CAPUT II.

DE
INVENTIONE FUNCTIONUM TRIUM VARIABILIUM EX DATO CUJUSPIAM FORMULAE DIFFERENTIALIS VALORE.

Problema 74.

445.

Dato valore cujuspiam formulae differentialis primi gradus, investigare ipsam functionem trium variabilium, ex qua illa formula differentialis nascitur.

Solutio.

Sit v functio quaesita trium variabilium x, y et z, et S earundem functio data quaecunque, cui formula differentialis $\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)$ debeat esse aequalis. Cum igitur sit $\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right) = S$, erit posita sola quantitate x variabili, binis reliquis vero y et z ut constantibus spectatis, $\partial v = S\partial x$, ideoque

$$v = \int S\partial x + \text{Const.}$$

ubi notandum est in integratione formulae $S\partial x$ ambas quantitates y et z pro constantibus haberi, et loco constantis functionem quamcunque ipsarum y et z scribi debere, ex quo functio quaesita ita exhiberi poterit

$$v = \int S\partial x + \Gamma : (y \text{ et } z),$$

hic scilicet $\Gamma : (y$ et $z)$ quantitatem quamcunque ex binis quantitatibus y et z, una cum constantibus utcunque conflatam denotat.

Simili modo si proponatur $(\frac{\partial v}{\partial y}) = S$, erit

$$v = \int S\partial y + \Gamma : (x \text{ et } z),$$

et haec aequatio $(\frac{\partial v}{\partial z}) = S$ integrata praebet

$$v = \int S\partial z + \Gamma : (x \text{ et } y).$$

Corollarium 1.

446. Hic jam abunde intelligitur, integratione hujusmodi functionum loco constantis introduci functionem arbitrariam duarum quantitatum variabilium, atque adeo in hoc characterem harum integrationum esse constituendum.

Corollarium 2.

447. Hic ergo istud problema solutum dedimus, quo quaeritur functio v trium variabilium x, y, z, ut posito

$$\partial v = p\partial x + q\partial y + r\partial z,$$

fiat vel $p = S$, vel $q = S$, vel $r = S$ existente S functione quacunque data easdem variabiles, vel duas, vel unicam involvente.

Corollarium 3.

448. Quodsi igitur esse debeat $(\frac{\partial v}{\partial x}) = 0$, seu $p = 0$, functio quaesita erit $v = \Gamma : (y$ et $z)$, et ut fiat $(\frac{\partial v}{\partial y}) = 0$ erit $v = \Gamma : (x$ et $z)$, tum vero ut fiat $(\frac{\partial v}{\partial z}) = 0$, necesse est fit $v = \Gamma : (x$ et $y)$.

Scholion 1.

449. Quemadmodum in praecedente parte functiones arbitrariae unius variabilis per applicatas curvarum quarumcunque sive regularium sive etiam irregularium repraesentari poterant, ita in hac parte functiones binarum variabilium arbitrariae per superficiem pro lubitu descriptam repraesentari possunt. Ita si super plano, in quo binae coordinatae x et y more solito assumuntur, superficies quaecunque expansa concipiatur, tertia coordinata distantiam cujusvis superficiei puncti ab illo plano designans, functionem quamcunque binarum variabilium x et y repraesentabit. Hocque modo aptissime vera idea hujusmodi functionum constitui videtur, cum ex ea non solum ratio harum functionum regularium sed etiam irregularium perspiciatur.

Scholion 2.

450. Hic etiam notari convenit, hujusmodi functiones binarum variabilium infinitis diversis modis etiam designari posse. Variatis enim in plano memorato binis coordinatis x et y, in binas alias t et u, ut sit

$$t = \alpha x + \beta y \text{ et } u = \gamma x + \delta y,$$

manifestum est functionem binarum variabilium t et u seu $\Gamma:(t \text{ et } u)$ convenire cum functione ipsarum x et y seu $\Gamma:(x \text{ et } y)$; si enim loco t et u illi valores pro x et y substituantur utique prodit functio duas tantum variabiles x et y involvens. Atque multo generalius si t aequatur functioni cuipiam datae ipsarum x et y, pariterque u hujusmodi alii functioni, tum $\Gamma:(t \text{ et } u)$ facta substitutione abibit in functionem ipsarum x et y ita exprimendam $\Delta:(x \text{ et } y)$; non enim necesse est ut idem functionis character Γ rationem compositionis quasi denotans utrinque sit idem, cum hic in genere de functionibus quibuscunque agatur. Quare si in sequentibus forte ejusmodi functiones occurrant

$\Gamma:(ax + by$ et $fxx + gyy)$, vel
$\Gamma:[\sqrt{(xx + yy)}$ et $l\frac{x}{y}]$, etc.

earum loco semper haec forma simplex $\Gamma:(x$ et $y)$ scribi potest.

