SECTIONIS SECVNDAE.

CAPVT II.

DE VLTERIORI HORUM TELESCOPIORUM PERFECTIONE, QUAM QUIDEM VNICAM VITRI SPECIEM ADHIBENDO ASSEQUI LICET.

Problema I.

228.

Si inter lentem obiectiuam et ocularem in ipſo loco imaginis noua lens conſtituatur; inquirere in commoda, quae eius ope teleſcopio conciliare licet.

Solutio.

Quia igitur caſum trium lentium habemus multiplicatio m ſtatim praebet $m = -\frac{\alpha}{b} \cdot \frac{\beta}{c}$ vbi cum eſſe debeat interuallum inter lentem primam et ſecundam $= \alpha$, fit $b = 0$, ideoque $\beta = B b = 0$ niſi forte $B = \infty$. Quo autem hinc valorem ipſius B defin're queamus, eius diſtantiam focalem in computum intro-

ducamus, quae ſit $= q$, ita, vt iam habeamus $q = \frac{b\beta}{b+\beta}$,
ex qua aequatione colligemus $\beta = \frac{bq}{b-q} = 0$, vnde
valorem litterae B conſequimur, ſcilicet $B = \frac{\beta}{b} = -1$
hincque $\mathfrak{B} = \infty$. Quoniam igitur tam b, quam $\beta = 0$,
ita tamen, vt ſit $\frac{\beta}{b} = -1$ erit $m = \frac{\alpha}{c}$ ideoque $c = \frac{\alpha}{m}$,
vbi c denotat diſtantiam focalem lentis ocularis. His
notatis ſemidiameter confuſionis erit

$$\frac{\mu m x^3}{4 p^3}\left(\lambda + 0 + \frac{\lambda''}{m}\right)$$

ita, vt lens media nihil plane ad hanc confuſionem
conferat, perindeque ſit, quaecunque figura huic lenti
tribuatur. Deinde pro campo apparente habebimus
eius ſemidiametrum $\Phi = \frac{\pi - \pi'}{m+1}$ vbi valor ipſius π per
hanc formulam definitur $\frac{\mathfrak{B}\pi - \Phi}{\Phi} = \frac{\alpha}{b}$ ex qua vt ali-
quid concludi poſſit, loco b introducamus diſtantiam
focalem ſecundae lentis q et cum ſit $q = \mathfrak{B}\, b$ erit
$b = \frac{q}{\mathfrak{B}}$ qui valor nobis praebet hanc aequationem:
$\frac{\mathfrak{B}\pi - \Phi}{\Phi} = \frac{\alpha\mathfrak{B}}{q}$; ſiue ob $\mathfrak{B} = \infty$, $\frac{\pi}{\Phi} = \frac{\alpha}{q}$ ſeu $\pi = \frac{\alpha\Phi}{q}$,
vbi tantum eſt animaduertendum, valorem π qua-
drantem vnitatis ſuperare non debere. Hoc autem
valore π admiſſo, pro campo apparente erit $\Phi = \frac{-\pi' q}{(m+1)q - \alpha}$
hincque $\pi = \frac{-\alpha\pi'}{(m+1)q - \alpha}$ quare ſi ponamus $-\pi' = \frac{1}{4}$,

etiam $\pi = \frac{+\frac{1}{4}\alpha}{(m+1)q - \alpha}$ maior quam $\frac{1}{4}$ eſſe nequit;

ſi igitur quoque ſumamus $\pi = \frac{1}{4}$, nouam hanc nan-
ciſcimur determinationem

$1 =$

$1 = \frac{\alpha}{(m+1)q-\alpha}$ siue $(m+1)q = 2\alpha$ et $q = \frac{2\alpha}{m+1}$.

Sin autem in formula $\pi = \frac{-\alpha\pi'}{(m+1)q-\alpha}$ fractio $\frac{\alpha}{(m+1)q-\alpha}$ maior esset vnitate, tum pro $-\pi'$ minorem valorem, quam $\frac{1}{4}$ scribi oporteret, vt prodiret $\pi = \frac{1}{4}$; tum autem campus apparens minor esset proditurus, quam si etiam $-\pi'$ esset $\frac{1}{4}$. Vnde concludimus siue haec fractio $\frac{\alpha}{(m+1)q-\alpha}$ maior sit vnitate, siue minor, vtroque casu fore $\Phi < \frac{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}}{m+1}$ ac solo casu $\frac{\alpha}{(m+1)q-\alpha} = 1$ fieri posse $\Phi = \frac{1}{2(m+1)}$, qui valor duplo maior est, quam casu duarum lentium simplicium. Interim tamen de quantitate q nihil adhuc definiamus, sed potius videamus, num hoc modo margo coloratus destrui possit, quod eueniet, si fuerit $o = \frac{\pi b}{\Phi p} - \frac{\pi'}{m\Phi}$ siue $o = o + \frac{(m+1)q-\alpha}{mq}$ ex qua sequitur $q = \frac{\alpha}{m+1}$, vnde patet quantitatem q vtique ita assumi posse, vt margo coloratus penitus destruatur, quae determinatio praecedenti longe est anteferenda. Posito igitur $q = \frac{\alpha}{m+1}$, pro campo apparente foret $\pi = \infty . \pi'$ seu $\pi' = \frac{\pi}{\infty}$, quare, cum π maius quam $\frac{1}{4}$ capi non possit, fiet $\pi' = 0$, ita, vt hoc casu lens ocularis nihil plane ad campum conferat quippe qui vnice a lente media pendebit, eritque $\Phi = \frac{1}{4(m+1)}$ seu $\Phi = \frac{859}{m+1}$ minut. tum vero pro loco oculi prodibit eius distantia a lente oculari $O = \frac{\pi' r}{m\Phi} = o$ seu oculum lenti oculari imme-

diate

diate adplicari oportet. Constructio ergo huiusmodi telescopii ita se habebit.

Primo distantia focalis α ita est definienda, vt sit $\alpha = kmy\sqrt[3]{\mu(\lambda m + \lambda'')}$ sumto scilicet $x = my$, et λ ex forma lentis obiectiuae, quaecunque fuerit siue simplex siue multiplicata, definitur, vt in capite praecedente est expositum. Circa lentem autem secundam tenendum est, quia ab ea totus campus pendet, eam vtrinque aeque conuexam formari debere, vt statui possit $\pi = \frac{1}{4}$, quare cum pro ea sit $q = \frac{\alpha}{m+1}$ radius vtriusque faciei erit $= 1, 10. \frac{\alpha}{m+1}$; pro tertia autem lente oculari quoniam eius apertura plane non in calculum ingreditur, perinde est, quaenam ipsi figura tribuatur, dummodo minimam aperturam recipere possit, quae saltim pupillae sit aequalis. Conueniet igitur statui $\lambda'' = 1$, vt distantia α minor capi possit, eiusque figura secundum praecepta supra data elaborari poterit.

Coroll. I.

229. Mirum videbitur, quod media lens in ipso loco imaginis constituta nihil plane ad confusionem conferat, cum tamen naturam telescopii tantopere immutet, vt oculum adeo lenti oculari immediate adplicari oporteat eiusque ope margo coloratus destrui possit. Quod eo magis adhuc est mirandum, quod haec lens nihil plane in imagine neque in eius loco vel quantitate immutet.

Co-

Coroll. 2.

230. In ipsa igitur hac lente media diaphragma ante memoratum constitui debebit, cuius foramen ipsi huius lentis aperturae aequale est capiendum, quin etiam super hac ipsa lente micrometrum statui poterit tenuissimis scilicet lineis super eius superficie ducendis.

Coroll. 3.

231. Videmus porro hanc lentem mediam tantillo minorem esse debere, quam lentem ocularem, cum eius distantia focalis sit $q = \frac{\alpha}{m+1}$, huius vero $= \frac{\alpha}{m}$; nihiloque minus campum apparentem manere eundem ac si simplici lente oculari, vt ante, vteremur.

Scholion I.

232. Introductio huius lentis in ipso loco imaginis collocandae ideo est maximi momenti, quod margini colorato penitus tollendo inseruiat. Vsus autem huiusmodi lentis Astronomis ob aliam rationem iam dudum innotuit, siquidem hoc modo campum apparentem auxerunt simul autem ingens huius lentis incommodum obseruarunt, in eo constans, quod cum lentis huius quasi substantia se cum imagine permisceat omnes vel minimae inaequalitates vitri veluti bullulae vel striae a politura relictae cum imagine ipsa vniantur oculoque in pari ratione multipli-

catae repraesententur quod certe incommodum eo magis est vitandum, quod vix eiusmodi vitri frusta reperire liceat, quae nullis plane inaequalitatibus sint obnoxia. Interim tamen haud difficile erit, has vitri inaequalitates ab ipso obiecto distinguere tubum quodammodo conuertendo; tum enim mox apparebit, quid ad obiectum pertineat quidue ad lentem. Istud autem incommodum tantum locum habet, quando lens in ipso imaginis loco collocatur; simulatque ea tantillum inde remouetur, illud mox insensibile euadit. Ceterum hanc inuestigationem ab hoc casu sum exorsus, quod lens in loco imaginis constituta terminum quasi constituat lentium, quae vel propius ad obiectiuam vel ad ocularem collocabuntur; quas ideo distingui conuenit, quod illae magis ad obiectiuam, hae vero magis ad ocularem sint referendae, quemadmodum etiam his quotquot fuerint, commune nomen lentium ocularium tribui solet, quae appellatio illis lentibus, quae obiectiuae sunt propiores, vtiquam certe conueniet.

Scholion 2.

233. Si marginem coloratum non tantopere reformidemus, vt velimus tam insigne campi apparentis augmentum repudiare; casus in solutione memoratus omnem attentionem meretur. Ponamus igitur, vt ibi animaduertimus, $q = \frac{2\alpha}{m+1}$ vt statui possit $\pi = -\pi' = \frac{1}{4}$ et campi apparentis semidiameter erit $\Phi =$

$\Phi = \frac{1}{2(m+1)}$ siue $\Phi = \frac{1718}{m+1}$ min. atque tam lentem secundam, quam tertiam vtrinque fieri oportebit aeque conuexam; hac facta positione pro margine colorato tollendo aequatio fiet $0 = \frac{m+1}{2m}$, quae cum duplo sit minor, quam ea, quae capite praecedente debebat ad nihilum redigi hic istud lucrum adipiscimur, vt margo coloratus, dum penitus tolli nequit, duplo tamen minor fiat ita, vt vix sensibilis euadat; quod si ergo vitro communi, pro quo $n = 1,55$ vtamur, limes distantiae focalis lentis obiectiuae erit

$$\alpha > k m y \sqrt[3]{0,9381 (\lambda m + 1,6299)}$$

et pro loco oculi reperitur distantia $O = \frac{-\pi' r}{m \Phi}$, quae ob $\frac{-\pi'}{\Phi} = \frac{(m+1)q - \alpha}{q} = \frac{m+1}{2}$ et $r = \frac{\alpha}{m}$ abit in hanc $O = \frac{m+1}{2m} \cdot \frac{\alpha}{m}$, ita, vt iam oculus duplo propius lenti oculari admoueri debeat, quam casu praecedentis capitis. Distantia autem huius lentis ab obiectiua est, vt ibi $= \frac{m+1}{m} \cdot \alpha$. Vnde sequens oritur constructio:

Constructio Telescopii ex tribus lentibus compositi ex eadem vitri specie formatis, pro qua $n = 1,55$.

I. Lens obiectiua pro lubitu siue simplex, existente $\lambda = 1$; siue duplicata, pro $\lambda = 0.1918$; siue triplicata, pro $\lambda = 0.0422$ siue denique quadruplicata pro $\lambda = -0,0102$ eligatur, ita, vt in capite praecedente ex distantia focali α determinetur.

Istius

Istius lentis semidiameter aperturae esto $x = my$; interuallum vsque ad secundam lentem $= \alpha$.

II. Lentis secundae radius vtriusque faciei $= 1,10.\frac{2\alpha}{m+1}$. Eius aperturae semidiameter $= \frac{\alpha}{2(m+1)}$. Interuallum ad lentem ocularem $= \frac{\alpha}{m}$.

III. Lentis ocularis radius faciei vtriusque $= 1,10.\frac{\alpha}{m}$. Eius semidiameter aperturae $= \frac{1}{4}.\frac{\alpha}{m}$. Pro loco oculi eius distantia ab oculari $O = \frac{m+1}{2m}.\frac{\alpha}{m}$. Campi vero visi semidiameter $= \frac{1781}{m+1}$ minut.

et vt iam monitum quantitas α ita est definienda, vt sit

$$\alpha > kmy\sqrt[3]{0,9381(\lambda m + 1,6299)}$$

nisi forte hic valor minor prodeat quam vt apertura praescripta locum habere possit; quo casu semper distantia focalis ex apertura definiri debet, vt hactenus fecimus.

Problema 2.

234. Inter lentem obiectiuam et imaginem realem eiusmodi lentem constituere, qua omnis confusio ab apertura lentium oriunda destruatur, simulque margo coloratus, si fieri queat, tollatur.

Solutio.

Cum hic iterum tres lentes in computum sint ducendae, formula pro multiplicatione dabit $m = -\frac{\alpha}{b}.\frac{\beta}{c}$ vbi

vbi cum inter primam et secundam lentem non detur imago realis, sed ea inter secundam et tertiam cadat, fractio $\frac{\alpha}{b}$ erit negatiua at fractio $\frac{\beta}{c}$ erit positiua. Ponamus ergo $\frac{\alpha}{b} = -k$ eritque $\frac{\beta}{c} = \frac{m}{k}$, vnde colligimus $b = -\frac{\alpha}{k}$; $\beta = \mathrm{B}\, b = \frac{-\mathrm{B}\alpha}{k}$ et $c = \frac{k\beta}{m} = \frac{-\mathrm{B}\alpha}{m}$. Interualla autem, quae debent esse positiua, erunt $\alpha + b = \frac{k-1}{k}\alpha$ ita, vt $(k-1)\alpha$ debeat esse positiuum, et $\beta + c = -\mathrm{B}\alpha(\frac{1}{k} + \frac{1}{m})$ sicque $\mathrm{B}\alpha$ debet esse negatiuum hincque etiam $\frac{\mathrm{B}}{k-1} < 0$. His notatis consideremus formulas generales $\frac{\mathfrak{B}\pi - \Phi}{\Phi} = \frac{\alpha}{b} = -k$, ideoque $\pi = \frac{(1-k)\Phi}{\mathfrak{B}}$. Tum vero est $\Phi = \frac{\pi - \pi'}{m+1}$; vnde patet, vt valor π aliquid conferat ad campum augendum, debere esse $\pi > 0$ seu $\frac{1-k}{\mathfrak{B}} > 0$; at quia $\frac{\mathrm{B}}{k-1} < 0$ erit $-\frac{\mathrm{B}}{\mathfrak{B}} < 0$; ideoque $\frac{\mathrm{B}}{\mathfrak{B}} > 0$; hoc scilicet requiritur, si campum augere velimus. Nunc consideremus aequationem pro margine colorato tollendo $0 = \frac{\pi b}{\Phi p} - \frac{\pi'}{m\Phi}$ quae ob $p = \alpha$, $b = -\frac{\alpha}{k}$; $\frac{\pi}{\Phi} = \frac{1-k}{\mathfrak{B}}$ et $\frac{\pi'}{\Phi} = \frac{1-k}{\mathfrak{B}} - m - 1$ abit in hanc

$$0 = -\frac{(1-k)}{\mathfrak{B}}\left(\frac{1}{k} + \frac{1}{m}\right) + \frac{(m+1)}{m}$$

vnde inuenimus

$$\mathfrak{B} = \frac{(1-k)(m+k)}{k(m+1)} \text{ ideoque } \mathrm{B} = \frac{(1-k)(m+k)}{2km - m + k^2}$$

Ex his autem valoribus fit $\frac{\mathrm{B}}{\mathfrak{B}} = \frac{k(m+1)}{2km - m + k^2}$; vnde patet, vt etiam secunda lens campum augeat, esse debere $2km - m + k^2 > 0$ ad quod requiritur, vt sit

$k > \sqrt{(m^2 + m)} - m$ siue $k > \frac{1}{2}$; cum igitur esse debeat $(k-1)\alpha$ positiuum, duo hic casus sunt constituendi:

I. quo $\alpha > 0$; tum esse debet $k > 1$, vnde fit

$$\mathfrak{B} = \frac{-(k-1)(m+k)}{k(m+1)}, \text{ et } B = \frac{-(k-1)(m+k)}{2km - m + k^2}$$

Nunc igitur erit $\pi = \frac{-(k-1)\Phi}{\mathfrak{B}} = \frac{+k(m+1)\Phi}{m+k}$ et $\pi' = \frac{-m(m+1)\Phi}{m+k}$ et $\frac{\pi}{\pi'} = \frac{-k}{m}$ vnde patet, si ponatur $-\pi' = \frac{1}{4}$ fore $\pi = +\frac{1}{4} \cdot \frac{k}{m}$. Ambae ergo fractiones π et π' non aequales sumi poterunt, nisi sit $k = m$, quo casu statui poterit $\pi = \frac{1}{4}$ et $-\pi' = \frac{1}{4}$, ita, vt campus fiat maximus. Tum autem erit $b = -\frac{\alpha}{m}$ et $\beta = c = \frac{2(m-1)\alpha}{m(3m-1)}$; ob $\mathfrak{B} = -\frac{2(m-1)}{m+1}$ et $B = -\frac{2(m-1)}{3m-1}$; ita, vt nunc sit distantia focalis lentis secundae $\mathfrak{B}b = \frac{2(m-1)\alpha}{m(m+1)}$ et lentis tertiae $= c = \frac{2(m-1)\alpha}{m(3m-1)}$.

