# CALCULI INTEGRALIS
## LIBER POSTERIOR.

---

## PARS ALTERA.

INVESTIGATIO FUNCTIONUM TRIUM VARIABILIUM EX DATA DIFFERENTIALIUM RELATIONE.

# CAPUT I.

## DE
## FORMULIS DIFFERENTIALIBUS FUNCTIONUM TRES VARIABILES INVOLVENTIUM.

### Problema 72.

430.

Si $v$ sit functio quaecunque trium quantitatum variabilium $x$, $y$ et $z$, ejus formulas differentiales primi gradus exhibere.

### Solutio.

Cum $v$ sit functio trium variabilium $x$, $y$ et $z$, si ea more solito differentietur, ejus differentiale in genere ita reperietur expressum

$$\partial v = p\,\partial x + q\,\partial y + r\,\partial z.$$

Tribus scilicet id constabit partibus, quarum prima $p\partial x$ seorsim invenitur, si in differentiatione sola quantitas $x$ ut variabilis tractetur, binis reliquis $y$ et $z$ ut constantibus spectatis. Simili modo pars secunda $q\partial y$ impetratur differentiatione functionis $v$ ita instituta, ut sola quantitas $y$ pro variabili, binae reliquae vero $x$ et $z$ pro constantibus habeantur, quod idem de parte tertia $r\partial z$ est tenendum, quae est differentiale ipsius $v$ variabilitatis solius quantitatis $z$ ratione habita. Hinc patet, quomodo per differentiationem quantitates istae $p$, $q$ et $r$ seorsim sint inveniendae, quas hic formulas differentiales primi gradus functionis $v$ appellabo, et ne novis litteris in calculum introducendis sit opus, eas naturae suae convenienter ita indicabo

$$p = \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right), \quad q = \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right), \quad r = \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right).$$

Quaelibet ergo functio $v$ trium variabilium $x$, $y$ et $z$ tres habet formulas differentiales primi gradus ita designandas

$$\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right), \quad \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right), \quad \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right),$$

in quarum qualibet unicae variabilis ratio habetur, dum binae reliquae ut constantes spectantur, et quoniam differentialia per divisionem tolluntur, hae formulae differentiales ad classem quantitatum finitarum sunt referendae.

### Corollarium 1.

431. Ex tribus formulis differentialibus functionis $v$ inventis ejus differentiale solito more sumtum ita constatur, ut sit

$$\partial v = \partial x \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right) + \partial y \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right) + \partial z \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right),$$

cujus ergo formae vicissim integrale est ipsa illa functio $v$, vel etiam eadem quantitate quacunque sive aucta sive minuta.

### Corollarium 2.

432. Si trium variabilium $x$, $y$ et $z$ functio $v$ fuerit data, ejus formulae differentiales singulae

$$\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right), \quad \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right), \quad \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right),$$

iterum erunt functiones certae earundem variabilium $x$, $y$ et $z$ per differentiationem facile inveniendae. Interim tamen evenire potest, ut una pluresve variabilium ex hujusmodi formulis differentialibus prorsus excedant.