Scholion 3.

451. Solutionis, quam dedimus, consideratio nobis suppeditat sequentes reflexiones. Primo posito

$$\partial v = p\partial x + q\partial y + r\partial z,$$

si debeat esse $p = (\frac{\partial v}{\partial x}) = 0$, fiet

$$\partial v = q\partial y + r\partial z,$$

unde patet v ejusmodi esse quantitatem, cujus differentiale hanc habiturum sit formam $q\partial y + r\partial z$; quod fieri nequit, nisi quantitas v fuerit functio binarum variabilium y et z tantum, tertia x penitus exclusa; et quia circa quantitates q et r nulla conditio praescribitur, recte pronunciamus, loco quantitatis v accipi posse functionem quamcunque binarum variabilium y et z, seu esse $v = \Gamma:(y$ et $z)$, quam eandem solutionem consideratio formulae $(\frac{\partial v}{\partial x}) = 0$ suggessit. Deinde si esse debeat generalius $(\frac{\partial v}{\partial x}) = p = S$, denotante S quantitatem quamcunque ex variabilibus x, y, z conflatam, habebimus

$$\partial v = S\partial x + q\partial y + r\partial z,$$

quae aequatio ita resolvitur. Quaeratur primo integrale formulae $S\partial x$ sola quantitate x ut variabili spectata, quod sit $= V$; haecque quantitas per omnes tres variabiles differentiata praebeat

$$\partial V = S\partial x + Q\partial y + R\partial z,$$

ex quo cum sit

$$S\partial x = \partial V - Q\partial y - R\partial z, \text{ erit}$$
$$\partial v = \partial V + (q - Q)\,\partial y + (r - R)\,\partial z, \text{ seu}$$
$$\partial.(v - V) = (q - Q)\,\partial y + (r - R)\,\partial z,$$

unde ut ante patet, quantitatem $v - V$ functioni cuicunque binarum variabilium y et z aequari posse. Quare ob $V = \int S \partial x$, prodit ut ante

$$v = \int S \partial x + \Gamma : (y \text{ et } z);$$

hocque ratiocinium, quo isthuc pervenimus, diligenter notari meretur, cum etiam in parte prima eximium usum praestare possit. Proposita enim aequatione

$$\left(\frac{\partial\partial z}{\partial y^2}\right) = aa \left(\frac{\partial\partial z}{\partial x^2}\right),$$

quia est

$$\partial \cdot \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \partial x \left(\frac{\partial\partial z}{\partial x^2}\right) + \partial y \left(\frac{\partial\partial z}{\partial x \partial y}\right), \text{ et}$$

$$\partial \cdot \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \partial x \left(\frac{\partial\partial z}{\partial x \partial y}\right) + \partial y \left(\frac{\partial\partial z}{\partial y^2}\right),$$

erit

$$a\partial \cdot \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) + \partial \cdot \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \left(\frac{\partial\partial z}{\partial x^2}\right) (a\partial x + aa\partial y) + \left(\frac{\partial\partial z}{\partial x \partial y}\right) (a\partial y + \partial x),$$

seu

$$a\partial \cdot \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) + \partial \cdot \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = (\partial x + a\partial y) \left[a \left(\frac{\partial\partial z}{\partial x^2}\right) + \left(\frac{\partial\partial z}{\partial x \partial y}\right)\right],$$

cujus posterioris membri integrale manifesto est $F:(x+ay)$, hincque

$$\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = -a \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) + a\Gamma' : (x + ay),$$

quo una integratio absoluta est censenda. Quare cum sit

$$\partial z = \partial x \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) + \partial y \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right),$$

habebitur

$$\partial z = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) (\partial x - a\partial y) + a\partial y \Gamma' : (x + ay).$$

Sit $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = p$ et $x - ay = t$, ut fiat

$$\partial z = p\partial t + a\partial y \Gamma' : (t + 2ay),$$

pro duabus variabilibus t et y, hincque

$$z = \tfrac{1}{2}\Gamma : (t + 2ay) + \int \partial t\, [p - \tfrac{1}{2}\Gamma' : (t + 2ay)]$$
$$= \Gamma : (x + ay) + \Delta : (x - ay),$$

quia

$$\Delta : t = \Delta\,(x - ay) \quad \text{et} \quad \Gamma : (t + 2ay) = \Gamma : (x + ay).$$

Problema 75.

