes radii a ſpeculo maiore reflexi per punctum F tranſire ſint cenſendi, vt in ſpeculum Q B Q incidant eius ſemidiameter B Q tantus eſſe debet, vt ſit

$$A F : A P = B F : B Q \text{ vnde ſit } B Q = \frac{k-\alpha}{\alpha} . x.$$

qui cum ipſi y debeat eſſe aequalis, habebimus

$$y = \frac{k-\alpha}{\alpha} . x. \text{ hincque } k = \frac{\alpha(y+x)}{x}.$$

Sin autem minus ſpeculum intra A et F eſſet conſtitutum; reperiretur

$$B Q = \frac{\alpha-k}{\alpha} x = y; \text{ hincque } k = \frac{\alpha(x-y)}{x},$$

quae vero expreſſio in ſuperiori contenta eſt cenſenda, propterea quod radium foraminis y tam poſitiue, quam negatiue capere licet. Cum igitur nunc primae imaginis F diſtantia a ſpeculo ſecundo ſit $k - \alpha = \frac{\alpha y}{x}$ quam ſupra vocauimus $= b$. ita, vt ſit $b = \frac{\alpha y}{x}$, ſecunda imago a ſpeculo Q B Q reflexa cadet in punctum G, ita, vt ſit $B G = \beta = \frac{bq}{b-q}$; ita, vt radii a ſpeculo Q B Q reflexi omnes per punctum hoc G tranſire ſint cenſendi, ſiquidem hic animum a diffuſione imaginis abſtrahimus. Nunc igitur inſuper efficiendum eſt, vt iſti radii omnes in ipſum foramen $\pi A \pi$ ingrediantur, id quod cum ſit $B Q = A \pi$ eueniet, ſi modo punctum G propius verſus A cadat, quam verſus B. ſeu debebit eſſe $\beta > \frac{1}{2} k$. Inuenimus vero

$\beta =$

$$\beta = \frac{bq}{b-q} = \frac{\alpha y q}{\alpha y - qx} \text{ et } k = \frac{\alpha(y+x)}{x},$$

ita vt nunc eſſe debeat

$$\frac{\alpha y q}{\alpha y - qx} > \frac{\alpha(y+x)}{2x} \text{ vnde oritur } q > \frac{\alpha y(x+y)}{x(3y+x)}$$

ex qua ergo formula diſtantia focalis ſpeculi minoris definiri poterit, quae ergo determinabitur per ſemidiametros foraminis et ipſius ſpeculi maioris vna cum focali diſtantia ſpeculi maioris $p = \alpha$ ſin autem ſpeculum minus conſtituatur intra F et A, iam vidimus fore $AB = k = \frac{\alpha(x-y)}{x}$ et cum nunc ſit diſtantia $b = -\frac{\alpha y}{x}$ diſtantia $BG = \beta = \frac{\alpha y q}{\alpha y + xq}$ quae vt maior ſit, quam $\frac{1}{2}k$, neceſſe eſt fiat $q > \frac{\alpha y(x-y)}{x(3y-x)}$ vnde ſi x ſit $> 3y$, debebit eſſe q negatiuum, ita, vt ſit

$$q > -\frac{\alpha y(x-y)}{x(x-3y)}$$

at ſi eſſet $x = 3y$, capi poſſet $q = \infty$, ſicque ſpeculum minus fieret planum. Quod denique ad diffuſionem imaginis ſecundae in G repraeſentatae attinet, ea iterum erit quaſi truncata ſua imagine principali, quod ſi litteris $G\Phi g$ repraeſentetur ad ſimilitudinem litterarum $F\Phi f$ totum ſpatium diffuſionis tantum erit cenſendum $= \Phi g$, cuius quantitas ex formula praecedentis problematis reperietur, ſi loco x^2 ſcribatur $x^2 - y^2$, vnde ob $a = \infty$ erit hic

$$\Phi g = \frac{\beta^2}{b^2} \cdot \frac{(x^2-y^2)}{8\alpha} + \frac{(b+\beta)(b-\beta)^2(x^2-y^2)}{8\alpha^2 b\beta}$$

atque nunc radiorum in Φ concurrentium obliquitas ad axem erit $= \frac{b}{\alpha\beta} \cdot y$; obliquitas vero radiorum in $g = \frac{b}{\alpha\beta} \cdot x$.

Coroll.

Coroll. 1.

§. 19. Si ergo minus ſpeculum vltra locum imaginis F collocetur, eius diſtantia a primo ſpeculo debet eſſe

$$AB = \frac{\alpha(x+y)}{x} = \alpha + \frac{y}{x}.\alpha$$

ita, vt ſit $FB = \frac{\alpha y}{x}$ hocque ergo caſu diſtantia A B maior erit, quam diſtantia focalis ſpeculi principalis tum vero huius ſecundi ſpeculi diſtantia focalis eſſe debet $q > \frac{\alpha y(x+y)}{x(x+3y)}$.