### Scholion 1.

433. Nihil etiam impedit, quominus quantitas $v$ ut functio trium variabilium $x$, $y$ et $z$ spectari possit, etiamsi forte duas tantum involvat, dum scilicet ratio compositionis ita est comparata, ut tertia quasi casu excesserit; quod eo minus est mirandum, cum idem in functionibus tam unius quam duarum variabilium evenire possit. Quoniam enim functiones unius variabilis commodissime per applicatas cujuspiam lineae curvae repraesentari solent, siquidem pro curvae natura applicatae ejus ut certae functiones abscissae $x$ spectari possunt, casu quo linea curva abit in lineam rectam axi parallelam, etsi tum applicata quantitati constanti aequatur, propterea tamen ex illa idea generali, qua ut functio abscissae $x$ spectatur, neutiquam excluditur; neque enim si quaeratur, qualis sit functio $y$ ipsius $x$? incongrue is respondere est censendus, qui dicat hanc functionem $y$ aequari quantitati constanti. Quod deinde ad functiones binarum variabilium $x$ et $y$ attinet, quas semper per intervalla, quibus singula cujusdam superficiei puncta a quopiam plano distant, repraesentare licet, dum binae variabiles $x$ et $y$ in hoc plano accipiuntur, manifestum est utique superficiem ita comparatam esse posse, ut functio illa, vel per solam $x$, vel per solam $y$ determinetur. Quin etiam si superficies fuerit plana ipsique illi plano parallela, functio illa adeo abit in quantitatem constantem; neque propterea minus tanquam functio binarum variabilium considerari debebit. Quamobrem etiam quando tractatio circa functiones trium variabilium versatur, in eo genere etiam ejusmodi functiones, quae tantum vel per binas vel unicam trium variabilium $x$, $y$ et $z$ determinantur, vel adeo ipsae sunt quantitates constantes.

### Scholion 2.

434. In calculo differentiali jam est ostensum, functionum plures variabiles involventium differentialia inveniri, si unaquaeque variabilium seorsim, tanquam sola esset variabilis, spectetur, atque omnia differentialia inde nata in unam summam conjiciantur. Quodsi ergo differentiatio hoc modo instituatur, singulae istae operationes, deleto tantum differentiali, praebebunt formulas differentiales, quas his signis

$$\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right), \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right) \text{ et } \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)$$

indicamus: simulque intelligitur, quomodo etiam functionum quatuor pluresve variabiles involventium formulae differentiales sint inveniendae. Circa functiones autem trium variabilium $x$, $y$ et $z$ exempla aliquot subjungamus, quibus earum ternas formulas differentiales exhibebimus.

### Exemplum 1.

435. *Si functio trium variabilium sit*

$$v = \alpha x + \beta y + \gamma z,$$

*ejus formulae differentiales ita se habebunt.*

Cum per differentiationem prodeat

$$\partial v = \alpha \partial x + \beta \partial y + \gamma \partial z,$$

manifestum est fore

$$\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right) = \alpha, \ \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right) = \beta, \ \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right) = \gamma,$$

sicque omnes tres formulas differentiales esse constantes.

### Exemplum 2.

436. *Si functio trium variabilium sit*

$$v = x^{\lambda} y^{\mu} z^{\nu}$$

*ejus formulae differentiales ita se habebunt.*

Differentiatione more solito peracta fit

$$\partial v = \lambda x^{\lambda-1} y^{\mu} z^{\nu} \partial x + \mu x^{\lambda} y^{\mu-1} z^{\nu} \partial y + \nu x^{\lambda} y^{\mu} z^{\nu-1} \partial z,$$

unde perspicuum est fore formulas differentiales

$$\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right) = \lambda x^{\lambda-1} y^{\mu} z^{\nu},\ \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right) = \mu x^{\lambda} y^{\mu-1} z^{\nu},\ \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right) = \nu x^{\lambda} y^{\mu} z^{\nu-1},$$

quae ergo singulae sunt novae functiones omnium trium variabilium $x, y, z$, nisi exponentes $\lambda, \mu, \nu$ sint vel nihilo vel unitati aequales.

## Exemplum 3.

437. *Si functio $v$ duas tantum involvat variabiles $x$ et $y$, tertia $z$ in ejus compositionem non ingrediente, formulae differentiales ita habebunt.*

Quia functio $v$ duas tantum variabiles $x$ et $y$ implicat, ejus differentiale hujusmodi formam induet

$$\partial v = p \partial x + q \partial y + 0 \partial z,$$

tertia scilicet parte ex variabilitate ipsius $z$ orta evanescente, unde habebimus

$$\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right) = p,\ \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right) = q,\ \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right) = 0.$$

## Corollarium.

438. Hinc ergo vicissim patet, si fuerit $\left(\frac{\partial v}{\partial z}\right) = 0$, tum fore $v$ functionem quamcunque binarum variabilium $x$ et $y$, quam in posterum ita indicabimus $v = \Gamma:(x, y)$, denotante $\Gamma:(x, y)$ functionem quamcunque binarum variabilium $x$ et $y$.