452. Investigare indolem functionis trium variabilium x, y, z, cujus formula quaedam differentialis secundi gradus aequetur datae cuipiam functioni S.

Solutio.

Denotet v functionem quaesitam, et cum ejus sex dentur formulae differentiales secundi gradus, ponamus primo esse debere $\left(\frac{\partial\partial v}{\partial x^2}\right) = S$, et integratione semel instituta prodit

$$\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right) = \int S\partial x + \Gamma : (y \text{ et } z),$$

iterumque integrando

$$v = \int \partial x \int S\partial x + x\Gamma : (y \text{ et } z) + \Delta : (y \text{ et } z),$$

ubi in formulae $\int \partial x \int S\partial x$ duplici integratione sola quantitas x ut variabilis spectatur, quemadmodum jam supra est inculcatum. Similis autem omnino est intgratio aequationum

$$\left(\frac{\partial\partial v}{\partial y^2}\right) = S \quad \text{et} \quad \left(\frac{\partial\partial v}{\partial z^2}\right) = S.$$

Pro reliquis formulis differentialibus secundi gradus sufficit hanc unam $\left(\frac{\partial\partial v}{\partial x\partial y}\right) = S$ resolvisse; quae primo per solam variabilem x integrata dabit

$$\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right) = \int S\partial x + f : (y \text{ et } z).$$

Deinde altera integratione per solam variabilem y instituta colligitur

$$v = \int \partial y \int S\partial x + \int \partial y\, f : (y \text{ et } z) + \Delta : (x \text{ et } z),$$

ubi primum observo, partem primam nullo discrimine ordinis inter binas variabiles x et y habito ita $\int\int S\,\partial x\,\partial y$ exprimi posse. Deinde quaecunque fuerit f : (y et z) functio ipsarum y et z, si ea per ∂y multiplicetur, et spectata z ut constante integretur, evidens est denuo functionem ipsarum y et z prodire, et quia illa nullomodo determinatur, etiam hanc fore indeterminatam ideoque arbitrariam, unde statuere poterimus

$$v = \int\int S\,\partial x\,\partial y + \Gamma : (y \text{ et } z) + \Delta : (x \text{ et } z).$$

Corollarium 1.

453. Hic observo per integrationem formulae

$$\int \partial y \text{ f} : (y \text{ et } z)$$

jam sponte formulam $\Delta : (x$ et $z)$ invehi; cum enim ibi sola quantitas y ut variabilis spectetur, loco quantitatis constantis per integrationem adjiciendae functio quaecunque ipsarum x et z scribi poterit.

Corollarium 2.

454. Quodsi functio illa data S evanescat, sequentes integrationes provenient

$$\text{si } \left(\frac{\partial\partial v}{\partial x^2}\right) = 0, \quad \text{erit } v = x\Gamma : (y \text{ et } z) + \Delta : (y \text{ et } z),$$

$$\text{si } \left(\frac{\partial\partial v}{\partial y^2}\right) = 0, \quad \text{erit } v = y\Gamma : (x \text{ et } z) + \Delta : (x \text{ et } z),$$

$$\text{si } \left(\frac{\partial\partial v}{\partial z^2}\right) = 0, \quad \text{erit } v = z\Gamma : (x \text{ et } y) + \Delta : (x \text{ et } y),$$

$$\text{si } \left(\frac{\partial\partial v}{\partial x\,\partial y}\right) = 0, \quad \text{erit } v = \Gamma : (x \text{ et } z) + \Delta : (y \text{ et } z),$$

$$\text{si } \left(\frac{\partial\partial v}{\partial x\,\partial z}\right) = 0, \quad \text{erit } v = \Gamma : (x \text{ et } y) + \Delta : (y \text{ et } z),$$

$$\text{si } \left(\frac{\partial\partial v}{\partial y\,\partial z}\right) = 0, \quad \text{erit } v = \Gamma : (x \text{ et } y) + \Delta : (y \text{ et } z).$$

Corollarium 3.