II. Sin autem sit $\alpha < 0$, debet esse $k < 1$ et tamen $k > \frac{1}{2}$ et litterae $\mathfrak{B}$ et B fiunt positiuae. Hincque habebitur $\frac{\pi}{\Phi} = \frac{k(m+1)}{m+k}$ et $\frac{\pi'}{\Phi} = \frac{k(m+1)}{m+k} - m - 1 = \frac{-m(m+1)}{m+k}$, ideoque $\frac{\pi}{\pi'} = \frac{-k}{m}$ ita, vt ob $k < 1$ littera π multo minor sit, quam $-\pi'$; ideoque campus apparens hoc casu vix vllum accipiat augmentum.

Nunc denique id, in quo cardo rei versatur, perpendamus, formulam scilicet pro semidiametro confusionis, quae est:

$\mu m x$

$$\frac{\mu m x^3}{4\alpha^3}\left(\lambda - \frac{1}{\mathfrak{B}k}\left(\frac{\lambda'}{\mathfrak{B}^2} + \frac{\nu}{B}\right) - \frac{\lambda''}{B^3 . m}\right)$$

quae vt ad nihilum redigi queat, necesse est, vt $\mathfrak{B}$ sit quantitas positiua vnde casus prior ante memoratus locum habere nequit, ex quo necesse est, vt sit $k < 1$, ideoque etiam $\alpha < 0$ et $B > 0$; ex quo sequitur capi debere $k > \frac{1}{2}$, ita, vt k intra limites $\frac{1}{2}$ et 1 contineri debeat; quare cum hoc casu sit $\frac{B}{\mathfrak{B}} > 0$, campus quoque augmentum quoddam accipiet, propterea quod sit $\pi : -\pi' = k : m$ quod autem vix erit sensibile. Si itaque statuatur semidiameter confusionis $= 0$, habebitur $\lambda = \frac{1}{\mathfrak{B}k}\left(\frac{\lambda'}{\mathfrak{B}^2} + \frac{\nu}{B}\right) + \frac{\lambda''}{B^3 . m}$ vbi notandum est, litteras λ' et λ'' vnitate minores esse non posse.

Quo resolutio huius aequationis clarius perspiciatur, primum obseruo, sumi non posse $k = 1$; tum quia duae priores lentes fierent contiguae, tum vero quod prodiret $\mathfrak{B} = 0$ et $B = 0$; sin autem poneretur $k = \frac{1}{2}$, fieret quidem $\mathfrak{B} = \frac{2m+1}{2(m+1)}$ et $B = 2m + 1$; vnde nostrae distantiae erunt

$$b = -2\alpha;\quad \beta = -2(2m+1)\alpha.$$

$$c = \frac{-(2m+1)\alpha}{m}$$

ideoque interualla $\alpha + b = -\alpha$

et $\beta + c = -(2m+1)\alpha\left(2 + \frac{1}{m}\right) = -\frac{(2m+1)^2}{m} . \alpha$ quod posterius in enormem longitudinem excresceret, nisi $-\alpha$ perexiguum caperetur, quod autem fieri nequit, quia eius apertura ob claritatem per se definitur;

tur; ex quo manifeſtum eſt numerum k intra limites 1 et $\frac{1}{2}$ accipi debere.

Coroll. 1.

235. Hoc ergo modo duplicem perfectionem his teleſcopiis conciliare licet, alteram, qua margo coloratus prorſus deſtruitur; alteram vero, qua confuſio ab apertura oriunda ad nihilum redigitur. Neque vero campo apparenti vllum augmentum ſenſibile addi poteſt.

Coroll. 2.

236. Quod ad lentium harum aperturas attinet, pro prima quidem erit ſemidiameter $x = my$; pro ſecunda autem $\pi q \pm \frac{qx}{\mathfrak{B}p}$ (§. 23) ſiue

$$= \frac{-(1-k)(m+k)\pi.\alpha}{k^2(m+1)} + \frac{x}{k}$$

quia autem eſt $\pi = -\frac{k}{m}.\pi'$ capique poteſt $\pi' = -\frac{1}{4}$, ſiquidem lens ocularis fiat vtrinque aequaliter conuexa, erit $\pi = \frac{k}{4m}$, ideoque ſemidiameter aperturae ſecundae lentis

$$= \frac{-(1-k)(m+k)\alpha}{4mk(m+1)} + \frac{x}{k}$$

cuius pars prior prae poſteriore quaſi euaneſcit, ita, vt ſufficiat hunc ſemidiametrum ſtatuiſſe $= \frac{x}{k}$, qui vtique maior eſt, quam x ob $k < 1$.

Lens

Lens autem ocularis vtrinque aequaliter conuexa esse debet, vnde cum eius distantia focalis sit

$$c = \frac{-(1-k)(m+k)\alpha}{m(2km-m+k^2)};$$

eius pars quarta dabit semidiametrum aperturae.

Coroll. 3.

237. Quod autem ad locum oculi attinet post lentem ocularem, eius distantia reperitur $O = -\frac{\pi' \cdot r}{m\Phi}$ quia autem est

$$-\frac{\pi'}{\Phi} = \frac{m(m+1)}{m+k} \text{ et } r = \frac{-(1-k)(m+k)\alpha}{m(2km-m+k^2)}$$

$$\text{erit } O = \frac{-(1-k)(m+1)\alpha}{m(2km-m+k^2)}$$

quae est quantitas positiua.

Scholion.

238. Labor certe esset maxime operosus si hos valores pro B et 𝔅 inuentos vellemus in vltima aequatione substituere indeque numeros λ et λ' inuestigare atque adeo coacti essemus pro quauis multiplicatione calculum de nouo suscipere, cui incommodo medela est quaerenda. Perpendamus igitur istos tam complicatos valores pro 𝔅 et B ex aequatione pro margine tollendo esse erutos vt scilicet illi aequationi summo rigore satisfieret; quoniam autem superfluum est, hanc aequationem perfectissime adimplere, propterea quod locus oculi ob aperturam pupillae haud medio-

diocrem latitudinem patitur; exiguaque eius mutatione margo coloratus, si quis forte obseruatur, facillime euitabitur; sufficiet ei quam proxime satisfecisse, quare cum semper m denotet numerum satis magnum, k autem sit vnitate minor, prae m facile licebit k negligere et m quasi infinitum spectare; vnde nanciscemur hos valores

$$\mathfrak{B} = \frac{(1-k)}{k},\ B = \frac{1-k}{2k-1}$$

quibus itaque in euolutione nostri problematis vtemur; ex iis autem nostra elementa ita simplicius exprimentur:

$$b = -\frac{\alpha}{k};\ \beta = \frac{-(1-k)\alpha}{k(2k-1)} \text{ et } c = \frac{-(1-k)\alpha}{m(2k-1)};$$

hinc interualla

$$\alpha + b = \frac{-(1-k)\alpha}{k} \text{ et}$$

$$\beta + c = \frac{-(1-k)}{2k-1}\left(\frac{1}{k} + \frac{1}{m}\right)\alpha$$

$$= \frac{-(1-k)(k+m)\alpha}{(2k-1)km}$$

et pro oculi loco

$$O = \frac{-(m+1)(1-k)}{m(2k-1)} \cdot \frac{\alpha}{m}.$$

Lentium autem harum distantiae focales erunt

$$\text{I}^{\circ}.\ p = \alpha;\quad \text{II}^{\circ}.\ q = \frac{-(1-k)}{k^2} \cdot \alpha$$

$$\text{III}.\ r = c = \frac{-(1-k)\alpha}{m(2k-1)}$$

earum-

earumque aperturae semidiametri

Imae. $x = my$. IIdae. $\frac{x}{k} = \frac{my}{k}$.

IIItiae. $= \frac{1}{4} r = \frac{-(1-k)\alpha}{4m(2k-1)}$.

Campi denique apparentis semidiameter erit

$$\Phi = \frac{\frac{1}{4}\left(1 + \frac{k}{m}\right)}{m+1}$$

siue $\Phi = 859\left(\frac{m+k}{m(m+1)}\right)$ min.

Nunc autem aequatio adhuc resoluenda erit

$$\lambda = \frac{1}{1-k}\left(\frac{\lambda' k^2}{(1-k)^2} + \frac{\nu(2k-1)}{1-k}\right) + \frac{\lambda''(2k-1)^3}{(1-k)^3 \cdot m}$$

seu

$$\lambda = \frac{1}{(1-k)^3}\left(\lambda' k^2 + \nu(1-k)(2k-1) + \frac{\lambda''(2k-1)^3}{m}\right)$$

Nihil aliud igitur superest, nisi vt pro quibusdam valoribus ipsius k hanc aequationem resoluamus, vbi notandum est, λ'' poni debere $= 1.6299$ siquidem vitro communi, pro quo est $n = 1,55$ vti vetimus; quo casu etiam est $\nu = 0.2326$.

Exemplum I.

239. Statuamus $k = \frac{3}{4}$ vt intra limites suos 1 et $\frac{1}{2}$ medium teneat et aequatio nostra resoluenda induet hanc formam:

$$\lambda = 64\left(\frac{9\lambda'}{16} + \frac{1}{8}\nu + \frac{\lambda''}{8m}\right)$$

siue $\lambda = 36\lambda' + 8\nu + \frac{8\lambda''}{m}$.

$\lambda =$

$$\lambda = 36\lambda' + 1,8608 + \frac{13,0302}{m}$$

quia nunc λ' vnitate minus esse nequit, statuamus $\lambda' = 1$ fietque

$$\lambda = 37,8608 + \frac{13,0302}{m}$$

qui valor cum tam sit enormis, nunquam sperandum est, vllum artificem huiusmodi lentem parare posse; vnde hanc telescopiorum speciem praetermitti conueniet.

Exempl. II.

240. Vt tantos numeros euitemus, sumamus $k = \frac{3}{5}$, vt fiat $1 - k = \frac{2}{5}$ et $2k - 1 = \frac{1}{5}$ et aequatio nostra fiet

$$\lambda = \frac{125}{8}\left(\frac{9}{25}\lambda' + \frac{2}{25}\nu + \frac{\lambda''}{125 \cdot m}\right)$$

$$\lambda = \frac{45}{8}\lambda' + \frac{5}{4}\nu + \frac{\lambda''}{8m}$$

sumto igitur $\lambda' = 1$ erit

$$\lambda = 5,9157 + \frac{0,2037}{m}.$$

qui valor etsi satis magnus tamen in praxi tolerari poterit. Interim conueniet, singula huic valori $k = \frac{3}{5}$ conuenienter definire

$$b = -\frac{5\alpha}{3};\ \beta = -\frac{10}{3} \cdot \alpha;\ c = -\frac{2\alpha}{m}.$$

Hinc interualla

$$\alpha + b = -\frac{2}{3}\alpha \text{ et } \beta + c = -\alpha\left(\frac{10}{3} + \frac{2}{m}\right)$$

et

et pro aperturis lentium ſemidiameter primae $= x$, ſecundae $= \frac{5}{3} x$ et tertiae $= - \frac{\alpha}{2m}$ oculique poſt lentem diſtantia $O = - \frac{2(m+1)}{m} \cdot \frac{\alpha}{m}$.

Scholion.

241. Si huiusmodi caſus pro variis multiplicationibus euoluere vellemus, ex ſuperioribus intelligitur, duos tantum caſus ſufficere poſſe; vt inde formulae generales pro quauis multiplicatione elici queant, dum ſcilicet altero, pro m numerus modice magnus, veluti 20, aſſumatur, altero vero numerus quaſi infinitus; quae inveſtigatio cum omni attentione digna videatur, eam in ſequente problemate inſtituamus.

Problema 3.

242. In caſu praecedentis problematis ſi capiatur $k = \frac{5}{9}$ pro quacunque multiplicatione maiore m teleſcopium conſtruere, in quo non ſolum margo coloratus prorſus euaneſcat, ſed etiam confuſio ex apertura oriunda ad nihilum redigatur.

Solutio.

Cum hic ſit $k = \frac{5}{9}$ erit

$$\mathfrak{B} = \frac{4(9m+5) \cdot 9}{9 \cdot 9 \cdot 5(m+1)} = \frac{4(9m+5)}{45(m+1)}$$

$$B = \frac{4(9m+5) \cdot 9^2}{9 \cdot 5(9m+25)} = \frac{4(9m+5)}{9m+25}.$$

Nunc

Nunc igitur duos caſus euoluamus, in quorum priore ſit $m = 20$; in poſteriore vero $m = \infty$.