## Scholion.

439. Mox ostendemus, quando functio trium variabilium ex data quadam relatione seu conditione formularum differentialium

investiganda, proponitur, qualibet integratione introduci functionem quamcunque arbitrariam binarium variabilium, atque adeo in hoc consistere criterium, quo haec pars culculi integralis a praecedentibus distinguitur. Quemadmodum enim, dum natura functionum unicae variabilis ex data differentialium conditione investigatur, in quo universus liber primus est occupatus, per quamlibet integrationem quantitas constans arbitraria in calculum invehitur, ita in parte praecedente hujus secundi libri vidimus, si functiones binarum variabilium ex data formularum differentialium relatione investigari debeant, tum ad essentiam hujus tractationis id pertinere, quod qualibet integratione non quantitas constans sed adeo functio unius variabilis prorsus arbitraria in calculum introducatur; etsi enim plerumque hae functiones veluti $\Gamma : (\alpha x + \beta y)$ ambas variabiles $x$ et $y$ implicabant, tamen ibi tota quantitas $\alpha x + \beta y$ ut unica spectatur, cujus functionem quamcunque illa formula $\Gamma : (\alpha x + \beta y)$ denotat. Nunc igitur, ubi de functionibus trium variabilium agitur, probe notandum est, qualibet integratione functionem arbitrariam duarum adeo variabilium in calculum introduci: ex quo simul indolem integrationum, quae circa functiones plurium variabilium versantur, colligere licet.

## Problema 62.

440. Si sit $v$ functio quaecunque trium variabilium $x$, $y$ et $z$, ejus formulas differentiales secundi altiorumque graduum exhibere.

### Solutio.

Cum ejus formulae differentiales primi gradus sint tres

$$\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right), \quad \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right), \quad \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right),$$

quaelibet instar novae functionis considerata iterum tres suppeditabit formulas differentiales, quae autem ob

$$\left(\frac{\partial\partial v}{\partial x\partial y}\right) = \left(\frac{\partial\partial v}{\partial y\partial x}\right)$$

reducentur ad sex sequentes

$$\left(\frac{\partial\partial v}{\partial x^2}\right), \quad \left(\frac{\partial\partial v}{\partial y^2}\right), \quad \left(\frac{\partial\partial v}{\partial z^2}\right), \quad \left(\frac{\partial\partial v}{\partial x\partial y}\right), \quad \left(\frac{\partial\partial v}{\partial y\partial z}\right), \quad \left(\frac{\partial\partial v}{\partial x\partial z}\right);$$

ex quarum denominatoribus intelligitur, quaenam trium quantitatum $x$, $y$, $z$ in utraque differentiatione pro sola variabili haberi debeat. Simili modo evidens est formulas differentiales tertii gradus dari decem sequentes

$$\left(\frac{\partial^3 v}{\partial x^3}\right), \quad \left(\frac{\partial^3 v}{\partial x^2\partial y}\right), \quad \left(\frac{\partial^3 v}{\partial x\partial y^2}\right),$$
$$\left(\frac{\partial^3 v}{\partial y^3}\right), \quad \left(\frac{\partial^3 v}{\partial y^2\partial z}\right), \quad \left(\frac{\partial^3 v}{\partial y\partial z^2}\right), \quad \left(\frac{\partial^3 v}{\partial x\partial y\partial z}\right),$$
$$\left(\frac{\partial^3 v}{\partial z^3}\right), \quad \left(\frac{\partial^3 v}{\partial z^2\partial x}\right), \quad \left(\frac{\partial^3 v}{\partial z\partial x^2}\right).$$

Formularum porro differentialium quarti gradus numerus est 15, quinti 21 etc. secundum numeros triangulares; simulque ex cujusque forma perspicuum est, quomodo ejus valor ex data functione $v$ per repetitam differentiationem, in qualibet unicam variabilem considerando, elici debeat.