455. Quia hic duplici opus est integratione, atque etiam duae functiones arbitrariae, utraque binarum variabilium, in calculum sunt invectae; hoc certissimum est criterium, haec integralia inventa esse completa.

Scholion.

456. Alio etiam modo haec eadem integralia erui possunt, qui nititur principio supra (. 451.) indicato, quod si fuerit

$$\partial v = S\,\partial x + q\partial y + r\partial z, \text{ fore}$$
$$v = \int S\partial x + f:(y \text{ et } z).$$

Secundum hoc principium ergo si fuerit $(\frac{\partial\partial v}{\partial x^2}) = S$, erit

$$\partial \,.\, (\frac{\partial v}{\partial x}) = S\partial x + \partial y\,(\frac{\partial\partial v}{\partial x\partial y}) + \partial z\,(\frac{\partial\partial v}{\partial x\partial z}),$$

qua forma cum illa collata, loco v habemus $(\frac{\partial v}{\partial x})$ et loco q et r has formulas

$$(\frac{\partial\partial v}{\partial x\partial y}) \text{ et } (\frac{\partial\partial v}{\partial x\partial z}),$$

ex quo integrale erit

$$(\frac{\partial v}{\partial x}) = \int S\partial x + f:(y \text{ et } z).$$

Cum jam porro sit

$$\partial v = (\frac{\partial v}{\partial x})\,\partial x + (\frac{\partial v}{\partial y})\,\partial y + (\frac{\partial v}{\partial z})\,\partial z, \text{ erit}$$

$$\partial v = \partial x \int S\partial x + \partial x\, f:(y \text{ et } z) + \partial y\,(\frac{\partial v}{\partial y}) + \partial z\,(\frac{\partial v}{\partial z}),$$

unde pariter manifesto sequitur

$$v = \int \partial x \int S\partial x + x\,\Gamma:(y \text{ et } z) + \Delta:(y \text{ et } z).$$

Pari modo operatio est instituenda pro aequatione $(\frac{\partial\partial v}{\partial x\partial y}) = S$, inde enim fit

$$\partial \,.\, (\frac{\partial v}{\partial y}) = S\partial x + \partial y\,(\frac{\partial\partial v}{\partial y^2}) + \partial z\,(\frac{\partial\partial v}{\partial y\partial z}),$$

cujus integrale est

$$\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right) = \int S\partial x + f : (y \text{ et } z) :$$

altera integratio instituatur in hac forma

$$\partial v = \partial y \int S\partial x + \partial y f : (y \text{ et } z) + \partial x \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right) + \partial z \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right),$$

unde ob

$$\int \partial y f : (y \text{ et } z) = \Gamma : (y \text{ et } z),$$

obtinetur ut ante

$$v = \iint S\partial x \partial y + \Gamma : (y \text{ et } z) + \Delta : (x \text{ et } z).$$

Problema 76.

457. Investigare indolem functionis trium variabilium x, y et z, cujus quaedam formula differentialis tertii gradus aequetur datae cuipiam quantitati S, ex illis variabilibus et constantibus utcunque compositae.

Solutio.

Posita functione quaesita $= v$, percurramus non tam singulas ejus formulas differentiales tertii gradus, qnam eas quarum ratio est diversa.

Sit igitur primo $\left(\frac{\partial^3 v}{\partial x^3}\right) = S$, et prima integratio statim dat

$$\left(\frac{\partial\partial v}{\partial x^2}\right) = \int S\partial x + 2\Gamma : (y \text{ et } z),$$

tum vero altera

$$\left(\frac{\partial v}{x\varrho}\right) = \int \partial x \int S\partial x + 2x\Gamma : (y \text{ et } z) + \Delta : (y \text{ et } z),$$

unde tandem colligitur

$$v = \int \partial x \int \partial x \int S\partial x + xx\Gamma : (y \text{ et } z) + x\Delta : (y \text{ et } z) + \Sigma : (y \text{ et } z).$$

Sit secundo $\left(\frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y}\right) = \mathrm{S}$, et binae priores integrationes ut ante dant

$$\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right) = \int \partial x \int \mathrm{S} \partial x + x \Gamma : (y \text{ et } z) + \Delta : (y \text{ et } z),$$

quia nunc ut vidimus, pro $\int \partial y \Gamma : (y \text{ et } z)$ scribere licet $\Gamma : (y \text{ et } z)$, per tertiam integrationem invenimus

$$v = \int^3 \mathrm{S} \partial x^2 \partial y + x \Gamma : (y \text{ et } z) + \Delta : (y \text{ et } z) + \Sigma : (x \text{ et } z).$$

In his autem duobus casibus omnes formulae differentiales tertii gradus, variabilibus permutandis, continentur, sola excepta ultima hac $\left(\frac{\partial^3 v}{\partial x \partial y \partial z}\right)$, quam idcirco seorsim tractari oportet.