I. Ob $m = 20$ erit $\mathfrak{B} = \frac{148}{189}$ et $B = \frac{148}{41}$; vnde noſtra aequatio, quae eſt

$$\lambda = \frac{9\lambda'}{5\mathfrak{B}^3} + \frac{9\nu}{5\mathfrak{B}B} + \frac{\lambda''}{B^3 . m}.$$

ſi omnes lentes ex vitro communi pro quo $n = 1,55$ et $\nu = 0,2326$ lentem autem ocularem vtrinque aeque conuexam aſſumamus, vt ſit $\lambda'' = 1,6299$, ſequentem induet formam; in ſubſidium vocatis logarithmis

$$\text{Log.}\, \mathfrak{B} = 9.8937999$$

$$\text{Log.}\, B = 0.5574778$$

hincque

$$\text{Log.}\, \tfrac{1}{\mathfrak{B}} = 0.1062000$$

$$\text{Log.}\, \tfrac{1}{B} = 9.4425221$$

$$\text{et Log.}\, \tfrac{9}{5} = 0,2552725$$

$$\lambda = 3,7486\lambda' + 0,14812 + 0,00173.$$

$$\text{Log.}\, 3,7486\lambda' = 0,5738725 + \text{Log.}\, \lambda'.$$

Hic circa numerum λ' obſeruaſſe iuvabit, quod cum lens ſecunda maximam aperturam habere debeat, cuius ſcilicet ſemidiameter ſit $\frac{9}{5}x = \frac{9}{5}.my$ expediat hanc lentem vtrinque aeque conuexam reddere, quam ob cauſſam ſtatui oportet

$\gamma(\lambda' - 1)$

$$\sqrt{(\lambda'-1)} = \frac{\sigma-\varrho}{2\tau}\cdot\frac{\beta-b}{\beta+b} = \frac{\sigma-\varrho}{2\tau}\cdot\frac{B-1}{B+1}.$$

hincque $\lambda' = 1 + \left(\frac{\sigma-\varrho}{2\tau}\right)^2\cdot\left(\frac{B-1}{B+1}\right)^2.$

Cum autem conſtet eſſe $\left(\frac{\sigma-\varrho}{2\tau}\right)^2 = 0,6299$

erit $\lambda' = 1 + 0,6299\cdot\left(\frac{107}{189}\right)^2$ ſeu

$\lambda' = 1,20189$; hincque

$\lambda = 4,50544 + 0,14812 + 0,00173$

$\lambda = 4,65529.$

Vnde fit $\lambda - 1 = 3,65529$ et $\tau\sqrt{\lambda-1} = 1,7304.$

Pro formatione igitur primae lentis habebimus

$$F = \frac{\alpha}{\sigma \pm 1,7304} = \frac{\alpha}{-0,1030} = -9,7087.\alpha$$

$$G = \frac{\alpha}{\varrho \mp 1,7304} = \frac{\alpha}{+1,9211} = +0,52053.\alpha$$

cuius lentis aperturae ſemidiameter debet eſſe $x = my$

At interuallum ſecundae lentis ab hac eſt

$\alpha + b = -0,8.\alpha.$

Pro ſecunda autem lente, cum ſit eius diſtantia focalis $q = \mathfrak{B}b = -\frac{9}{5}\mathfrak{B}\alpha = -1,4095\,\alpha$ erit radius vtriusque faciei $= 1,10.q = -1,5504\,\alpha$ eius aperturae ſemidiameter $= \frac{9}{5}x = \frac{9}{5}my.$ Ab hac autem lente ad tertiam, interuallum eſt

$$\beta + c = -B\alpha\left(\frac{m+k}{mk}\right) = -6.4974\,\alpha$$

$$-3,6097.\frac{\alpha}{m} = -6,6780.\alpha$$

Pro

Pro lente tertia, cuius diſtantia focalis eſt

$$c = -\tfrac{148}{41} \cdot \tfrac{\alpha}{m} = 3{,}6097 \cdot \tfrac{\alpha}{m}$$

radius faciei vtriusque $= -1{,}1\, c = -3{,}9707 \cdot \frac{\alpha}{m}$;

hincque ad oculum vsque erit diſtantia

$$O = -\tfrac{(m+1) \cdot B\alpha}{(m+\kappa) \cdot m} = -\tfrac{4 \cdot 9 \cdot 21}{5 \cdot 41} \cdot \tfrac{\alpha}{m} = -3{,}6878 \cdot \tfrac{\alpha}{m}.$$

II. Sit nunc $m = \infty$ erit $\mathfrak{B} = \frac{4}{5}$ $B = 4$ vnde noſtra aequatio induet hanc formam:

$$\lambda = \tfrac{225}{64} \lambda' + \tfrac{9}{16} \nu$$

Hic iterum lentem ſecundam aequaliter conuexam reddamus et ob $\beta = Bb = 4b$ erit

$$\sqrt{\lambda' - 1} = \tfrac{\sigma - \varrho}{2\tau} \cdot \tfrac{\beta - b}{\beta + b} = \tfrac{\sigma - \varrho}{2\tau} \cdot \tfrac{3}{5}$$

Hincque $\lambda' = 1 + 0{,}6299 \cdot \frac{9}{25}$, $\lambda' = 1{,}2267$. ex quo colligimus

$$\lambda = 4{,}3126 + 0{,}1308 = 4{,}4434$$

hincque $\lambda - 1 = 3{,}4434$ et $\tau \sqrt{(\lambda - 1)} = 1{,}6796$; quare ſequens habetur conſtructio:

I. Pro prima lente

$$F = \tfrac{\alpha}{\sigma \pm 1{,}6796} = \tfrac{\alpha}{-0{,}0522} = -19{,}1570 \cdot \alpha$$

$$G = \tfrac{\alpha}{\varrho + 1{,}6796} = \tfrac{\alpha}{+1{,}8703} = +0{,}5346.$$

Apertura eſt, vt ante, aeque ac diſtantia ad ſecundam lentem.

II. Pro

II. Pro secunda lente

Quum eius distantia focalis

$= -\frac{9}{5}\mathfrak{B}\alpha = -\frac{36}{25}.\alpha = -1.44\alpha$, fiet

radius vtriusque faciei $= -1,584.\alpha$

eiusque aperturae semidiameter $= \frac{9}{5}x$

at distantia ad lentem tertiam $= -7,2\alpha - 4.\frac{\alpha}{m}$.

III. Pro tertia lente

cuius distantia focalis $= -4\frac{\alpha}{m}$

radius vtriusque faciei $= -4,4.\frac{\alpha}{m}$

eiusque aperturae semidiameter $= -1,1\frac{\alpha}{m}$

Ab hac lente ad oculum vsque erit distantia

$O = -4.\frac{\alpha}{m}$.

His duobus casibus euolutis solutionem quaestionis nostrae generalis pro multiplicatione quacunque m maiore, quam 20, ita adstruamus:

I. Pro prima lente

statuamus

$$\text{radium faciei}\begin{cases}\text{anter.} = -(19,1570 + \frac{f}{m})\alpha\\ \text{poster.} = +(0,5346 + \frac{g}{m})\alpha\end{cases}$$

et adplicatione ad casum $m = 20$ facta reperietur

$19,1570 + \frac{f}{20} = 9,7087$

 vnde

vnde fit $f = -188,966$

porro $0,5346 + \frac{g}{20} = 0,5205$

hinc $g = -0,2820$.

II. Pro fecunda lente

ftatuatur

radius vtriusque faciei $= -(1,584 + \frac{h}{m})\alpha$

cumque effe debeat $1,584 + \frac{h}{20} = 1,5504$

erit $h = -0,6720$.

Eius diftantia focali exiftente $= -(1,440 - \frac{0.6100}{m})\alpha$

et aperturae femidiameter $= \frac{9}{5}x$.

Pro diftantia ad tertiam lentem inueniemus

$$-(7,2 - \frac{14.0520}{m})\alpha - (4,00 - \frac{7.8060}{m})\frac{\alpha}{m}$$

fiue $-7,200\,\alpha + 10,0520.\frac{\alpha}{m} + \frac{7.8060}{m^2}.\alpha$

fiue $-(7,200 - \frac{10.0520}{m} - \frac{7.8060}{mm})\alpha$.

III. Pro tertia lente

cuius diftantia focalis reperitur

$$= -(4,00 - \frac{7.8060}{m})\frac{\alpha}{m}$$

fumi debet radius vtriusque faciei

$$= -(4,400 - \frac{8.5866}{m})\frac{\alpha}{m}$$

cuius parti quartae femidiameter aperturae aequalis ftatui poteft.

Diftan-

Diſtantia denique oculi ab hac lente reperitur

$$O = -\left(4 - \frac{6,2420}{m}\right)\frac{\alpha}{m}$$

Campi vero apparentis ſemidiameter erit $\frac{850}{m+1}$ minut.

Coroll. 1.

243. Cum interuallum primae lentis et ſecundae ſit $= -0,8\,\alpha$, prodibit tota teleſcopii longitudo ab obiectiua vsque ad oculum

$$-\left(8 - \frac{6,0520}{m} - \frac{1,440480}{mm}\right)\alpha$$

ita, vt haec longitudo fere ſit octuplo maior, quam diſtantia focalis α qua circumſtantia haec teleſcopia non admodum commendari merentur.

Coroll. 2.

244. Cum primae lentis ſemidiameter aperturae debeat eſſe $x = my = \frac{m}{50}$ dig. qui autem maior eſſe nequit parte quarta radii minoris, quae eſt $0,1336.\alpha = \frac{1}{8}\alpha$ circiter; patet capi debere $-\alpha > \frac{16.m}{100}$ vel $\alpha > 0,16.m$.

Quia autem lentis ſecundae ſemidiameter aperturae eſſe debet $= \frac{9}{5}x = \frac{9m}{250}$ dig. hic quoque minor eſſe debet parte quarta radii, quae eſt $0,396.\alpha$; vnde eſſe debet $-\alpha > 0,0909.m$, qui limes cum minor ſit praecedente, illum obſeruari oportet.

Scho-

Scholion.

245. Cum igitur $-\alpha$ maius esse debeat, quam $0,16.m$ statuamus $-\alpha = \frac{2}{10}.m$ siue $\alpha = -0,2\,m$, atque sequentem constructionem pro Telescopiis huius speciei obtinebimus.

Constructio Telescopiorum pro quacunque multiplicatione m, lentibus ex vitro communi confectis.

I. Pro lente obiectiua

$$\text{rad. fac.} \begin{cases} \text{anter.} = +3,8314\,m - 37,7932 \text{ dig.} \\ \text{poster.} = -0,1069.m + 0,0564 \text{ dig} \end{cases}$$

Eius aperturae semidiameter $= \frac{m}{50}$ dig.

Interuallum ad lentem secundam $= 0,16.m$ dig.

II. Pro lente secunda, in digitis

distantia focalis $= +0,2880\,m. - 0,12.$

radius faciei vtriusque $= +0,3168\,m - 0,13.$

Eius aperturae semidiam. $= \frac{9}{250}.m = 0,036.m.$

Interuallum ad lentem tertiam

$$= +1,4400\,m - 2,01 - \frac{1.56}{m}.$$

III. Pro tertia lente in digitis

distantia focalis $= +0,800 - \frac{1.56}{m}.$

radius

radius vtriusque faciei $= + 0,88 - \frac{1,71}{m}$
cuius pars quarta $= \frac{1}{5}$ dig. dat femidiametrum aperturae. Hinc ad oculum vsque diftantia erit

$$O = 0,8 - \frac{1,24}{m} \text{ dig.}$$

Campi apparentis femidiameter $= \frac{850}{m+1}$ minut.
Tota autem Telefcopii longitudo erit

$$= (-1,30 + 1,6.m - \frac{2,8}{m}) \text{ dig.}$$

Ita v. gr. pro $m = 100$ erit longitudo $= 158\frac{2}{3}$ dig. fiue 13 ped. $2\frac{2}{3}$ dig.

Cum igitur fupra tubo vnum pedem vix fuperante fere tantam multiplicationem produxerimus, haec telefcopiorum fpecies nunc quidem erit repudianda, etfi refpectu vulgarium tuborum aftronomicorum maxime foret aeftimanda, cum quod nullum marginem coloratum praebeat, tum vero etiam quia confufio ab apertura oriunda prorfus fit fublata. Quamobrem nobis inquiri conueniet, num duabus lentibus inter obiectiuam et imaginem collocandis hoc incommodum euitari poffit.

Problema 4.

246. Inter lentem obiectiuam et imaginem eiusmodi duas lentes interponere, vt non folum margo coloratus, fed etiam confufio ab apertura oriunda penitus deftruatur.

Solutio.

Cum hic quatuor lentes ſint conſiderandae, multiplicatio dabit hanc formulam $m = \frac{\alpha}{b} \cdot \frac{\beta}{c} \cdot \frac{\gamma}{d}$, quarum trium fractionum binae priores negatiuae, tertia vero affirmatiua eſſe debebit. Statuatur ergo

$$\frac{\alpha}{b} = -k;\ \frac{\beta}{c} = -k' \text{ eritque } \frac{\gamma}{d} = \frac{m}{kk'}.$$

Vnde erit $b = -\frac{\alpha}{k};\ c = -\frac{\beta}{k'};\ d = \frac{\gamma k k'}{m}$

praeterea vero eſt $\beta = \mathrm{B}b;\ \gamma = \mathrm{C}c$ vnde omnia haec elementa ex α ita definientur:

$$b = -\frac{\alpha}{k};\ \beta = -\frac{\mathrm{B}\alpha}{k};\ c = +\frac{\mathrm{B}\alpha}{k.k'}$$

$$\gamma = \frac{\mathrm{BC}\alpha}{kk'};\ d = \frac{\mathrm{BC}\alpha}{m}$$

hinc interualla lentium fient

$$1^{\circ}.\ \alpha + b = \frac{k-1}{k}.\ \alpha.$$

$$2^{\circ}.\ \beta + c = \frac{\mathrm{B}\alpha}{k}\ \left(\frac{1-k'}{k'}\right)$$

$$3^{\circ}.\ \gamma + d = \mathrm{BC}\,\alpha\left(\frac{1}{kk'} + \frac{1}{m}\right)$$

vnde quia kk' et m ſunt per ſe numeri poſitiui, hae ſequuntur conditiones:

$$1^{\circ}.\ \alpha(k-1) > 0;\ 2^{\circ}.\ \mathrm{B}\alpha(1-k') > 0;$$

$$3^{\circ}.\ \mathrm{BC}\alpha > 0;$$

quae

quae eliso α reducuntur ad has duas

$4^\circ.\ \frac{B(1-k')}{k-1} > 0;$

$5^\circ.\ \frac{C}{1-k'} > 0$ seu $C(1-k') > 0.$

Iam ex superioribus vidimus, marginem coloratum destrui non posse, nisi ante fractiones π, π' et π'' definiantur quem in finem sequentes aequationes considerari debent:

$$\frac{\mathfrak{B}\pi-\Phi}{\Phi} = \frac{\alpha}{b} = -k$$

$$\frac{\mathfrak{C}\pi'-\pi+\Phi}{\Phi} = \frac{B\alpha}{c} = kk'.$$

$$\text{et } \Phi = \frac{\pi-\pi'+\pi''}{m+1}$$

ex quibus assequimur:

$$\frac{\pi}{\Phi} = \frac{1-k}{\mathfrak{B}};$$

$$\frac{\pi'}{\Phi} = \frac{1-k}{\mathfrak{B}\mathfrak{C}} + \frac{kk'-1}{\mathfrak{C}}$$

$$\frac{\pi''}{\Phi} = \frac{\pi'}{\Phi} - \frac{\pi}{\Phi} + m + 1$$

$$= \frac{1-k}{\mathfrak{B}C} + \frac{kk'-1}{\mathfrak{C}} + m + 1$$

quibus valoribus substitutis ad marginem coloratum tollendum requiritur haec aequatio, diuisione per $\frac{dn}{n-1}$ facta,

$$O = -\frac{\pi}{\Phi}\cdot\frac{1}{k} + \frac{\pi'}{\Phi}\cdot\frac{1}{kk'} + \frac{\pi''}{\Phi}\cdot\frac{1}{m}$$

 siue

fiue

$$o = \frac{k-1}{\mathfrak{B}k} + \frac{1-k}{\mathfrak{B}\mathfrak{C}kk'} + \frac{kk'-1}{\mathfrak{C}kk'}$$
$$+ \frac{1-k}{\mathfrak{B}\mathfrak{C}m} + \frac{kk'-1}{\mathfrak{C}m} + \frac{m+1}{m}$$

ex qua aequatione vel $\mathfrak{B}$ vel $\mathfrak{C}$ definiri poteſt; tum vero vt ſemidiameter confuſionis ad nihilum redigatur, debet eſſe

$$o = \lambda - \frac{1}{\mathfrak{B}k}\left(\frac{\lambda'}{\mathfrak{B}^2} + \frac{\nu}{B}\right)$$
$$+ \frac{1}{B^3\mathfrak{C}kk'}\left(\frac{\lambda''}{\mathfrak{C}^2} + \frac{\nu}{C}\right) + \frac{\lambda'''}{B^3 C^3 . m}$$

quae vt reſolui poſſit, littera $\mathfrak{B}$ debet eſſe poſitiua, vel ſi $\mathfrak{B}$ eſſet negatiuum ob B quoque negatiuum littera $\mathfrak{C}$ debet eſſe poſitiua.