Coroll. 2.

§. 20. Hic autem manifeſto ſupponitur, punctum G a puncto B verſus A cadere, ita, vt diſtantia β euadat poſitiua; ſi enim eſſet $q > b$, punctum G ad alteram partem ſpeculi Q B Q caderet radiique G Q producti manifeſto extra foramen praetergrederentur. Quare hic pro Q alterum limitem probe obſeruari oportet, vt ſit $q < b$. ſiue $q < \frac{\alpha y}{x}$, tum vero etiam $q > \frac{\alpha y(x+y)}{x(x+3y)}$.

Coroll. 3.

§. 21. Sin autem ſpeculum QBQ intra focum F collocetur, oportebit eſſe diſtantiam Tab. II. Fig. 6.

$$AB = \frac{\alpha(x-y)}{x} = \alpha - \frac{y}{x}\alpha. \text{ ita, vt ſit } FB = \frac{\alpha y}{x}$$

tantoque interuallo prima imago poſt ſecundum ſpeculum cadat, fiatque $b = -\frac{\alpha y}{x}$; vnde deducitur diſtantia B G $= \beta = \frac{\alpha y}{\alpha y + q x}$, quae diſtantia ſemper eſt poſitiua ſeu verſus A dirigitur, niſi forte q ſit quantitas negatiua; quae cum ſuperare debeat $\frac{1}{2} k$, debet eſſe $2 x y q > \alpha y (x - y) + x (x - y) q$ deberet ergo eſſe $2 x y > x (x - y)$ ſeu $y > \frac{1}{3} x$. Quare ſi vt ſemper in praxi euenit ſit $y < \frac{1}{3} x$, huic conditioni ſatisfieri nequit; ſi ſcilicet alterum ſpeculum ſit concauum.

Coroll. 4.

§. 22. Hoc ergo caſu neceſſe eſt, vt minus ſpeculum ſit conuexum eiusque diſtantia focalis negatiua. Statuatur ergo $q = -\mathfrak{q}$, vt fiat $\beta = \frac{-b \mathfrak{q}}{b + \mathfrak{q}}$, qui valor ob $b = -\frac{\alpha y}{x}$ abit in hunc $\beta = \frac{\alpha y \mathfrak{q}}{\mathfrak{q} x - \alpha y}$, qui valor vt primo ſit poſitiuus, debet eſſe $\mathfrak{q} > \frac{\alpha y}{x}$ deinde vt fiat $2 \beta > k$ debet eſſe:

$$2 x y \mathfrak{q} > x (x - y) \mathfrak{q} - \alpha y (x - y)$$

ex qua fit

$$\alpha y (x - y) > x (x - 3 y) \mathfrak{q}$$

vnde pro $\mathfrak{q}$ elicitur alter limes

$$\mathfrak{q} < \frac{\alpha y (x - y)}{x (x - 3 y)}, \text{ altero exiſtente } \mathfrak{q} > \frac{\alpha y}{x}.$$

Coroll. 5.

§. 23. Sin vero praeter conſuetudinem foramen tantum fiat, vt ſit $3 y > x$, tum ſpeculo minori concauo vti licebit dummodo eius diſtantia focalis ſit $q > \frac{\alpha y (x - y)}{x (3 y - x)}$, quemadmodum ex Coroll. 3 eſt manifeſtum,

festum, atque hoc casu quoniam littera q nulla alia conditione restringitur hoc speculum adeo planum fieri poterit.

Scholion.

§. 22. Haec duo specula ita hic sumus contemplati, quemadmodum in telescopiis Gregorianis vsurpari solent atque hic tantum ad obiecti punctum medium in axe tubi situm spectauimus vnde radii axi paralleli in speculum principale incidant; alterum vero speculum ita instruximus, vt omnes radios a priori reflexos recipiat eosque porro in foramen projiciat. Cum autem etiam partes obiecti extra axem sitae visui offerri debeant, quoniam inde radii sub aliqua exigua obliquitate in speculum incidunt, tubum, in quo haec duo specula inseruntur, aliquantillum diuergentem confici oporteret vel quod eodem redit tubum aliquanto ampliorem effici conueniet quam est diameter speculi; deinde ob eandem rationem etiam speculum minus vltra limites ipsi assignatos extendi deberet, vt etiam istos radios obliquos post reflexionem recipere posset, sed quoniam parum interest, siue extremitates obiecti pari lumine conspiciantur atque eius medium, siue minore, hac amplificatione facile eo magis carere poterimus, quod tota haec obliquitas non vltra aliquot minuta in magnis praesertim multiplicationibus excrescat. Longe aliter autem se habitura esset huius rei tractatio, si etiam specula ad axem inſtrumenti oblique poſita in vſum vocarentur, quemadmodum in ipſo huius inuentionis principio a Newtono eſt factum, ſed quia reflexio radiorum oblique incidentium haud exiguam gignit confuſionem, hoc argumentum hic neutiquam attingimus.

CAPVT