Sit igitur $\left(\frac{\partial^3 v}{\partial x \partial y \partial z}\right) = \mathrm{S}$, et prima integratione per solam variabilem x instituta obtinetur

$$\left(\frac{\partial \partial v}{\partial y \partial z}\right) = \int \mathrm{S} \partial x + f : (y \text{ et } z);$$

nunc secundo integretur per solam variabilem y, ac reperietur

$$\left(\frac{\partial v}{\partial z}\right) = \iint \mathrm{S} \partial x \partial y + \Gamma : (y \text{ et } z) + \Delta : (x \text{ et } z);$$

unde tandem tertia integratio per z dabit

$$v = \int^3 \mathrm{S} \partial x \partial y \partial z + \Gamma : (y \text{ et } z) + \Delta : (x \text{ et } z) + \Sigma : (x \text{ et } y),$$

sicque problema perfecte est resolutum.

Corollarium 1.

458. Quoniam hic triplici opus erat integratione, integralia inventa etiam tres functiones arbitrarias complectuntur, easque singulas binarum variabilium, quemadmodum natura integralium completorum postulat.

Corollarium 2.

459. Si quantitas data S evanescat, integralia haec sequenti modo se habebunt

si fuerit $\left(\frac{\partial^3 v}{\partial x^3}\right) = 0$, erit

$$v = xx\Gamma : (y \text{ et } z) + x\Delta : (y \text{ et } z) + \Sigma : (y \text{ et } z),$$

si fuerit $\left(\frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y}\right) = 0$, erit

$$v = x\Gamma : (y \text{ et } z) + \Delta : (y \text{ et } z) + \Sigma : (x \text{ et } z),$$

si fuerit $\left(\frac{\partial^3 v}{\partial x \partial y \partial z}\right) = 0$, erit

$$v = \Gamma : (y \text{ et } z) + \Delta : (x \text{ et } z) + \Sigma : (x \text{ et } y).$$

Scholion.

460. Eadem integralia etiam altera methodo supra exposita inveniri possunt, superfluumque foret singulas operationes hic apponere. Aeque parum autem opus erit has investigationes ad formulas differentiales altiorum graduum prosequi, cum lex progressionis functionum arbitrarium singulas integralium partes constituentium, cum per se tum per ea quae supra sunt exposita, satis sit manifesta. Quare huic capiti, quo una quaedam formula differentialis quantitati datae aequari debet, plane est satisfactum. Antequam autem ulterius progredior, duos adhuc casus satis late patentes proponam, quorum resolutio facile ad praecedentes jam tractatas calculi integralis partes reducitur, quam propterea hic tanquam concessam assumere licet, siquidem difficultates, quae in iis occurrunt, non ad praesens institutum sunt referendae.

Problema 77.

461. Si in relationem propositam ex qua naturam functionis trium variabilium x, y et z definiri oportet, aliae formulae differentiales non ingrediantur, nisi quae ex unica variabili x oriuntur, quae sunt

$$\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right), \quad \left(\frac{\partial\partial v}{\partial x^2}\right), \quad \left(\frac{\partial^3 v}{\partial x^3}\right), \quad \text{etc.}$$

functionem quaesitam investigare.

Solutio.

Cum aequatio propositam continens relationem alias formulas differentiales praeter memoratas non comprehendat, in ea binae quantitates y et z pro constantibus habentur, ideoque etiam in singulis integrationibus tanquam tales tractari possunt. Hinc aequatio proposita duas tantum variabiles x et v involvere est censenda, et rejectis formularum differentialium vinculis, habebitur aequatio differentialis ad librum primum referenda, in qua, si ad altiores gradus exsurgat, elementum ∂x constans sumtum est putandum. Quodsi ergo praeceptorum ibidem traditorum ope haec aequatio integrari queat, tum loco constantium per singulas integrationes ingressarum substituantur functiones arbitrariae binarum variabilinm y et z, veluti

$$\Gamma:(y \text{ et } z), \ \Delta:(y \text{ et } z), \text{ etc.}$$

sicque habebitur solutio completa problematis propositi.