Coroll. 1.

247. Aequatio pro margine colorato tollendo ad hanc formam reducitur:

$$o = \frac{1-k}{\mathfrak{B}\mathfrak{C}}\left(\frac{1}{kk'} + \frac{1}{m}\right) - \frac{1-k}{\mathfrak{B}}\left(\frac{1}{k} + \frac{1}{m}\right)$$
$$+ \frac{kk'-1}{\mathfrak{C}}\left(\frac{1}{kk'} + \frac{1}{m}\right) + \frac{m+1}{m}$$

ſeu ad hanc:

$$o = \frac{1-k}{\mathfrak{B}}\left(\frac{1}{\mathfrak{C}}\left(\frac{1}{kk'} + \frac{1}{m}\right) - \frac{1}{k} - \frac{1}{m}\right)$$
$$+ \frac{kk'-1}{\mathfrak{C}}\left(\frac{1}{kk'} + \frac{1}{m}\right) + \frac{m+1}{m}$$

vnde

vnde reperitur

$$\frac{k-1}{\mathfrak{B}} = \frac{\frac{kk'-1}{\mathfrak{C}}\left(\frac{1}{kk'}+\frac{1}{m}\right)+\frac{m+1}{m}}{\frac{1}{\mathfrak{C}}\left(\frac{1}{kk'}+\frac{1}{m}\right)-\frac{1}{k}-\frac{1}{m}}$$

siue

$$\frac{k-1}{\mathfrak{B}} = \frac{(kk'-1)(m+kk')+(m+1)kk'\mathfrak{C}}{m+kk'-k'm\mathfrak{C}-kk'\mathfrak{C}}$$

$$\frac{k-1}{\mathfrak{B}} = \frac{(kk'-1)(m+kk')+\mathfrak{C}kk'(m+1)}{m+kk'-\mathfrak{C}k'(m+k)}$$

$$\frac{k-1}{\mathfrak{B}} = kk'-1+\frac{\mathfrak{C}k'(m(k-1)+kk'(k+m))}{m+kk'-\mathfrak{C}k'(m+k)}.$$

Coroll. 2.

248. Si haec aequatio statim a fractionibus liberetur, habebitur

$$\begin{aligned} 0 = {} & (1-k)(m+kk')-\mathfrak{C}(1-k)k'(m+k) \\ & +\mathfrak{B}(kk'-1)(m+kk') \\ & +\mathfrak{B}\mathfrak{C}kk'(m+1) \end{aligned}$$

vnde reperitur

$$\mathfrak{C} = \frac{(m+kk')(k-1+\mathfrak{B}(1-kk'))}{\mathfrak{B}kk'(m+1)+(k-1)k'(m+k)}.$$

Scholion.

249. Inprimis autem notatu dignus est casus quo numerus B fit infinitus et numerus $\mathfrak{C} = 0$, quem supra iam alia occasione euoluimus; quae operatio cum supra difficilior sit visa, nunc sequenti modo planiore expe-

expediatur. Confiderabimus fcilicet numerum B vt praegrandem fitque $B = \frac{1}{\omega}$, denotante ω fractionem minimam, ita, vt ω loco B in calculum introducatur. Tum igitur erit $\mathfrak{B} = \frac{1}{1+\omega}$ iam ne fecundum interuallum $\beta + c$ nimis excrefcat, ftatuatur $\beta + c = \frac{\eta\alpha}{k}$

eritque $c = \frac{\eta\alpha}{k} - \beta$, $\frac{\beta}{c} = -k' = \frac{k\beta}{\eta\alpha - k\beta}$

et quia eft

$$\beta k = -B\alpha = -\frac{\alpha}{\omega}; \text{ erit}$$

$$+k' = \frac{1}{\eta\omega + 1} \text{ et } 1 - k' = \frac{\eta\omega}{1+\eta\omega}$$

ita vt nunc loco litterae k' in calculum introducatur littera η; denique ne tertium interuallum nimis excrefcat ob $B = \frac{1}{\omega}$, ftatuamus $C = \vartheta\omega$, vt fiat $BC = \vartheta$; ita, vt hic loco litterae C, ϑ in calculum ingrediatur. Hinc erit $\mathfrak{C} = \frac{\theta\omega}{1+\theta\omega}$ atque hinc porro

$$\frac{\pi}{\Phi} = (1 - k) + \omega(1 - k)$$

$$\frac{\pi'}{\Phi} = \frac{1+\theta\omega}{(\eta\omega+1)\theta}((1 - k - \eta k) + \eta\omega(1 - k))$$

$$\frac{\pi'}{\Phi} = \frac{1+\theta\omega}{(1+\eta\omega)\theta}(1 - k - \eta k + \eta\omega(1 - k))$$

hincque pofito $\omega = 0$, erit

$$\frac{\pi}{\Phi} = 1 - k; \quad \frac{\pi'}{\Phi} = \frac{1}{\theta}(1 - k - \eta k)$$

hincque

$$\frac{\pi''}{\Phi} = \frac{1 - k - \eta k}{\theta} + k + m.$$

Quare

Quare cum pro margine tollendo inuenta fit haec aequatio:

$$0 = -\frac{\pi}{\Phi}\cdot\frac{1}{k} + \frac{\pi'}{\Phi}\cdot\frac{1}{kk'} + \frac{\pi''}{\Phi}\cdot\frac{1}{m}$$

ob $k' = 1$, fi illi valores fubftituantur, prodibit

$$0 = \frac{k-1}{k} + \frac{1-k-\eta k}{k\theta} + \frac{1-k-\eta k}{m\theta} + \frac{k+m}{m}$$

fiue $0 = m\vartheta(k-1) + m(1-k-\eta k)$

$$+ k(1-k-\eta k)$$

$$+ k\vartheta(k+m)$$

$$0 = \vartheta(k^2 + (2k-1)m) + (k+m)(1-k-\eta k)$$

hincque inuenietur

$$\vartheta = \frac{+(k+m)(k+\eta k-1)}{(2k-1)m+k^2}$$

hinc autem noftra elementa erunt

$$b = -\frac{\alpha}{k};\ \beta = \infty;\ c = \infty;$$

$$\gamma = \frac{\theta\alpha}{k};\ d = \frac{\theta\alpha}{m}$$

et interualla

$$\alpha + b = \frac{k-1}{k}\cdot\alpha$$

$$\beta + c = \frac{\eta\alpha}{k}$$

$$\gamma + d = \vartheta\alpha\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{k}\right)$$

quae debent effe pofitiua; ideoque

$$\eta(k-1) > 0;\ \vartheta(k-1) > 0 \text{ et } \vartheta\eta > 0.$$

Pro

I. Sit igitur $\alpha > 0$. debebitque esse $k > 1$; $\eta > 0$ et $\vartheta > 0$ quae vltima conditio sponte impletur; sitque etiam O positiuum, tum vero fiet $\frac{\pi}{\Phi} < 0$ et $\frac{\pi'}{\Phi} < 0$ nempe $\frac{\pi'}{\Phi} = \frac{1 - k - \eta k}{\theta} = \frac{-(2k-1)m - k^2}{k + m}$.

Ex vltima igitur formula colligetur semidiameter campi visi

$$\Phi = \frac{\pi'' . \theta}{1 - k - \eta k + (k + m)\theta} \text{ seu}$$

$$\Phi = \frac{(m + k)\pi''}{m(m + 1)}$$

substituto scilicet valore ϑ, si modo praecedentes formulae non praebeant campum minorem. Ad quod diiudicandum comparentur valores π et π' cum π''

et ob $\frac{\pi''}{\Phi} = \frac{m(m+1)}{m+k}$

erit $\frac{\pi}{\pi''} = \frac{(1-k)(m+k)}{m(m+1)}$

et $\frac{\pi'}{\pi''} = \frac{-(2k-1)m - k^2}{m(m+1)}$ hincque $\frac{\pi - \pi'}{\pi''} = \frac{k}{m}$;

at ex illis formulis patet tam π, quam π' minores esse, quam π'' dummodo sit k minus, quam $\frac{5}{12} m$ et cum sit

$$\Phi = \frac{\pi - \pi' + \pi''}{m + 1} \text{ ob } \frac{\pi - \pi'}{\pi''} > 0$$

campus apparens hinc aliquod augmentum accipiet eritque $\Phi = \frac{k + m}{m(m+1)} \pi''$ qui vtique maior est quam simplex, scilicet $\Phi = \frac{\pi''}{m+1}$ idque in ratione $m + k : m$.

Iam porro aequatio resoluenda est, vt ante:

II. Sin autem α fit negatiuum fieri debet $k < 1$, $\eta < 0$; $\vartheta < 0$; ad quod necessarium est, vt sit $k > \frac{1}{2}$.

Quia nunc pro casu praecedente habuimus $\frac{\pi - \pi'}{\pi''} = \frac{k}{m}$, hinc campus apparens multo minus augmentum accipit in hoc casu, quam in illo, quod adeo vix erit sensibile, et pro loco oculi distantia O etiam hoc casu fit positiua; quam ob caussam casus prior huic posteriori anteferendus videtur.

Etsi autem priori casu campus apparens notabiliter augeri posse est inuentus, dum scilicet k vsque ad valorem $\frac{5}{12} m$ augetur, tamen resolutio nostrae aequationis hoc non permittit, quoniam numerus λ' nimis magnus accipi deberet, quocirca littera k vix vltra binarium vel ternarium ad summum crescere potest; vti in subiunctis exemplis magis fiet manifestum, quae ex casu priore deriuabimus, quoniam facile est praeuidere, posteriorem casum eo etiam vitio esse laboraturum, quod longitudo telescopii nimis excrescat.

Exemplum.

251. Statuamus $k = 2$ et multiplicationem $m = 50$, quandoquidem hic de tubis astronomicis agitur eritque

$$\vartheta = \frac{52 \cdot (1 + 2\eta)}{154} = \frac{26}{77} (1 + 2\eta)$$

qui

qui valor ne fiat nimis parvus, quia tum in noſtra aequatione terminus $\frac{\lambda''}{\theta^3 k}$ fieret nimis magnus, ita, vt λ' enormem adipiſceretur valorem; ſtatuamus inſuper $\eta = 1$, vt fiat $\vartheta = \frac{78}{77}$, hincque elementa noſtra ita ſe habebunt

$$b = -\frac{\alpha}{2};\ \beta = \infty;\ c = -\infty;$$

$$\beta + c = \frac{\alpha}{2};\ \gamma = \frac{39}{77}\cdot\alpha;\ d = \frac{39\cdot\alpha}{25\cdot77};$$

tum vero aequatio reſoluenda ita eſt comparata:

$$0 = \lambda - \frac{\lambda'}{2} + \frac{77^3\cdot\lambda''}{78^3\cdot2} + \frac{77^3\cdot\lambda'''}{78^3\cdot50}$$

hincque

$$\lambda' = 2\lambda + \frac{77^3\cdot\lambda''}{78^3} + \frac{77^3\cdot\lambda'''}{78^3\cdot25}$$

Iam vt tam prima lens, quam vltima maximam admittat aperturam, ponamus $\lambda = \lambda''' = 1,6299$, dum ſcilicet omnes lentes ex vitro communi $n = 1,55$ factae aſſumuntur; at λ'' ſit $= 1$, quibus poſitis colligemus

$$\lambda' = 3,2593 + 0,9620 + 0,0627$$

$$\lambda' = 4,2841;\ \text{hinc ergo}$$

$$\lambda' - 1 = 3,2841;\ \text{et}$$

$$\tau.\surd(\lambda' - 1) = 1,64023;$$

quare conſtructio ſingularum lentium ita ſe habebit:

I. Pro prima lente:

quae cum ſit aeque vtrinque conuexa eiusque diſtantia

tia focalis $= \alpha$, erit radius vtriusque faciei $= 1,10.\alpha$ tum vero eius femidiameter aperturae $x = my = 1$ dig. ob $m = 50$ et $y = \frac{1}{50}$ dig. et interuallum ab hac lente ad fecundam $= \frac{1}{2}.\alpha$.

II. Pro fecunda lente

ob $\beta = \infty$, erit

$$F = \frac{b}{\varrho \pm 1.64023} = \frac{b}{1.8309}$$

$$G = \frac{b}{\sigma + 1.64023} = \frac{b}{-0.0128}$$

hinc $F = -0,2730.\alpha$

$$G = +39,0625.\alpha$$

tum vero femidiameter eius aperturae $= \frac{1}{2}$ dig. ex §. 23. et interuallum ad lentem fequentem $= \frac{1}{2}.\alpha$.

III. Pro tertia lente

ob $c = \infty$ et $\lambda'' = 1$. erit

$$F = \frac{\gamma}{\sigma} = 0,31123.\alpha$$

$$G = \frac{\gamma}{\varrho} = 2,6559.\alpha$$

tum vero aperturae femidiameter $= \frac{1}{2}$ dig. et interuallum ad fequentem lentem $= \frac{78.13}{77.25}\alpha$ feu $= \frac{1}{2}\alpha$ proxime.

IV. Pro quarta lente

radius vtriusque faciei $= 1,10.d$, exiftente $d = \frac{39}{25.77}.\alpha$, cuius pars quarta dat femidiametrum aperturae, hinc denique interuallum vsque ad oculum erit $= \frac{3.51}{50.154}.\alpha$ $= \frac{1}{50}\alpha$.

$= \frac{1}{50} \alpha$ proxime. Quod ad diſtantiam α attinet, ſi ad ſolam primam lentem reſpiceremus, quia ea aperturam admittit, cuius ſemidiameter $= \frac{1}{4} \alpha$, ſumi poſſet $\alpha = 4$ dig. ſed ad ſecundam lentem reſpiciendo, cuius minor radius eſt circiter $\frac{1}{4} \alpha$, huius pars quarta $\frac{1}{16} \alpha$ ſemidiametro aperturae $\frac{1}{2}$ dig. aequalis poſita, dabit $\alpha = 8$ dig., quam menſuram etiam retinere oportet; vnde longitudo teleſcopii excederet 12 dig. Huius rei cauſſa eſt, quod primam lentem vtrinque aeque conuexam aſſumſimus. Adiungamus igitur aliam inſuper ſolutionem ſumendo $\lambda = 1$; vnde fit

$$\lambda' = 2 + 0,9620 + 0,0627$$

$$\lambda' = 3,0247;\ \lambda' - 1 = 2,0247$$

$$\text{et } \tau \sqrt{(\lambda' - 1)} = 1,2878;$$

vnde haec ſequitur lentium conſtructio.