### Corollarium 1.

441. En ergo omnes formulas differentiales cujusque gradus, quas ex qualibet functione trium variabilium derivare licet per differentiationem, quae porro ut functiones trium variabilium spectari possunt.

442. Quemadmodum ergo ex hujusmodi functione data omnes ejus formulae differentiales ope calculi differentialis inveniuntur, ita vicissim ex data quapiam, formula differentiali, vel duarum pluriumve relatione quadam, ope calculi integralis ipsa illa functio, unde eae nascuntur, investigari debet.

### Scholion 1.

443. In calculo quidem differentiali parum refert, utrum functio differentianda unam pluresve variabiles involvat, cum praecepta differentiandi pro quovis variabilium numero maneant eadem; quam ob causam etiam calculum differentialem secundum hanc functionum varietatem in diversas partes distingui non erat opus. Longe secus autem accidit in calculo integrali, quem secundum hanc functionum varietatem omnino in partes dividi necesse est, quippe quae partes tam ratione propriae indolis quam ratione praeceptorum maxime inter se discrepant. Quemadmodum igitur hanc partem circa functiones trium variabilium occupatam tractari conveniat, exponendum videtur. Ac primo quidem ii casus commodissime evolventur, quibus unius cujusdam formulae differentialis valor datur, ex quo indolem functionis quaesitae definiri oporteat, quoniam haec investigatio nulla laborat difficultate. Deinde hujusmodi quaestiones aggrediar, quibus relatio quaepiam inter duas pluresve formulas differentiales proponitur: ubi quidem plurimum refert, cujusnam gradus eae fuerint, siquidem ex primo gradu plures casus expedire licet, dum ex altioribus vix adhuc quicquam in medium afferri potest: hunc ergo ordinem in ista tractatione observabo.

### Scholion 2.

444. Videri hic posset, ad functiones trium variabilium definiendas, duas adeo conditiones seu relationes inter formulas differentiales admitti posse, neque unica praescripta quaestionem esse determinatam. Quodsi enim ponatur

$$\partial v = p\partial x + q\partial y + r\partial z,$$

ubi litterae $p$, $q$, $r$ vicem gerunt formularum differentialium primi gradus, atque verbi gratia hae duae proponantur conditiones, ut sit

$$q = p \text{ et } r = p,$$

ac propterea

$$\partial v = p\,(\partial x + \partial y + \partial z),$$

manifestum est solutionem dari posse scilicet

$$v = \Gamma : (x + y + z).$$

Verum ad hanc objectionem respondeo, in hoc exemplo casu evenire, ut binae conditiones simul consistere possint, altera enim parumper immutata, ut manente $q = p$ esse debeat $r = px$, ideoque

$$\partial v = p\,(\partial x + \partial y + x\partial z),$$

perspicuum est, nullum pro $p$ valorem exhiberi posse, per quem formula differentialis

$$\partial x + \partial y + x\partial z$$

multiplicata integrabilis reddatur, quod unicum exemplum sufficit ad demonstrandum, duabus conditionibus praescribendis hujusmodi quaestiones evadere plusquam determinatas, neque propterea solutionem admittere nisi certis casibus, quibus quasi altera conditio jam in altera involvitur. Quocirca semper unica relatio inter formulas differentiales proposito omnino sufficit problemati determinando, quod idcirco, quia per integrationem functio arbitraria indefinita ingreditur, aeque parum pro indeterminato est habendum ac problemata calculi integralis communis, quorum solutio constantem arbitrariam introducit.