Corollarium 1.

462. Praeter plurimos igitur integrabilitatis casus in libro I. expositos, etiam sequentes aequationes differentiales quamtumvis alti gradus resolutionem admittent

$$S = Av + B\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right) + C\left(\frac{\partial\partial v}{\partial x^2}\right) + D\left(\frac{\partial^3 v}{\partial x^3}\right) + \text{etc., et}$$

$$S = Av + Bx\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right) + Cx^2\left(\frac{\partial\partial v}{\partial x^2}\right) + Dx^3\left(\frac{\partial^3 v}{\partial x^3}\right) + \text{etc.}$$

Corollarium 2.

463. Vinculis enim abjectis ejusmodi habentur aequationes differentiales, quales in extremis capitibus libri I. integrare docuimus. Tantum opus est, ut loco constantium per integrationes ingressarum scribantur tales functiones

$\Gamma:(y \text{ et } z)$, $\Delta:(y \text{ et } z)$, $\Sigma:(y \text{ et } z)$, etc.
ut hoc pacto integralia completa obtineantur.

Scholion.

464. Huc etiam referri possunt ejusmodi relationes propositae, in quibus formulae differentiales bina elementa ∂x et ∂y involventes ita continentur, ut hoc ∂y ubique eundem habeat dimensionum numerum, cujusmodi sunt

$$\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right),\ \left(\frac{\partial\partial v}{\partial x\partial y}\right),\ \left(\frac{\partial^3 v}{\partial x^2\partial y}\right),\ \left(\frac{\partial^4 v}{\partial x^3\partial y}\right),\ \text{etc. vel}$$
$$\left(\frac{\partial\partial v}{\partial y^2}\right),\ \left(\frac{\partial^3 v}{\partial x\partial y^2}\right),\ \left(\frac{\partial^4 v}{\partial x^2\partial y^2}\right),\ \left(\frac{\partial^6 v}{\partial x^3\partial y^2}\right),\ \text{etc.}$$

ipsa autem tum quantitas v nusquam occurrat. Si enim tum pro priori casu ponatur $\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right) = u$, pro posteriori vero $\left(\frac{\partial\partial v}{\partial y^2}\right) = u$, relatio ad casum problematis revocabitur, alias formulas differentiales non continens praeter

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right),\ \left(\frac{\partial\partial u}{\partial x^2}\right),\ \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right),$$

et ipsam forte functionem u. Quare si aequationem per praecepta supra tradita integrare, indeque functionem u definire licuerit, tum restituendo loco u vel $\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)$, vel $\left(\frac{\partial\partial v}{\partial y^2}\right)$, ut fiat $\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right) = S$, vel $\left(\frac{\partial\partial v}{\partial y^2}\right) = S$, etiam hinc per praecepta hujus capitis ipsa functio v determinabitur. Quin etiam hoc modo resolvi poterunt aequationes hujusmodi tantum formulas differentiales complectentes

$$\left(\frac{\partial^{\mu+\nu} v}{\partial y^{\mu}\partial z^{\nu}}\right),\ \left(\frac{\partial^{\mu+\nu+1} v}{\partial x\partial y^{\mu}\partial z^{\nu}}\right),\ \left(\frac{\partial^{\mu+\nu+2} v}{\partial x^2\partial y^{\mu}\partial z^{\nu}}\right),\ \text{etc.}$$

ubi omnia tria elementa ∂x, ∂y, ∂z occurrunt; posito enim $\left(\frac{\partial^{\mu+\nu} v}{\partial y^{\partial}\partial z^{\nu}}\right) = u$, tota aequatio alias formulas non continebit praeter

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right),\ \left(\frac{\partial\partial u}{\partial x^2}\right),\ \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right),\ \text{etc.}$$

unam cum ipsa functione u, sicque ad casum hujus problematis erit referenda, ex cujus resolutione si prodierit

$$u = S = \left(\frac{\partial^{\mu+\nu} v}{\partial y^\mu \partial z^\nu}\right),$$

existente jam S functione cognita, investigatio ipsius functionis v jam nulla amplius laborat difficultate. Datur autem praeterea alius casus ad libri II. partem priorem reducibilis, quem sequenti problemate sum expediturus.

Problema 78.

465. Si in relationem propositam, ex qua trium variabilium x, y, z functionem v definiri oportet, aliae formulae differentiales non ingrediuntur, nisi quae ex variabilitate binarum x et y tantum nascuntur, tertio elemento ∂z penitus excluso, functionem v investigare.