I. Pro prima lente

$$F = \frac{\alpha}{\sigma} = 0,6145 . \alpha$$

$$G = \frac{\alpha}{\varrho} = 5,2439 . \alpha$$

II. Pro ſecunda lente

$$F = \frac{b}{0.1507 \pm 1.2878} = \frac{-0.5.\alpha}{1.4785}$$

$$G = \frac{b}{1.6274 \mp 1.2878} = \frac{-0.5.\alpha}{0.3396}$$

$$F = -0,3382\, \alpha;\ G = -1,4723 . \alpha$$

Reliqua manent, vt ante. Hic igitur ſtatim patet, ſecundam lentem debitam aperturam $\frac{1}{2}x$ recipere poſſe, ſi prima patiatur aperturam x. Primae autem radius minor, cum ſit circiter $\frac{6.\alpha}{10}$, eius pars quarta $\frac{3}{20}\alpha$ ipſi $x = 1$ dig. aequata dat $\alpha = \frac{20}{3}$ dig. $= 6\frac{2}{3}$ dig. quin etiam tertia lens poſtulat, vt ſit $\frac{3\alpha}{40} = \frac{1}{2}$ dig. vnde α iterum $6\frac{2}{3}$ dig. ſicque tota teleſcopii longitudo vix ſuperabit 10 digit.

Quocirca notari merebitur ſequens

Conſtructio Teleſcopii quinquagies multiplicantis, lentibus ex vitro communi paratis.

I. Pro prima lente

radius faciei $\begin{cases} \text{anter.} = 4,10 \text{ dig.} \\ \text{poſter.} = 34,96 \text{ dig.} \end{cases}$

Aperturae ſemidiameter $= 1$ dig.

Interuallum ad ſecundam lentem $= 3\frac{1}{3}$ dig.

II. Pro ſecunda lente

radius faciei $\begin{cases} \text{anter.} = -2,25 \text{ dig.} \\ \text{poſter.} = -9,82 \text{ dig.} \end{cases}$

Semidiameter aperturae $= \frac{1}{2}$ dig.

Interuallum ad tertiam lentem $= 3\frac{1}{3}$ dig.

III. Pro tertia lente

radius faciei $\begin{cases} \text{anter.} = 2,08 \text{ dig.} \\ \text{poſter.} = 17,71 \text{ dig.} \end{cases}$

Aper-

Aperturae semidiameter $= \frac{1}{2}$ dig.

Interuallum ad lentem ocularem $= 3\frac{1}{5}$ dig.

IV. Pro quarta lente

radius vtriusque faciei $= 0,15$ dig.

Semidiameter aperturae $= \frac{3}{80}$ dig.

et distantia oculi $= \frac{2}{15}$ dig. proxime

vnde tota longitudo $= 10\frac{2}{15}$ dig.

Campi vero visi semidiameter, vt hactenus,

$= \frac{859}{51}$ min. $=$ 16 min. 51 sec.

Scholion.

252. Maiores multiplicationes calculo hic non subjicio, quia ab huiusmodi telescopiis etiam maior campus, quam vulgo, exspectari solet. Quamobrem nostram inuestigationem ad campum apparentem augendum prosequamur, idque retentis commodis, quae ternae lentes priores nobis sunt largitae. Hinc possemus valoribus hic assumtis vti, scilicet $k = 2$, $\mathfrak{M} = 1$ et $\mathfrak{N} = 1$ sed quia hoc modo duo priora interualla satis fiunt magna, scilicet $\frac{1}{2}\alpha$; quo pacto tota longitudo non parum augetur, praestare videtur haec duo interualla multo minora efficere, ita, vt tantum non euanescant; neque lentes se immediate contingere debeant. Hunc in finem pro k numerus vnitatem vix superans assumi debebit, vnde simul hoc lucrum nanscisci-

cifcimur, vt pro λ' numerus binarium vix fuperans reperiatur. Statuamus igitur $k = 1 + \omega$, denotante ω fractionem minimam, ita, vt fit

$$b = -\frac{\alpha}{1+\omega} = -(1-\omega).\alpha;$$

$$\alpha + b = \omega\alpha;$$

ob eandemque rationem ftatuatur etiam $\eta = \omega$, vt fecundum interuallum etiam fiat $\omega\alpha$. Quod deinde ad litteram ϑ attinet, quae hic ex margine colorato eft definita, factis his hypothefibus multo minor vnitate effet proditura, fcilicet $\vartheta = 2\omega$, qui valor maximis incommodis foret obnoxius; primo enim elementa γ et d euanefcerent, nifi α in immenfum augeretur; deinde etiam valor ipfius λ' fieret enormis. Sed probe hic notandum eft, has hypothefes non cafui hic tractato, vbi vnica lens ocularis admittitur, deftinari, fed propofitum nobis effe iis vti in fequentibus, vbi duae pluresue lentes oculares confiderabuntur, quibus cum nouae litterae in calculum introducantur, non amplius opus erit, ex aequatione marginem coloratum tollente, hanc litteram ϑ definire, fed eam poterimus vt arbitrariam contemplari; ita, vt iam nihil obftet, quominus ponatur $\vartheta = 1$. Quod autem hunc valorem elegerim, duae funt cauffae; altera eft, quod cum diftantia γ hic fit $\vartheta\alpha$, fi ϑ vltra vnitatem augeretur, longitudo telefcopii maior effet proditura; altera autem fuadet, ne ϑ minus vnitate capiatur, quia tum

λ' mox

λ' mox enormem valorem esset obtenturum sit igitur ratum statuere

$$1^\circ.\ k = 1 + \omega;\quad 2^\circ.\ \eta = \omega;\quad 3^\circ.\ \vartheta = 1.$$

vnde quotcunque lentes adhibeantur, pro tribus primoribus semper erit

$$b = -(1-\omega)\alpha;\ \beta = \infty;\ c = -\infty$$

$$\beta + c = \omega.\alpha;\ \gamma = \alpha.$$

Deinde pro litteris π et π' erit quoque semper

$$\frac{\pi}{\Phi} = -\omega;\ \frac{\pi'}{\Phi} = -2\,\omega;$$

ceterum notetur, esse $B = \infty$, $\mathfrak{B} = 1$, $C = \mathfrak{C} = 0$, et $BC = 1$. atque hinc aequatio pro margine tollendo semper his duobus terminis exordietur $+\omega.-2\omega$; ita, vt hi duo termini semper coalescant in $-\omega$. Denique etiam aequatio pro confusione tollenda semper incipiet ab his tribus terminis

$$0 = \lambda - \frac{\lambda'}{1+\omega} + \frac{\lambda''}{1+\omega} \ldots\ldots$$

vnde facile erit calculum pro quotuis lentibus ocularibus prosequi, vbi potissimum nobis erit propositum, campum apparentem multiplicare, idque quousque libuerit.

Problema 6.

253. Tribus lentibus prioribus ita ante imaginem realem dispositis, vti §. praec. est indicatum, si post imaginem duae lentes constituantur, efficere, vt campus apparens euadat maximus.

Solutio.

Cum hic habeantur quinque lentes, formula pro multiplicatione erit $m = -\frac{\alpha}{b} \cdot \frac{\beta}{c} \cdot \frac{\gamma}{d} \cdot \frac{\delta}{e}$ quarum fractionum iſta $\frac{\gamma}{d}$ erit poſitiua, reliquae negatiuae. Cum igitur ſit $\frac{\alpha}{b} = -1 - \omega$, $\frac{\beta}{c} = -1$. ſtatuatur $\frac{\gamma}{d} = i$ et $\frac{\delta}{e} = -l$ habebimusque ſequentia elementa:

$$b = \frac{-\alpha}{1+\omega};\ \beta = \infty;\ c = -\infty;\ \gamma = \alpha$$

$$d = \frac{\alpha}{i};\ \delta = +\frac{D\alpha}{i};\ e = -\frac{D\alpha}{il}$$

exiſtente $m = (1+\omega)\, i.\, l.$

Deinde diſtantiae focales

$$p = \alpha;\ q = b;\ r = \gamma;\ s = \mathfrak{D}\, d \text{ et } t = e.$$

Porro interualla lentium

$$\alpha + b = \omega\alpha;\ \beta + c = \omega\alpha;$$

$$\gamma + d = \frac{1+i}{i}\alpha;\ \delta + e = D\left(\frac{l-1}{il}\right).\ \alpha,$$

quorum trium priora cum per ſe ſint poſitiua, tantum ſupereſt, vt ſit $D(l-1)$ poſitiuum.

Pro fractionibus π, π' etc. iam habemus:

$$\frac{\pi}{\Phi} = -\omega;\ \frac{\pi'}{\Phi} = -2\omega; \text{ ideoque } \frac{\pi - \pi'}{\Phi} = \omega.$$

Pro binis reliquis vero habentur hae aequationes:

$$\frac{\mathfrak{D}\pi'' - \pi' + \pi - \Phi}{\Phi} = \frac{\alpha}{d} = i$$

$$\frac{\pi''' - \pi'' + \pi' - \pi + \Phi}{\Phi} = \frac{D\alpha}{e} = -il = -m$$

Ex

Ex quibus elicitur

$$\frac{\pi''}{\Phi} = \frac{1+i-\omega}{\mathfrak{D}} = \frac{1+i}{\mathfrak{D}}$$

$$\frac{\pi'''}{\Phi} = \frac{1+i}{\mathfrak{D}} + \omega - 1 - m.$$

Vnde pro loco oculi ſtatim habemus

$$O = -\frac{\pi'''}{m\Phi} \cdot t = \left(\frac{1+i}{\mathfrak{D}} + \omega - 1 - m\right)\frac{D\alpha}{m^2}$$

$$O = \left(\frac{1+i}{\mathfrak{D}} - 1 - m\right)\frac{D\alpha}{m^2}$$

quae vt fiat poſitiua, neceſſe eſt, vt D ſit negativum, adeoque ob $D(l-1) > 0$ erit quoque $l < 1$. Quare cum diſtantia O facta ſit poſitiua pro margine colorato tollendo habebitur haec aequatio:

$$0 = -\omega + \frac{\pi''}{\Phi} \cdot \frac{1}{i} - \frac{\pi'''}{\Phi} \cdot \frac{1}{m} \text{ ſeu}$$

$$0 = -\omega + \frac{1+i}{\mathfrak{D}i} - \frac{(1+i)}{\mathfrak{D}m} + \frac{1+m}{m}$$

ſeu reiectis ω

$$0 = \frac{1+i}{\mathfrak{D}} \cdot \frac{l-1}{il} + \frac{1+m}{m} \text{ ſeu}$$

$$0 = \frac{(1+i)(l-1)}{\mathfrak{D}} + 1 + m \text{ hinc}$$

$$\mathfrak{D} = \frac{-(1+i)(l-1)}{m+1} = \frac{(1+i)(1-l)}{m+i} \text{ et } D = \frac{(1+i)(1-l)}{2m-i+l},$$

qui valor debet eſſe negativus ob $l < 1$, hincque eſſe oporteret $l < \frac{i}{2i+1}$ ſiue $l < \frac{1}{2}$ ita, vt hinc eſſe debeat $i > 2m$, et $D = \frac{-(1+i)(1-l)}{i(1-2l)-l}$.

His circa valores D et l definitis examinemus campum apparentem, cuius ſemidiameter Φ duplici modo exprimitur

$$1^\circ.\ \Phi = \frac{\mathfrak{D}\pi''}{1+i} = \frac{(1-l)\pi''}{m+1};$$

$$2^\circ.\ \Phi = \frac{\mathfrak{D}\pi'''}{1+i\mathfrak{D}-(m+1)},\ \Phi = \frac{(1-l)\pi'''}{(m+1)l}$$

quorum minor tantum locum habet, ſiquidem π'' et π''' maximum valorem, qui eſt circiter $\frac{1}{4}$, obtineant. Cum autem ſit $\pi'' : \pi''' = 1 : l$, tantum ſumi poterit $\pi'' = \frac{1}{4}$ fietque $\pi''' = \frac{l}{4}$ hincque campus prodiret $\Phi = \frac{1}{4} \cdot \frac{1-l}{m+1}$; ideoque minor, quam ſi lente oculari ſimplici vteremur, contra noſtrum inſtitutum; ita, vt hoc problema pro noſtro ſcopo reſolui nequeat.

Idem Problema praecedens.

254. Vbi ceteris manentibus omnibus, tantum quarta lens ante imaginem realem collocatur.

Solutio.

In ſolutione ergo etiam omnia manebunt, vt ante, niſi quod binarum quantitatum i et l ſigna ſint mutanda. Primo ergo erunt elementa

$$b = -\frac{\alpha}{1+\omega};\ \beta = \infty;\ c = -\infty;\ \gamma = a$$

$$d = -\frac{\alpha}{i};\ \delta = -\frac{D\alpha}{i};\ e = -\frac{D\alpha}{il}.$$

Diſtantiae focales.

$$p = \alpha;\ q = -\alpha;\ r = \gamma = \alpha;$$

$$s = -\frac{\mathfrak{D}\alpha}{i};\ t = -\frac{D\alpha}{il}.$$

Len-

Lentium vero interualla

$$\alpha + b = \omega\,\alpha;\ \beta + c = \omega\,\alpha$$

$$\gamma + d = + \tfrac{(i-1)}{i}\,\alpha;$$

$$\delta + e = \tfrac{-(l+1)}{il}.\,\mathrm{D}\,\alpha$$

vnde patet, eſſe debere D negativum, at $i > 1$; tum vero notetur eſſe $m = i\,l$.

Deinde inueniemus

$$\tfrac{\pi}{\Phi} = -\omega;\ \tfrac{\pi'}{\Phi} = -2\,\omega$$

$$\tfrac{\pi''}{\Phi} = -\tfrac{(i-1)}{\mathfrak{D}};\ \tfrac{\pi'''}{\Phi} = -\tfrac{(i-1)}{\mathfrak{D}} - 1 - m$$

hincque pro loco oculi

$$\mathrm{O} = \left(-\tfrac{(i-1)}{\mathfrak{D}} - 1 - m\right)\tfrac{\mathrm{D}\alpha}{mm}$$

qui ergo valor eſt poſitiuus ob $\mathrm{D} < 0$. Quare vt margo coloratus euaneſcat debet eſſe

$$\mathfrak{D} = \tfrac{-(i-1)(1+l)}{m+1}$$

$$\mathrm{D} = \tfrac{-(i-1)(1+l)}{2m+i-l}$$

qui valor cum ſit negatiuus, conditionibus praecedentibus ſatisfit, ſi modo ſit $i > 1$. atque his valoribus ſubſtitutis erit

$$b = -\alpha;\ \beta = \infty;\ c = -\infty;\ \gamma = \alpha;\ d = -\tfrac{\alpha}{i}$$

$$\delta = \tfrac{(i-1)(1+l).\alpha}{(2m+i-l)i};\ e = \tfrac{(i-1)(1+l).\alpha}{(2m+i-l)il}$$

$$p = \alpha;\ q = -\alpha;\ r = \alpha;$$

$$s = \frac{(i-1)(1+l)\alpha}{(m+1)i}; \quad t = \frac{(i-1)(1+l)\alpha}{(2m+i-l)il}$$

$$\alpha + b = \omega\alpha; \quad \beta + c = \omega\alpha; \quad \gamma + d = \frac{i-1}{i}\alpha$$

$$\delta + e = \frac{(i-1)(1+l)^2\alpha}{(2m+i-l)il}$$

$$\frac{\pi}{\Phi} = -\omega; \quad \frac{\pi'}{\Phi} = -2\omega$$

$$\frac{\pi''}{\Phi} = +\frac{m+1}{l+1}$$

$$\frac{\pi'''}{\Phi} = +\frac{m+1}{l+1} - 1 - m = -\frac{l(m+1)}{1+l} \text{ hincque}$$

$$O = \frac{l(i-1)(m+1)}{2m+i-l} \cdot \frac{\alpha}{m^2}$$

Cum igitur ſit $\pi'' : \pi''' = 1 : -l$ pro campo duo caſus ſunt perpendendi.

I. Si $l > 1$. tum poterit capi $\pi''' = -\frac{1}{4}$ vt fiat $\pi'' = \frac{1}{4l} < \frac{1}{4}$ hincque ſemidiameter campi

$$\Phi = \frac{1}{4}\,\frac{(1 + \frac{1}{l})}{m+1}$$

II. Si $l < 1$, capi poterit $\pi'' = \frac{1}{4}$ vt fiat $\pi''' = -\frac{l}{4} < -\frac{1}{4}$ hincque $\Phi = \frac{1}{4} \cdot \frac{1+l}{m+1}$.

Vtroque ergo caſu campus maior erit, quam ſi vnica adeſſet lens ocularis, quo caſu inuenimus

$$\Phi = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{m+1}.$$

Maximus igitur campus obtinebitur ſi capiatur $l = 1$. quo caſu ob $il = m$ fit $i = m$ tum vero

$$\Phi = \frac{1}{2(m+1)} = \frac{1718}{m+1} \text{ min.}$$

qui

qui eſt duplo maior. Conueniet igitur ſumi $l = 1$, ſi modo reſolutio poſtremae aequationis id permittat, quae eſt

$$0 = \lambda - \frac{\lambda'}{1+\omega} + \frac{\lambda''}{1+\omega} - \frac{1}{\mathfrak{D}}i\left(\frac{\lambda'''}{\mathfrak{D}^2} + \frac{v}{D}\right) - \frac{\lambda''''}{D^3 . m}$$

vbi ſi capiatur $l = 1$, vt ſit $i = m$ ſit

$$\mathfrak{D} = -2 . \frac{m-1}{m+1};\ D = -2 . \frac{m-1}{3m-1}$$

quare ſi m ſit numerus praemagnus, erit $\mathfrak{D} = -2$; $D = -\frac{2}{3}$; ex quo manifeſtum eſt reſolutionem illius aequationis hoc modo non ſolum non impediri, ſed et adiuvari, ita, vt haec poſitio $l = 1$ noſtro ſcopo maxime conueniat. Hinc ergo conſequimur

$$\lambda' = (1+\omega)\lambda + \lambda'' - \frac{\lambda'''}{\mathfrak{D}^3 m} - \frac{\lambda''''}{D^3 . m} - \frac{v}{\mathfrak{D}D m}$$

ad quam reſoluendam primo notetur, quia duae poſtremae lentes maximam requirunt aperturam, eas vtrinque aeque conuexas capi debere; vnde pro vltima lente ſumi debebit $\lambda'''' = 1,6299$; pro penultima vero habetur

$$\sqrt{(\lambda''' - 1)} = \frac{\sigma-\rho}{2\tau} . \frac{\delta-d}{\delta+d}$$
$$= \frac{\sigma-\rho}{2\tau} . \frac{-5m+3}{m+1}$$

Cum nunc ſit $\left(\frac{\sigma-\rho}{2\tau}\right)^2 = 0,6299$

erit $\lambda''' = 1 + 0.6299 . \left(\frac{-5m+3}{m+1}\right)^2$

deinde vero ſumamus $\lambda = 1$ et $\lambda'' = 1$. pro ω autem commode ſumi poſſe videtur $\omega = \frac{1}{m}$, quoniam hoc

hoc modo interualla lentium priorum non fiunt nimis parva, quam vt in praxi locum habere queant.

Coroll. 1.

255. Quodsi ergo statuamus $l = 1$, vt sit $i = m$, tum vero $\omega = \frac{1}{m}$, nostra elementa ita se habebunt:

$$b = -\frac{m\alpha}{m+1};\ \beta = \infty;\ c = \infty$$

$$\gamma = \alpha;\ d = -\frac{\alpha}{m};\ \delta = \frac{2(m-1)\alpha}{m(3m-1)};\ e = \frac{2(m-1)\alpha}{m(3m-1)};$$

ita, vt sit $\delta = e$ et imago realis inter binas lentes postremas media interiaceat.

Distantiae autem focales erunt

$$p = \alpha;\ q = -\frac{m\alpha}{m+1};\ r = \alpha$$

$$s = \frac{2(m-1)\alpha}{m(m+1)};\ t = \frac{2(m-1)\alpha}{m(3m-1)}$$

Interualla vero lentium

$$\alpha + b = \frac{\alpha}{m};\ \beta + c = \frac{\alpha}{m};\ \gamma + d = \frac{m-1}{m}\alpha$$

$$\delta + e = \frac{4(m-1)\alpha}{m(3m-1)}.$$

$$\text{et } O = \frac{mm-1}{3m-1} \cdot \frac{\alpha}{mm}.$$

Coroll. 2.

256. Adiecta igitur vnica lente hoc insigne commodum feliciter sumus adepti quod amplitudo campi duplo maior sit facta, quam si vnica lente oculari vteremur, vbi probe notandum est, quod haec nova lens adiecta non post imaginem realem, sed ante eam debeat collocari. Scho-

Scholion I.

257. Quo haec, quae inuenimus, commodissime ad praxin accommodemus, methodo iam supra tradita vtamur ac primo constructionem telescopii pro multiplicatione quapiam modica veluti $m = 25$ inuestigemus; deinde vero pro $m = \infty$; ex quorum casuum comparatione non difficulter pro qualibet multiplicatione media constructionem colligere licebit.

Exempl. I.

Pro $m = 25$.

258. Constructionem telescopii exhibere:

Cum hic sit $m = 25$, erit

$$\mathfrak{D} = -\tfrac{24}{13} = -1,84615$$

$$D = -\tfrac{24}{37} = -0,64865$$

hinc erit $\frac{1-D}{1+D} = \frac{1,64865}{0,35134}$

hinc Log. $\left(\frac{1-D}{1+D}\right)^2 = 1,3428018$

vnde colligitur $\lambda''' = 14,8699$.

Iam cum sit

$$\text{Log.} -\mathfrak{D} = 0.2662669$$

$$\text{Log.} -D = 9.8120104$$

reperiemus

$$\lambda' = 1,04 + 1 + 0,094529 + 0,23888 - 0,00777$$

 $\lambda' =$

$$\lambda' = 2,3656$$

$$\lambda' - n = 1,3656 \text{ et}$$

$$\tau . \sqrt{(\lambda' - 1)} = 1,0577$$

Constructio igitur lentium ita se habebit:

I. Pro prima lente.

radius faciei $\begin{cases} \text{anter.} = 0,6145 . \alpha \\ \text{poster.} = 5,2439 . \alpha \end{cases}$

Semidiameter aperturae $= \frac{25}{50}$ dig. $= \frac{1}{2}$ dig.

Interuall. ad lentem sequentem $= \frac{1}{25} . \alpha = 0,04 \alpha$.

II. Pro secunda lente

calculus ita se habebit

$$F = \frac{b}{\varrho \pm 1,0577} = \frac{-0,96 \alpha}{1,2484}$$

$$G = \frac{b}{\sigma + 1,0577} = \frac{-0,96 \alpha}{0,5697}$$

seu $F = -0,7690 . \alpha$

$G = -1,6851 . \alpha$

Interuallum ad sequentem, vt ante, $= 0,04 \alpha$.

III. Pro tertia lente

cum eius distantia focalis sit reuera

$$\gamma = \frac{\alpha}{1 + \omega} = (1 - \omega) \alpha \text{ et } \lambda'' = 1,$$

ex

ex prima lente haec ita definitur

$$\text{radius faciei} \begin{cases} \text{anter.} = 0,5900.\,\alpha \\ \text{poster.} = 5,0342.\,\alpha \end{cases}$$

Interuallum ad quartam $= \alpha - \frac{2\alpha}{m} = 0,92.\,\alpha$

IV. Pro quarta lente

cuius distantia focalis est $1,84615.\frac{\alpha}{m}$

quia debet esse vtrinque aeque conuexa,

erit vtriusque faciei radius $= 2,03076.\frac{\alpha}{m}$

Semidiameter aperturae $= 0,50769.\frac{\alpha}{m}$

Interuallum ad sequentem $= +1,29730\frac{\alpha}{m}$.

V. Pro quinta lente

cuius distantia focalis $= 0,64865.\frac{\alpha}{m}$

erit radius vtriusque faciei $= 0,71351.\frac{\alpha}{m}$

Semidiameter aperturae $= 0,17838.\frac{\alpha}{m}$

hinc interuallum ad oculum vsque erit $= 0,3372.\frac{\alpha}{m}$, existente $m = 25$ et campi apparentis semidiameter erit $\Phi = \frac{1718}{26}$. minut. $= 66$ min. et longitudo totius instrumenti

$$= \alpha + 1,6345.\frac{\alpha}{m} = 1,06538.\,\alpha.$$

 Exem-

Exempl. II.

Si $m = \infty$.

259. Constructionem telescopii describere.

Erit igitur $\mathfrak{D} = -2$; $D = -\frac{2}{3}$

et $\omega = 0$, $\frac{1-D}{1+D} = 5$; vnde fit

$$\lambda''' = 1 + 0,6299.\ 25 = 16,74.$$

Hincque colligitur

$$\lambda' = 1 + 1 = 2;\ \lambda' - 1 = 1.\ \text{ideoque}$$

$$\tau.\ \sqrt{(\lambda' - 1)} = \tau = 0.9051.$$

Constructio igitur lentium ita se habebit.

I. Pro prima lente.

radius faciei $\begin{cases} \text{anter.} = 0,6145.\ \alpha \\ \text{poster.} = 5,2439.\ \alpha \end{cases}$

Semidiameter aperturae $= \frac{m}{50}$ dig.

Interuallum ad lentem sequentem $= \frac{\alpha}{m}$.

II. Pro secunda lente

cuius distantia focalis $b = -\alpha$ habebimus

$$F = \frac{b}{\varrho \pm 0{,}9051} = \frac{-\alpha}{1{,}0958}$$

$$G = \frac{b}{\sigma + 0{,}9051} = \frac{-\alpha}{0{,}7223}$$

Hinc $F = -0,91257.\ \alpha$

$G = -1,38446.\ \alpha$

Interuallum ad sequentem $= \frac{\alpha}{m}$.

III. Pro

III. Pro tertia lente

radius faciei $\begin{cases} \text{anter.} = 0,6145 \cdot \alpha \\ \text{poster.} = 5,2439 \cdot \alpha \end{cases}$

Interuallum ad sequentem lentem $= \alpha - \frac{2\alpha}{m}$.

IV. Pro quarta lente

cuius distantia focalis est $\mathfrak{D}\, d = + \frac{2\alpha}{m}$,

erit radius vtriusque faciei $= 2,2\frac{\alpha}{m}$

Interuallum $= \frac{4}{3} \cdot \frac{\alpha}{m} = 1,333 \cdot \frac{\alpha}{m}$.

V. Pro quinta lente

cuius distantia focalis $= 0,666 \cdot \frac{\alpha}{m}$

erit radius vtriusque faciei $= 0,7333 \cdot \frac{\alpha}{m}$

Interuallum ad oculum $= \frac{1}{3} \cdot \frac{\alpha}{m}$.

Exempl. III.

260. Pro multiplicatione quacunque m constructionem huiusmodi telescopii describere.

Hic assumsi omnes lentes ex ea vitri specie parari, pro qua est $n = 1,55$. Ex praecedentibus autem sequens constructio concinnabitur

I. Pro prima lente

erit, vt hactenus,

radius faciei $\begin{cases} \text{anter.} = 0,6145 \cdot \alpha \\ \text{poster.} = 5,2439 \cdot \alpha \end{cases}$

Semidiameter aperturae $x = \frac{m}{50}$ dig.

Interuallum ad sequentem $= \frac{\alpha}{m}$.

II. Pro secunda lente

ponatur

$$F = -(0,91257 + \frac{f}{m})\alpha$$

$$G = -(1,38446 + \frac{g}{m})\alpha$$

erit autem

$$0,91257 + \frac{f}{25} = 0,7690.$$

$$1,38446 + \frac{g}{25} = 1,6851$$

vnde $f = -3,59$

$g = +7,52$

Interuallum $= \frac{\alpha}{m}$.

III. Pro tertia lente

radius faciei $\begin{cases} \text{anter.} = 0,6145\,(1 - \frac{1}{m})\alpha \\ \text{poster.} = 5,2439\,(1 - \frac{1}{m})\alpha \end{cases}$

Interuallum ad sequentem $= \alpha - \frac{2\alpha}{m}$.

IV. Pro quarta lente

statuatur radius vtriusque faciei

$$= (2,2 + \frac{b}{m})\frac{\alpha}{m}$$

eritque $2,2 + \frac{b}{25} = 2,03076$.

hinc

hinc colligitur $h = -4,231$.

Interuallum ad sequentem $= (1,333 + \frac{k}{m}) \frac{\alpha}{m}$

hinc $k = -0,90$; adeoque interuallum erit

$$(1,333 - \frac{0,90}{m}) \frac{\alpha}{m}.$$

V. Pro quinta lente

cuius distantia focalis $= (0,666 - \frac{0,45}{m}) \frac{\alpha}{m}$

erit radius vtriusque faciei $= (0,7333 - \frac{0,405}{m}) \frac{\alpha}{m}$

Distantia ad oculum $= (\frac{1}{3} + \frac{l}{m}) \frac{\alpha}{m}$

vnde $l = 0,097$ adeoque haec distantia erit

$$(0,333 + \frac{0,097}{m}) \frac{\alpha}{m}$$

et tota telescopii longitudo $=$

$$\alpha + (1,666 - \frac{0,803}{m}) \frac{\alpha}{m}$$

vel $\alpha + 1,666 . \frac{\alpha}{m} - 0,803 . \frac{\alpha}{m^2}$

Perpendamus nunc quantum valorem ipsi α tribui conueniat et cum ternae priores lentes vt lens triplicata spectari queant, minimus radius est $0,6145\ \alpha$, cuius pars quarta $\frac{3}{20} . \alpha$ ipsi $x = \frac{m}{50}$ aequalis posita dat $\alpha = \frac{2m}{15}$. dig. $= \frac{4m}{30}$ dig. Ponamus igitur $\alpha = \frac{4}{30} m$ dig. et habebitur sequens

Constructio huiusmodi Telescopiorum.

Circa diaphragma his telescopiis inserendum videatur sequens Scholion 3.

Pro

Pro multiplicatione quacunque m, lentibus ex vitro $n = 1,55$, factis

I. Pro prima lente

radius faciei $\begin{cases} \text{anter.} = 0,08193 \cdot m. \text{ dig.} \\ \text{poster.} = 0,69918 \cdot m. \text{ dig.} \end{cases}$

Semidiameter aperturae $= \frac{m}{50}$ dig.

Interuallum $= \frac{2}{15}$ dig.

II. Pro secunda lente

rad. fac. $\begin{cases} \text{anter.} = (-0,1217 \cdot m + 0,478) \text{ dig.} \\ \text{poster.} = (-0,18459 \cdot m - 1,003) \text{ dig.} \end{cases}$

Interuallum $= \frac{2}{15}$ dig.

III. Pro tertia lente

rad. fac. $\begin{cases} \text{anter.} = (0,08193\, m - 0,0819) \text{ dig.} \\ \text{poster.} = (0,69918\, m - 0,699) \text{ dig.} \end{cases}$

Interuallum $= (\frac{2}{15} m - \frac{4}{15})$ dig.

IV. Pro quarta lente

radius vtriusque faciei $= (0,2933 - \frac{0,5641}{m})$ dig.

Interuallum $= (0,1777 - \frac{0,12}{m})$ dig.

V. Pro quinta lente

radius vtriusque faciei $= (0,098 - \frac{0,066}{m})$ dig.

Hinc interuallum ad oculum $= (0,044 - \frac{0,012}{m})$ dig.