Solutio.

Quoniam in aequationem resolvendam, qua relatio proposita continetur, quantitas z non ut variabilis ingreditur, quotcunque integrationes fuerint instituendae, in iis ita quantitas y tanquam esset constans tractari debet. Hujus ergo aequationis resolutio ad partem praecedentem est referenda, cum functio binarum tantum variabilium x et y ex formularum differentialium relatione data sit investiganda; quodsi itaque negotium successerit et integrale fuerit inventum, in eo totidem occurrent functiones arbitrariae unius variabilis certo modo ex x et y conflatae, quot integrationibus fuerit opus. Sit $\Gamma : t$ hujusmodi functio, ubi t per x et y dari assumitur: ac nunc ut ista solutio ad praesens institutum accommodetur, ubi quantitas z variabilibus annumeratur, loco cujusque functionis arbitrariae $\Gamma : t$ scribatur hic $\Gamma : (t$ et $z)$, functio scilicet duarum variabilium, sicque habebitur integrale completum.

Corollarium 1.

466. Si ergo haec proposita fuerit aequatio

$$\left(\frac{\partial\partial v}{\partial y^2}\right) = a\,a\left(\frac{\partial\partial v}{\partial x^2}\right),$$

quia in parte praecedente invenimus

$$v = \Gamma : (x + a\,y) + \Delta : (x - a\,y),$$

pro casu praesente, quo v debet esse functio trium variabilium x, y et z, integrale ita se habebit

$$v = \Gamma : (\overline{x + a\,y \text{ et } z}) + \Delta : (\overline{x - a\,y \text{ et } z}).$$

Corollarium 2.

467. Hic scilicet meminisse oportet, formam

$$\Gamma : (\overline{x + a\,y} \text{ et } z),$$

designare functionem quamcunque binarum variabilium, quarum altera sit $= x + a\,y$, altera vero $= z$; unde ipsam functionem per applicatam ad certam superficiem relatam repraesentare licebit.

Scholion.

468. Non solum autem aequationes in problemate descriptae ad partem praecedentem calculi integralis reducentur, sed etiam innumerabiles aliae, quae facta quadam substitutione ad eam formam revocantur. Veluti si in aequatione proposita aliae formulae differentiales non occurrant, nisi in quibus omnibus unica dimensio elementi ∂z reperitur, quae sunt

$$\left(\frac{\partial v}{\partial z}\right),\ \left(\frac{\partial\partial v}{\partial x\,\partial z}\right),\ \left(\frac{\partial\partial v}{\partial y\,\partial z}\right),\ \left(\frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial z}\right),\ \left(\frac{\partial^3 v}{\partial x \partial y \partial z}\right),\ \left(\frac{\partial^3 v}{\partial y^2 \partial z}\right),\ \text{etc.}$$

manifestum est posito $\left(\frac{\partial v}{\partial z}\right) = u$, aequationem illam in aliam transformari, ex qua jam functionem u investigari oporteat, eamque ad casum in problemate expositum referri. Quare si inde indoles functionis u definiri potuerit, ut sit $u = S$, restat ut haec aequatio $\left(\frac{\partial v}{\partial z}\right) = S$ resolvatur, unde ut ante vidimus, fit

$$v = \int S\,\partial z + \Gamma : (x \text{ et } y).$$

Hoc idem tenendum est, si aequatio proposita ope substitutionis

$$\left(\frac{\partial\partial v}{\partial z^2}\right) = u, \text{ vel } \left(\frac{\partial^3 v}{\partial z^3}\right) = u, \text{ etc.}$$

ad casum problematis reduci queat. Quin etiam per se est perspicuum, si ope transformationis cujuscunque aequatio proposita ad casum problematis reduci queat; tales autem transformationes supra plures exposui, dum vel loco functionis quaesitae v alia u introducitur ponendo $v = S\,u$, vel ipsae variabiles x, y et z in alias p, q, r mutantur, quae ad illas certam teneant rationem, quod negotium pro casu duarum variabilium supra fusius explicavi; hocque ita perspicuum est, ut similis reductio ad hunc casum trium variabilium facile accommodari queat. In sequentibus tamen forte ejusmodi transformationes occurrent; ad alios ergo casus, ubi omnis generis formulae differentiales occurrunt, progredior, vix ultra prima elementa rem producturus.