Longitudo tota $= (\frac{2}{15} m - 0,11)$ dig.

ita,

ita, vt pro caſu $m = 100$ haec longitudo ſit $13 \frac{1}{5}$ dig. campi denique apparentis ſemidiameter $= \frac{1718}{m+1}$ min. ſeu, quia etiam lentes priores aliquantillum ad campum augendum conferunt, $\Phi = \frac{1718}{m}$ min. ita, vt pro $m = 100$ fiat $\Phi = 17$ min. 10 ſec.

Scholion 2.

261. Teleſcopia haec in ſuo genere ita omnibus numeris abſoluta videntur, vt perfectiora vix deſiderari queant, niſi diuerſas vitri ſpecies adhibere velimus. Non ſolum enim confuſionis ab apertura oriundae ſunt expertia aeque ac marginis colorati, ſed etiam campum apparentem duplo maiorem pateſaciunt, quam ſimplicia ac praeterea tam ſunt brevia, vt breuiora ne ſperare quidem liceat. Deinde etiam in exſecutione inſigne commodum inde obtineri poteſt, quod inter tres priores lentes interualla aliquantillum, variari poſſunt; ſi enim forte eueniat, vt ob tantillum errorem in praxi commiſſum hae lentes non exactiſſime ad interualla hic praeſcripta ſint accommodata, facile euenire poteſt, vt iis pauliſper mutatis, egregium effectum ſint praeſtaturae. Interim tamen ſemper conſultum erit, ſecundam lentem concauam pluries elaborari, ſecundum easdem menſuras; cum enim ſemper aliquod diſcrimen deprehendatur, inter plures eiusmodi lentes optima facile eligi poterit. Nihilo minus vero conueniet noſtram inueſtigationem vlterius proſequi et in eiusmodi huius generis teleſcopia

ſcopia inquirere, quorum campus adeo triplo vel quadruplo maior ſit prodituru.

Scholion 3.

262. Quo haec teleſcopia meliorem effectum praeſtent, neceſſe eſt, vt in loco imaginis verae diaphragma ſiue ſeptum, quemadmodum ſupra iam eſt deſcriptum, cum foramine debitae magnitudinis conſtituatur. Cadit autem haec imago ob $\delta = e$ praecife in medium interualli quartae & quintae lentis ideoque ad diſtantiam $= (0,0888 - \frac{0,06}{m})$ dig. Deinde cum foramen magnitudini huius imaginis debeat eſſe aequale et ſemidiameter imaginis ſit in genere $= \alpha \Phi . \mathfrak{B} \mathfrak{C} \mathfrak{D} = \alpha \Phi . \mathfrak{D} = - 2 . \frac{m-1}{3m-1} . \alpha \Phi$; debet eſſe ſemidiameter foraminis $= - 2 . \frac{m-1}{3m-1} \alpha \Phi$. Iam cum in noſtro exemplo euoluto ſit $\alpha = \frac{2}{15} m$ et $\Phi = \frac{1}{2m}$ colligitur iſte foraminis ſemidiameter $= \frac{1}{15} . \frac{2(m-1)}{3m-1}$ dig. $= (\frac{2}{45} - \frac{8}{135m})$ dig.

Ceterum etſi his teleſcopiis multo maiorem claritatis gradum conciliauimus quam vulgo fieri ſolet, dum ſumſimus $y = \frac{1}{50}$ dig., ex Hugenii regulis autem ſequitur $y = \frac{1}{75}$ dig. tamen ſi quis vereatur, ne hic ob multitudinem lentium claritas notabilem iacturam patiatur, huic incommodo facile medela afferetur, menſuras datas tantum quapiam ſui parte augendo ſeu, quod eodem redit, menſuram vnius digiti, quam hactenus indefinitam reliquimus, pro lubitu augendo.

Pro-

Problema 7.

263. Si praeter tres lentes priores, vti in praecedente problemate sunt constitutae, adhuc vna lens ante locum imaginis collocetur, post eam insuper duas lentes ita disponere, vt maximus campus obtineatur.

Solutio.

Cum hic occurrant sex lentes, erit

$$m = \frac{\alpha}{b} \cdot \frac{\beta}{c} \cdot \frac{\gamma}{d} \cdot \frac{\delta}{e} \cdot \frac{\varepsilon}{f}.$$

quarum fractionum tres priores sunt negatiuae, quarta positiua & quinta denuo negatiua. Pro prioribus iam sumsimus esse $\frac{\alpha}{b} = -1 = \omega$; $\frac{\beta}{c} = -1$. Pro posterioribus vero statuamus $\frac{\gamma}{d} = -k$; $\frac{\delta}{e} = i$ et $\frac{\varepsilon}{f} = -l$ vt sit $m = (1 + \omega) k l i$; vnde ob $B = \infty$, $C = 0$, et $BC = 1$ elementa nostra erunt

$$b = -\frac{\alpha}{1+\omega}; \quad \beta = \infty; \quad c = -\infty;$$
$$\gamma = \frac{\alpha}{1+\omega}; \quad d = -\frac{\alpha}{k}; \quad \delta = -\frac{D\alpha}{k};$$
$$e = -\frac{D\alpha}{ki}; \quad \varepsilon = -\frac{DE\alpha}{ki}; \quad f = \frac{DE\alpha}{kil}.$$

Atque hinc distantiae focales reperientur:

$$p = \alpha; \quad q = -(1-\omega)\alpha; \quad r = \frac{\alpha}{1+\omega};$$
$$s = -\frac{\mathfrak{D}\alpha}{k}; \quad t = -\frac{\mathfrak{E}D\alpha}{ki}; \quad u = \frac{DE\alpha}{kil}.$$

 Tum

Tum vero interualla lentium

$$\alpha + b = \omega\alpha;\ \beta + c = \omega\alpha;\ \gamma + d = \tfrac{k-1}{k}.\alpha$$
$$\delta + e = -\mathrm{D}\,\alpha.\tfrac{i+1}{ki};\ \varepsilon + f = \mathrm{D\,E}\,\alpha\,\tfrac{1-l}{kil}$$

quae vt prodeant poſitiua, debet eſſe

$$1^\circ.\ k > 1;\ 2^\circ.\ \mathrm{D} < 0;\ 3^\circ.\ +\mathrm{E}(l-1) > 0$$

Litterae π, π' etc. ſequenti modo definientur:

$$\tfrac{\pi}{\Phi} = -\omega;\ \tfrac{\pi'}{\Phi} = -2\omega$$

et reliquae ex ſequentibus formulis determinari debent

$$\frac{\mathfrak{D}\pi'' - \pi' + \pi - \Phi}{\Phi} = \frac{\mathrm{BC}\alpha}{d} = -k$$
$$\frac{\mathfrak{E}\pi''' - \pi'' + \pi' - \pi + \Phi}{\Phi} = \frac{\mathrm{BCD}\alpha}{e} = -k\,i$$
$$\frac{\pi'''' - \pi''' + \pi'' - \pi' + \pi - \Phi}{\Phi} = m$$

hinc ergo colligimus

$$\frac{\pi''}{\Phi} = \frac{1-k}{\mathfrak{D}};\ \frac{\pi'''}{\Phi} = \frac{\pi''}{\mathfrak{E}\Phi} - \left(\frac{1+ki}{\mathfrak{E}}\right)$$
$$\text{et } \frac{\pi''''}{\Phi} = \frac{\pi'''}{\Phi} - \frac{\pi''}{\Phi} + m + 1$$

Nunc cum pro campo apparente ſit

$$\Phi = \frac{\pi - \pi' + \pi'' - \pi''' + \pi''''}{m+1}$$

is fiet maximus, ſi ſumatur $\pi'' = \frac{1}{4}$, $\pi''' = -\frac{1}{4}$, $\pi'''' = \frac{1}{4}$; inde enim fiet $\Phi = \frac{3}{4}.\frac{1}{m+1}$; vnde illae aequationes dabunt

$$\frac{m+1}{3} = \frac{1-k}{\mathfrak{D}};\ \frac{-m-1}{3} = \frac{m+1}{3\mathfrak{E}} - \left(\frac{1+ki}{\mathfrak{E}}\right)$$

et

et $\frac{m+1}{3} = \frac{-m-1}{3} - \frac{m-1}{3} + m + 1$

quae eſt, vti debet, identica.

Vnde pro loco oculi ſequitur

$O = \frac{m+1}{3} \cdot \frac{u}{m} = \frac{m+1}{3} \cdot \frac{DE\alpha}{kil.m}$

quae diſtantia vt fiat poſitiua ob $D < 0$ debet etiam eſſe $E < 0$ adeoque $l < 1$, ſiquidem aſſumamus α poſitiuum. Patet autem, ſi caperemus $l = 1$, binas poſtremas lentes ſibi immediate iungi et prodire caſum lentis ocularis duplicatae iam ſupra conſideratum. Videamus autem ante quam aequationem pro margine colorato contemplemur, cuiusmodi valores litterae $\mathfrak{E}$ et $\mathfrak{D}$ ex binis aequationibus ſuperioribus obtineant et ex priori quidem inuenitur $\mathfrak{D} = -\frac{3(k-i)}{m+1}$ qui cum ſit negatiuus, etiam D fit negatiuum, vti oportet; et ex altera fit $\mathfrak{E} = \frac{3ki-m+2}{m+1}$ hincque $E = \frac{3ki-m+2}{2m-3ki-1}$; qui valor cum debeat eſſe negatiuus, duo caſus ſunt conſiderandi:

I. Si numerator negatiuus et denominator poſitiuus, erit $3ki+2 < m$ et $m > \frac{3ki+1}{2}$ ſeu ſimpliciter $m > 3ki+2$.

II. Sin autem numerator ſit poſitiuus et denominator negatiuus, erit $m < 3ki+2$ et $m < \frac{3ki+1}{2}$ ſeu ſimpliciter $m < \frac{3ki+1}{2}$.

Cum autem ſit $m = kil$, ob $l < 1$ erit $m < ki$, vnde patet priorem caſum locum habere non poſſe, sed solum secundum, ita, vt sit $m < k i$ quo pacto omnes conditiones sunt adimpletae, sicque nihil impedit, quominus resolutionem aequationis pro margine tollendo suscipiamus, quae praeter exspectationem tam facilis euadet, vt nullae difficultates, quales ante occurrebant, negotium turbent. Haec autem aequatio omissis duobus primis terminis vtpote minimis ita se habebit:

$$0 = \frac{\pi''}{\Phi} \cdot \frac{d}{p} + \frac{\pi'''}{\Phi} \cdot \frac{e}{\mathrm{D}p} + \frac{\pi''''}{\Phi} \cdot \frac{f}{\mathrm{DE}p}$$

quae ob $\pi'' = -\pi''' = +\pi''''$ abit in hanc:

$$0 = \frac{d}{p} - \frac{e}{\mathrm{D}p} + \frac{f}{\mathrm{DE}p}$$

cum nunc sit $p = \alpha$ et $\frac{d}{\alpha} = -\frac{1}{k}$, $\frac{e}{\alpha} = -\frac{\mathrm{D}}{k i}$; $\frac{f}{\alpha} = \frac{\mathrm{DE}}{k i l}$

erit nostra aequatio

$$0 = -\frac{1}{k} + \frac{1}{k i} + \frac{1}{k i l}$$

seu per k multiplicando

$$0 = -1 + \frac{1}{i} + \frac{1}{i l}$$

$$0 = -i l + l + 1;$$

hincque $i = \frac{l+1}{l}$, vbi debet esse $l < 1$ hinc $il = 1 + l$ et $m = (1 + l) k$; ita vt sit $k = \frac{m}{1+l}$.

Deinde erit

$$\mathfrak{D} = \frac{-3(k-1)}{m+1}; \ \mathfrak{E} = \frac{3ki - m + 2}{m+1} \text{ ideoque}$$

$$\mathrm{D} = \frac{-3(k-1)}{3k - m - 2}; \ \mathrm{E} = \frac{3ki - m + 2}{2m - 3ki - 1}.$$

His

His inuentis aequatio pro confuſione tollenda erit.

$$0 = \lambda - \frac{\lambda'}{1+\omega} + \frac{\lambda''}{1+\omega} - \frac{1}{\mathfrak{D}k}\left(\frac{\lambda'''}{\mathfrak{D}^2} + \frac{\nu}{D}\right)$$
$$- \frac{1}{D^3 . \mathfrak{E}ki}\left(\frac{\lambda''''}{\mathfrak{E}^2} + \frac{\nu}{E}\right) + \frac{\lambda''''' 1}{D^3 E^3 . m}$$

quae, vt hactenus eſt factum, facile reſoluitur, quaerendo ſcilicet valorem ipſius λ'.

Scholion.

264. Solutio huius problematis ad ſequentes inueſtigationes expediendas maximum adiumentum nobis affert, dum ea nobis nouam methodum ſuppeditat aequationem pro margine colorato tollendo, quae ſupra inſignibus difficultatibus erat inuoluta, expeditiſſime reſoluendi. Huius methodi autem vis in eo conſiſtit, vt litteris π, π', π'' etc. ſtatim determinatos valores tribuamus qui quidem ita ſint comparati, vt maximum campum apparentem producant. Hoc enim facto iſtae litterae ex memorata aequatione ſtatim tolluntur et loco litterarum d, e, f, valores ante inuentos ſubſtituendo etiam litterae maiuſculae ſponte ex calculo euaneſcunt; ita, vt tota aequatio nulla amplius alia elementa inuoluat praeter litteras k, i, l; quarum vna inde ſine vlla difficultate definitur; deinde vero ex illis valoribus pro litteris π, aſſumtis facile determinantur litterae $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{E}$ etc. indeque etiam D, E etc. quarum valores in vltimam aequationem translati totum negotium facile conficiunt; quin etiam haec metho-

thodus pro prioribus lentibus in vsum vocari potest, vbi autem notandum est, quia hae lentes quasi ad obiectiuam constituendam concurrunt, ex earum litteris π et π' nihil vel perparum ad campum amplificandum redundare posse. Quocirca his litteris non vt sequentibus valor $\frac{1}{4}$, sed potius quam minimus, puta $\frac{1}{4}.\omega$ et $\frac{1}{4}.\omega'$ tribui debet, denotantibus scilicet ω et ω' fractiones quam minimas. Quare quo haec noua methodus clarius perspiciatur, ea ad sequens problema generale huc spectans soluendum vtemur.

Problema 8.

265. Telescopium huius generis ex sex lentibus construere, quarum tres priores inseruiant omni confusioni tollendae tres autem posteriores campo triplicando, dum scilicet lenti oculari simplici campum simplicem assignamus.

Solutio.

Hic igitur quinque sequentes fractiones considerandae veniunt:

$$\frac{\alpha}{b}.\ \frac{\beta}{c}.\ \frac{\gamma}{d}.\ \frac{\delta}{e}.\ \frac{\epsilon}{f}$$

quarum omnes praeter vnicam debent esse negatiuae. Quare si statuamus:

$$\frac{\alpha}{b} = -P;\ \frac{\beta}{c} = -Q;\ \frac{\gamma}{d} = -R;$$

$$\frac{\delta}{e} = -S \text{ et } \frac{\epsilon}{f} = -T.$$

evidens

euidens eſt, harum quinque litterarum P, Q, R, S, T vnicam fore negatiuam, reliquis exiſtentibus poſitiuis. Quaenam autem ſit negatiua, hic nondum opus eſt definire. Hoc poſito noſtra elementa aeque ac diſtantiae focales cum interuallis lentium ſequenti modo conſpectui repraeſententur:

Diſtant. determinat.		Diſt. focales	Interualla lentium
		$p=\alpha$	
$b=\frac{-\alpha}{P}$	$\beta=\frac{-B\alpha}{P}$	$q=\mathfrak{B}b$	$\alpha+b=\alpha(1-\frac{1}{P})>0$
$c=\frac{B\alpha}{PQ}$	$\gamma=\frac{BC\alpha}{PQ}$	$r=\mathfrak{C}c$	$\beta+c=\frac{-B\alpha}{P}(1-\frac{1}{Q})>0$
$d=\frac{-BC\alpha}{PQR}$	$\delta=\frac{-BCD\alpha}{PQR}$	$s=\mathfrak{D}d$	$\gamma+d=\frac{BC\alpha}{PQ}(1-\frac{1}{R})>0$
$e=\frac{BCD\alpha}{PQRS}$	$\varepsilon=\frac{BCDE\alpha}{PQRS}$	$t=\mathfrak{E}e$	$\delta+e=\frac{-BCD\alpha}{PQR}(1-\frac{1}{S})>0$
$f=\frac{-BCDE\alpha}{PQRST}$		$u=f$	$\varepsilon+f=\frac{BCDE\alpha}{PQRS}(1-\frac{1}{T})>0$

vbi cum productum PQRST ſit negatiuum, pro multiplicatione erit $m=-PQRST$.

Deinde cum pro campo apparente habeatur

$$\Phi=\frac{\pi-\pi'+\pi''-\pi'''+\pi''''}{m+1}$$

ſit ξ maximus valor, quem hae litterae π, π' etc. recipere poſſunt et ſtatuamus $\pi=\omega\xi$; $\pi'=-\omega'\xi$; $\pi''=\xi$; $\pi'''=-\xi$; $\pi''''=\xi$; vt ſit $\Phi=\frac{\omega+\omega'+3}{m+1}.\xi$

Cum igitur hinc ſit $\frac{\pi''''}{\Phi}=\frac{m+1}{\omega+\omega'+3}$ pro diſtantia oculi habebimus

$$O = \frac{\pi''''}{\Phi} \cdot \frac{u}{m} = \frac{m+1}{\omega+\omega'+3} \cdot \frac{-BCDE\alpha}{PQRST.m}$$

seu $O = \frac{m+1}{\omega+\omega'+3} \cdot \frac{BCDE.\alpha}{m m}$.

Vt igitur O fiat positiuum, quia $\frac{\pi''''}{\Phi}$ est positiuum, debet esse $u > 0$ ideoque vltima lens conuexa, quae conditio insuper est probe obseruanda.

Nunc igitur aequatio pro margine colorato tollendo ita se habebit:

$$0 = \omega . \frac{b}{\alpha} - \omega' . \frac{c}{B\alpha} + \frac{d}{BC\alpha} - \frac{e}{BCD\alpha} + \frac{f}{BCDE.\alpha}$$

quae reducitur ad hanc formam:

$$0 = + \omega . \frac{1}{P} + \omega' . \frac{1}{PQ} + \frac{1}{PQR} + \frac{1}{PQRS} + \frac{1}{PQRST}$$

in qua duos priores terminos ob paruitatem negligere licet, ita, vt adhuc sit

$$0 = 1 + \frac{1}{S} + \frac{1}{ST}.$$

quae aequatio facile resoluitur, dummodo litterarum S et T altera sit negatiua; vnde patet, tres priores litteras P, Q, R necessario esse positiuas. Nunc ordo postulat, vt etiam litteras $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$ etc. ex aequationibus fundamentalibus determinemus.

$$\frac{\mathfrak{B}\pi - \Phi}{\Phi} = - P;$$

$$\frac{\mathfrak{C}\pi' - \pi + \Phi}{\Phi} = PQ$$

$$\frac{\mathfrak{D}\pi'' - \pi' + \pi - \Phi}{\Phi} = - PQR$$

$$\frac{\mathfrak{E}\pi''' - \pi'' + \pi' - \pi + \Phi}{\Phi} = PQRS.$$

ex

ex quibus, ſi breuitatis gratia ponamus, $\frac{\omega+\omega'+1}{m+1}=M$, colligimus:

$$\mathfrak{B}=\frac{(1-P).M}{\omega} \qquad B=\frac{\mathfrak{B}}{1-\mathfrak{B}}$$

$$\mathfrak{C}=\frac{(1-PQ)M-\omega}{\omega'} \qquad C=\frac{\mathfrak{C}}{1-\mathfrak{C}}$$

$$\mathfrak{D}=(1-PQR)M-\omega'-\omega \qquad D=\frac{\mathfrak{D}}{1-\mathfrak{D}}$$

$$\mathfrak{E}=(1-PQRS)M-\omega'-\omega-1 \qquad E=\frac{\mathfrak{E}}{1-\mathfrak{E}}$$

adeoque

$$B=\frac{(1-P)M}{\omega-(1-P)M}$$

$$C=\frac{(1-PQ)M-\omega}{\omega'+\omega-(1-PQ)M}$$

$$D=\frac{(1-PQR)M-\omega'-\omega}{1+\omega+\omega'-(1-PQR)M}$$

$$E=\frac{(1-PQRS)M-\omega'-\omega-1}{2+\omega+\omega'-(1-PQRS)M}$$

Nunc denique aequatio pro confuſione aperturae tollenda conſiderari debet, quae eſt

$$0=\lambda-\frac{1}{\mathfrak{B}P}\left(\frac{\lambda'}{\mathfrak{B}^2}+\frac{\nu}{B}\right)$$
$$+\frac{1}{B^3.\mathfrak{C}.PQ}\left(\frac{\lambda''}{\mathfrak{C}^2}+\frac{\nu}{C}\right)$$
$$-\frac{1}{B^3C^3.\mathfrak{D}.PQR}\left(\frac{\lambda'''}{\mathfrak{D}^2}+\frac{\nu}{D}\right)$$
$$+\frac{1}{B^3C^3D^3.\mathfrak{E}.PQRS}\left(\frac{\lambda''''}{\mathfrak{E}^2}+\frac{\nu}{E}\right)$$
$$-\frac{1}{B^3C^3D^3E^3.\mathfrak{F}.PQRST}\cdot\lambda''''''$$

cui aequationi vt ſatisfieri queat, notandum eſt, terminos poſt tres priores ſequentes admodum fieri par-

 uos.

nos. Cum enim ſit $PQRST = -m$, hoc eſt numero ingenti, primi autem factores P et Q vix ab vnitate diſcrepent, neceſſe eſt, vt productum RST numerum m fere totum producat; deinde quia inter S et T inuenimus aequationem: $0 = 1 + \frac{1}{S} + \frac{1}{ST}$, patet, numerum m neque in S neque in T contineri, ideoque factorem R maximam partem numerum m complecti. Quocirca huius aequationis membra quartum et ſequentia prae tribus prioribus quaſi euaneſcent ita, vt tria priora ſe mutuo propemodum deſtruere debeant, vnde proxime ſtatuendum erit

$$0 = \lambda - \frac{\lambda'}{\mathfrak{B}^3 P} + \frac{\lambda'''}{B^3 \mathfrak{C}^3 . PQ}$$

ideoque

$$\lambda' = \mathfrak{B}^3 P . \lambda + \frac{\mathfrak{B}^3 \lambda'''}{B^3 \mathfrak{C}^3 Q}$$

vbi pro felici exſecutione optandum eſſet, vt prodiret $\lambda = 1$; $\lambda' = 1$ et $\lambda'' = 1$. quia tum leues errores in praxi commiſſi minimi ſunt momenti. Quare cum ſequentes termini parui ſint poſitiui, neceſſe erit, vt ſit $1 > \mathfrak{B}^3 P + \frac{\mathfrak{B}^3}{B^3 \mathfrak{C}^3 . Q}$ vnde ſi eſſet $P = 1$ et $Q = 1$, et, vt ſupra, $B\mathfrak{C} = 1$ deberet eſſe $1 > 2\mathfrak{B}^3$ ſeu $\mathfrak{B} < \sqrt[3]{\frac{1}{2}}$ ſiue $\mathfrak{B} < \frac{4}{5}$; quod praeceptum in adplicatione attendi meretur.

Coroll. I.

266. Cum igitur nunc certum ſit, quinque litteras PQRST omnes eſſe poſitiuas, praeter S vel T, ſi

si sumamus distantiam α^{*} semper esse positiuam, ex primo interuallo concludimus esse $P > 1$; et quia hoc interuallum statuitur minimum, P parum tantum superabit vnitatem & quia etiam secundum interuallum sumitur minimum, littera Q parum quoque ab vnitate discrepabit. Deinde quia quoque F debet esse quantitas positiua, ideoque productum B C D E positiuum ob $\varepsilon = -Tf$ vltimum interuallum fit $(1-T)f$ statimque hanc praebet conditionem $T < 1$ vnde si T sit positiuum, conditio postulat, vt sit $T < 1$; sin autem T sit negatiuum, nulla restrictione opus est.

Coroll. 2.

267. Quia in vltima aequatione omnia membra praeter secundum sunt positiua, ita, vt solum secundum, omnia reliqua destruere debeat, necesse est, vt $\mathfrak{B}$ sit positiuum et propemodum, vti notauimus, valorem habeat vnitate aliquantillum minorem. Quare cum inuentum sit $\mathfrak{B} = \frac{(1-P)M}{\omega}$; littera autem M semper sit positiua, at $1 - P$ negatiuum, sequitur, fore particulam ω negatiuam.

Coroll. 3.

268. Si igitur interuallum primum statuamus $= \eta\alpha$, pariterque secundum etiam $\eta\alpha$ existente η fractione minima, quoniam tantum hic illum casum euitare volumus, quo hae lentes quasi in vnam coalescere deberent, η tam paruum assumi conuenit, quam

executio permittit; ad quod sufficere videtur, si sit $\eta = 0,03$; hinc igitur erit $1 - \frac{1}{P} = \eta$ adeoque $P = \frac{1}{1-\eta}$ et nunc ω propius definire poterimus, scilicet $\omega = \frac{-\eta M}{(1-\eta)\mathfrak{B}}$ et quia $M = \frac{3}{m+1}$ erit $\omega = \frac{-3\eta}{(m+1)\mathfrak{B}}$ sicque littera $\mathfrak{B}$ adhuc nostro arbitrio relinquitur.

Coroll. 4.

269. Quia $\mathfrak{B} > 0$ et parumper minus vnitate erit B positiuum; vnde pro secundo interuallo habebimus $Q = \frac{B}{B + \eta P}$ ideoque $Q < 1$. siue $Q = \frac{(1-\eta)B}{(1-\eta)B+\eta}$ seu proxime $Q = 1 - \frac{\eta}{B}$; hincque definire licet ω' scilicet $\omega' = \frac{(1-PQ)M - \omega}{\mathfrak{C}}$ siue $\omega' = \frac{6\eta}{(m+1)B\mathfrak{C}}$, ita, vt etiam $\mathfrak{C}$ nostro arbitrio relinquatur.

Scholion 1.

270. Hinc casus supra tractatus, quo erat $B = \infty$ et $\mathfrak{C} = 0$, facile deducitur tum enim erit $Q = 1$; manente $P = 1 + \eta$, $\omega = \frac{-3\eta}{m+1}$; $\omega' = \frac{6\eta}{(m+1)B\mathfrak{C}}$ et quia tam $\beta = \infty$, quam $c = -\infty$ fiet γ distantia focalis tertiae lentis $r = \frac{B\mathfrak{C}\alpha}{PQ}$, vbi $B\mathfrak{C}$ ita definiri poterit, vt tertia lens primae perfecte euadat aequalis, quod ad praxin valde est conueniens; statuatur nempe $B\mathfrak{C} = PQ = 1 + \eta$.

Quia autem tum sit $\mathfrak{B} = 1$, postremae conditioni satisfieri nequit; quae cum sit maioris momenti, quam praecedens, statuamus potius $\mathfrak{B} = \frac{4}{5}$ vt sit $B = 4$

et

et ſumto $P = 1,03$ reperitur, ſumi debere $\mathfrak{C} > 0,2567$, quare ſumatur $\mathfrak{C} = 0,257$. eritque

$$C = \frac{0,257}{0,743} = 0,34589$$

quod notaſſe ſufficiat pro iis, qui tali reſolutione vti velint.

Coroll. 5.

271. Quia nunc tam BC, quam PQ ſunt numeri poſitiui, vt tertium quoque interuallum fiat poſitiuum, neceſſe eſt, vt ſit $R > 1$, quae conditio ſponte impletur, quoniam R erit numerus multo adhuc maior. Pro quarto interuallo $-\frac{BCD}{PQR}(1-\frac{1}{S})\alpha$ neceſſe eſt, vt $-D(1-\frac{1}{S})$ ſit poſitiuum; ex praecedentibus autem patet, $\mathfrak{D}$ ideoque et D eſſe negatiuum; vnde fieri debet $1-\frac{1}{S} > 0$ quod ſit, ſi fuerit vel S negatiuum vel $S > 1$, ſi ſit poſitiuum. De quinto interuallo iam ſupra vidimus.

Scholion 2.

272. Hic ergo duo caſus ſunt conſiderandi, alter, quo S eſt numerus negatiuus, alter vero, quo T eſt negatiuum.

I. Sit $S < 0$ et ponatur $S = -K$ habebiturque iſta aequatio $0 = 1 - \frac{1}{K} - \frac{1}{KT}$ eritque $K = 1 + \frac{1}{T}$ verum hic eſt $T < 1$, vti ſupra vidimus; vnde erit $K > 2$ et KT continetur intra limites 1 et 2; vnde cum ſit $RKT = m$, continebitur R intra limites m et $\frac{1}{2}m$ hoc porro caſu erit $\mathfrak{C} = (1+RK)M - 1$; qui valor ob $RK > m$ et $M = \frac{3}{m+1}$ erit $\mathfrak{C} > \frac{3(m+1)}{m+1} - 1 > 2$;

ideo-

ideoque E semper negatiuum, vti reliqua conditio postulat, scilicet vt $BCDE$ sit positiuum.

II. Sit iam $T<0$ et ponatur $T=-K$ eritque $0=1+\frac{1}{S}-\frac{1}{SK}$ ideoque $S=\frac{1}{K}-1$, vbi quidem ratione vltimi interualli K pro lubitu accipi posset, nunc vero requiritur, vt sit $K<1$. Cum igitur sit $RSK=m$, erit $RS=\frac{m}{K}$ adeoque $RS>m$ et littera $\mathfrak{E}$ manifesto fit negatiua ideoque etiam E; quibus notatis euolutio exemplorum nulla plane laborat difficultate; id tantum hic adhuc adiungere visum est, vt tres posteriores lentes maximam aperturam accipiant, eas vtrinque aeque conuexas confici debere; qua conditione numeri λ''', λ'''', λ''''' sequenti modo determinantur, vti quidem iam supra est ostensum, scilicet si pro indole vitri ponatur $\frac{\sigma-\rho}{2\tau}=N$, reperitur $\lambda'''=1+N^2.\left(\frac{1-D}{1+D}\right)^2$, quae forma ob $D=\frac{\mathfrak{D}}{1-\mathfrak{D}}$ erit $\lambda'''=1+N^2(1-2\mathfrak{D})^2$ similique modo $\lambda''''=1+N^2(1-2\mathfrak{E})^2$ $\lambda'''''=1+N^2$.

Superfluum autem iudico hanc inuestigationem exemplo illustrare, cum quia pro casu quinque lentium plurima exempla iam sunt allata, tum vero imprimis si quis campum maiorem desideraverit, consultum potius erit, duas vitri species adhibere, vt etiam vltima confusionis species penitus remoueatur. Quod argumentum in sequente adhuc capite fusius nobis explicandum restat.

CAPVT